



Баранов А.А.

Разработка методов расчета
параметров маневров
космических аппаратов в
окрестностях круговой
орбиты

Диссертация

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Баранов А.А. Разработка методов расчета параметров маневров космических аппаратов в окрестностях круговой орбиты: дис. ... доктор физ.-мат. наук: 01.02.01. М., 2019. 304 с. URL: <http://library.keldysh.ru/diss.asp?id=2019-baranov>

**Федеральное государственное учреждение "Федеральный
исследовательский центр Институт прикладной математики им.
М.В. Келдыша Российской академии наук" (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)**

На правах рукописи

Баранов Андрей Анатольевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ МАНЕВРОВ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ**

Специальность 01.02.01 – «Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2018

Оглавление

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ.....	24
1.1. Линеаризованные уравнения движения КА	24
1.2. Постановка задачи маневрирования в окрестности круговой орбиты.....	29
1.3. Одноимпульсные маневры	36
1.4. Необходимые условия оптимальности.....	40
1.5. Общая схема решения задачи маневрирования.....	44
1.6. Основные типы задач оптимального маневрирования КА	46
ГЛАВА II. МАНЕВРЫ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ И НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ.....	50
2.1. Компланарные переходы	50
2.2. Некомпланарные переходы	62
ГЛАВА III. ВСТРЕЧА НА КОМПЛАНАРНЫХ ОРБИТАХ.....	80
3.1. Постановка задачи.....	80
3.2. Встреча на компланарных непересекающихся орбитах (особое решение)	83
3.3. Встреча на компланарных пересекающихся орбитах (апсидальное решение)	100
3.4. Невырожденное решение компланарной задачи встречи	102
3.5. Области существования различных типов решений.....	117
3.6. Области существования четырехимпульсных невырожденных решений.....	122
3.7. Задача Ламберта, её преимущества и недостатки.	129
3.8. Маневры с ограничениями на высоту переходной орбиты.....	131
ГЛАВА IV. ВСТРЕЧА НА НЕКОМПЛАНАРНЫХ ОРБИТАХ	138
4.1. Постановка задачи.....	138
4.2. Алгоритм решения некомпланарной задачи встречи, основанный на решении задачи перехода	140
4.3. Невырожденное решение некомпланарной задачи встречи	148
4.4. Алгоритм расчета маневров дальнего наведения.....	161
4.5. Сравнение различных типов решений (NASA, ЦУП, комбинированное).....	174
ГЛАВА V. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ	178
5.1. Постановка задачи, общий метод решения.....	178
5.2. Минимизация в пространстве составляющих импульсов скорости.....	181
5.3. Поиск минимума в пространстве углов приложения импульсов скорости	187
5.4. Использование графического диалога с задачей.....	195
5.5. Использование итерационной процедуры для точного учета ограничений на высоту орбиты ожидания	198
ГЛАВА VI. ФОРМИРОВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ И СПУТНИКОВЫХ ГРУПП	200
6.1. Перемещение КА в спутниковой системе.....	200
6.2. Универсальный алгоритм определения маневров, формирующих спутниковую систему	207
6.3. Разноуровневые спутниковые системы	219
6.4. Определение параметров маневров формирования спутниковых групп (Formation Flying)	226

ГЛАВА VII. «ГИБКОЕ» ПОДДЕРЖАНИЕ ЗАДАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ.....	229
7.1. Постановка задачи.....	229
7.2. Вычисление элементов базовых орбит.....	230
7.3. Общий алгоритм решения задачи.....	231
7.4. Определение параметров маневров.....	234
7.5. Использование итерационной процедуры.....	237
7.6. Выбор точки прицеливания.....	238
7.7. Определение интервалов маневрирования.....	241
7.8. Пример расчета параметров маневров.....	244
7.9. Поддержание угла между плоскостями орбит разноуровневой спутниковой системы.....	245
ГЛАВА 8. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ КОМПЛЕКСОВ ПРОГРАММ.....	251
8.1. Расчет параметров маневров КА «Союз».....	251
8.2. Примеры расчета параметров маневров в проекте “Mars sample return mission”.....	262
8.3. Задачи маневрирования, связанные с проблемой космического мусора.....	271
8.4. Маневрирование с помощью двигателей, имеющих ограниченную постоянную тягу.....	275
ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ.....	282
Список литературы.....	285

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

АН СССР	Академия наук СССР
АКА	Активный КА
ГОСТ	Государственный стандарт
ГСО	Геостационарная орбита
БЦ	Баллистический центр
БНО	Баллистико-навигационное обеспечение
ДВУ	Долгота восходящего узла
ДОС	Долговременная орбитальная станция
ДУ	Двигательная установка
ИСЗ	Искусственный спутник Земли
ИСК	Инерциальная система координат
КА	Космический аппарат
КО	Космический объект
ККО	Крупногабаритный космический объект
КС	Космическая система
МКА	Малый космический аппарат
МАИ	Московский авиационный институт
МККМ	Межагентский координационный комитет по космическому мусору
МКС	Международная космическая станция
ООН	Организация Объединенных Наций
ОСК	Орбитальная система координат
ПК	Программный комплекс
ПКА	Пассивный космический аппарат
РАН	Российская академия наук
СГ	Спутниковая группа
СС	Спутниковая система

ССО	Солнечно-синхронная орбита
СХС	Суммарная характеристическая скорость
ЦУП	Центр управления полетом
ЭРД	Электрический ракетный двигатель
ATV	Automated Transfer Vehicle
ISS	International Space Station (международная орбитальная станция)
JPL	Jet Propulsion Laboratory
CAS	Coplanar apsidal solution (компланарное апсидальное решение)
CNDS	Coplanar nondegenerate solution (компланарное невырожденное решение)
CNES	Centre National d'Études Spatiales
CSS	Coplanar singular solution (компланарное особое решение)
FF	Formation flying (спутниковая группа)
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NC	Nodal case (узловой случай)
NDC	Nondegenerate case (невырожденный случай)
SC	Singular case (особый случай)
US	Universal solution (универсальное решение)

ВВЕДЕНИЕ

Важное место в процессе полета большинства космических аппаратов (КА) занимают его манёвры – целенаправленное изменение параметров орбиты КА с помощью двигательной установки (ДУ). Как правило, именно проведение маневров позволяет с необходимой точностью сформировать орбиту, обеспечивающую выполнение КА его целей. Важная роль маневров КА, их разнообразие, наличие маневров практически во всех миссиях КА, определяют то большое внимание, которое уделяется вопросам маневрирования в литературе по механике космического полета.

Ещё в вышедшем в 1969 году обзоре Гобеца и Дола [1], анализировались более 300 работ, посвященных вопросам оптимального маневрирования КА. В настоящее время число опубликованных по этой теме работ измеряется тысячами, изданы несколько десятков монографий, из которых можно отметить работы В.В. Ивашкина [2], К.Б. Алексева, Г.Г. Бебенина, В.А. Ярошевского [3], В.А. Егорова [4], Ц.В. Соловьева, Е.В. Тарасова [5]. Основополагающей считается работа Д.Ф. Лоудена [6].

Особое место в теории оптимального маневрирования занимают задачи расчета параметров оптимальных маневров КА на близких околокруговых орбитах. Во–первых, эти задачи имеют наибольший практический интерес, т.к. именно на орбитах этого типа функционирует значительная часть реальных КА, во–вторых, эти задачи несколько проще задач в общей постановке и в некоторых случаях допускают аналитическое или численно-аналитическое решение. Естественно, что задачам этого типа посвящено множество работ, ссылки на основные из них будут даны в соответствующих главах. Особого внимания заслуживают монографии Ж.-П. Марека [7], В.А. Ильина и Г.Е. Кузмака [8], М.Ф. Решетнева, А.А. Лебедева, В.А. Бартенева, М.Н. Красильщикова, В.А. Малышева, В.В. Малышева [9].

В работе [8] на основе вариационного подхода получены необходимые условия строгой локальной оптимальности импульсных перелетов в произвольном и

ньютоновском гравитационном полях. Дано решение задачи перехода (перелёта со свободным временем) между околосферными орбитами в линеаризованной постановке, рассмотрена задача перехвата. Краткое и в то же время достаточно полное решение задачи перехода между околосферными некомпланарными орбитами приводится в работе Т. Эдельбаума [83]. В книге [9] рассмотрены вопросы определения орбит и маневрирования (в основном задачи перехода) с помощью двигателей большой и малой тяги. В монографии Ж.-П. Марека [7] основное внимание уделено задаче встречи КА. Под задачей встречи понимается перелёт в заданную точку на конечной орбите. Время перелета может быть фиксировано (наиболее часто встречающаяся постановка задачи), подлежит определению или минимизируется [10, 11, 151]. Фундаментальный современный обзор работ по задаче встречи приведен в [12].

Изучение задачи встречи началось с середины 60-х годов. Ж.-П. Марек [МА2] исследовал классическую задачу встречи средней продолжительности на околосферных орбитах. Были определены области существования различных типов оптимальных невырожденных решений. Одной из причин, помешавшей широкому использованию изложенных в работе идей, является определённая сложность представления материала. Необходимо также отметить работы Ж.Е. Прассинга [13,14], рассмотревшего с помощью годографа базис-вектора встречу на *круговых компланарных* орбитах, продолжительность перелета от одного до трех витков. Алгоритм определения параметров маневров встречи, соответствующих невырожденному годографу базис-вектора, был приведен в [15].

В конце 60-х годов были осуществлены первые стыковки КА в космосе. Оказалось, что при решении практических задач часто необходимо учитывать различные дополнительные ограничения: на моменты приложения импульсов, их ориентацию и величину, на параметры переходной орбиты и т.д. Задача стала намного сложнее классической задачи встречи, рассмотренной в первых теоретических работах. Непосредственно использовать описанные в этих работах

решения оказалось невозможно. Потребовалось разработать новые эффективные, в первую очередь численные методы для решения практических задач.

Существует три подхода к решению сложных задач встречи.

В первом подходе отдельно рассчитываются параметры маневров в плоскости орбиты и маневров совмещающих плоскости орбит. Изменение плоскости орбиты производится одним импульсом скорости. Данная схема маневрирования использовалась американцами для решения различных задач встречи, в том числе задач встречи Shuttle с различными орбитальными станциями [16], [17]. В нашей стране, таким образом, рассчитываются маневры некоторых спутников на геостационарных орбитах (ГСО) [18], и спутников, составляющих спутниковые группировки [19], [20], и т.д. Данная схема имеет как преимущества, так и недостатки. К первым относятся простота и надежность, ко вторым – дополнительные затраты суммарной характеристической скорости (СХС).

Во втором подходе параметры маневров определяются с помощью численных методов. Эти методы весьма эффективны, так как позволяют находить действительно оптимальное решение и учитывать различные ограничения. Именно численные методы более сорока лет используются для определения параметров маневров дальнего наведения КА типа «Союз», «Прогресс» с долговременной орбитальной станцией (ДОС) «Салют», «Мир», МКС [21], [22], [23]. Начало развития этих методов положила работа В.П. Гаврилова и Е.В. Обухова [24]. Довольно эффективным для расчётов параметров маневров оказался симплекс-метод [25], [26], [24], [27], [28], [29], [148]. Для решения задачи встречи используется также множество других численных методов [152], [153], [154].

Вместе с тем численные методы обладают рядом недостатков. В первую очередь нет объяснения вида полученного решения. Непонятно, как изменится само решение, если изменятся начальные условия. Это ярко проявляется, когда на орбите случаются нештатные ситуации, и необходимо оперативно предложить

новую схему маневрирования. При проектировании будущих полетов также выбор схемы маневрирования является более сложной задачей, чем расчет маневров, т.к. при выборе схемы вначале надо определить, сколько импульсов скорости необходимо использовать для получения оптимального решения, выбрать интервалы маневрирования и продолжительность встречи, и только после этого приступить к расчету параметров маневров.

Большой объем программ, реализующих численные методы, практически не позволяет использовать их на борту КА. Значительное время, которое требуется для нахождения решения, препятствует использованию численных методов и в процессах требующих многократного решения задачи встречи.

Третий подход основан на использовании решения задачи Ламберта. С ее помощью находятся параметры двух маневров, а далее строится годограф базис-вектора, соответствующий этому решению. Если годограф удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, то задача решена, в противном случае годограф подсказывает, где необходимо приложить дополнительный импульс скорости. Данный метод был предложен в работах [30] и [31]. В настоящее время он чаще используется в университетских работах. Этот подход в сочетании с градиентными методами помог получить многоимпульсные решения [32], [33], [34]. Использование задачи Ламберта – это наиболее известный и разработанный метод решения задачи встречи [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41]. В отдельные группы можно выделить решение многовитковой задачи Ламберта [42], [43], [44] и универсальные алгоритмы её решения [45], [46], [47], [151]. Метод поиска оптимального многоимпульсного решения задачи встречи на основе задачи Ламберта достаточно распространен и в настоящее время [48].

Особую группу составляют задачи расчета параметров маневров орбитальных станций, некоторые из которых, несмотря на их специфичность, тоже можно отнести к задачам встречи. Особенностью этих задач являются длительные интервалы времени от первых до завершающих маневров и многочисленные, иногда противоречивые ограничения на параметры

промежуточной орбиты. Основные исследования в этой области выполнены Е.К. Мельниковым [49, 50, 51].

Целью данной работы является разработка численно–аналитических методов решения многоимпульсных задач встречи на близких околокруговых орбитах, сочетающих достоинства первого и второго из перечисленных ранее подходов. Эти методы должны быть достаточно просты, наглядны и надёжны и в то же время позволять находить решения очень близкие к оптимальным. Такие методы позволят использовать результаты, полученные в работах Г.Е. Кузмака, Т. Эдельбаума, Ж.-П. Марека, при решении современных практических задач. Численно–аналитические методы на несколько порядков быстрее численных, и, кроме того, дают объяснение, почему было получено именно такое оптимальное решение. Они позволяют определить области существования оптимальных решений различного типа. Определить эти области с помощью численных методов очень затруднительно, а понимание этого вопроса очень важно в момент выбора схемы маневрирования, когда решается, сколько импульсов скорости необходимо использовать и на каких интервалах маневрирования их можно исполнять. Найденные решения имеют простую геометрическую интерпретацию, что также существенно упрощает их объяснение, а в случае необходимости позволяет организовать графический диалог с задачей.

Значительное внимание в работе уделено вопросам создания и поддержания спутниковых систем (СС) и спутниковых групп (СГ) (Formation flying).

Приведен обзор результатов, полученных для задачи оценки маневров исполняемых активными космическими объектами, задачи уклонения от столкновения с космическим мусором и задачи возвращения крупногабаритных объектов космического мусора.

Структура диссертации построена в соответствии с принятой классификацией [1] маневров на околокруговых орбитах.

В первой главе приводится решение линеаризованной системы уравнений движения КА в цилиндрической системе координат. Дана постановка задачи

расчета параметров маневров КА в окрестности круговой орбиты, при условии существенного упрощения модели движения. Сформулированы необходимые условия оптимальности для данной задачи. Приведена классификация маневров, в соответствии с которой строится дальнейшее изложение материала. Описана итерационная процедура, позволяющая выполнять терминальные условия с необходимой точностью с учетом нецентральности гравитационного поля, влияния атмосферы, солнечного давления, работы двигательной установки и т.д. Данный подход к учету возмущений оказался очень эффективным и получил большое распространение в нашей стране. На западе делались неоднократные попытки учесть перечисленные выше возмущения непосредственно при определении параметров маневров. Получающаяся задача очень сложна и может быть решена только численными методами. На первом этапе применялись градиентные методы [31,32], в настоящее время используются современные численные методы такие как *intelligent optimization algorithms*, *genetic algorithm*, *simulated annealing*, *particle swarm algorithm*, *hybrid algorithms* [52,53,54, 55, 56].

