ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ТОПОЛОГИИ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА ГРАФАХ КЭЛИ

А.А. Кузнецов, А.С. Кузнецова

Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М.Ф. Решетнева

Определение графа Кэли было дано известным английским математиком Артуром Кэли в XIX веке для представления алгебраической группы, заданной фиксированным множеством порождающих элементов.

В последние десятилетия теория графов Кэли развивается как отдельная большая ветвь теории графов. Графы Кэли находят применение как в математике, так и за ее пределами. Заметим, что известная задача по определению так называемого «числа Бога» кубика Рубика 3×3, т.е. минимального количества поворотов граней кубика, за которое его можно «собрать» из любого начального положения, сводится к исследованию соответствующего графа Кэли.

Неожиданное применение графы Кэли нашли в информационных технологиях после пионерской работы 1986 года С. Эйкерса и Б. Кришнамурти [1], которые впервые предложили применять указанные графы для представления компьютерных сетей, в том числе для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем (МВС) – суперкомпьютеров. С тех пор данное направление активно развивается. Это связано с тем, что графы Кэли имеют много привлекательных свойств, из которых выделим их регулярность, вершинную транзитивность, малые диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Кстати, такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор» являются графами Кэли.

Вычисление диаметра графа Кэли большой конечной группы является хотя и разрешимой, но весьма сложной проблемой. Это связано с тем, что в общем случае задача по определению минимального слова в группе, как показали С. Ивен и О. Голдрейх в 1981 году [2], является NP-трудной. Так, при вычислении в 2010 году упомянутого выше «числа Бога», которое равно диаметру соответствующего графа Кэли, Т. Рокики, Г. Коцемба, М. Дэвидсон и Д. Детридж доказали, что любая конфигурация кубика Рубика может быть решена не более чем в 20 ходов. Для установления данного факта потребовалось около 35 «процессоро-лет» распределенных вычислений. Поэтому для эффективного решения задач на графах Кэли, имеющих большое количество вершин, необходимо применять МВС.

Как было сказано, одной из широкоприменяемых топологий МВС является k-мерный гиперкуб. Данный граф задается k-порожденной бернсайдовой группой периода 2 – $B(k,2)$. $B(k,2)$ имеет простую структуру и равна прямому произведению k экземпляров циклической группы порядка 2.

Обобщением гиперкуба является n-мерный тор, который порождается прямым произведением n экземпляров циклических подгрупп, порядки которых могут не совпадать.

В настоящей работе проведены исследования по определению структуры графов Кэли групп $B(k,4)$ – бернсайдовых k-порожденных групп периода 4 (а также их факторгрупп) для сравнения с гиперкубами и торами соответствующей размерности.

Строение групп $B(k,4)$ известно [3], однако характеристики графов Кэли указанных групп до настоящего времени изучены не были. Отметим также, что в работе [4] были исследованы графы Кэли групп $B(k,3)$, т.е. групп периода 3, а также проведен сравнительный анализ данных графов с гиперкубами.

Определение. *Пусть X – порождающее множество группы G, т.е.* $G = \langle X \rangle$. *Графом Кэли* $\Gamma = Cay(G, X) = (V, E)$ *называют ориентированный граф, обладающий следующими свойствами:*

(*i*) *множество вершин V*(Г) *соответствуют элементам группы G,*

(*ii*) *множество ребер E*(Г) *состоит из всех упорядоченных пар* (g, xg)*, где* $g \in G$ *и* $x \in X$.

В дальнейшем будем считать порождающее множество X симметричным и свободным от единичного элемента группы, т. е. $x \in X \Rightarrow x^{-1} \in X$ и $e \notin X$. Поскольку X является свободным от единичного элемента, то граф Г не содержит петель. Симметричность порождающего множества означает, что граф будет неориентированным и без кратных ребер, т.е. если в графе имеется ребро из g в xg, то оно совпадает с ребром из xg в $x^{-1}(xg) = g$.

Таким образом,

$\Gamma = Cay(G, X) = (V, E)$, где $V = G$ и $E = \{\{g, xg\} | g \in G, x \in X\}$.

Количество вершин $|V|$ равно порядку группы G. Граф Кэли является регулярным, и его степень s, т.е. количество ребер, выходящее из каждой вершины, равно числу порождающих элементов группы: $s = |X|$. Диаметр графа Кэли D (средний диметр d), т.е. максимальное (среднее) кратчайшее расстояние от произвольной фиксированной вершины до других вершин графа, равен максимальной (средней) длине минимальных слов группы, записанных через порождающие элементы [5].

