

НАВИГАЦИЯ В ДАЛЬНЕМ КОСМОСЕ

AMADEOS 2021-09-08

Михаил Захваткин
(zmaxus@gmail.com)

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ НАВИГАЦИИ И СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТЫ

ТРАЕКТОРИЯ И ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Движение объекта описывается уравнениями движения:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Конкретная траектория, удовлетворяющая уравнениям движения, определяется некоторым вектором уточняемых параметров $\mathbf{Q}$

$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Q}, t)$ где, например, $\mathbf{Q} = \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$.

При этом информация о фактическом движении КА содержится в измерениях

$$\mathbf{Y}_i^o = \mathbf{Y}_i^c(\mathbf{X}(\mathbf{Q}, t), t_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i,$$

функция $\mathbf{Y}_i^c(\dots)$ описывает модель измерения, величина $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ — случайная величина (случайный вектор) ошибки измерения.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Цель решения навигационной задачи состоит в поиске такого вектора параметров $\mathbf{Q}$, который бы обеспечивал "наилучшее согласование" измерений, то есть минимизировал бы невязки

$$\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{Y}_i^c(\mathbf{X}(\mathbf{Q}, t), t_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad \sum_i |\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{Y}_i^c| \rightarrow \min?$$

Рассмотрим разность двух близких траекторий $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)$. Их разность удовлетворяет линейной системе:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right]$$

А невязки измерений $\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{H}}(t_i)\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$, где $\tilde{\mathbf{H}}(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{Y}^c}{\partial \mathbf{X}} \right]$ или для всех измерений

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Функционал

$$\mathcal{F} = \varepsilon^\top \varepsilon \rightarrow \min,$$

Минимизирующая оценка

$$\tilde{\mathbf{x}} = (H^\top H)^{-1} H^\top \mathbf{y},$$

$$\mathbf{C}_x = (H^\top H)^{-1}.$$

Функционал (вес W)

$$\mathcal{F} = \varepsilon^\top W \varepsilon \rightarrow \min,$$

Минимизирующая оценка

$$\tilde{\mathbf{x}}^* = (H^\top W H)^{-1} H^\top W \mathbf{y},$$

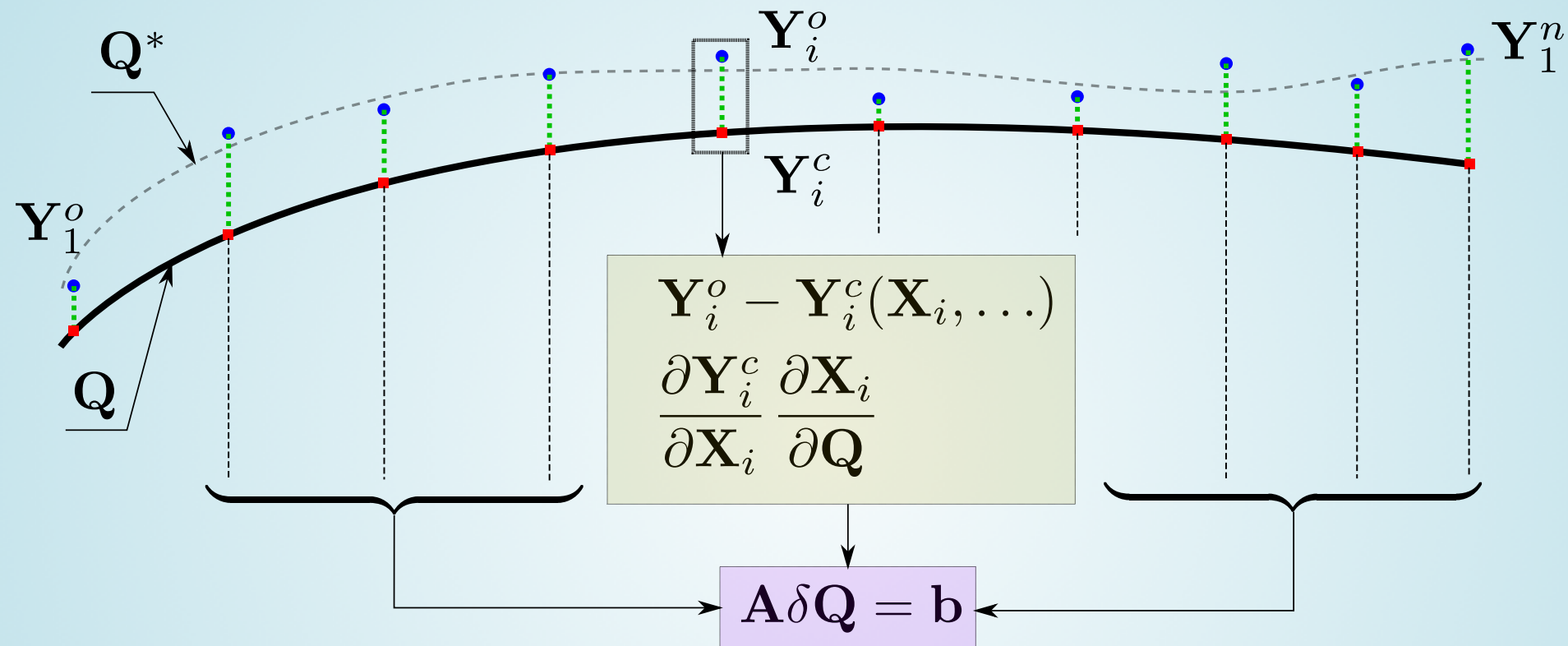
$$\mathbf{C}_x = (H^\top W H)^{-1}.$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^* \text{ - оптимальная, если}$$
$$W = \mathbf{C}^{-1} = \left(E(\varepsilon \varepsilon^\top) \right)^{-1}.$$

МЕТОДЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ

- Пакетная обработка (МНК)
 - Сложнее в вычислениях,
 - Учет ошибок модели ограничен.
- Последовательная обработка (фильтрация)
 - Трудности отбраковки измерений.
 - Особенности численной реализации.
 - Хуже прогноз на протяженные интервалы.

ПАКЕТНАЯ ОБРАБОТКА



Разделение уточняемых параметров на динамические и кинематические

$$Q = \{Q_d, Q_k\}, \quad \frac{\partial X}{\partial Q_k} \equiv 0$$

Функционал: $\mathcal{F} = (\mathbf{Y}^o - \mathbf{Y}^c(\mathbf{Q}))^\top \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{Y}^o - \mathbf{Y}^c(\mathbf{Q})) \xrightarrow{\mathbf{Q}} \min$

Если вектор измерительной информации $\mathbf{Y}$ состоит из независимых измерений $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n\}$, то

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{Y}_i^c(\mathbf{Q}))^\top \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{Y}_i^c(\mathbf{Q}))$$