Во второй главе рассмотрена задача перехода между компланарными (три типа решений) и некомпланарными орбитами (четыре типа решений). Приведены формулы для расчета параметров маневров. Проведено сравнение решения задачи в линеаризованной постановке с точным решением.

В третьей главе рассмотрена встреча на компланарных орбитах. Проанализированы три типа возможных решений, установлены области их существования. Приведены алгоритмы для определения параметров двух-, трех- и четырёхимпульсных решений для каждого из возможных типов годографа базис-вектора: в виде точки, эллипса и циклоиды. Приведены примеры, когда суммарная характеристическая скорость решения задачи Ламберта в два и в три раза больше суммарной характеристической скорости оптимального трехимпульсного решения. Рассмотрена задача встречи, в которой необходимо учитывать ограничения на высоту переходной орбиты.

В четвертой главе описаны универсальный алгоритм расчета параметров маневров четырехимпульсной многовитковой встречи на некопланарных околокруговых орбитах и численно-аналитический алгоритм расчета параметров маневров дальнего наведения КК типа «Союз», «Прогресс». Исследованы шестиимпульсные решения, соответствующие годографу базис-вектора в форме спирали, получены формулы для вычисления оптимальных углов приложения импульсов скорости этих решений. Проведено сравнение эффективности различных методов решения задачи встречи. Решения, которое использует НАСА, решения используемого ЦУПом и оптимального решения.

Поскольку в практической работе встречаются задачи, при решении которых трудно обойтись без численных методов, пятая глава посвящена численным методам. В ней приводится описание численного метода, который в течение многих лет использовался в баллистическом центре (БЦ) ИПМ им. М.В. Келдыша АН РАН для определения параметров маневров КА типа «Союз» и «Прогресс». Нештатные ситуации, возникавшие на орбите, показали необходимость создания эффективного графического диалога с задачей, позволяющего оперативно выбрать новую схему маневрирования, учитывающую дополнительные ограничения, вызванные нештатной ситуацией. Первое применение графического диалога при решении задачи маневрирования описано в работе А.К. Платонова и Р.К. Казаковой [57] ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. Для расчета параметров маневров использовалось решение задачи Ламберта. В книге Ю.А. Захарова [58] МАИ дано описание графического диалога для расчета межорбитальных перелетов с конечной тягой. От импульсного решения с помощью методов нелинейного программирования осуществляется переход к решению задачи с конечной тягой. Оба графических диалога создавались для использования на стадии проектирования полётов КА.

В пятой главе приводится описание графического диалога, который можно эффективно использовать как на стадии баллистического проектирования, так и во время полёта КА при возникновении нештатной ситуации, в том числе при

необходимости уклонения от столкновения с космическим мусором. В отличие от двух предыдущих диалогов в данном диалоге анализ решения и его изменение происходит не в пространстве, где изображены орбиты, а в пространстве проекций вектора эксцентриситета.

В перечисленных ранее теоретических работах 60–х, начала 70–х годов не исследовались маневры КА, входящих в спутниковые системы (СС), которые играют важнейшую роль в современной космонавтике. Наиболее распространенными являются СС, у которых спутники расположены на околокруговых орбитах. Описанные в предыдущих главах алгоритмы можно также использовать и для расчета параметров маневров спутников, входящих в спутниковые системы. Вместе с тем в ряде случаев маневры таких спутников имеют свои особенности, которые необходимо учитывать.

Спутниковым системам посвящено множество работ. Первоначальным является вопрос выбора конфигурации СС, обеспечивающей необходимое покрытие земной поверхности. В этой области можно выделить работы Г.В. Можая [59, 60], Дж. Уокера (Walker J.G. 61) [61], Б.П. Быркова [62], Ю.Н. Разумного [63], Ю.П. Улыбышева [64, 65], Э. Лансарда (Lansard E.) [66], В.К. Саульского [67]. Однако при полном решении задачи выбора необходимой конфигурации СС и числа входящих в неё спутников (включая резервные), необходимо учитывать маневры КА, составляющих эту систему.

Маневры КА, входящих в систему, можно разделить на два вида. Первый вид составляют маневры, которые формируют систему, а маневры второго вида служат для поддержания сформированной конфигурации спутниковой системы. На первый взгляд задача расчета параметров маневров формирования спутниковой системы аналогична обычной задаче встречи, т.к. КА необходимо просто установить в заданную позицию на рабочей орбите. Однако в отличие от задачи маневрирования, решаемой, например, при стыковке КА «Союз», «Прогресс» с долговременной орбитальной станцией, в данном случае время перевода спутника в фиксированную точку орбиты не жестко ограничено, а

может выбираться в достаточно широких диапазонах. Это связано с поиском компромисса между желанием уменьшить продолжительность перевода и необходимостью уменьшить затраты суммарной характеристической скорости, которые при формировании спутниковых систем, как правило, растут с уменьшением времени перевода спутника в заданную точку. Ситуация усложняется тем, что на низких орбитах во время простейшего изменения положения спутника на орбите изменяется одновременно долгота восходящего узла (ДВУ) орбиты, и это появляющееся отклонение необходимо корректировать. Задача становится значительно сложнее, когда спутник необходимо перевести на орбиту, долгота восходящего узла которой на десятки градусов отличается от долготы восходящего узла исходной орбиты. Такая ситуация имеет место, например, когда одна ракета-носитель выводит на орбиту несколько спутников, часть из которых необходимо перевести в другие рабочие плоскости, или когда в системе имеется резервный спутник, который необходимо перевести в плоскость другой орбиты вместо выбывшего там из строя спутника. Оптимальный по затратам суммарной характеристической скорости перевод таких спутников требует большого времени (нескольких сотен витков).

В общем случае при перелете в заданную точку рабочей орбиты с произвольной орбиты выведения необходимо иметь универсальный алгоритм расчета параметров маневров встречи большой продолжительности, который существенно усложняется, когда между начальной и конечной орбитами имеется существенное отличие ДВУ. Для решения этой задачи нельзя воспользоваться известными методами, разработанными для решения задачи встречи короткой и средней продолжительности. В этих методах влияние сжатия Земли или вообще не учитывалось [13], [14], [15], [20], [7], или учитывалось с помощью итерационной процедуры [21], [22], [68], [69] для выполнения с заданной точностью терминальных условий. В задаче перевода спутника в плоскость, ДВУ которой отличается на несколько десятков градусов, влияние сжатия Земли

используется для основной коррекции имеющегося первоначального отклонения по ДВУ.

В существующих работах по маневрам формирования спутниковых систем задача перелета КА в плоскость с ДВУ, отличающейся на несколько десятков градусов, практически не рассматривается. Два метода [70], [71] решения задачи встречи при большом первоначальном отклонении ДВУ докладывались на международных конференциях, проводимых AIAA. Работа методов демонстрировалась на решении задачи встречи на орбите Марса, в которой требовалось изменить ДВУ орбиты на 182° . Первый из них [70] (работа выполнена в NASA) аналогичен методу, используемому для определения параметров маневров встречи Shuttle с международной космической станцией (МКС). Коррекция элементов в плоскости орбиты и поворот самой плоскости орбиты выполняется отдельно. Получаемое решение не оптимальное (затраты суммарной характеристической скорости на 60% превышают необходимые), используются десять импульсов скорости, т.к. задача значительно сложнее классической задачи встречи, для решения которой NASA использует пять импульсов скорости. Второй метод [71], разработанный совместно JPL и Техаским университетом, – численный. Он позволяет найти решение с небольшим числом импульсов скорости и минимальной СХС, однако время вычислений чрезвычайно велико и, кроме того, требуется существование хорошего начального приближения. Производить массовые расчеты, необходимые для полного исследования задачи, этими методами весьма затруднительно.

В шестой главе приводится достаточно простой, надежный и быстродействующий численно-аналитический метод, позволяющий находить оптимальное решение задач такого типа. Он даёт возможность при однократном решении задачи построить зависимость затрат суммарной характеристической скорости от продолжительности перелёта. Кроме того, процесс вычисления построен таким образом, что всегда существует объяснение, почему оптимальное

решение имеет найденный вид, и как будут меняться параметры маневров при изменении начальных условий. Имеется возможность находить решения, уменьшающие влияние ошибок реализации маневров. Данный метод использовался для расчета маневров создания СС и спутниковых групп (СГ). Приводится пример результатов расчета маневров для спутниковой системы «Globalstar» и маневров создания formation flying (FF) «Aqua Train». В работе [72] используемые в этом методе уравнения были модифицированы и также применялись для решения задачи многовитковой многоспутниковой встречи на низких околоземных орбитах.

Задаче поддержания структуры СС, имеющей ряд существенных отличий от задачи создания СС, также посвящено значительное число публикаций и в первую очередь в зарубежной литературе. Различают две стратегии поддержания: «жесткое» (в зарубежной литературе чаще используется термин «абсолютное») и «гибкое» («относительное») поддержание. Если положение спутника удерживается в окрестности заданного движения, и его маневры рассчитываются независимо от расположения других спутников системы, то говорят о «жестком поддержании» [73]. Если требуется согласовать движение всех спутников системы, то используется «гибкое» поддержание. «Гибкое» поддержание требует меньших затрат СХС по сравнению с «жестким», т.к. не корректируются элементы орбиты, одинаково меняющиеся у всех КА системы. Например, большая полуось всех орбит может уменьшаться под действием атмосферы практически одинаковым образом, и нет необходимости ее корректировать, а остается контролировать взаимные угловые расстояния спутников, определяющие конфигурацию системы. «Гибкое» поддержание является более сложной задачей, т.к. при расчете параметров маневров одного из спутников необходимо учитывать положение всех остальных элементов системы. Сравнение «жесткого» и «гибкого» поддержаний было проведено в работах Г.В. Можаяева [74] и Р.Ф. Муртазина [75] на примере конкретных спутниковых систем. Было показано,

что «жесткое» поддержание требует большего числа маневров и больших затрат СХС.

«Гибкому» поддержанию посвящены работы нескольких авторов. Для её решения чаще всего используется симплекс-метод [76], [77], [74] или численно решается уравнение Риккати [78]. Состояние системы при этом контролируется через заданные равные промежутки времени. К недостаткам такого подхода можно отнести то, что оптимально корректировать элементы орбиты может быть необходимо до или после этих фиксированных моментов. В некоторых работах предлагались аналитические решения, но предполагалось, что маневры исполняются в начальный [74] или в начальный и конечный моменты времени [75]. В промежуточные моменты состояние системы не контролировалось. **В седьмой главе** приводится численно–аналитический метод, позволяющий аналитически вычислять величины маневров, обеспечивающих необходимую конфигурацию системы на всем интервале поддержания. Учет физических особенностей задачи позволяет сократить число используемых маневров. Предлагаемая геометрическая интерпретация процесса поддержания дает исчерпывающее объяснение характера оптимального решения.

В восьмой главе приведены примеры использования описанных в первых главах методов для решения различных практических задач. Большую роль БЦ ИПМ играл в баллистико-навигационном обеспечении (БНО) программы пилотируемых полетов. Были рассчитаны параметры маневров КА «Союз 19» (1974 г.), КА «Союз 20» (1975 г.) в рамках совместной программы «Союз» - «Аполлон», КА «Союз 22» (1976 г.). На протяжении многих лет (с 1978 г.) БЦ ИПМ участвовал в обеспечении функционирования долговременных орбитальных станций «Салют - б», «Мир», в работах связанных с созданием МКС, в баллистическом обеспечении полета космической системы (КС) «Буран». В рамках этих работ рассчитывались параметры маневров около 140 КА различного типа: «Союз», «Союз-М», «Союз-ТМ», «Прогресс», «Прогресс-М», орбитальных модулей «Квант», «Природа», «Спектр», «Звезда», КС «Буран» и т.д.

Именно участие в БНО полетов этих КА дало возможность разработать и проверить на практике различные методы расчета параметров маневров, выбрать наиболее простые и надежные из них, максимально учитывающие особенности полета реальных КА. Поскольку эти методы были разработаны для решения практических задач, они позволяют учитывать ограничения на моменты приложения импульсов скорости, их величину и ориентацию, ограничения на высоту переходной орбиты, удовлетворяют самым высоким требованиям по быстрдействию и надёжности. Преимущества этих методов обусловили их выбор Французским центром космических исследований (CNES) в качестве основы при создании собственного метода расчета параметров маневров встречи ATV (автоматического КА) с международной орбитальной станцией (ISS) [79,80].

В восьмой главе приведены примеры расчета параметров четырех-, трех- и двухимпульсных маневров встречи КК «Союз ТМ-30» с орбитальной станцией. Также приведены примеры определения параметров маневров в двух задачах подлета к капсуле с грунтом в проекте “Mars sample return mission” [70]. Проведено сравнение полученного решения с решениями полученными NASA [70] и JPL [71].

Разработанные методы были также использованы при решении задач маневрирования в проблеме космического мусора. Это задачи оценки маневров исполненных активными космическими объектами, задачи уклонения от столкновения с космическими объектами и задачи возвращения крупногабаритных объектов космического мусора. Изложение методик решения этих задач значительно увеличило бы текст диссертации. Поэтому в восьмой главе приведен только обзор результатов, полученных по этим задачам.

Используемые методы исследования основываются на классических положениях теории космического полёта, прикладных методах космической баллистики, методах вариационного исчисления, методах математического моделирования, программирования, теоретической механики, математического анализа, в качестве методологической основы используется системный подход.

Объектом исследования являются единичные КА и спутниковые системы.

Предметом исследования служат численно-аналитические и численные методы расчета параметров оптимальных маневров перехода и встречи в окрестности круговой орбиты.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

- разработан аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров перехода между некомпланарными орбитами, при условии, что у импульсов скорости отсутствуют радиальные составляющие;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных двух-, трех- и четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора вырождается в точку;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных трех- и четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид эллипса;
- разработан аналитический метод расчета параметров оптимальных четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид циклоиды;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных трехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид циклоиды;
- определены области существования различных типов оптимальных решений задачи встречи на компланарных орбитах;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи на компланарных орбитах, при наличии ограничений на высоту орбиты ожидания;
- разработан универсальный численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи на некомпланарных орбитах;

- разработан аналитический метод расчета параметров оптимальных шестиимпульсных маневров встречи на некомпланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид спирали;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров дальнего наведения;
- разработан численный метод расчета параметров оптимальных маневров дальнего наведения;
- разработан графический диалог с задачей, позволяющий находить компромиссные решения при наличии противоречивых ограничений;
- разработан универсальный численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи на некомпланарных орбитах при наличии значительного (десятки градусов) первоначального отклонения долготы восходящего узла;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров, гибкого поддержания заданной конфигурации спутниковой системы;
- разработан численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров, поддержания угла между плоскостями орбит разноуровневой спутниковой системы.

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждается многолетним успешным использованием их в практической работе, и сравнением с результатами опубликованными отечественными и зарубежными авторами.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что полученные в ней результаты дают возможность:

- решать основные задачи маневрирования КА в окрестности круговой орбиты;
- существенно сократить время решения этих задач маневрирования, что позволяет проведение массовых расчётов при проектировании новых миссий;

- обеспечить высокую надежность решения задач, получить необходимую точность формирования заданной орбиты, что чрезвычайно важно при баллистическом обеспечении полетов реальных КА;
- объяснить характер получаемого решения;
- осуществить графический диалог с задачей, который чрезвычайно эффективен при возникновении нештатных ситуаций на орбите, при проектировании новых миссий, при расчете маневров уклонения от столкновения с космическим мусором.