При рассмотрении графа в качестве топологии МВС берут во внимание следующие характеристики графа: количество вершин, степень (для регулярного графа), диаметр и средний диаметр. В табл. 1 приведены указанные характеристики для графов Кэли групп $B(k,4)$ и некоторых их факторов при $2 \le k \le 5$. Вычисления были проведены по алгоритму из [5]. Порождающие множества были взяты симметричными, поскольку в этом случае графы будут неориентированными. Именно неориентированные графы, как правило, используют при проектировании топологий МВС.

$\lvert V\rvert$	s	D	d
2^4	4	4	2
2^5	4	4	2,5
2^6	4	6	3,4
2^7	4	8	4,1
2^8	4	8	5,2

$\lvert V\rvert$	s	D	d
2^9	4	10	5,9
2^9	6	6	4,2
2^{10}	6	8	4,9
2^{11}	6	10	5,6
2^{12}	6	10	6,3

$\lvert V\rvert$	s	D	d
2^{13}	6	10	6,8
2^{14}	6	11	7,4
2^{14}	8	8	6,0
2^{15}	8	10	6,6
2^{16}	8	12	7,3

$\lvert V\rvert$	s	D	d
2^{17}	8	12	7,9
2^{18}	8	12	8,5
2^{19}	8	12	8,8
2^{20}	8	14	9,3
2^{20}	10	10	7,9

Таблица 1. Характеристики графов Кэли групп $B(k,4)$ и некоторых их факторгрупп.

Рассмотрим более подробно графы Кэли с числом элементов 2^5, 2^{10}, 2^{15} и 2^{20}. В табл. 2-5 приведено распределение количества вершин, удаленных от произвольно выбранной вершины (в силу симметричности графа) на фиксированное расстояние.

Таблица 2. Граф с числом вершин 2^5.

Расстояние от вершины	0	1	2	3	4
Количество вершин	1	4	10	12	5

Таблица 3. Граф с числом вершин 2^{10}.

Расстояние от вершины	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество вершин	1	6	27	90	237	330	235	86	12

Таблица 4. Граф с числом вершин 2^{15}.

Расстояние от вершины	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество вершин	1	8	52	270	1180	3838	9114	10426	5811	1842	226

Таблица 5. Граф с числом вершин 2^{20}.

Расстояние от вершины	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество вершин	1	10	85	600	3650	17980	71090	206680	421245	299018	28217

Теперь сравним полученные характеристики графов Кэли групп $B(k,4)$ с соответствующими характеристиками гиперкубов и торов.

Будем считать, что топология Γ_1 предпочтительнее Γ_2, если $|V_1|=|V_2|$, но $s_1 < s_2$, $D_1 < D_2$ и $d_1 < d_2$.

Граф k-мерного гиперкуба имеет 2^k вершин, его степень и диаметр равны k, средний диаметр равен $\frac{k}{2}$.

Легко заметить, что графы $B(k,4)$ обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы.

Также нетрудно увидеть, что графы $B(k,4)$ будут иметь лучшие значения указанных параметров в сравнении с n-мерными торами. Напомним, что топология n-мерный тор является графом Кэли, который порождается прямым произведением n экземпляров циклических подгрупп

$$Z_{p_1} \times Z_{p_2} \times \cdots \times Z_{p_n}.$$

Данный граф имеет следующие характеристики:

$$|V| = \prod_{i=1}^{n} p_i,\quad s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ \text{где}\ \alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i = 2, \\ 2, & \text{если } p_i > 2. \end{cases}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i,\ \text{где}\ D_i = \begin{cases} \dfrac{p_i}{2}, & \text{если } p_i \text{ чётное}, \\ \dfrac{p_i - 1}{2}, & \text{если } p_i \text{ нечётное}. \end{cases}$$

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i,\ \text{где}\ d_i = \begin{cases} \dfrac{D_i}{2}, & \text{если } p_i \text{ чётное}, \\ \dfrac{D_i}{2}\left(1 + \dfrac{1}{p_i}\right), & \text{если } p_i \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что графы $B(k,4)$ заслуживают внимания при проектировании перспективных топологий МВС.

Работа поддержана грантом Президента РФ (проект МД-3952.2015.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks // Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, 1986. P. 216-223.
2. Even S., Goldreich O. The Minimum Length Generator Sequence is NP-Hard // Journal of Algorithms, № 2, 1981. P. 311-313.
3. Vaughan-Lee M. The restricted Burnside problem. Oxford: Clarendon Press, 1990. 209 p.
4. Кузнецов А.А. Графы Кэли бернсайдовых групп периода 3 // Сибирские электронные математические известия, Т. 12, 2015. С. 248-254.
5. Кузнецов А.А., Кузнецова А.С. Параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок // Вестник СибГАУ, №1, 2014. С. 34-39.