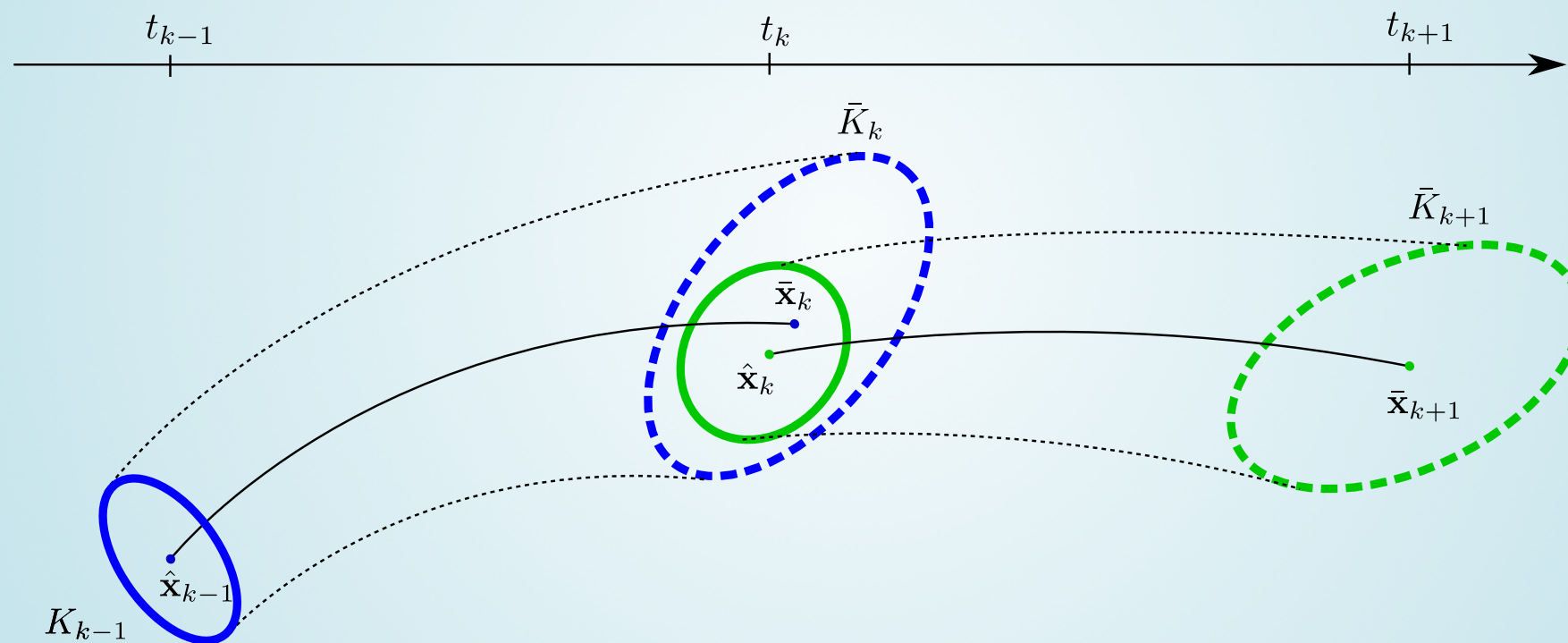
Поправка к текущему вектору параметров ищется путем решения **системы нормальных уравнений**

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{Q} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{Q}_k + \delta \mathbf{Q}(\mathbf{A}(\mathbf{Q}_k), \mathbf{b}(\mathbf{Q}_k))$$

где (с учетом $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{P}_i = \mathbf{C}_i^{-1}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial \mathbf{Y}^c}{\partial \mathbf{Q}} \right)^\top \mathbf{P} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}^c}{\partial \mathbf{Q}} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_i^c}{\partial \mathbf{Q}} \right)^\top \mathbf{P}_i \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_i^c}{\partial \mathbf{Q}} \right) \\ \mathbf{b} &= \left(\frac{\partial \mathbf{Y}^c}{\partial \mathbf{Q}} \right)^\top \mathbf{P} (\mathbf{Y}^o - \mathbf{Y}^c) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_i^c}{\partial \mathbf{Q}} \right)^\top \mathbf{P}_i (\mathbf{Y}_i^o - \mathbf{Y}_i^c) \end{aligned}$$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА



Прогноз текущего состояния
 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_k$ и его ковариационной
матрицы $K_{k-1} \rightarrow \bar{K}_k$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k &= \Phi(t_k, t_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \\ \bar{K}_k &= \Phi(t_k, t_{k-1})K_{k-1}\Phi(t_k, t_{k-1})^\top.\end{aligned}$$

$\Phi(t_k, t_{k-1})$ — фундаментальная
матрица линейной системы
 $\dot{\mathbf{x}} = [\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}] \cdot \mathbf{x}$

Уточнение нового состояния
 $\bar{\mathbf{x}}_k \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_k$ и новой ковариационной
матрицы $\bar{K}_k \rightarrow K_k$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}_k + \alpha_k(\mathbf{y}_k - \tilde{H}_k\bar{\mathbf{x}}_k), \\ K_k &= (E - \alpha_k\tilde{H}_k)\bar{K}_k.\end{aligned}$$

Коэффициенты усиления $\alpha_k = \bar{K}_k\tilde{H}_k^\top(\tilde{H}_k\bar{K}_k\tilde{H}_k^\top + R_k)^{-1}$ где

- Невязка $\mathbf{y}_k = \mathbf{Y}_k^o - \mathbf{Y}_k^c(\mathbf{X}_k, \dots)$,
- Частные производные измерения по состоянию $\tilde{H}_k = \frac{\partial \mathbf{Y}_k^c(\mathbf{X}_k, \dots)}{\partial \mathbf{X}_k}$,
- R_k — ковариационная матрица ошибок измерения.

ПРОГНОЗ СОСТОЯНИЯ И ПРОИЗВОДНЫХ

Уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \dots)$$

Уравнения в вариациях:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Q}} \right] = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{Q}), \dots)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial \mathbf{F}(\dots, \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}$$

Общая СДУ:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \dots), \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right] &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1} \right] &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_1}, \\ &\dots \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m} \right] &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_m}, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_m} \right] &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_m} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_m}.\end{aligned}$$

Решается относительно вектора $\mathbf{Z} = \{ \mathbf{X}, \partial \mathbf{X} / \partial q_1, \dots, \partial \mathbf{X} / \partial q_m \}$.

Начальные условия интегрирования при условии, что $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{Q}$

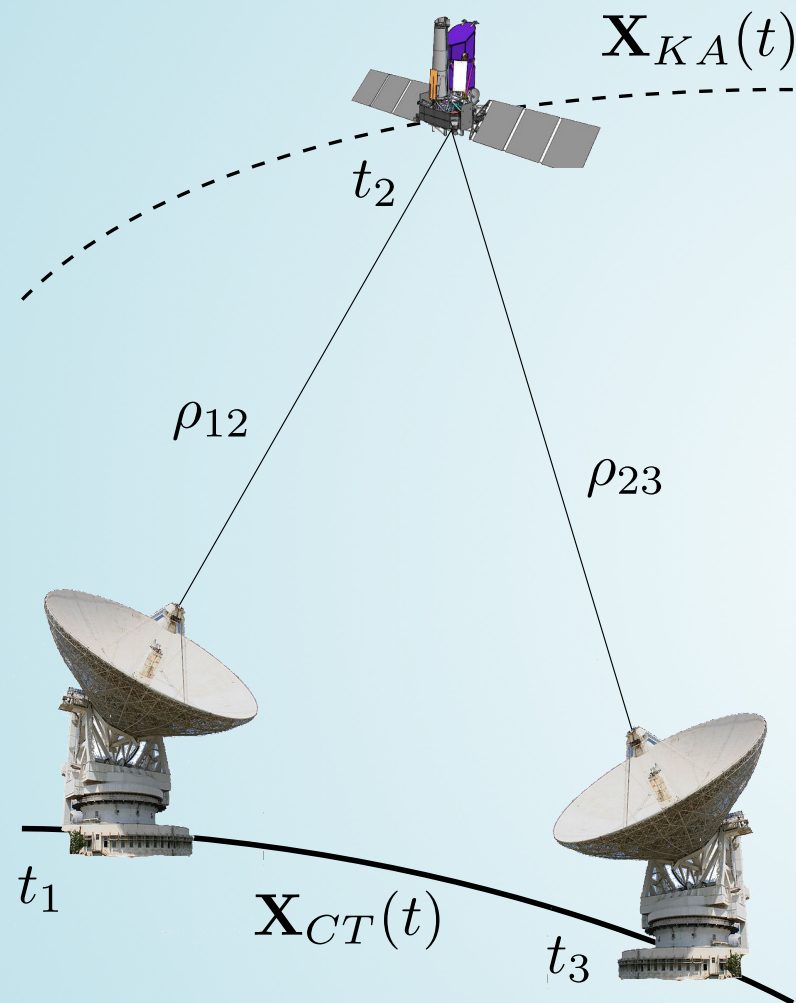
$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \right|_{t_0} = E_{6 \times 6}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q_j} \right|_{t_0} = 0, \quad q_j \notin \mathbf{X}_0.$$

ТРАДИЦИОННЫЕ СПОСОБЫ НАВИГАЦИИ В ДАЛЬНЕМ КОСМОСЕ

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

- Наклонная дальность (групповое запаздывание сигнала)
- Радиальная скорость (доплеровское смещение несущей частоты)

НАКЛОННАЯ ДАЛЬНОСТЬ



Корреляция двух дальномерных сигналов (принятого с борта КА и наземной копии) → запаздывание.