На защиту выносятся:

1. Теория оптимального маневрирования в окрестности круговой орбиты, состоящая в определении возможных типов оптимальных решений компланарной и некомпланарной задач встречи и областей их существования;
2. Численно-аналитические методы расчета параметров оптимальных двух-, трех- и четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора вырождается в точку или имеет вид эллипса, а также маневры встречи при ограничениях на высоту переходной орбиты;
3. Аналитические методы расчета параметров оптимальных трех- и четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид циклоиды;
4. Универсальный численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных четырехимпульсных маневров встречи на некомпланарных орбитах и аналитический метод расчета параметров оптимальных пяти- и шестиимпульсных маневров встречи на некомпланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид спирали;
5. Численно-аналитический методы расчета параметров оптимальных маневров дальнего наведения КК типа «Союз», «Прогресс» и численный метод решения этой задачи, в котором эффективно решена проблема поиска минимума в пространстве углов приложения импульсов скорости;

6. Графический диалог с задачей, позволяющий находить компромиссные решения при наличии противоречивых ограничений, выбирать новые схемы маневрирования;

7. Универсальный численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи большой продолжительности на некомпланарных орбитах при наличии значительного (десятки градусов) первоначального отклонения долготы восходящего узла;

8. Численно-аналитические методы расчета параметров оптимальных маневров относительного поддержания заданной конфигурации спутниковой системы и поддержания угла между плоскостями орбит разноуровневой спутниковой системы

Реализация результатов работы. Полученные в диссертационной работе результаты использовались в баллистическом центре ИПМ им. М.В. Келдыша РАН для расчета маневров КА типа «Союз», «Прогресс» и орбитальных модулей стыкуемых с ДОС, а также использовались в CNES для расчета параметров маневров европейского ATV. Они использовались в проекте “Mars sample return mission” и при разработке различных спутниковых систем (formation flying «Aqua Train», «Prizm» и т.д.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Всероссийских:

– VI (1982 г.), XVI (1992 г.), XXV (2001 г.), XXX (2006г.), XXXIV (2010 г.), XXXVII (2013 г.), XXXVIII (2014 г.), XXXIX (2015г.), XL (2016 г.), XLI (2017г.)

Академических чтениях по космонавтике, Москва;

– VI (Ташкент, 1986 г.), VII (Москва, 1991 г.), XI (Казань, 2015 г.)

Всероссийских съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики;

– XLVIII (2013 г.), XLIX (2014 г.), L (2015 г.) научных чтениях памяти

К.Э. Циолковского, Калуга;

и на Международных научных конференциях:

- International Astronautical Congress (66th Jerusalem, Israel, 2015, 67th Guadalajara, Mexico, 2016, 68th Adelaide, Australia, 2017);
- International Symposium on Space Flight Dynamics (9th St.Petersburg–Moscow, Russia, 1994, 14th Foz do Iguacu, Brazil, 1999, 17th Moscow, Russia, 2003);
- International Workshop on Constellations and Formation Flying (4th Piza, Italy, 2006, 5th Evpatoria, Krimea, 2008, 6th Taipei, Taiwan, 2010);
- Astrodynamics Specialist Conference, Quebec, Canada, 2001;
- Key Topics in Orbit Propagation Applied to Space Situational Awareness, Toulouse, France, 2015;
- 7th European Conference on Space Debris, Darmstadt, Germany, 2017;
- IAA-AAS-DyCoSS3-105, РУДН, Москва, РФ, 2017.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 28 статьях в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ, из них 19 статей опубликовано в журналах, входящих в базы данных Web of Science и Scopus, выпущена монография.

Объём и структура работы. Диссертационная работа состоит из 304 страниц машинописного текста, 26 таблиц и 87 рисунков. Она включает в себя введение, восемь глав, заключение с выводами и список литературы, который состоит из 184 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках мероприятия 1.3 федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (Соглашение от 26 сентября 2017 года № 14.577.21.0247, уникальный идентификатор работ RFMEFI57717X0247).

ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ

1.1. Линеаризованные уравнения движения КА

В центральном гравитационном поле скорость движения по круговой орбите:

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}},$$

для Земли $\mu = \gamma M \approx 398600.44 \text{ км}^3/\text{сек}^2$, r_0 - радиус круговой орбиты.

В результате действия возмущений реальная орбита всегда отличается от круговой. Среди возмущений, действующих на КА, основными являются:

- нецентральность гравитационного поля; влияние Луны, Солнца и других притягивающих тел, влияние атмосферы, давление солнечной радиации и т.д.
- работа двигательной установкой КА
- отклонения скорости, радиуса и угла между ними от значений, при которых происходит движение по круговой орбите.

В большинстве задач, связанных с реальными полетами КА, отклонения орбиты от круговой относительно невелики, это позволяет использовать линеаризованные уравнения движения КА. Круговая орбита радиуса r_0 будет называться невозмущенной орбитой, а околокруговая орбита, лежащая в окрестности круговой, будет называться возмущенной.

Уравнения движения КА в цилиндрической системе координат. Движение КА будет рассматриваться в цилиндрической системе координат r, u, z (рис. 1.1), центр O системы находится в центре притяжения. В цилиндрической системе u – угол, в плоскости невозмущенной орбиты отсчитываемый от некоторой начальной оси Ox в направлении движения КА, r – расстояние до проекции КА на плоскость невозмущенной орбиты от центра притяжения, z – расстояние до спутника от плоскости невозмущенной орбиты. Ось z перпендикулярна плоскости невозмущенной орбиты. Она направлена так, что,

спутник движется против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z . Момент, когда спутник проходит через точку, для которой $u=0$, принимается за начало отсчета времени ($t=0$).

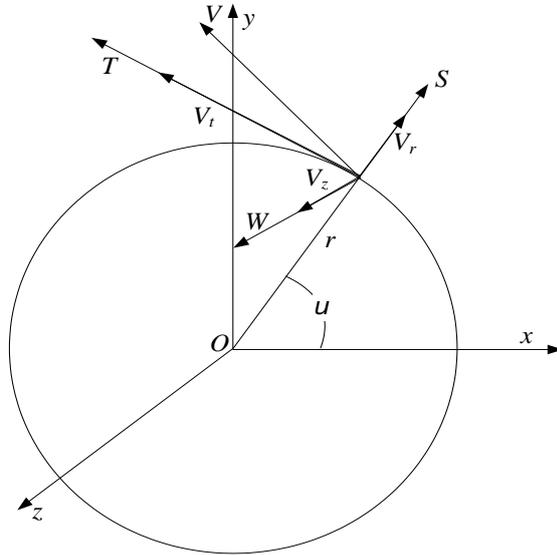


Рисунок 1.1. Положение осей цилиндрической системы координат.

Суммарное ускорение, возникающее в результате действия всех сил кроме силы, создаваемой центральным гравитационным полем ($g = \frac{\mu}{r^2}$), будем считать возмущающим ускорением. Обозначим S , T и W (рис. 1.1) проекции этого ускорения на радиус-вектор r , на нормаль к радиус-вектору в плоскости невозмущенной орбиты, на ось z . Поскольку отношение $\frac{z}{r}$ мало, то после пренебрежения величинами второго порядка малости, уравнения движения КА в цилиндрической системе координат имеют вид [81]:

$$\begin{aligned}
 S - g &= \ddot{r} - r\dot{u}^2, \\
 T &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{u}), \\
 W &= \ddot{z} + g \frac{z}{r}.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Предполагается, что возмущающие ускорения S, T, W малы по сравнению с основным ускорением g , отклонения от кругового движения малыми по сравнению с величинами r_0 и V_0 , величины S, T, W вычисляются на невозмущенной орбите. Это позволяет первые два уравнения системы (1.1) решать независимо от третьего уравнения.

Обозначив

$$V_r = \dot{r} \quad \text{и} \quad V_t = r\dot{i}$$

и подставив их в уравнения (1.1), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= S - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_t^2}{r}, \\ \dot{V}_t &= T - \frac{V_t V_r}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{i} &= \frac{V_t}{r}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

При произвольных возмущающих ускорениях S и T эта система дифференциальных уравнений относительно неизвестных r, V_r, V_t не решается в конечном виде.

Уравнения движения в отклонениях от движения по невозмущенной круговой орбите. Обозначим $\Delta r, \Delta V_r, \Delta V_t, \Delta i$ разности между значениями этих величин для возмущенной и невозмущенной орбит, тогда:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \Delta r, \\ V_r &= \Delta V_r, \\ V_t &= V_0 + \Delta V_t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для невозмущенной орбиты первое уравнение системы (1.2) имеет вид:

$$0 = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{V_0^2}{r_0}. \tag{1.4}$$

Подставив зависимости (1.3) в уравнения (1.2), вычтя из первого уравнения равенство (1.4) и полагая величины $\Delta r, \Delta V_r, \Delta V_t$ малыми, с точностью до членов первого порядка малости получаем:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{V}_r - 2\lambda_0 \Delta V_t - \lambda_0^2 \Delta r &= S, \\ \Delta \dot{V}_t + \lambda_0 \Delta V_r &= T, \\ \Delta \dot{r} - \Delta V_r &= 0, \\ \Delta \dot{u} &= \frac{1}{r_0} (\Delta V_t - \lambda_0 \Delta r),\end{aligned}\tag{1.5}$$

здесь λ_0 – угловая скорость движения КА по круговой невозмущенной орбите:

$$\lambda_0 = \frac{V_0}{r_0}.\tag{1.6}$$

Аналогично для отклонений от плоскости орбиты имеем:

$$\ddot{z} + \lambda_0^2 z = W.\tag{1.7}$$

Решение системы уравнений. Решение системы (1.5), (1.7) можно записать в виде [82]:

$$\begin{aligned}\Delta r &= (2 - \cos \lambda_0 t) \Delta r_0 + \frac{1}{\lambda_0} \sin \lambda_0 t \Delta V_{r0} + \frac{2}{\lambda_0} (1 - \cos \lambda_0 t) \Delta V_{t0} + \\ &+ \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t S(\xi) \sin \lambda_0 (t - \xi) d\xi + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t T(\xi) [1 - \cos \lambda_0 (t - \xi)] d\xi, \\ \Delta V_r &= \lambda_0 \sin \lambda_0 t \Delta r_0 + \cos \lambda_0 t \Delta V_{r0} + 2 \sin \lambda_0 t \Delta V_{t0} + \\ &+ \int_0^t S(\xi) \cos \lambda_0 (t - \xi) d\xi + 2 \int_0^t T(\xi) \sin \lambda_0 (t - \xi) d\xi, \\ \Delta V_t &= -\lambda_0 (1 - \cos \lambda_0 t) \Delta r_0 - \sin \lambda_0 t \Delta V_{r0} - (1 - 2 \cos \lambda_0 t) \Delta V_{t0} - \\ &- \int_0^t S(\xi) \sin \lambda_0 (t - \xi) d\xi - \int_0^t T(\xi) [1 - 2 \cos \lambda_0 (t - \xi)] d\xi,\end{aligned}\tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta u_0 - \frac{1}{r_0} (3\lambda_0 t - 2\sin\lambda_0 t) \Delta r_0 - \frac{2}{V_0} (1 - \cos\lambda_0 t) \Delta V_{r0} - \frac{1}{V_0} (3\lambda_0 t - 4\sin\lambda_0 t) \Delta V_{t0} - \\ &\quad - \frac{2}{V_0} \int_0^t S(\xi) [1 - \cos\lambda_0(t-\xi)] d\xi - \frac{1}{V_0} \int_0^t T(\xi) [3\lambda_0(t-\xi) - 4\sin\lambda_0(t-\xi)] d\xi, \\ z &= \cos\lambda_0 t z_0 + \frac{1}{\lambda_0} \sin\lambda_0 t V_{z0} + \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t W(\xi) \sin\lambda_0(t-\xi) d\xi, \\ \Delta V_z &= -\lambda_0 \sin\lambda_0 t z_0 + \cos\lambda_0 t V_{z0} + \int_0^t W(\xi) \cos\lambda_0(t-\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Внеинтегральные члены определяют влияние начальных отклонений на текущие отклонения орбиты от невозмущенной круговой орбиты. Члены, стоящие под интегралами, определяют влияние возмущающих сил. Наиболее интересно влияние малых начальных отклонений. Их влияние на текущие отклонения в безразмерной форме можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta r}{r_0} &= k_{11} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{12} \frac{\Delta V_{r0}}{V_0} + k_{13} \frac{\Delta V_{t0}}{V_0}, \\ \frac{\Delta V_r}{V_0} &= k_{21} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{22} \frac{\Delta V_{r0}}{V_0} + k_{23} \frac{\Delta V_{t0}}{V_0}, \\ \frac{\Delta V_t}{V_0} &= k_{31} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{32} \frac{\Delta V_{r0}}{V_0} + k_{33} \frac{\Delta V_{t0}}{V_0}, \\ \Delta u &= k_{41} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{42} \frac{\Delta V_{r0}}{V_0} + k_{43} \frac{\Delta V_{t0}}{V_0} + k_{44} \Delta u_0, \\ \frac{z}{r_0} &= k_{55} \frac{z_0}{r_0} + k_{56} \frac{V_{z0}}{V_0}, \\ \frac{V_z}{V_0} &= k_{65} \frac{z_0}{r_0} + k_{66} \frac{V_{z0}}{V_0},\end{aligned}\tag{1.9}$$

где k_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 6$) безразмерные коэффициенты:

$$k_{11} = 2 - \cos\varphi, \quad k_{12} = \sin\varphi, \quad k_{13} = 2(1 - \cos\varphi),$$

$$\begin{aligned}
k_{21} &= \sin\varphi, & k_{22} &= \cos\varphi, & k_{23} &= 2\sin\varphi, \\
k_{31} &= -(1-\cos\varphi), & k_{32} &= -\sin\varphi, & k_{33} &= -(1-2\cos\varphi), \\
k_{41} &= -(3\varphi-2\sin\varphi), & k_{42} &= -2(1-\cos\varphi), & k_{43} &= -(3\varphi-4\sin\varphi), & k_{44} &= 1, \\
k_{55} &= \cos\varphi, & k_{56} &= \sin\varphi, \\
k_{65} &= -\sin\varphi, & k_{66} &= \cos\varphi,
\end{aligned}$$

здесь $\varphi = \lambda_0 t$ – невозмущенное значение угла u .

1.2. Постановка задачи маневрирования в окрестности круговой орбиты

Влияние составляющих импульсов скорости на отклонения в фиксированной точке. Примем, что составляющие импульса скорости ΔV_r , ΔV_t , ΔV_z , являются начальными отклонениями проекций вектора скорости. Отклонения элементов орбиты в точке, заданной углом $\varphi = \varphi_f$, в результате действия импульсов скорости, прикладываемых в точках φ_i ($i=1, \dots, N$), вычисляются с помощью системы (1.9). Суммарные отклонений, вызванные действием N импульсами скорости, записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta V_{ri}}{V_0} \sin(\varphi_f - \varphi_i) + 2 \frac{\Delta V_{ti}}{V_0} (1 - \cos(\varphi_f - \varphi_i)) \right) &= \frac{\Delta r}{r_0}, \\
\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta V_{ri}}{V_0} \cos(\varphi_f - \varphi_i) + 2 \frac{\Delta V_{ti}}{V_0} \sin(\varphi_f - \varphi_i) \right) &= \frac{\Delta V_r}{V_0}, \\
\sum_{i=1}^N \left(-\frac{\Delta V_{ri}}{V_0} \sin(\varphi_f - \varphi_i) - \frac{\Delta V_{ti}}{V_0} (1 - 2 \cos(\varphi_f - \varphi_i)) \right) &= \frac{\Delta V_t}{V_0}, \\
\sum_{i=1}^N \left(-2 \frac{\Delta V_{ri}}{V_0} (1 - \cos(\varphi_f - \varphi_i)) - \frac{\Delta V_{ti}}{V_0} (3(\varphi_f - \varphi_i) - 4 \sin(\varphi_f - \varphi_i)) \right) &= \Delta u, \\
\sum_{i=1}^N \frac{\Delta V_{zi}}{V_0} \sin(\varphi_f - \varphi_i) &= \frac{\Delta z}{r_0},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta V_{zi}}{V_0} \cos(\varphi_f - \varphi_i) = \frac{\Delta V_z}{V_0},$$

где $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, \Delta V_{zi}$ – соответственно радиальная, трансверсальная и боковая составляющие i -го импульса скорости.

Рассмотрим стоящие в правой части отклонения как отклонения параметров конечной орбиты (орбиты на которую необходимо выйти с помощью импульсов скорости) от параметров начальной орбиты:

$$\Delta r = \Delta r_f - \Delta r_0, \quad \Delta V_r = \Delta V_{rf} - \Delta V_{r0}, \quad \Delta V_t = \Delta V_{tf} - \Delta V_{t0},$$

$$\Delta u = \Delta u_f - \Delta u_0, \quad \Delta z = z_f - z_0, \quad \Delta V_z = V_{zf} - V_{z0},$$

здесь индексами «0», «f» обозначены отклонения от круговой орбиты начальной и конечной орбит в точке $\varphi = \varphi_f$.

Тогда из системы (1.10) определяются параметры импульсов скорости, обеспечивающие выполнение терминальных условий выхода на заданную конечную орбиту.

Отклонения от круговой орбиты, вычисленные в цилиндрической системе координат, наиболее эффективно использовать при решении задачи встречи двух космических аппаратов на последнем интервале маневрирования, когда большое значение имеет оценка их взаимного положения и движения. В этот момент прицельной точкой, как правило, является не сам пассивный аппарат, а некоторая точка в его окрестности. Этот сдвиг задается так называемым «прицельным вектором». Например, если активный КА находится на внутренней орбите относительно КА цели, то можно выбирать небольшие отрицательные отклонения по радиусу и трансверсальной скорости (например, $\Delta r = -0.5$ км, $\Delta V_t = -10$ м/с), что обеспечивает сближение «снизу», при котором активный КА догоняет цель и подходит к ней снизу.

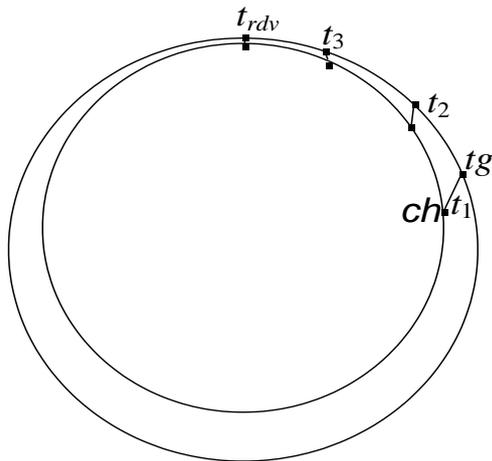


Рисунок 1.2. Процесс сближения КА на орбите.

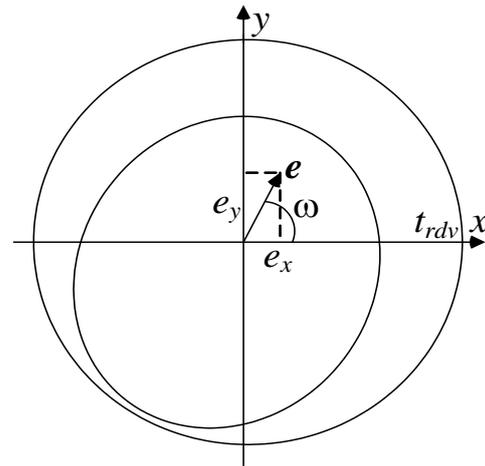


Рисунок 1.3. Система координат, используемая при решении задачи встречи.

Схема такого сближения представлена на рисунке 1.2. На рисунке изображены положения активного КА (обозначен *ch*, внутренняя орбита) и КА-цели (*tg*) в моменты времени t_1 , t_2 , t_3 , предшествующие моменту встречи, а также сам момент встречи t_{rdv} . Положения КА на один момент времени соединены между собой отрезками. Отклонение $\Delta r = -0.5$ км гарантирует, что столкновения не будет, даже если не сработает аппаратура автономного сближения.

Если активный КА первоначально находится на внешней орбите, то знаки заданных отклонений от прицельной точки и схема сближения обратные (так называемое сближение "сверху").

Влияние составляющих импульсов скорости на отклонения элементов орбиты. Ранее была получена система уравнений, описывающая влияния составляющих импульсов скорости на отклонения от круговой орбиты. Гораздо чаще орбиты заданы кеплеровыми элементами и интерес представляет именно изменение этих элементами. Чтобы перейти к этим элементам вводится система координат $Oxuz$, центр которой расположен в центре притяжения, ось Oy лежит в плоскости орбиты, ось Ox направлена на точку, в которой вычисляются

отклонения (рис. 1.3). В работе П.Е. Эльясберга [82] приведена связь введенных выше отклонений с элементами орбиты:

$$\begin{aligned}\Delta a &= 2\left(\Delta r + \frac{\Delta V_t}{\lambda_0}\right), \\ e_x &= \frac{\Delta r}{r_0} + 2\frac{\Delta V_t}{V_0}, \\ e_y &= -\frac{\Delta V_r}{V_0},\end{aligned}\tag{1.11}$$

здесь e – эксцентриситет орбиты, e_x, e_y – проекции вектора эксцентриситета на оси x и y , a – большая полуось орбиты, Δa – отличие её от r_0 . Вектор эксцентриситета e это направленный в сторону перицентра орбиты вектор, имеющий величину эксцентриситета e (рис. 1.3). Для задачи встречи удобно, когда точка, в которой вычисляются отклонения, совпадает с точкой встречи.

Система (1.11) позволяет для околокругового движения условия выхода в заданную точку конечной орбиты (1.10) записать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \cos \varphi_i) &= \Delta e_x, \\ \sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \sin \varphi_i) &= \Delta e_y, \\ \sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ti} &= \Delta a, \\ \sum_{i=1}^N (2\Delta V_{ri} (1 - \cos \varphi_i) + \Delta V_{ti} (-3\varphi_i + 4\sin \varphi_i)) &= \Delta t, \\ \sum_{i=1}^N -\Delta V_{zi} \sin \varphi_i &= \Delta z,\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\sum_{i=1}^N \Delta V_{zi} \cos \varphi_i = \Delta V_z,$$

здесь $\Delta a = (a_f - a_0)/r_0$, $\Delta e_x = e_f \cos \omega_f - e_0 \cos \omega_0$, $\Delta e_y = e_f \sin \omega_f - e_0 \sin \omega_0$, $\Delta z = z_0/r_0$, $\Delta V_z = V_{z0}/V_0$, $\Delta t = \lambda_0(t_f - t_0)$, $\Delta V_{ri} = \Delta V_{ri}^*/V_0$, $\Delta V_{ti} = \Delta V_{ti}^*/V_0$, $\Delta V_{zi} = \Delta V_{zi}^*/V_0$, где « f », « 0 » – соответственно индексы конечной и начальной орбит, e_0 , e_f – эксцентриситеты орбит; a_0 , a_f – большие полуоси орбит; ω_0 , ω_f – углы между направлением на точку заданную на конечной орбите (ось Ox – направлена на эту точку) и направлением на перицентр этой орбиты; t_f – фиксированное время прилета в заданную точку, t_0 – время, в которое проекция радиус-вектора на плоскость конечной орбиты попадет на луч, проходящий через заданную точку, когда движение происходит по начальной орбите; z_0 – отклонение спутника, находящегося на начальной орбите, от плоскости конечной орбиты в момент t_0 ; V_{z0} – боковая относительная скорость в момент t_0 ; λ_0 , V_0 – угловая и орбитальная скорости движения по опорной круговой орбите радиуса r_0 ; N – число импульсов скорости; φ_i – угол приложения i -го импульса скорости; эти углы отрицательны так как отсчитываются от направления на заданную точку в сторону движения КА (в заданной точке $\varphi_f = 0$); ΔV_{ti}^* , ΔV_{ri}^* , ΔV_{zi}^* – соответственно трансверсальная, радиальная и боковая составляющие i -го импульса скорости.

Постановка задачи. При расчете параметров маневров требуется, чтобы углы приложения импульсов скорости принадлежали заданным интервалам маневрирования. Начало и конец каждого интервала маневрирования F_1, \dots, F_N , задаются номером витка и аргументом широты. Ограничение на углы приложения импульсов скорости можно записать в следующем виде:

$$\varphi_1 \in F_1, \dots, \varphi_N \in F_N, \quad (1.13)$$

здесь F_1, \dots, F_N – заданные интервалы маневрирования.

Задачу поиска параметров оптимальных маневров можно записать в следующем виде: определить составляющие импульсов скорости ΔV_{ri} , ΔV_{ti} , ΔV_{zi} , φ_i ($i=1, \dots, N$), при которых СХС маневров ΔV минимальна

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2}$$

при ограничениях (1.12), (1.13). В зависимости от задачи могут учитываться только некоторые из этих ограничений.

Геометрическая интерпретация импульсов скорости. Как следует из первых двух уравнений системы (1.12), изменение вектора эксцентриситета орбиты в результате приложения трансверсальной составляющей ΔV_{ti} i -го импульса скорости на плоскости e_x, e_y можно изобразить вектором AB (рис 1.4). Длина вектора – $2\Delta V_{ti}$, вектор образует угол φ_i с осью e_x .

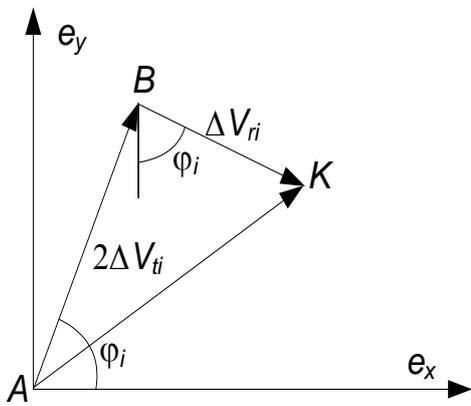


Рисунок 1.4. Изменение вектора эксцентриситета при сообщении импульса скорости

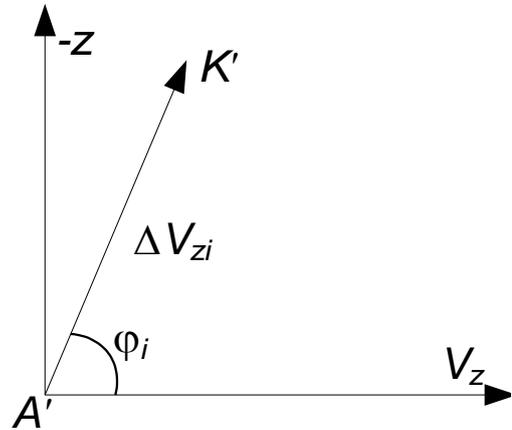


Рисунок 1.5. Отклонение от плоскости орбиты при сообщении боковой составляющей импульса скорости

Изменение, вызванное радиальной составляющей ΔV_{ri} , изображается вектором BK (рис 1.4). Длина вектора – ΔV_{ri} , вектор образует угол $1.5\pi + \varphi_i$ с осью e_x . Очевидно, что вектор BK перпендикулярен вектору AB . Самому импульсу скорости на плоскости e_x, e_y будет соответствовать вектор AK , показывающий, какое изменение вектора эксцентриситета произойдет в результате приложения импульса скорости с такими радиальной и трансверсальной составляющими. Из пятого и шестого уравнений системы (1.12) следует, что на плоскости $(V_z, -z)$

боковой составляющей i -го импульса скорости соответствует вектор $A'K'$ длины ΔV_{zi} , проведенный под углом φ_i к оси V_z (рис 1.5).

Таким образом, многоимпульсному решению задачи в координатах e_x, e_y и $V_z, -z$ соответствуют ломаные линии. Примеры таких ломаных для двухимпульсного решения с нулевыми радиальными составляющими импульсов скорости приведены на рис.1.6 и рис.1.7. У этого решения ΔV_{11} , ΔV_{12} , ΔV_{z1} положительны, ΔV_{z2} – отрицательна.

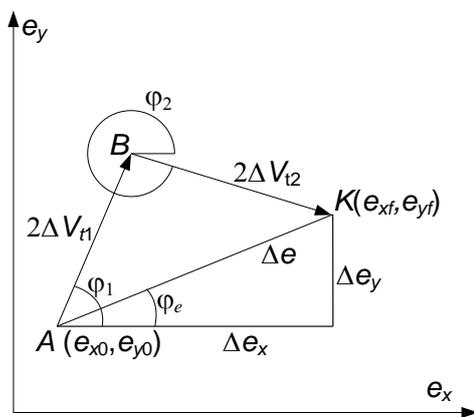


Рисунок 1.6. Двухимпульсное изменение вектора эксцентриситета

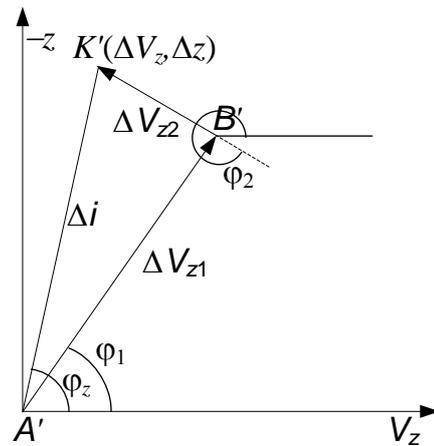


Рисунок 1.7. Двухимпульсный поворот плоскости орбиты

На рисунках обозначены углы φ_e , φ_z , которые задают направление оптимальной коррекции отклонения вектора эксцентриситета и отклонения плоскостей орбит соответственно. Эти углы вычисляются по формулам:

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}, \quad (1.14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_z = -\frac{\Delta z}{\Delta V_z}. \quad (1.15)$$

Представляет интерес $\Delta\varphi$ – разница углов между направлениями оптимальной коррекции отклонения вектора эксцентриситета и отклонения плоскостей орбит:

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z, \quad (1.16)$$

Δi – минимальный импульс скорости (безразмерный) необходимый для совмещения плоскостей орбит вычисляются по формуле:

$$\Delta i = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta V_z^2}. \quad (1.17)$$

Относительная орбита. Можно видеть, что в системе (1.12) отсутствуют значения самих элементов начальной и конечной орбит, а присутствуют только отклонения элементов этих орбит в точке встречи. Таким образом, переход между эллиптическими орбитами с параметрами (e_{x0}, e_{y0}, a_0) и (e_{xf}, e_{yf}, a_f) эквивалентен переходу с круговой орбиты радиуса r_0 на эллиптическую с параметрами $(\Delta e_x, \Delta e_y, a=r_0+\Delta a)$, где $\Delta e_x = e_{xf} - e_{x0}$, $\Delta e_y = e_{yf} - e_{y0}$, $\Delta a = a_f - a_0$. Орбиту, имеющую такие элементы, будем называть относительной, а вместо перехода из точки (e_{x0}, e_{y0}) в точку (e_{xf}, e_{yf}) на плоскости e_x, e_y будет изображаться переход из точки $(0,0)$ в точку $(\Delta e_x, \Delta e_y)$.