Расчетное значение измерения (для когерентных измерений)

$$D = \frac{c}{2} \cdot (\rho_{12} + \rho_{23}).$$

Частные производные

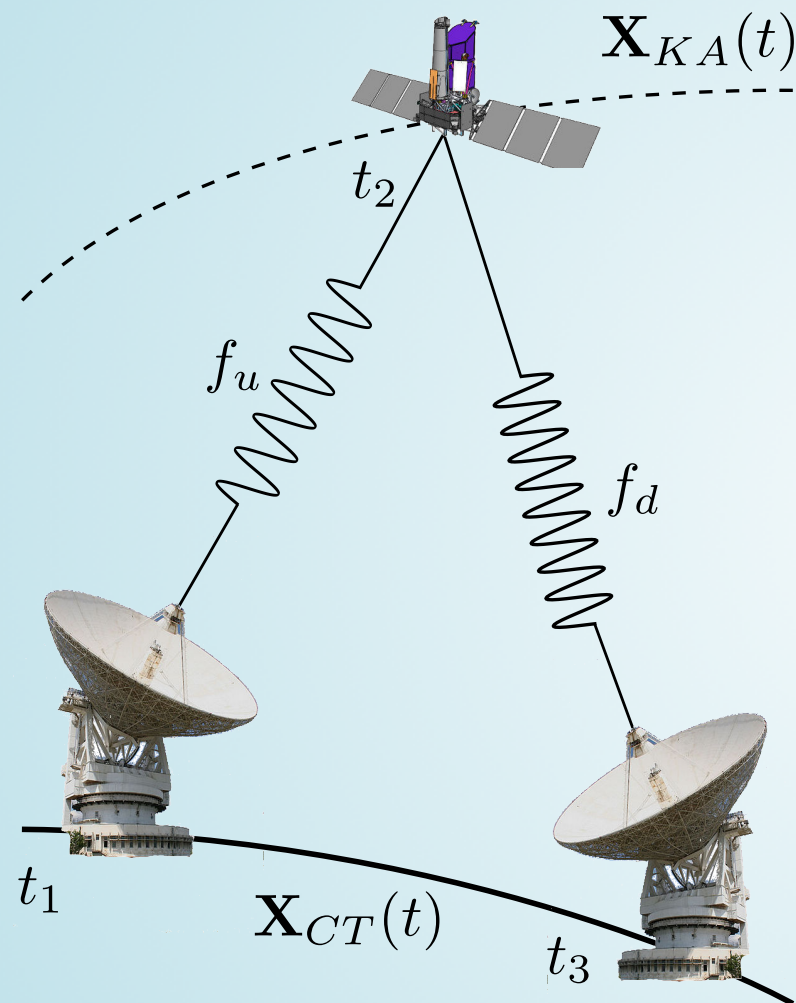
$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{D} + \frac{\mathbf{r}_{32}}{D} \right)^T$$

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{v}} \approx 0$$

Особенности радиотехнических измерений дальности

- Точность может достигать 1 м для когерентных измерений (2-way)
- Наличие неоднозначности, существенно при *плохом* начальном приближении орбиты.
- Помимо геометрии расположения станции и КА на запаздывание влияет:
 - тропосфера и ионосфера Земли
 - искривление в гравитационном поле
 - задержки в аппаратуре
 - положение фазовых центров антенн КА и станции.
- Сложно избавиться от систематических ошибок, необходимо вводить дополнительные параметры $\{D_1^0, \dots, D_k^0\} \in \mathbf{Q}$ для сеансов измерений даже для когерентного случая.
- При некогерентных измерениях (1-way, 3-way) систематические ошибки, обусловленные разностью хода стандартов частоты, превалируют.

РАДИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ



Измерение частоты принятого сигнала f_d и знание частоты переданного сигнала f_u позволяют по доплеровскому смещению оценить проекцию скорости КА (в действительности — скорость изменения дальности до КА).

$$\dot{D} = \frac{D(t_3) - D(t_3 - \Delta T)}{\Delta T} = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{\bar{f}}{\kappa} \right)$$

- ΔT — интервал накопления ($\bar{f}_d = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_3 - \Delta T}^{t_3} f_d dt$).
- κ — коэффициент преобразования частоты на борту КА (например, $\kappa = \frac{880}{749}$ для X-диапазона).

Упрощенное представление радиальной скорости:

$$\dot{D} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{v}_{12}^T \mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{v}_{32}^T \mathbf{r}_{32}}{r_{32}} \right]$$

Частные производные:

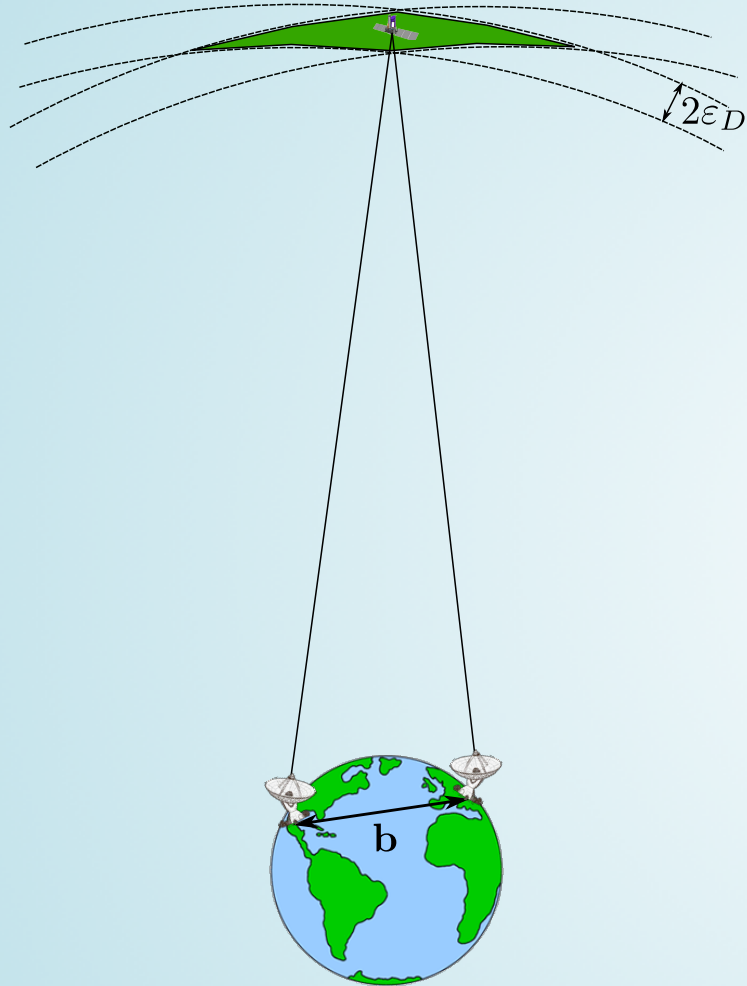
$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial \mathbf{r}} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{v}_{12}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{v}_{32}}{r_{32}} - \dot{D} \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^2} + \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^2} \right) \right]^T,$$

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial \mathbf{v}} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}} \right]^T.$$

Особенности измерений радиальной скорости

- Точность может быть лучше 0.01 мм/с (для $\Delta T = 60$ сек).
- Для когерентных измерений (2-way) систематические ошибки сведены к минимуму.
- Для некогерентных измерений (1-way, 3-way) разность ходов участвующих стандартов частоты необходимо уточнять вместе с другими параметрами задачи $\Delta f_{frac} \in \mathbb{Q}$.
- Измерения имеют низкую информативность на участках траектории со слабой динамикой.
- Измерения могут быть получены в течение всего сеанса связи.
- Построение точного расчетного значения требует учета:
 - Изменения пути прохождения луча в атмосфере и ионосфере Земли.
 - Движения фазовых центров антенн относительно опорных точек.