1.3. Одноимпульсные маневры

Одноимпульсный переход между орбитами. Если орбиты лежат в одной плоскости и пересекаются, то с начальной орбиты на конечную можно перейти одним импульсом скорости, который прикладывается в одной из точек пересечения орбит. Как уже отмечалось, на плоскости e_x, e_y решению задачи соответствует ломаная, которая начинается в начале системы координат (т.А) и должна заканчиваться в т.К, соответствующей вектору эксцентриситета относительной орбиты (рис.1.8).

В одноимпульсной задаче имеются трансверсальная и радиальная составляющие импульса скорости, следовательно, ломаная будет состоять из двух отрезков. Величина трансверсальной составляющей находится из третьего уравнения системы (1.12) $\Delta V_t = \frac{\Delta a}{2}$.

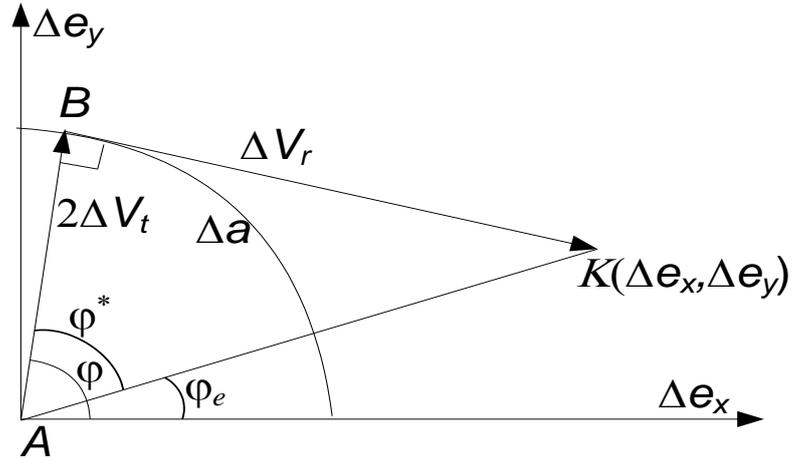


Рисунок 1.8. Одноимпульсный переход между компланарными пересекающимися орбитами.

На плоскости e_x, e_y геометрическим местом точек, которые можно достичь с помощью этой составляющей, будет окружность радиуса Δa (рис. 1.8), т.к. угол приложения импульса скорости пока не определен, а величина трансверсальной составляющей известна. Как было показано выше, отрезок, соответствующий радиальной составляющей, перпендикулярен отрезку, соответствующему трансверсальной составляющей, значит, радиальной составляющей импульса скорости должен соответствовать отрезок касательный к окружности. Так как необходимо сформировать заданный вектор эксцентриситета (перейти при помощи двух составляющих из точки A в точку K), то радиальной составляющей будет соответствовать отрезок BK (удвоенной трансверсальной - AB) (рис.1.8). Используя найденное геометрическое решение задачи, можно найти величину радиальной составляющей и угол приложения импульса скорости φ :

$$\Delta V_r = \sqrt{\Delta e^2 - \Delta a^2},$$

$$\varphi = \varphi_e \pm \varphi^*, \text{ где } \sin \varphi^* = \frac{\Delta V_r}{\Delta e},$$

а также затраты суммарной характеристической скорости на переход между орбитами:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta e^2 - \frac{3}{4} \Delta a^2}.$$

При помощи радиальной составляющей достичь точки K можно только, если она лежит вне окружности, т.е. если выполнено условие $AK > AB$, а это эквивалентно условию $\Delta e > |\Delta a|$. Но, с другой стороны, одноимпульсное решение существует, только если орбиты пересекаются, следовательно, для пересечения орбит необходимо выполнение условия $\Delta e > |\Delta a|$. Заметим, что формулу для угла приложения импульса скорости одноимпульсного перехода на заданную орбиту можно использовать для нахождения положения точек пересечения орбит. Использованный геометрический подход к решению задачи будет ниже использоваться для решения задач перехода и встречи.

Поворот плоскости орбиты. Как видно из рисунка 1.7, совместить плоскости орбит можно также одним импульсом скорости, прикладываемым в точке $\varphi = \varphi_z$, величина импульса

$$\Delta V_z = \Delta i,$$

или в точке $\varphi = \varphi_z + \pi$, тогда

$$\Delta V_z = -\Delta i,$$

здесь φ_z , Δi – вычисляются по формулам (1.15), (1.17). Очевидно, что эти импульсы скорости прикладываются на линии пересечения плоскостей конечной и начальной орбит. Определить Δi можно и не вычисляя отклонений Δz , ΔV_z , если мы знаем угол между плоскостями орбит $\Delta \gamma$:

$$\Delta i = 2 \sin \frac{\Delta \gamma}{2}.$$

Для малых углов между орбитами, а такие задачи и рассматриваются в данной работе,

$$\Delta i = \Delta \gamma .$$

Таким образом, можно считать, что Δi – угол между плоскостями орбит.

Определить $\Delta \gamma$ и u_z (u_z - аргумент широты точки приложения импульса скорости, совмещающего плоскости орбит) можно, зная наклонение начальной i_0 и конечной i_f орбит и разность их долгот восходящего узла $\Delta \Omega$:

$$\cos \Delta \gamma = \cos i_f \cos i_0 + \sin i_f \sin i_0 \cos \Delta \Omega ,$$

$$\sin u_z = \frac{\sin i_f \sin \Delta \Omega}{\sin \Delta \gamma} .$$

Особенно простые формулы получаются, если необходимо корректировать только разность в наклонении i или $\Delta \Omega$:

$$\Delta \gamma = i_f - i_0, \quad u_z = 0^\circ \text{ или } 180^\circ \text{ (экватор)},$$

$$\Delta \gamma = \Delta \Omega, \quad u_z = 90^\circ \text{ или } 270^\circ \text{ (апекс или вертекс орбиты)}.$$

Изменение большой полуоси эллиптической орбиты. Для изменения только одного из элементов орбиты можно воспользоваться более точными формулами, чем формулы околокругового движения. Например, изменение большой полуоси эллиптической орбиты можно вычислить с помощью известной формулы:

$$\Delta a = \frac{2a^2 V}{\mu} \Delta V_T,$$

где V – скорость в точке орбиты, в которой прикладывается импульс скорости, а ΔV_T – тангенциальная составляющая этого импульса скорости. Таким образом, максимальное изменение большой полуоси достигается, когда импульс скорости ориентирован по касательной к орбите и прикладывается в перигеуме.

Простые формулы линеаризованного движения понадобятся для получения аналитического решения задач, в которых необходимо одновременно корректировать несколько или все элементы орбиты.

1.4. Необходимые условия оптимальности

Чтобы сформировать заданную орбиту, а тем более оптимально решить задачу встречи, необходимо использовать от двух до шести импульсов скорости. Как правило, число $4N$ параметров, где N – число импульсов скорости, превышает число ограничений в системе (1.15). Таким образом, имеется задача поиска оптимального решения. Наиболее эффективно искать её решение, с помощью теории базис-вектора (prime vector) [6].

Уравнения движения (1.5), (1.7) после перехода к угловой переменной θ и безразмерному виду приведены в [8]:

$$\frac{d\Delta\tilde{r}}{d\theta} = \Delta\tilde{V}_r,$$

$$\frac{d\Delta\tilde{t}}{d\theta} = \Delta\tilde{r} - \Delta\tilde{V}_t,$$

$$\frac{d\Delta\tilde{z}}{d\theta} = \Delta\tilde{V}_z,$$

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_r}{d\theta} = 2\Delta\tilde{V}_t + \Delta\tilde{r} + n_r, \quad (1.18)$$

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_t}{d\theta} = -\Delta\tilde{V}_r + n_t,$$

$$\frac{d\Delta\tilde{V}_z}{d\theta} = -\Delta\tilde{z} + n_z,$$

$$\frac{d\tilde{q}}{d\theta} = n,$$

где c – скорость истечения, $q = c \ln \frac{m_0}{m}$ – характеристическая скорость, m_0 и m – начальная и текущая массы КА, n_r, n_t, n_z и $n = \sqrt{n_r^2 + n_t^2 + n_z^2}$ – компоненты реактивного ускорения и его модуль, отнесенные к ускорению силы тяжести $g(r_0)$.

В работе [8] приведена также система сопряженных уравнений для системы (1.18):

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{d\theta} &= -s_r - p_t, \\ \frac{dp_t}{d\theta} &= 0, \\ \frac{dp_z}{d\theta} &= s_z, \\ \frac{dp_q}{d\theta} &= 0, \\ \frac{ds_r}{d\theta} &= s_t - p_r, \\ \frac{ds_t}{d\theta} &= -2s_r + p_t, \\ \frac{ds_z}{d\theta} &= -p_z, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где $s=(s_r, s_t, s_z)$ – вектор, сопряженный вектору скорости $V=(V_r, V_t, V_z)$, p_r, p_t, p_z – переменные сопряженные $\Delta r, \Delta t, \Delta z$.

А также решение этой системы:

$$p_r = 2\lambda_1 + \lambda_2 \sin \theta + \lambda_3 \cos \theta - 3\lambda_6 \theta,$$

$$p_t = \lambda_6,$$

$$p_z = \lambda_5 \sin \theta - \lambda_4 \cos \theta,$$

$$p_q = -1, \quad (1.20)$$

$$s_r = -\lambda_2 \cos \theta + \lambda_3 \sin \theta + 2\lambda_6,$$

$$s_t = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \sin \theta + 2\lambda_3 \cos \theta - 3\lambda_6 \theta,$$

$$s_z = \lambda_4 \sin \theta + \lambda_5 \cos \theta,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ – произвольные константы.

Гамильтониан задачи [155] имеет вид:

$$H = [(s, n) + p_q n] + s_r(2\Delta V_t + \Delta r) + s_t(-\Delta V_t) + s_z(-\Delta z) + p_r \Delta V_r + p_t(\Delta r - \Delta V_t) + p_z \Delta V_z. \quad (1.21)$$

Необходимые условия оптимальности. Вектор-функцию $s(s_r, s_t, s_z)$, сопряженную вектору скорости, Лоуден (Lawden D.F.) назвал базис-вектором. В работе [8] он показал, что на оптимальной траектории модуль базис-вектора не превосходит единицы, а импульсы скорости должны прикладываться в моменты, равенства единице модуля базис-вектора. В этой точке траектории направление импульса скорости должно совпадать с направлением базис-вектора. Таким образом, у оптимального решения годограф базис-вектора не должен выходить за пределы окружности единичного радиуса (компланарная задача) или сферы единичного радиуса (пространственная задача). У оптимального решения внутренние (по порядку приложения) импульсы скорости должны исполняться в моменты касания годографом базис-вектора сферы (пространственный случай) или окружности (компланарный перелет), а внешние импульсы скорости исполняются в моменты пересечения годографом сферы (окружности) в самом начале и конце перелета.

Для переменных, сопряженных вектору скорости, обычно используются обозначения λ, μ, ν , а пятое, шестое и седьмое уравнения системы (1.20) для этих переменных записываются в виде [83]:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin(\theta - \theta_0) + 2\lambda_6, \\
\mu &= 2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos(\theta - \theta_0) - 3\lambda_6\theta, \\
\nu &= \frac{\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_5}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \sin(\theta - \theta_0) + \frac{\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \cos(\theta - \theta_0), \\
\operatorname{tg}\theta_0 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

аким образом, оптимальная ориентация импульса скорости $\Delta\bar{V}_i$, исполняемого в точке θ_i , задается уравнениями:

$$\frac{\Delta V_{ri}}{\Delta V_i} = \lambda(\theta_i); \quad \frac{\Delta V_{\theta i}}{\Delta V_i} = \mu(\theta_i); \quad \frac{\Delta V_{zi}}{\Delta V_i} = \nu(\theta_i). \tag{1.23}$$

В пространственном случае уравнения (1.22) это уравнения спирали в пространстве λ, μ, ν , при перелете между компланарными орбитами они описывают циклоиду на плоскости μ, λ . При $\lambda_6=0$ годограф базис-вектора вырождается в эллипс, окружность, отрезок или точку. Каждый из этих типов годографа определяет конкретный тип оптимального решения. Выбор типа решений зависит от условий задачи.

Графики зависимости модуля базис-вектора s от времени приведены на рис. 1.9. График, соответствующий годографу базис-вектора, имеющему форму эллипса, изображен на рисунке (а), а график, соответствующий годографу в форме полутора витковой циклоиды, изображен на рисунке (б).

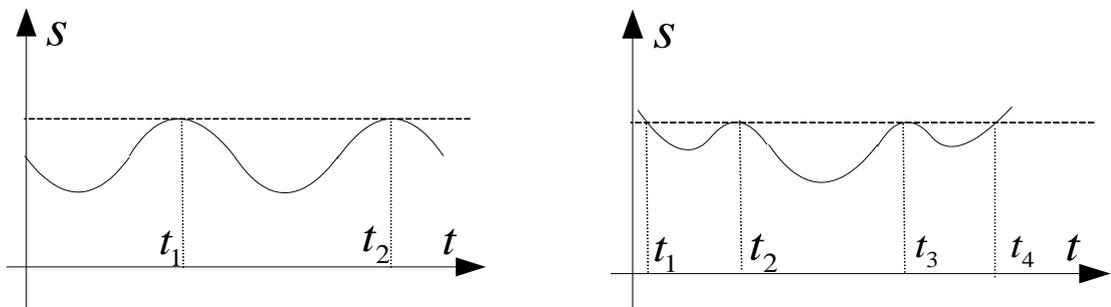


Рисунок 1.9. Зависимость модуля базис-вектора от времени для годографа в форме: (а) - эллипса; (б) - циклоиды.

1.5. Общая схема решения задачи маневрирования

В используемых линеаризованных уравнениях, описывающих движение КА, не учитываются существенные действующие на КА силы: влияние динамической атмосферы, влияние нецентральности гравитационного поля, продолжительность работы двигателей КА. В результате заданная орбита не будет сформирована с необходимой точностью. Заданную точность формирования терминальных условий может обеспечить использование итерационной процедуры, описанной в работе [21], [68]. Эта процедура состоит из нескольких этапов:

В начале процедуры производится интегрирование до момента встречи уравнений движения КА для конечной и начальной орбит. При интегрировании учитываются модели перечисленных выше возмущений. После интегрирования вычисляется разность элементов начальной и конечной орбит.

Затем определяются параметры маневров, которые формируют “прицельную” орбиту (на первой итерации “прицельной” орбитой является конечная орбита). Задача решается в максимально упрощенной постановке (используются линеаризованные уравнения, возмущения не учитываются).

На следующем этапе опять производится интегрирование уравнений движения КА, но в его процессе моделируется исполнение рассчитанных маневров. В результате находятся элементы сформированной в точке встречи орбиты и вычисляется их разность с элементами конечной орбиты.

Для прогнозирования движения с учетом возмущений обычно используется численное интегрирование. Если интервалы прогнозирования велики (несколько сотен витков) целесообразно использовать высокоточное численно-аналитическое интегрирование, обеспечивающее необходимую точность прогноза.

Можно видеть, что использование данной итерационной процедуры, в которой поиск оптимального решения происходит при ряде упрощающих предположений, не гарантирует, что найденное решение будет строго оптимальным. Примерная оценка возможного отличия от оптимального решения

на первой итерации приведена в таблице 2.1 раздела 2.1.5. Но, во-первых, изменение терминальных условий решаемой задачи в ходе итерационного процесса, а также некоторые специальные приемы, например, изменение порядка приложения импульсов скорости (см. 2.1.6), позволяют приблизить найденное решение к реальному оптимальному решению. Во-вторых, при решении реальных задач на первое место выходят точность формирования заданной орбиты, а также надежность и скорость получения решения, что и обеспечивает данная схема. Отличие по суммарной характеристической скорости в несколько процентов найденного решения от оптимального обычно допускается. Как будет показано ниже, практики готовы иногда жертвовать и 40% суммарной характеристической скорости ради простоты и надежности решения. К тому же, как показали результаты, полученные при решении реальных задач, разница между решением, найденным с помощью данного метода и решениями, полученными с помощью громоздких численных методов, редко превышает 1%.

При применении численных методов, не использующих данную итерационную процедуру, трудно обеспечить одновременно строгую минимизацию СХС и необходимую точность формирования заданной орбиты, а также возникают проблемы с выбором решения для начала процесса минимизации и с нахождением всех локальных минимумов. Такой подход не обеспечивает ни высокой скорости, ни надежности получения решения.

Все сказанное объясняет, почему во всех баллистических центрах нашей страны использование данной итерационной процедуры получило широкое распространение.

Поскольку надежность является одной из основных характеристик метода решения практических задач, вопрос сходимости используемой итерационной процедуры имеет первостепенное значение.

Данная итерационная процедура позволяет получать решения, даже когда разность между начальной и конечной орбитами нескольких сотен километров. Существенной (до нескольких десятков градусов по u) может быть и

продолжительность маневров. Для большинства практических задач данная процедура быстро и надежно сходится. Например, при расчете параметров маневров КК типа «Союз», «Прогресс», как правило, достаточно пяти итераций. Однако, когда отбрасываемые возмущения становятся действительно значительными или имеет место одновременный рост нескольких возмущений, проблемы со сходимостью итерационной процедуры появляются. В этом случае требуется учесть некоторые из возмущений, например, влияние второй гармоники разложения потенциала гравитационного поля или продолжительную работу ДУ, непосредственно при определении параметров маневров, а также использовать специальные приемы, улучшающие сходимость, – такие приемы также были разработаны. Это позволило обеспечить необходимую надежность и скорость сходимости для всех многочисленных практических задач, встретившихся за более чем 40 лет работы с реальными проектами.

1.6. Основные типы задач оптимального маневрирования КА

Задача поиска параметров оптимальных маневров на околокруговых орбитах была сформулирована в общем виде. На самом деле можно выделить несколько различных типов задач, которые приходится решать при работе с реальными КА. Естественно, что у каждой из этих задач существует своё решение. Имеются и хорошо известные частные случаи основных типов задач, которые имеют свои ещё более простые решения. Еще в работе [1] были выделены два основных типа задач маневрирования КА:

- задача перехода между орбитами, когда время перелета с начальной на заданную конечную орбиту свободно (как правило, двухимпульсные решения);
- задача встречи, в которой время перелета в заданную точку на конечной орбите фиксировано (иногда двухимпульсные, но, как правило, трех и более импульсные решения).

В свою очередь, в каждом из этих типов задач возможны две разновидности маневров:

- компланарные маневры (конечная орбита лежит в одной плоскости с начальной).
- некомпланарные маневры (плоскости этих орбит не совпадают).

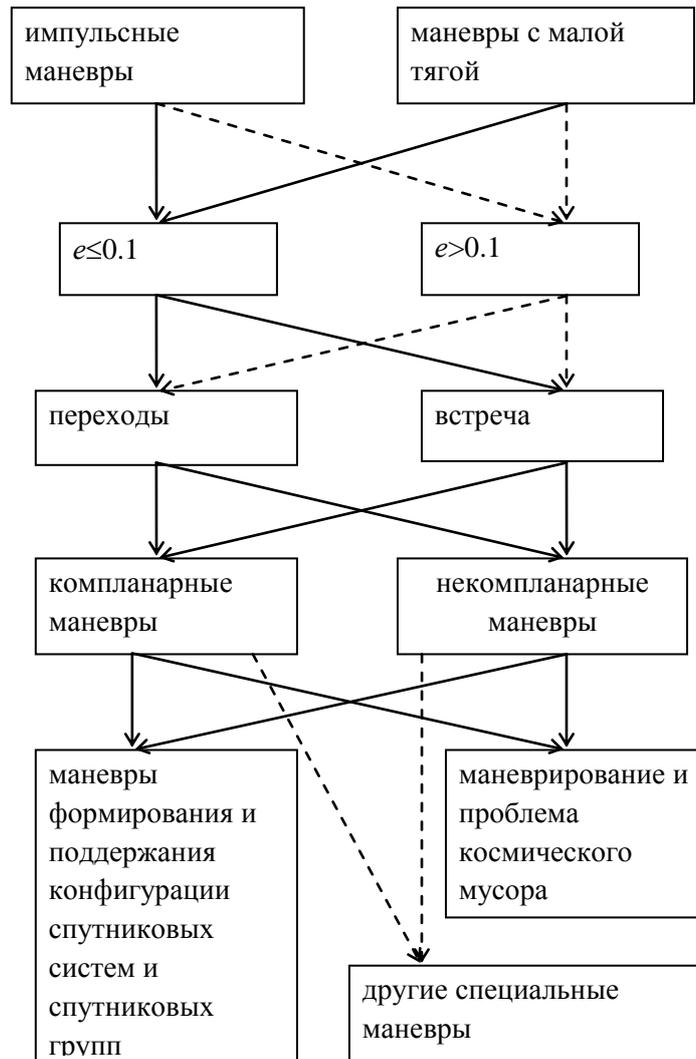
Таким образом, для импульсных маневров имеется четыре различных класса задач. Необходимо отметить, что у каждой из этих задач существуют три-четыре типа возможных оптимальных решений.

Те же классы задач имеются для маневров, исполняемых с помощью двигателей ограниченной мощности, когда участки работы двигателя занимают значительную часть витка.

Аналогичные задачи встречаются и при расчете маневров перелета между орбитами с большими эксцентриситетами.

Описанная классификация маневров приведена на схеме. Задачи, соответствующие пунктирным стрелкам, а это всё, что касается перелетов, когда хотя бы одна из орбит имеет значительный эксцентриситет, в данной работе не рассматриваются. Весь комплекс задач, соответствующих сплошным стрелкам, рассмотрен достаточно подробно.

На этой схеме приведено условное деление задач по эксцентриситету равному 0.1. На самом деле, как уже упоминалось, используемая при решении задач итерационная процедура сходится и при значительно больших значениях эксцентриситета.



Точно также достаточно трудно провести точную границу между задачами, которые решаются с импульсным приближением маневров, и задачами, в которых необходимо учитывать реальную продолжительность маневров.

Импульсные маневры переходов между компланарными и некомпланарными орбитами будут рассмотрены во второй главе. В третьей и четвертой главах исследуются задачи встречи на компланарных и некомпланарных орбитах. В пятой главе описаны численные методы решения близких к импульсным задач встречи. В шестой главе рассмотрено маневрирование с помощью двигателей малой тяги.

Описанию особенностей маневрирования при создании заданной конфигурации спутниковых систем и спутниковых групп посвящена седьмая

глава. Рассмотрены как частные задачи, например, изменение положения спутника в спутниковой системе, функционирующей на круговых орбитах (в том числе перелет в другую рабочую плоскость), так и задачи в самой общей постановке. В восьмой главе рассмотрена задача относительного поддержания заданной конфигурации спутниковой системы.

ГЛАВА II. МАНЕВРЫ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ И НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ

Решение задачи перехода между околокруговыми орбитами было найдено во второй половине шестидесятых годов прошлого века. Задача перехода между компланарными орбитами в нашей стране была решена Г. Е. Кузмаком с помощью метода множителей Лагранжа в работе [84] и геометрическим методом в работе А.А. Красовского и Е.И. Бушуева [85]. Задача перехода между некомпланарными орбитами практически в одно время была решена в работах Г.Е. Кузмака [84], Ж.П. Марека [7] и Т.Н. Эдельбаума [83]. Результаты этих работ описаны в данной главе, так как эти результаты использованы в следующих главах при решении задач встречи.

2.1. Компланарные переходы

2.1.1. Постановка задачи. Для переходов между компланарными орбитами образом, уравнения (1.12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ii} \cos \varphi_i) &= \Delta e_x, \\ \sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ii} \sin \varphi_i) &= \Delta e_y, \\ \sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ii} &= \Delta a. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Необходимо определить ΔV_{ri} , ΔV_{ii} , φ_i ($i=1, \dots, N$), обеспечивающие минимум СХС $\Delta V = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ii}^2}$ при ограничениях (2.1).

Для данной задачи необходимые условия оптимальности (1.22) записываются в виде:

$$\lambda = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin(\theta - \theta_0),$$

$$\mu = 2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos(\theta - \theta_0),$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Возможны два типа двухимпульсных решений. В первом случае годограф базис-вектора вырождается в *точку*, лежащую на оси μ , во втором случае годограф базис-вектора – *эллипс*, касающийся окружности единичного радиуса в двух точках на оси μ (рис. 2.1).

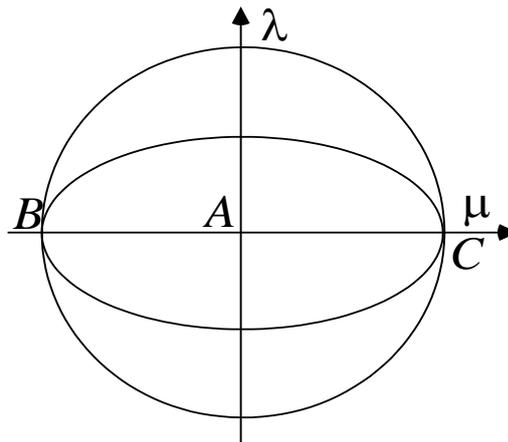


Рисунок 2.1. Годограф базис-вектора для оптимального решения

2.1.2. Переходы между компланарными непересекающимися орбитами (компланарные особые решения).

Годограф базис-вектора вырождается в точку, когда $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = \pm 0.5$. Так как $\lambda = 0$ радиальные составляющие импульсов скорости оптимального решения нулевые ($\Delta V_{r_i} = 0$). Трансверсальные составляющие имеют одинаковый знак. Они положительные, если $\mu = 1$, и отрицательны, когда $\mu = -1$. Из-за совпадающих знаков трансверсальных составляющих данный тип решения возможен только для

переходов между непересекающимися орбитами ($|\Delta a| > \Delta e$). Аналогично тому, как это делал Эдельбаум для некомпланарных решений, назовем такие решения компланарные особые решения (coplanar singular solution, CSS).

СХС перехода определяется из третьего уравнения системы (2.1):

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N |\Delta V_{ii}| = \frac{|\Delta a|}{2}.$$

Данную СХС имеют множество решений этого типа отличающиеся углами приложения импульсов скорости.

Можно выбрать угол приложения одного из импульсов, например, $\varphi_1 = \varphi_{1f}$, а затем из системы (2.1) определить величины трансверсальных составляющих импульсов скорости ΔV_{i1} , ΔV_{i2} и угол приложения второго импульса скорости φ_2 :

$$\begin{aligned} \Delta V_{i1} &= \frac{\Delta e^2 - \Delta a^2}{4(\Delta e_y \sin \varphi_{1f} + \Delta e_x \cos \varphi_{1f} - \Delta a)}, \\ \Delta V_{i2} &= \frac{\Delta a}{2} - \Delta V_{i1}, \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{\frac{\Delta e_y}{2} - \Delta V_{i1} \sin \varphi_{1f}}{\frac{\Delta e_x}{2} - \Delta V_{i1} \cos \varphi_{1f}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В работе [85] показано, что на плоскости e_x, e_y геометрическим местом точек, соответствующих вектору эксцентриситета переходной орбиты, получающейся после приложения первого импульса скорости, является эллипс (рис. 2.2). Из множества решений с одинаковой суммарной характеристической скоростью можно выбрать решение, удовлетворяющее дополнительным ограничениям. Это могут быть ограничения на эксцентриситет переходной орбиты, ограничения на величины импульсов скорости или их углы приложения и

т.д. Например, решению с одинаковыми величинами импульсов скорости соответствует ломаная ADK , у которой $AD=DK$.

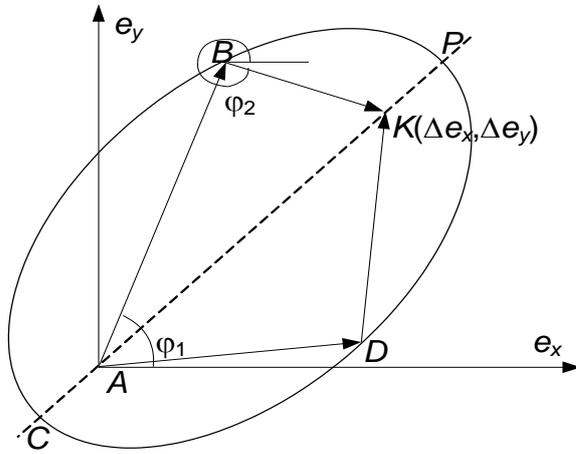


Рисунок 2.2. Геометрическое место вектора эксцентриситета переходной орбиты.

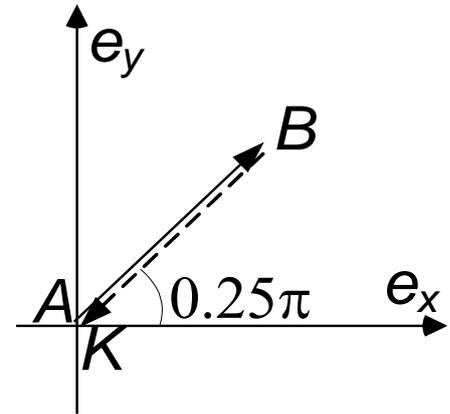


Рисунок 2.3. Переход Гомана

Заметим, что знаменитый Гомановский переход является простейшим частным случаем этого решения. Так как для Гомановского перехода начальная и заданная орбиты круговые, то $\Delta e_x = \Delta e_y = \Delta e = 0$, следовательно, $\Delta V_{t1} = \Delta V_{t2} = 0.25\Delta a$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. Пример такого решения для $\varphi_1 = 0.25\pi$ приведен на рис. 2.3. Первому импульсу скорости соответствует отрезок AB , второму BK .

2.1.3. Переходы между компланарными пересекающимися орбитами (компланарные апсидальные решения).

Второй тип оптимальных решений определяет годограф базис-вектора в виде эллипса, симметричного относительно оси λ , и касающегося окружности единичного радиуса в точках с координатами $(1,0)$ и $(-1,0)$ (рис. 2.1). Такое касания имеет место, если $\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = 0$. Данное решение является оптимальным для переходов между компланарными пересекающимися орбитами

($\Delta e > |\Delta a|$). Поскольку в точках касания $\lambda=0$, радиальные составляющие импульсов скорости также нулевые ($\Delta V_{r_i}=0$). Разница между углами приложения импульсов скорости 180° ($\varphi_2-\varphi_1=180^\circ$). Импульсы скорости прикладываются на линии апсид относительной орбиты. Один импульс скорости разгонный ($\mu=-1$), второй импульс скорости тормозной ($\mu=1$).

Для решений, у которых отсутствуют радиальные составляющие импульсов скорости, на плоскости e_x, e_y геометрическим местом точек, соответствующих вектору эксцентриситета переходной орбиты, получающейся после приложения первого импульса скорости, будут ветви гиперболы (рис. 2.4(а)) [85]. Величины импульсов и их углы приложения также определяются по формулам (2.2), но один из импульсов скорости получится тормозным.

Выбор ветви гиперболы определяется порядком приложения разгонного и тормозного импульсов скорости. Из всей совокупности решений оптимальным является решение, у которого отрезки, соответствующие импульсам скорости направлены вдоль линии симметрии гипербол ($2\Delta V_{t1}=AB$, $2\Delta V_{t2}=BK$ (рис. 2.4(а))), т.е. импульсы скорости прикладываются в перигеуме и апогеуме относительной орбиты.