РСДБ ИЗМЕРЕНИЯ



Недостатки стандартных радиотехнических измерений:

Дальность

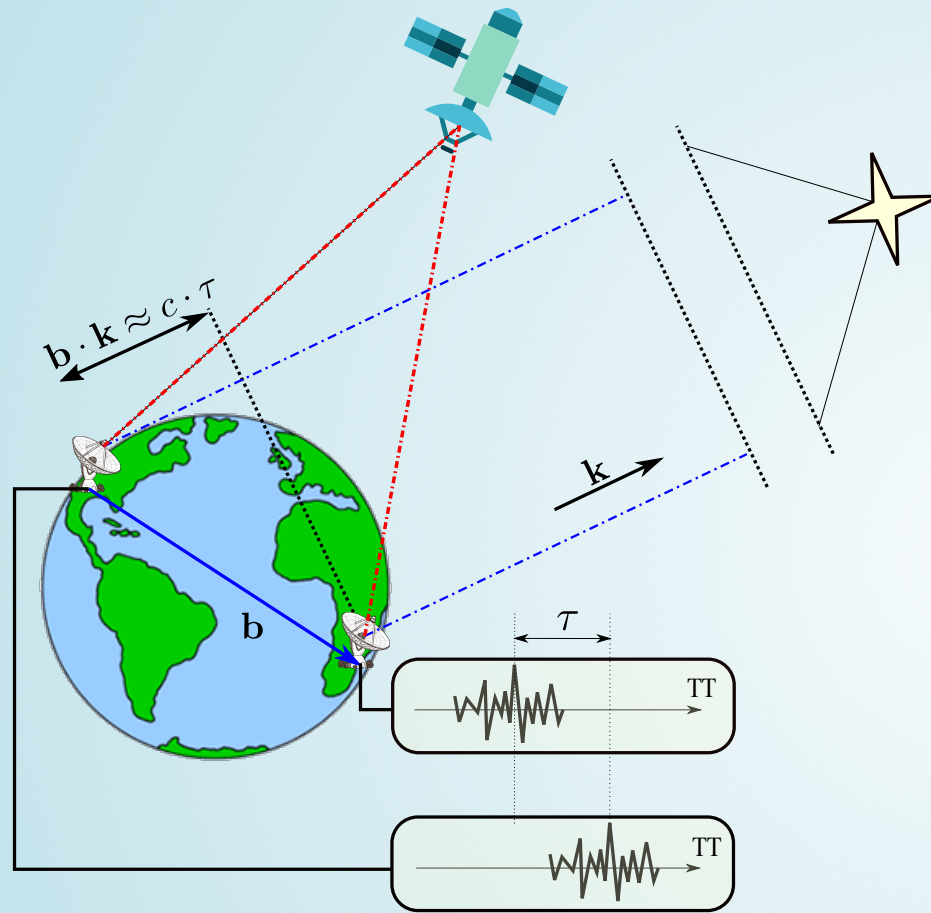
невысокое угловое разрешение: $\sim 0.5 \text{ arcsec}$ при разнесении на $|\mathbf{b}| = 12 \text{ тыс. км.}$

Скорость

наблюдения КА вдали от гравитирующих тел требуют длительных сеансов наблюдений (**6+ часов**)

Точность определения углового положения КА может быть повышена при помощи РСДБ (VLBI) наблюдений.

ЗАПАЗДЫВАНИЯ



Запаздывание от объекта с положением $\mathbf{R}$ до станций с положениями $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ в соответствующие моменты приема сигнала (в барицентрической СК)

$$\tau = \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|}{c} + \Delta\tau_2 - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|}{c} - \Delta\tau_1$$

$$\tau \approx \frac{1}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{k},$$

Добавки $\Delta\tau_{1,2}$ включают:

- задержки в приемной аппаратуре;
- преобразование между системами времени;
- синхронизация станций с рабочей шкалой $\sim$ TT;
- прохождение через атмосферу, ионосферу Земли и солнечную плазму.

Частные производные запаздывания:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{R}} \approx \frac{\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{cD} = \frac{\mathbf{b}_\perp}{cD}$$

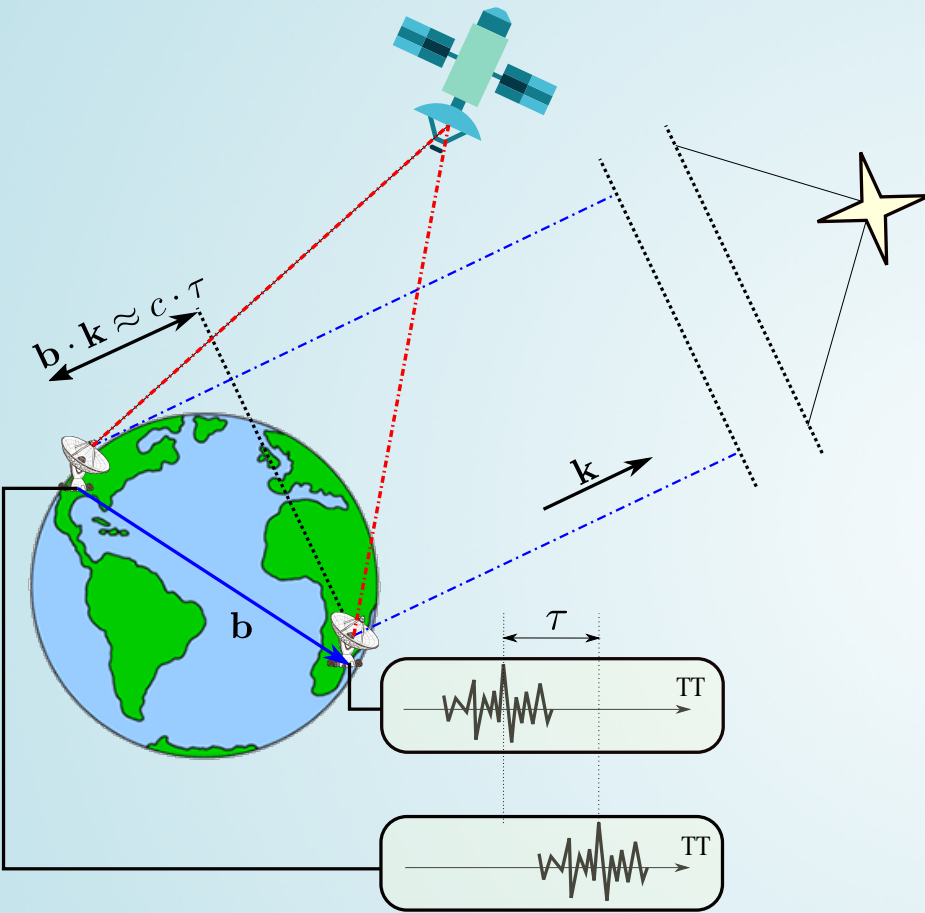
$\mathbf{k}$ — единичный вектор направления на объект в геоцентрической СК (с учетом аберрации),

$\mathbf{b}_\perp$ — проекция базовой линии на плоскость визирования объекта. Чем больше проекция, тем точнее измерения.

Особенности интерферометрических измерений

- Наличие специального маяка на борту КА желательно, но не обязательно (вопрос разрешения неоднозначности и бюджета радиолинии).
- Основные систематические ошибки единичного РСДБ наблюдения связаны с рассинхронизацией часов станций.
- Достижения максимальной точности все запаздывания, не связанные с геометрией КА и станций должны быть откалиброваны или исключены методологически (Δ DOR)
- Точности определение запаздывания лучше 0.5 нс (лучше 10 нрад / 0.5 миллисекунд дуги).
- Разностные измерения могут проводиться также относительно скорости.

DELTA-DOR



Последовательные сеансы наблюдений КА и квазара (Q) вблизи углового положения КА позволяют сформировать измерение, практически свободное от ошибок синхронизации часов станций.

Для серии сканов Q-KA-Q

Цель	Запаздывание	Время
Q	τ_1	t_1
КА	τ_2	t_2
Q	τ_3	t_3

Измеренное значение:

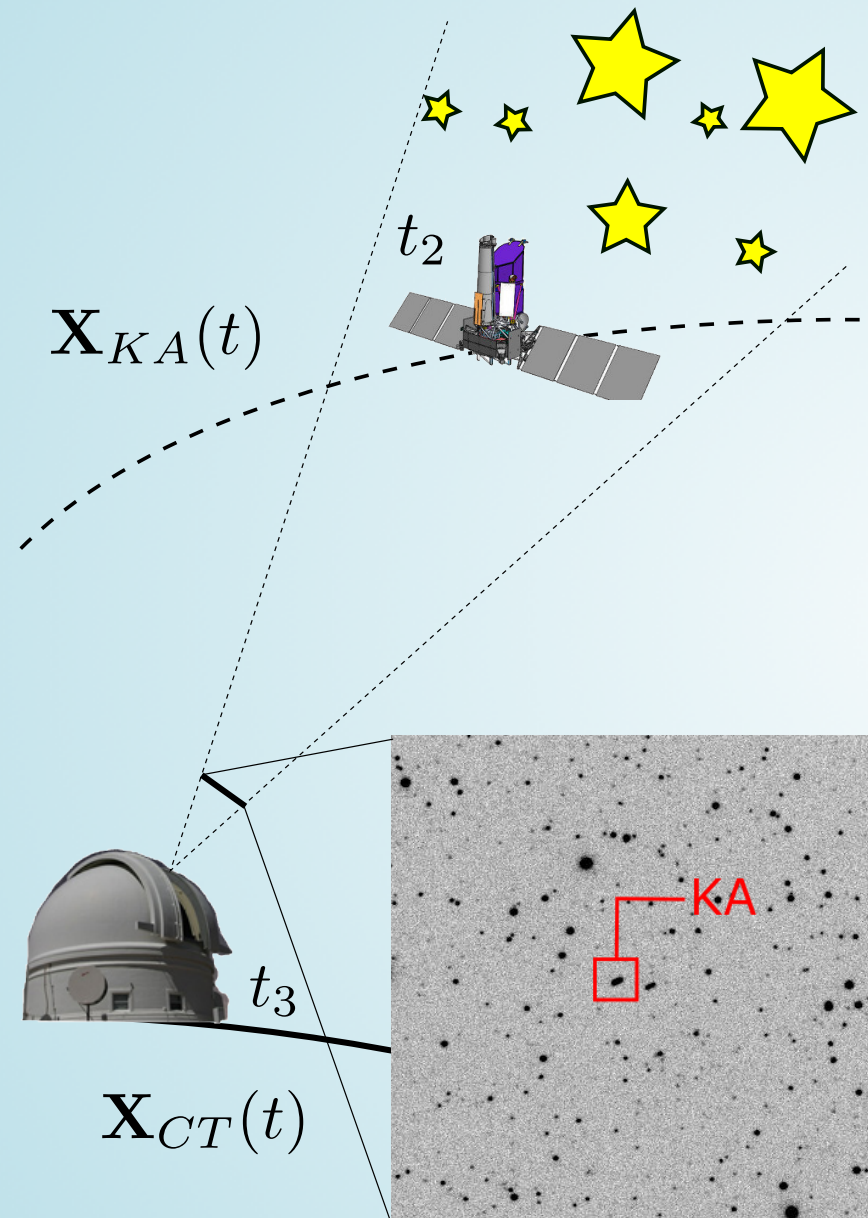
$$\Delta\text{DOR} = \tau_2 - k(t_2 - t_1) - \tau_1,$$
$$k = \frac{\tau_3 - \tau_1}{t_3 - t_1}$$

ОПТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ (НАЗЕМНЫЕ)

Траекторные измерения в оптическом диапазоне

- Измерения углового положения (астрометрические)
- Измерения дальности (лазерные)

АСТРОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ



Результат измерения — прямое восхождение α и склонение δ КА.

Измеренное направление:

$$\mathbf{L}^o = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}$$

Расчетное направление:

$$\mathbf{L}^c = \frac{\mathbf{r}_{KA}(t_2) - \mathbf{r}_{CT}(t_3)}{|\mathbf{r}_{KA}(t_2) - \mathbf{r}_{CT}(t_3)|},$$

Необходим учет звездной аберрации.

Частные производные

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{X}} = \left[-\frac{r_y}{r_{xy}^2}, \frac{r_x}{r_{xy}^2}, 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{X}} = \left[-\frac{r_x r_z}{r_{xy} r^2}, -\frac{r_y r_z}{r_{xy} r^2}, \frac{r_{xy}}{r^2}, 0, 0, 0 \right]$$

где $r\mathbf{L} = [r_x, r_y, r_z]^T$ — вектор относительного положения КА, $r_{xy} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$.

Особенности наземных угловых оптических измерений:

- Точность астрометрии может достигать ~ 0.01 arcsec. Для средних и крупных инструментов варьируется от 1 до 0.1 arcsec.
- Эффективное наблюдение средними и крупными инструментами возможно вплоть до 1.5 млн. км (L_2 С-3).
- Позволяют быстро калибровать большие систематические ошибки радиотехнических измерений.
- Сильная зависимость от погодных условий и времени суток
- Засветка от Луны может ограничивать возможности наблюдения КА.

ЛАЗЕРНАЯ ДАЛЬНОМЕТРИЯ (2-WAY)



Отличия от радиотехнических дальностей (в части моделирования):

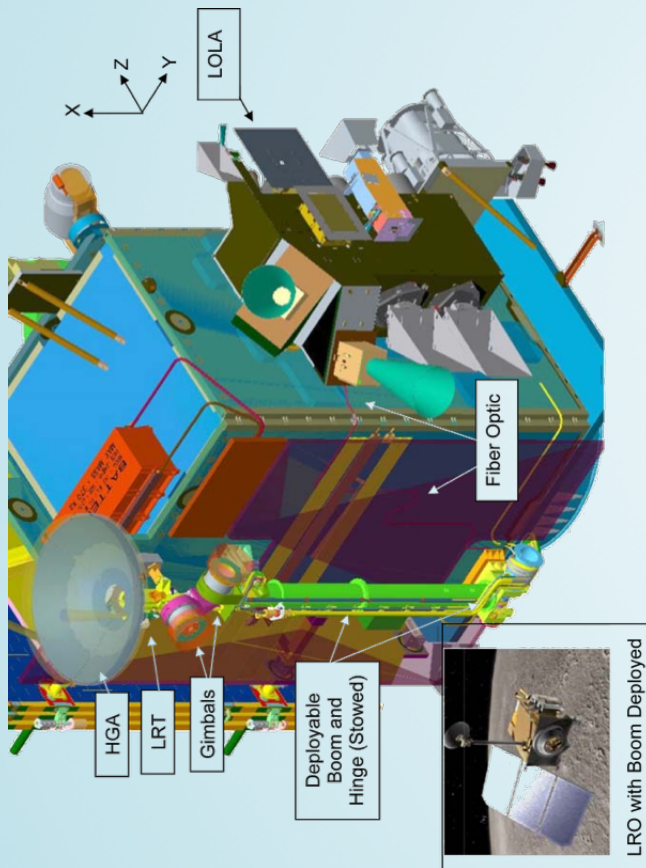
- привязка измерения к моменту излучения, а не приема;
- различные модели тропосферной задержки.
- точность выше на 1–2 порядка.)