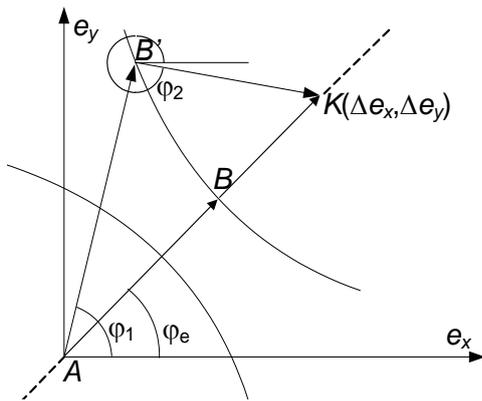


Рисунок 2.4(а). Геометрическое место вектора эксцентриситета переходной орбиты.

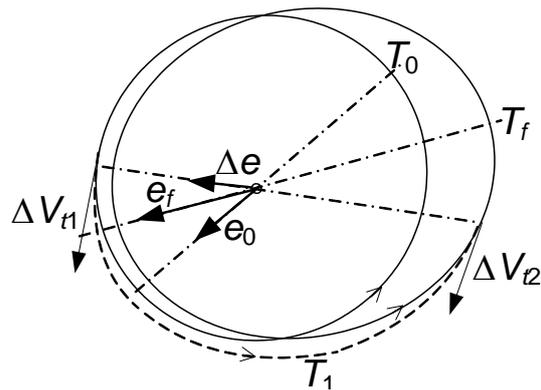


Рисунок 2.4(б). Переход между пересекающимися орбитами

Для решения ABK величины трансверсальных составляющих импульсов скорости определяются по формулам [85]:

$$\begin{aligned}\Delta V_{t1} &= \frac{1}{4}(\Delta a + \Delta e), \\ \Delta V_{t2} &= \frac{1}{4}(\Delta a - \Delta e),\end{aligned}\tag{2.3}$$

а углы приложения по формулам

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi_e &= \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x} \\ \varphi_1 &= \varphi_e, \quad \varphi_2 = \varphi_e + p,\end{aligned}\tag{2.4}$$

Если изменяется порядок приложения импульсов скорости, то СХС решения не меняется.

СХС данного решения определяется по формуле:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N |\Delta V_{ii}| = \frac{\Delta e}{2},$$

Напомним, что если использовать одноимпульсное решение с импульсом скорости в точке пересечения орбит, затраты суммарной характеристической скорости вычисляются по формуле:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta e^2 - \frac{3}{4} \Delta a^2}.$$

Сравнение двух формул показывает, что СХС одноимпульсного маневра больше, т.к. для пересекающихся орбит $\Delta e > |\Delta a|$.

Дадим двухимпульсным решениям этого типа название – компланарные апсидальные решения (coplanar apsidal solution, CAS).

2.1.4. Решение задачи при фиксированных углах приложения импульсов скорости.

В некоторых случаях необходимо найти решение задачи при фиксированных углах приложения импульсов скорости. Такая необходимость возникает, например, при наличии ограничений на разрешённые интервалы маневрирования, а также когда решение задачи перехода является частью алгоритма решения более сложной задачи встречи.

Решение задачи при фиксированных углах приложения импульсов скорости дано в [68]. В этой работе приведены выражения для трансверсальных и радиальных составляющих импульсов скорости, при которых СХС манёвров минимальна, однако выражены они через отклонения координат и скоростей в точке приложения второго импульса скорости, что не очень удобно. Если воспользоваться результатами, приведёнными в работе [68], то можно показать, что справедливо соотношение:

$$\frac{\Delta V_{r1}}{\Delta V_{t1}} = -\frac{\Delta V_{r2}}{\Delta V_{t2}}.$$

С помощью этих соотношений и условий формирования заданной орбиты (2.1) находятся составляющие импульсов скорости, обеспечивающие оптимальное решение:

$$\Delta V_{t2} = 0.5\Delta a \frac{a - \Delta e_x \cos \varphi_1 - \Delta e_y \sin \varphi_1}{2a - \Delta e_x (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \Delta e_y (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)},$$

$$\Delta V_{t1} = 0.5\Delta a \frac{a - \Delta e_x \cos \varphi_2 - \Delta e_y \sin \varphi_2}{2a - \Delta e_x (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \Delta e_y (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)},$$

$$\Delta V_{r2} = \frac{2\Delta V_{t2} (\Delta e_x - a \cos \varphi_1 + 2\Delta V_{t2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2))}{2\Delta V_{t2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - a \sin \varphi_1},$$

$$\Delta V_{r1} = -\frac{2\Delta V_{t1} (\Delta e_x - a \cos \varphi_1 + 2\Delta V_{t2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2))}{2\Delta V_{t2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - a \sin \varphi_1},$$

2.1.5. Сравнение с решением задачи в точной постановке.

В заключение необходимо отметить, что утверждение о том, что СХС перехода между пересекающимися орбитами не зависит от порядка приложения разгонного и тормозного импульсов скорости верно только для линеаризованных уравнений движения КА. Если с помощью итерационной процедуры, описанной в первой главе, уточнить параметры маневров, чтобы терминальные условия были выполнены с высокой точностью, то можно увидеть, что суммарная характеристическая скорость маневров будет несколько отличаться. То же самое относится и к переходам между непересекающимися орбитами, только для них оптимальный переход приходится искать среди множества переходов, имеющих в линеаризованной постановке одинаковую суммарную характеристическую скорость $\Delta V = \frac{|\Delta a|}{2}$. Помочь в выборе действительно оптимального маневра могут теоретические результаты, полученные для оптимальных переходов между эллиптическими орбитами. Эти результаты описаны В.В. Ивашкиным в энциклопедии [86].

При исследовании переходов между компланарными эллиптическими орбитами было установлено, что в случае перехода между свободно ориентированными орбитами минимальные затраты суммарной характеристической скорости будут при одинаково-соосной ориентации орбит, когда линии апсид направлены по одной прямой, а направления от центра притяжения к перицентру одинаковы ($\omega_f = \omega_0$). Оптимальным будет перелет по дуге полуэллипса, соединяющей более удаленный апоцентр с перицентром другой орбиты (рис. 2.5(a) и рис.2.5(b)).

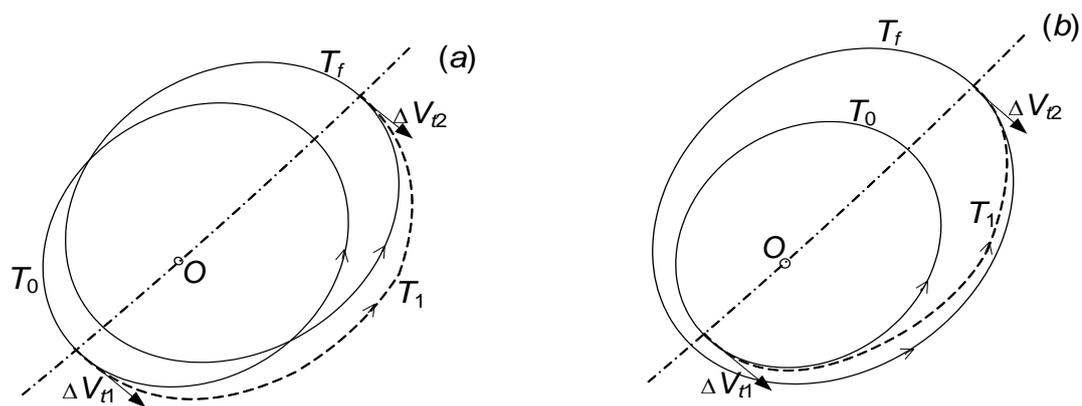


Рисунок 2.5. Оптимальные переходы между соосными орбитами: (a) - между пересекающимися орбитами; (b) - между непересекающимися орбитами

Для обратно-соосных (линии апсид направлены по одной прямой, а направления от центра притяжения к перигею противоположны) пересекающихся орбит оптимальным будет перелет из апоцентра в апоцентр (дуга T_1 на рис. 2.6(a)). Если обратно-соосные орбиты не пересекаются, то оптимальным может быть или аналогичный перелет из апоцентра в апоцентр (дуга T_1 на рис. 2.6(b)) или перелет из перигея в перигей (дуга T_2 на рис. 2.6(b)).

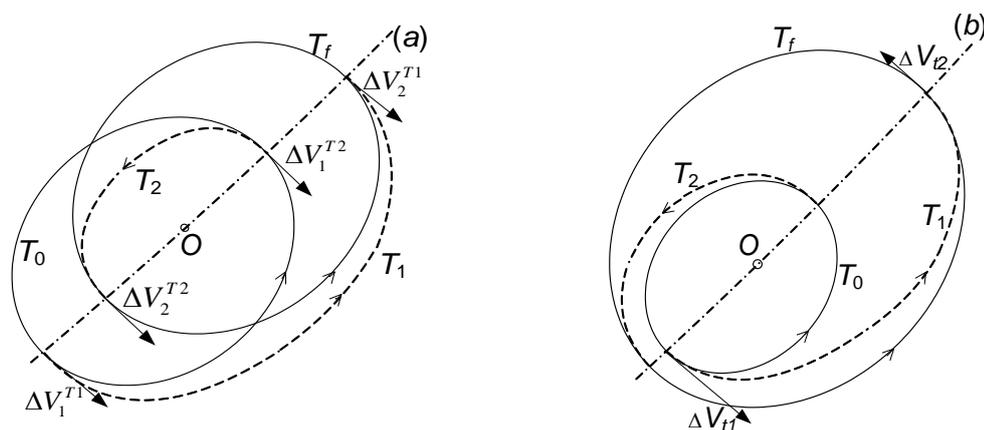


Рисунок 2.6. Переходы между обратно-соосными орбитами:

(a) - между пересекающимися орбитами; (b) - между непересекающимися орбитами.

Для того, чтобы оценить разницу между оптимальным и не оптимальным решениями, посчитаем суммарную характеристическую скорость перелетов по дугам T1 и T2 (рис. 2.6(a)) для случая обратно-соосных пересекающихся орбит, у которых высоты перигея и апогея равны соответственно $h_{\pi} = 200\text{км}$ и $h_{\alpha} = 400\text{км}$. В для рассматриваемого случая обратно-соосных пересекающихся орбит разница в энергетике решений будет максимальна. Большие полуоси, эксцентриситеты и фокальные параметры орбит одинаковые:

$$a = \frac{r_{\alpha} + r_{\pi}}{2} = r_0 + \frac{h_{\alpha} + h_{\pi}}{2} = 6671\text{км},$$

$$e = \frac{r_{\alpha} - r_{\pi}}{2a} = 0.015, \quad p = a(1 - e^2) = 6669.5\text{км}.$$

Скорости в перигее и апогее орбит:

$$V_{\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e) = 7730.756(1 + 0.015) = 7846.717\text{м/с},$$

$$V_{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e) = 7730.756(1 - 0.015) = 7614.795\text{м/с}.$$

Используя формулу для изменения большой полуоси орбиты

$$\Delta a = \frac{2a^2V}{\mu} \Delta V_T,$$

можно найти величину первого импульса скорости для перелета из апоцентра в апоцентр

$$\Delta V_1^{T1} = \frac{\Delta a \mu}{2a^2 V_{\alpha}} = \frac{100 * 398600}{2 * 6671^2 * 7.614795} 1000 = 58.81\text{м/с},$$

и для перелета из перицентра в перицентр

$$\Delta V_1^{T2} = \frac{\Delta a \mu}{2a^2 V_\pi} = \frac{-100 * 398600}{2 * 6671^2 * 7.846717} 1000 = -57.07 \text{ м/с.}$$

На первом этапе для одного и того же изменения большой полуоси получили разницу в 1.74м/с, что составляет примерно 3% от величины импульса скорости. Большие полуоси переходных орбит заметно отличаются. Для перелета по дуге T1 $a_1=6771$ км, для перелета по дуге T2 $a_2=6571$ км. Обе переходные орбиты круговые, скорость движения по дуге T1 $V_1=7.67259$, скорость движения по дуге T2 $V_2=7.78848$.

Теперь можно найти величины вторых импульсов скорости:

$$\Delta V_2^{T1} = \frac{\Delta a \mu}{2a_1^2 V_1} = \frac{-100 * 398600}{2 * 6771^2 * 7.67259} 1000 = -56.65 \text{ м/с,}$$

$$\Delta V_2^{T2} = \frac{\Delta a \mu}{2a_2^2 V_2} = \frac{100 * 398600}{2 * 6571^2 * 7.78848} 1000 = 59.26 \text{ м/с.}$$

СХС перелета по дуге T1 $\Delta V_1=58.81+56.65=115.46$ м/с, по дуге T2 $\Delta V_2=57.07+59.26=116.33$ м/с. Их разница - 0.87м/с, что составляет 0.75% от СХС перелета. Как можно видеть, разница в величинах отдельных импульсов скорости достигает нескольких процентов, но суммарная характеристическая скорость самих перелетов отличается незначительно. Воспользовавшись формулами для околокругового движения можно вычислить величины импульсов скорости, которые одинаковы для обоих переходов

$$\Delta V_{1,2} = \frac{\Delta a}{4aV} = \frac{200 * 7.72988}{4 * 6671} 1000 = 57.936 \text{ м/с.}$$

Таким образом, суммарная характеристическая скорость перехода $\Delta V=115.87$ м/с. И величины импульсов скорости, и СХС решения, полученного по формулам

околокругового движения, находятся между аналогичными величинами двух точных решений.

Можно оценить и точность формирования заданной орбиты, получаемую при использовании формул околокругового движения, например, для перелёта из апоцентра в апоцентр. В результате приложения первого разгонного импульса скорости величиной 57.936м/с

$$\Delta r = \frac{4a^2V}{\mu} \Delta V_1 = \frac{4 * 6671^2 * 7.614795}{398600} * 0.057936 = 197.02 \text{ км},$$

перицентр орбиты увеличится на 197.02км вместо необходимых 200км. Исполняемый в противоположной точке тормозной импульс скорости 57.936м/с опустит апоцентр орбиты

$$\Delta r = \frac{4a^2V}{\mu} \Delta V_1 = \frac{4 * 6771^2 * 7.67259}{398600} * 0.057936 = 204.51 \text{ км},$$

на 204.51км вместо необходимых 200км. Таким образом, существует заметная ошибка в формировании перицентра и апоцентра орбиты, но ошибка в большой полуоси в два-три раза меньше, всего 1.5 км. Можно констатировать, что ошибки составляют всего 2-3% от производимого изменения соответствующих величин. Они легко устраняются с помощью описанной в первой главе итерационной процедуры.

При аналитическом решении задачи можно выбрать порядок приложения импульсов, обеспечивающий получение оптимального решения. Так как элементы орбит известны, легко вычислить расстояния до апоцентров и перицентров каждой из орбит. Разница известных ω_f и ω_0 позволяет судить к соосной или обратно-соосной ближе ориентация линий апсид орбит. Далее по сформулированному выше алгоритму выбирается оптимальное решение из двух возможных. Для непересекающихся орбит кандидатами в оптимальные решения также являются апсидальные решения. На рис. 2.2 им соответствуют ломаные

АСК и АРК. Вычисляются параметры этих решений по тем же формулам (2.4). Желательно оба варианта решений итерационно уточнить, а затем выбрать решение с меньшей СХС.

В таблице 2.1 приведены аналогичные результаты для разных высот орбит и разных отклонений по высоте в перигентре и апоцентре. В первой строке каждой клетки приведены результаты перелета из апоцентра в апоцентр и перелета из перигентра в перигентр, а во второй строке результаты, полученные по приближенным формулам, и относительная ошибка.