Особенности лазерных дальностей (2-way):

- Точность единичных измерений 1–10 см.
- Знание ориентации КА и положения угловых отражателей обязательно.
- Сигнал затухает $\sim D^{-4}$. Текущий предел двухпутевых измерений — орбита Луны.
- Зависимость от погодных условий. Но при этом измерения могут проводиться днем (с потерей чувствительности).
- Измерения невозможны при низкой точности априорной орбиты.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СПОСОБЫ НАВИГАЦИИ

ЛАЗЕРНАЯ ДАЛЬНОМЕТРИЯ (1-WAY)

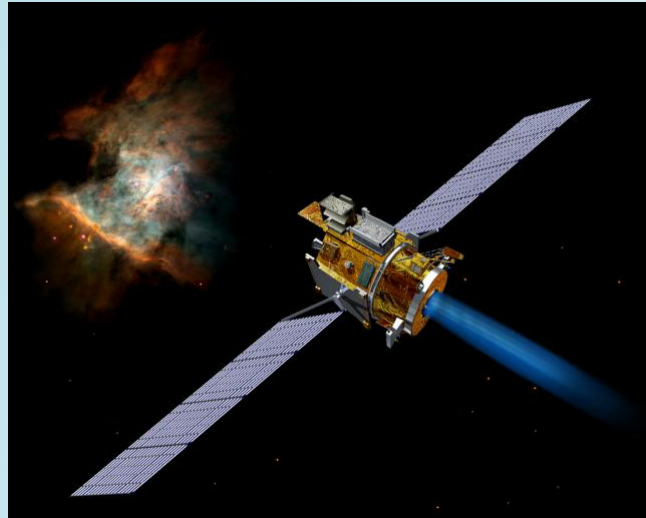


(Zuber et al. 2009)

- Единичные измерения имеют точность в среднем от 2 см.
- Измерения регистрируются непосредственно на КА.
- КА должен обладать высокостабильной системой частоты/времени.
- Сигнал затухает $\sim D^{-2}$, что позволяет использовать измерения для межпланетных миссий.
- Переход к собственной шкале времени КА должен осуществляться в рамках ОТО.
- Инструментальный уход локальной шкалы должен моделироваться, параметры модели должны включаться в состав уточняемых параметров **Q**.

ОПТИЧЕСКАЯ НАВИГАЦИЯ ПО ТЕЛАМ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

DEEPSPACE 1 (AUTONAV)

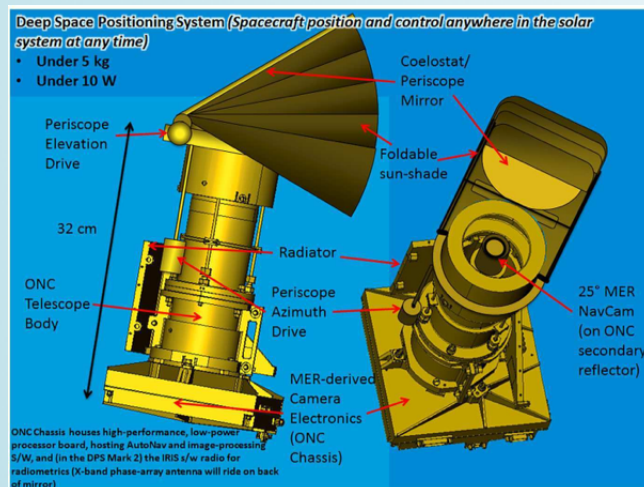


Использование астрометрии астероидов главного пояса для получения независимой от Земли орбитальной информации и автономной навигации КА.

Автономная система навигации позволила получать решения с ошибками: **от 150 до 10 000 км** по положению и **от 0.2 до 7 м/с** по скорости (Kennedy et al. 2004).

Система AutoNav использовалась в миссиях Deep Impact, Stardust во время сближений с целевыми объектами.

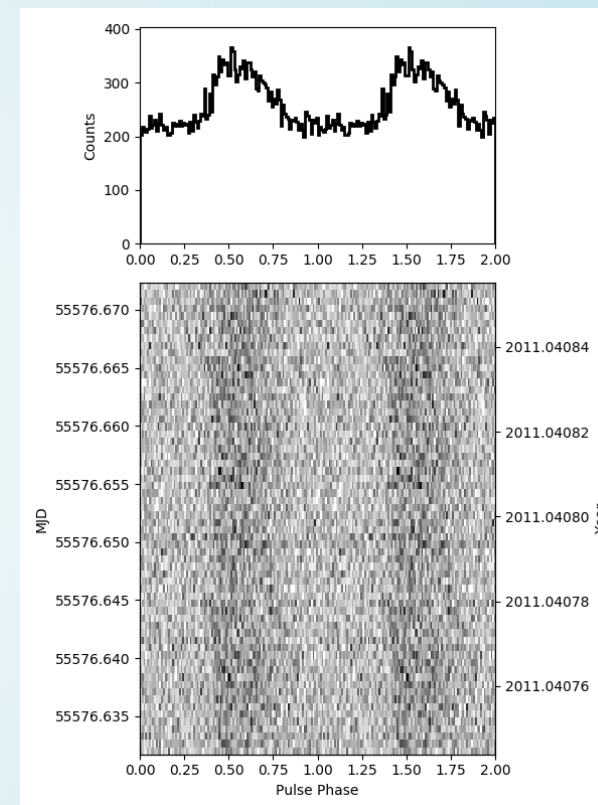
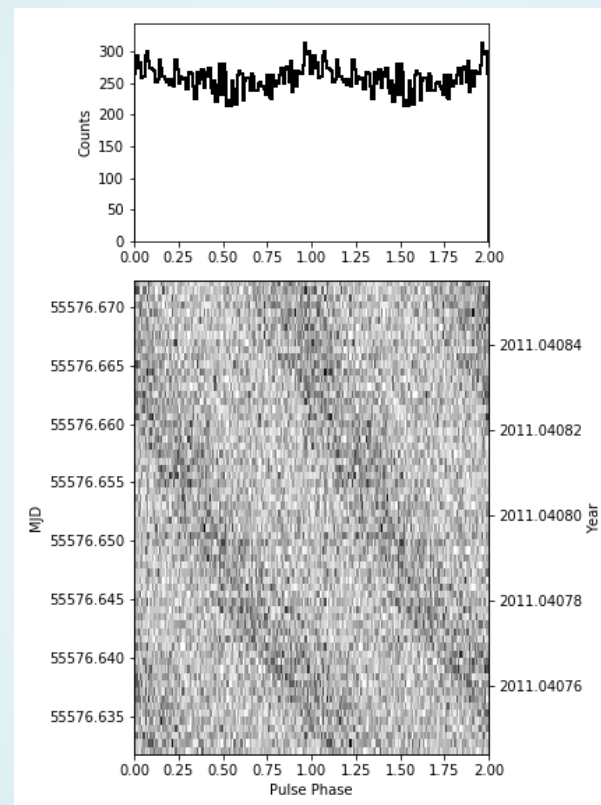
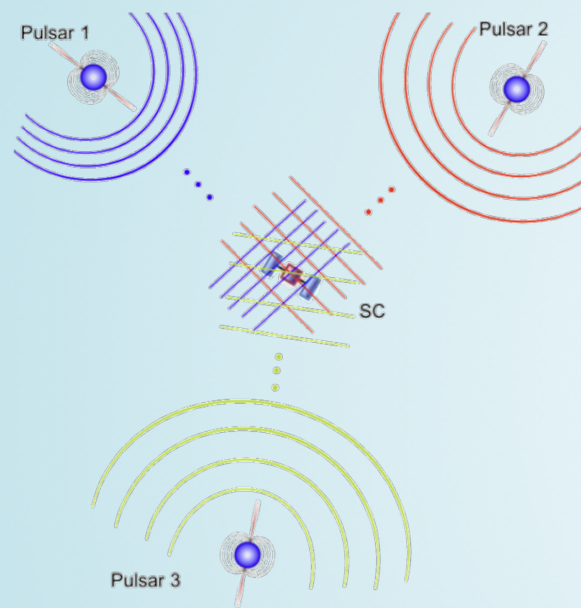
В 2014 зарегистрирован патент на Deep Space Positioning System — инструмент со своим ПО для автономной навигации КА.



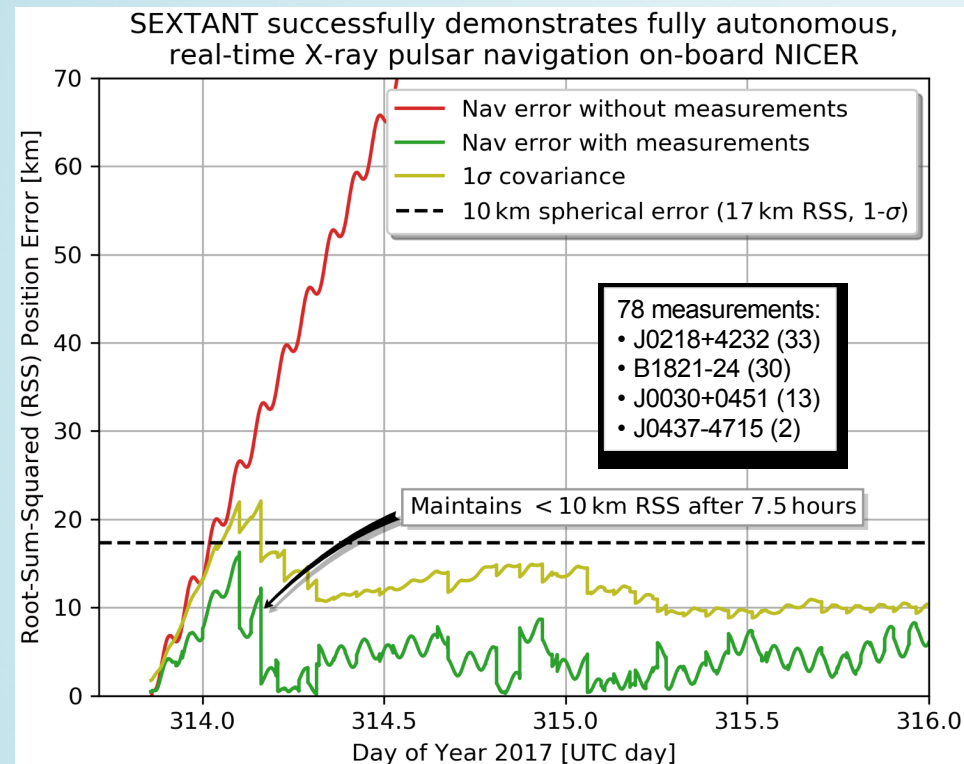
ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ

НАВИГАЦИЯ ПО ПУЛЬСАРАМ

Регистрация рентгеновских фотонов от удаленных квазаров позволяет восстановить фазу высокостабильного сигнала.



SEXTANT (NICER)



Первые результаты
получены с прибором
NICER на борту МКС.

Точность определения
положения <10 км в
течение практически
всего эксперимента.

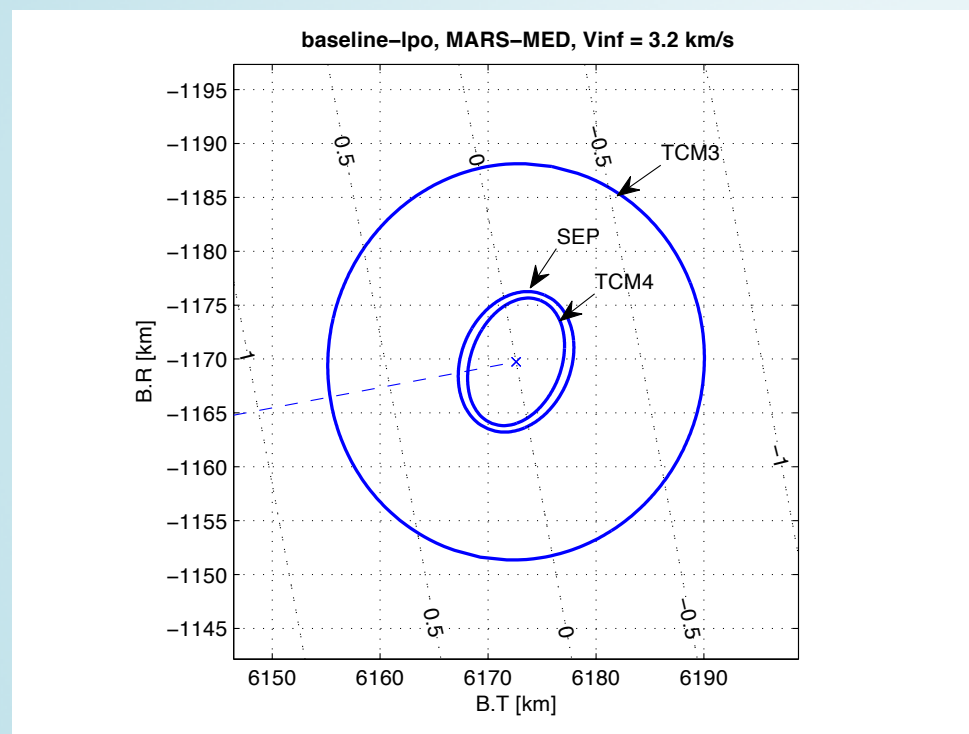
([Winternitz et al. 2018](#))

ПРИМЕРЫ МИССИЙ

EXOMARS-2016

Результаты моделирования ошибки прицеливания (B-plane) (Yamaguchi and Khan 2014)

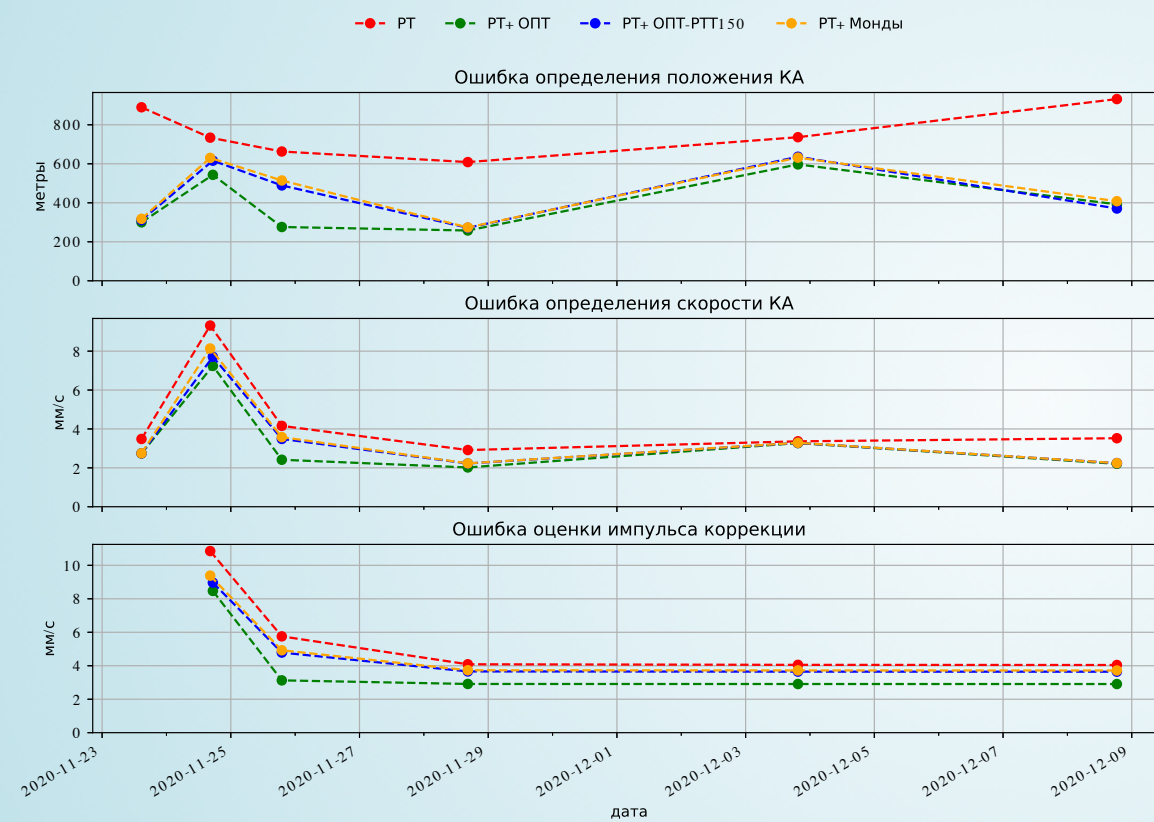
Траекторная информация



- Дальность скорость (ESA) на всем перелете (2 или 1 станция)
- Δ DOR, за 45 суток до перехода (~ 15 наблюдений)

СПЕКТР-РГ

Оценки ошибок навигации при проведении коррекции траектории КА.



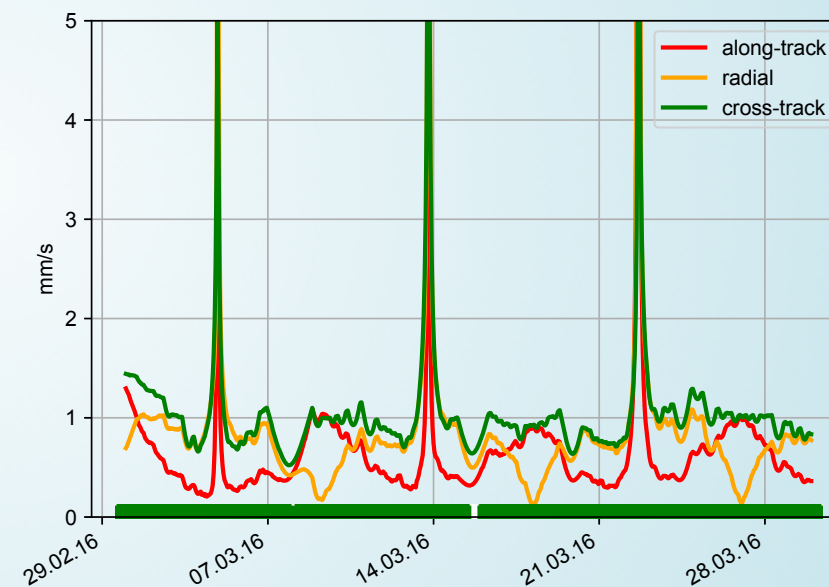
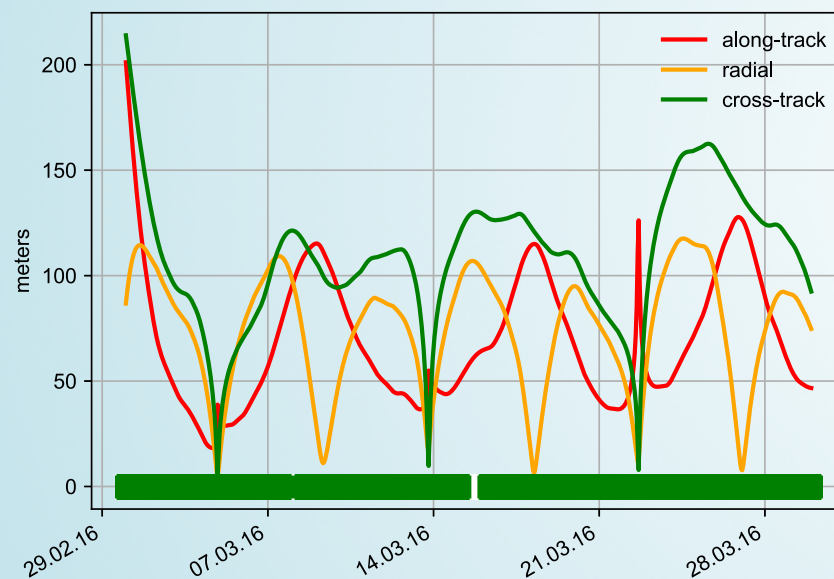
Траекторная информация

- Дальность, скорость (ежедневные измерения)
- Угловые оптические наблюдения

РАДИОАСТРОН (СПЕКТР-R)

Оценка ошибок реконструкции орбиты КА на нескольких витках по измерениям:

- Дальность, скорость (раз в 2-3 суток)
- Беззапросные (1-way) доплеровские измерения
- Угловые оптические измерения



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Методы поиска оптимальной оценки параметров движения Q могут быть использованы для получения оценок навигационных ошибок в задачах проектирования.
 - Нет необходимости строить точную модель измерений.
 - Нет необходимости рассчитывать невязки модельных измерений.
- Для получения частных производных текущего состояния по уточняемым параметрам $\partial X / \partial Q$ уравнения движения дополняются уравнениями в вариациях.
 - Правые части уравнений движения не должны усложняться без необходимости. При этом правые части уравнений в вариациях будут рассчитываться аналитически.
- Приведенные частные производные расчетных значений измерений имеют достаточную точность для получения оценок навигационных ошибок. В многих случаях точность достаточна для сходимости реальной краевой задачи.

ИСТОЧНИКИ

Kennedy, Brian, J. Edmund Riedel, Shyam Bhaskaran, Shailen Desai, Don Han, Tim McElrath, Mark Ryne George Null, Steve Synnott, Mike Wang, and Robert Werner. 2004. *Deep Space 1 Navigation: Primary Mission*. Edited by Joseph H. Yuen.

DESCANSO Design and Performance Summary Series. Deep-Space Communications and Navigation Systems Center of Excellence Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology.

Winternitz, Luke B., Munther A. Hassouneh, Jason W. Mitchell, Samuel R. Price, Wayne H. Yu, Sean R. Semper, Paul S. Ray, Kent S. Wood, Zaven

Arzoumanian, and Keith C. Gendreau. 2018.
"SEXTANT X-Ray Pulsar Navigation Demonstration:
Additional on-Orbit Results." In *2018 SpaceOps
Conference*, nil. <https://doi.org/10.2514/6.2018-2538>.

Yamaguchi, Tomohiro, and Michael Khan. 2014.
"Mission Design and Navigation Analysis of the ESA
ExoMars Program."

Zuber, Maria T., David E. Smith, Ronald S. Zellar,
Gregory A. Neumann, Xiaoli Sun, Richard B. Katz,
Igor Kleyner, et al. 2009. "The Lunar
Reconnaissance Orbiter Laser Ranging
Investigation." *Space Science Reviews* 150 (1-4):63–
80. <https://doi.org/10.1007/s11214-009-9511-z>.