Таблица 2.1

	$\Delta h=50$ км		$\Delta h=100$ км		$\Delta h=300$ км		$\Delta h=500$ км		$\Delta h=1000$	
H=300 км	57.832	58.049	115.47	116.34	-	-	-	-	-	-
	57.937	0.0038	115.87	0.0075	-	-	-	-	-	-
H=600 км	54.143	54.338	108.11	108.89	322.62	329.66	-	-	-	-
	54.237	0.0036	108.47	0.0072	325.42	0.0218	-	-	-	-
H=1000 км	49.801	49.97	99.448	100.13	296.82	302.95	492.98	510.16	-	-
	49.883	0.0034	99.765	0.0068	299.3	0.0206	498.83	0.0349	-	-
H=1500 км	45.136	45.28	90.142	90.716	269.11	274.3	446.96	461.51	891.47	952.1
	45.206	0.0032	90.412	0.0064	271.24	0.0193	452.06	0.0326	904.12	0.068
H=19100 км	7.7617	7.7694	15.516	15.547	46.463	46.738	77.309	78.072	154.06	157.13
	7.7655	0.001	15.531	0.002	46.593	0.0059	77.655	0.0099	155.31	0.0199
H=36000 км	3.6183	3.6205	7.2346	7.2431	21.679	21.756	36.093	36.307	72.008	72.864
	3.6194	0.0006	7.2388	0.0012	21.716	0.0035	36.194	0.0059	72.388	0.0119

2.2. Некомпланарные переходы

2.2.1. Постановка задачи.

В конце 60-х годов прошлого века решение задачи определения оптимальных маневров перехода между некомпланарными орбитами практически одновременно получили Г.Е. Кузмак [84] в нашей стране, Ж.П. Марек [7] во Франции и Т.Н.Эдельбаум [83] в Англии. Кузмак искал решение с помощью метода множителей. В статье Т.Н. Эдельбаума достаточно простое решение получено на основании теории базис-вектора. В данном разделе приводятся

формулы полученные Т.Н. Эдельбаумом. Они будут использоваться в четвертой и шестой главах, как составная часть более сложных алгоритмов решения задач встречи.

Система (1.12) для перехода между некомпланарными орбитами принимает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \cos \varphi_i) &= \Delta e_x, \\ \sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \sin \varphi_i) &= \Delta e_y, \\ \sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ti} &= \Delta a, \\ \sum_{i=1}^N -\Delta V_{zi} \sin \varphi_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^N \Delta V_{zi} \cos \varphi_i &= \Delta i. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В данной задаче удобно ось x направить вдоль линии пересечения плоскостей орбит, тогда правая часть четвертого уравнения системы (2.5) становится равной нулю.

Величина угла между плоскостями орбит Δi вычисляется по формуле (1.17), а угол $\Delta \varphi$ между линией апсид относительной орбиты и линией пересечения плоскостей орбит по формуле (1.16).

Как всегда необходимо определить параметры маневров ΔV_{ri} , ΔV_{ti} , ΔV_{zi} , φ_i ($i=1, \dots, N$), доставляющих минимум СХС $\Delta V = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2}$ при ограничениях (2.5).

Система (1.22) для базис-вектора приобретает вид:

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin(\theta - \theta_0), \\ \mu &= 2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos(\theta - \theta_0), \\ v &= \frac{\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_5}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \sin(\theta - \theta_0) + \frac{\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \cos(\theta - \theta_0), \\ \operatorname{tg}\theta_0 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Можно видеть, что уравнения (2.6) это уравнения эллипса в трехмерном пространстве.

В работе [83] показано, что возможны три конфигурации годографа базис-вектора в форме эллипса, когда он касается сферы единичного радиуса в двух и более точках. У первой конфигурации центр эллипса расположен в начале системы координат (рис. 2.7а), а касание окружности происходит на главной оси эллипса, следовательно, между углами приложения импульсов скорости полвитка.

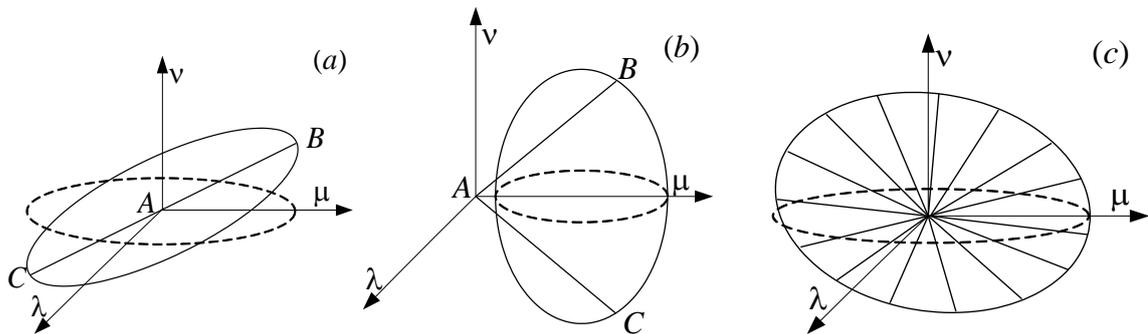


Рисунок 2.7. Вид годографа базис-вектора: а) узловой случай; б) невырожденный случай; в) особый случай.

Эти условия описываются системой (2.7). В работах всех трех авторов этой конфигурации базис-вектора дано название *узловой случай* (nodal case, NC):

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \theta_2 &= \theta_1 + \pi,\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\theta_1) &= -\lambda(\theta_2) \\ \mu(\theta_1) &= -\mu(\theta_2) \\ \nu(\theta_1) &= -\nu(\theta_2) \end{aligned} \right\}.$$

У второй конфигурации, центр эллипса сдвинут по оси μ относительно начала системы координат (рис.2.7б). Ей соответствует следующая система неравенств и уравнений:

$$\lambda_2\lambda_4 = -\lambda_3\lambda_5,$$

$$\theta_2 - \theta_0 = \theta_0 - \theta_1,$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(\theta_1) &= -\lambda(\theta_2) \\ \mu(\theta_1) &= \mu(\theta_2) \\ \nu(\theta_1) &= -\nu(\theta_2) \end{aligned} \right\}, \quad (2.8)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_0) = \frac{4\lambda_1(\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2})^3}{(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_5)^2 - 3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2},$$

$$3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 < (\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_5)^2,$$

$$4\lambda_1\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \leq (\lambda_3\lambda_4 - \lambda_2\lambda_5)^2 - 3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2.$$

Данной конфигурации было дано название *невырожденный случай* (nondegenerate case (NDC)).

Третий случай сочетание первых двух. Голограф базис-вектора – имеет вид окружности и во всех точках принадлежит сфере единичного радиуса (рис. 2.7в). Данной конфигурации было дано название *особый случай* (singular case (SC)). Ему соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
l_1 &= 0, \\
\lambda_2 \lambda_4 &= -\lambda_3 \lambda_5, \\
3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 &= (\lambda_3 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_5)^2 = \frac{3}{4}, \\
\lambda &= \frac{1}{2} \sin(\theta - \theta_0), \\
\mu &= \cos(\theta - \theta_0), \\
v &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta - \theta_0) \quad (+ \text{ если } \Delta i < 0).
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

2.2.2. Узловое решение.

Переход между орбитами можно изобразить на плоскости e_x, e_y . Точка K , как обычно, соответствует вектору эксцентриситета относительной орбиты. Вследствие того, что углы приложения импульсов скорости отличаются на 180° (второе уравнение системы (2.7)), плоскости орбит можно совместить только, когда импульсы скорости прикладываются на линии пересечения плоскостей орбит, таким образом, углы приложения импульсов скорости будут 0 или π . Отрезки, соответствующие трансверсальным составляющим импульсов скорости, параллельны оси e_x , радиальные параллельны оси e_y (рис.2.8).

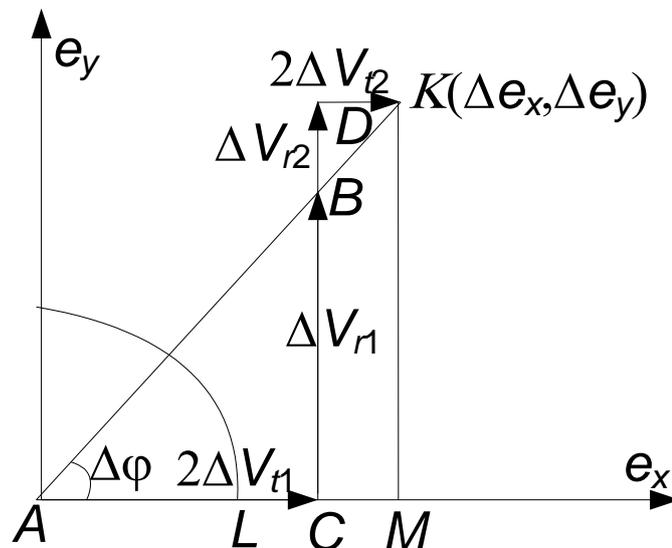


Рис.2.8 Геометрическая интерпретация узлового решения.

Точку пересечения с осью e_x окружности радиуса $|\Delta a|$ с центром в начале системы координат обозначим L , а проекцию точки K на ось e_x - M . Трансверсальная составляющая первого импульса скорости должна быть такой, чтобы $LC=CM$:

$$2\Delta V_{t1} = AC = \frac{1}{2}(\Delta a + \Delta e_x),$$

радиальная составляющая должна обеспечивать, чтобы, соответствующая эксцентриситету орбиты, после реализации первого импульса скорости т.В, принадлежала отрезку AK :

$$\Delta V_{r1} = CB = -(\Delta a + \Delta e_x) \frac{\Delta e_y}{2\Delta e_x}.$$

Для трансверсальной и радиальной составляющих второго импульса скорости получаем:

$$2\Delta V_{t2} = DK = \frac{1}{2}(\Delta a - \Delta e_x),$$

$$\Delta V_{r2} = BD = -(\Delta a - \Delta e_x) \frac{\Delta e_y}{2\Delta e_x}.$$

Углы приложения импульсов скорости отличаются на π , но вектора, соответствующие составляющим импульсов на плоскости e_x, e_y , направлены одинаково что за счет того, что знаки одного типа составляющих различны.

Коррекция Δi распределяется между боковыми составляющими импульсов скорости аналогичным образом:

$$\Delta V_{z1} = \frac{(\Delta a + \Delta e_x)\Delta i}{2\Delta e_x},$$

$$\Delta V_{z2} = \frac{(\Delta a - \Delta e_x)\Delta i}{2\Delta e_x}.$$

Теперь можно найти СХС перехода:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta i^2 + \frac{1}{4} \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}.$$

Точка C должна находиться левее т. M , чтобы найденное решение удовлетворяло условиям (2.7), таким образом должно быть выполнено условие:

$$\Delta a^2 \leq \Delta e_x^2,$$

Это означает, что данное решение существует для переходов между пересекающимися орбитами ($\Delta e > |\Delta a|$).

Из требования, чтобы базис-вектор достигал максимума в точке приложения импульса скорости, следует условие:

$$3\Delta e_y^2 \leq \Delta i^2.$$

2.2.3. невырожденное решение.

Для невырожденного случая необходимо решить систему (2.5), (1.23), (2.8). Данное решение описано в статье Т.Н. Эдельбаума, в которой приведены выражения для коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ и ΔV :

$$\Delta V = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\Delta i^2 + \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 - \Delta a^2} + \sqrt{(\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2)^2 + 4\Delta i^2 \Delta e_y^2}},$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta a}{2\Delta V} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2}{\sqrt{(\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2)^2 + 4\Delta i^2 \Delta e_y^2}} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{\Delta e_y}{2\Delta V} \left[1 - \frac{-\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2}{\sqrt{(\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2)^2 + 4\Delta i^2 \Delta e_y^2}} \right],$$

$$\lambda_3 = \frac{\Delta e_x}{2\Delta V} \left[1 - \frac{\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2}{\sqrt{(\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2)^2 + 4\Delta i^2 \Delta e_y^2}} \right],$$

$$\lambda_4 = -\frac{\Delta e_y}{2\Delta V} \left[\frac{2\Delta i \Delta e_x}{\sqrt{(\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2)^2 + 4\Delta i^2 \Delta e_y^2}} \right],$$

$$\lambda_5 = \frac{\Delta i}{2\Delta V} \left[1 + \frac{\Delta i^2 - \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \Delta a^2}{\sqrt{(\Delta i^2 - \Delta e_x^2 - \Delta e_y^2 + \Delta a^2)^2 + 4\Delta i^2 \Delta e_y^2}} \right].$$

После определения этих коэффициентов, из четвертого уравнения системы (2.6) находится θ_0 , после этого из четвертого уравнения системы (2.8) моменты приложения импульсов скорости, а из системы (2.6) находится ориентация импульсов скорости. Информация о СХС ΔV , позволяет найти распределение величин импульсов скорости, воспользовавшись третьим уравнением системы (2.5).

Область существования невырожденных решений определяется неравенствами:

$$\Delta a^2 \geq \Delta e_x^2,$$

$$\Delta a^2 \geq \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta i \Delta e_y - \Delta i^2.$$

2.2.5. Особое решение.

Предельный переход от невырожденного случая позволяет найти СХС *особого решения*:

$$\Delta V = \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{3}\Delta i + \Delta e_y)^2 + \Delta e_x^2},$$

а также область существования данного типа решений:

$$\Delta i^2 \leq 3\Delta e_y^2,$$

$$\Delta a^2 \leq \Delta e_x^2 + \Delta e_y^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta i \Delta e_y - \Delta i^2,$$

можно найти также величину θ_0 :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\sqrt{3} \Delta i + \Delta e_y}{\Delta e_x}. \quad (2.10)$$

Чтобы найти величины импульсов скорости и их углы приложения можно упростить первоначальную систему уравнений, повернув систему координат на угол θ_0 , вычисленный по формуле (2.10). Новые проекции вектора эксцентриситета обозначим Δe_{xn} , Δe_{yn} :

$$\Delta e_{xn} = \Delta e_x \cos \theta_0 + \Delta e_y \sin \theta_0,$$

$$\Delta e_{yn} = -\Delta e_x \sin \theta_0 + \Delta e_y \cos \theta_0.$$

Введение новых переменных a_s, x_s, y_s, ψ позволяет существенно упростить уравнения терминальных условий:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta V_i &= \Delta V, \\ \sum_{i=1}^N \Delta V_i \cos \psi_i &= a_s, \\ \sum_{i=1}^N \Delta V_i \sin^2 \psi_i &= x_s, \\ \sum_{i=1}^N \Delta V_i \sin \psi_i \cos \psi_i &= y_s, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где ΔV_i – величина i -го импульса скорости, а новые переменные связаны соотношениями $a_s = \frac{1}{2} \Delta a$, $x_s = \frac{2}{3} (2\Delta V - \Delta e_{xn})$, $y_s = \frac{2}{3} \Delta e_{yn}$, $\psi = \varphi - \theta_0$ с переменными

$\Delta a, \Delta e_{xn}, \Delta e_{yn}, \varphi$.

Два уравнения системы (2.11), являются линейной комбинацией остальных уравнений, поэтому были исключены. Замена переменных позволила уменьшить размерность системы (2.5).

Два американских профессора показали, что двухимпульсное решение этой системы существует, но найти аналитическое решение пока не удалось. В своей работе Эдельбаум говорит о возможности использовать для данного случая трехимпульсное решение, но не приводит формул, для нахождения параметров такого решения.

Так как очень важно уметь находить решение и в этом случае, покажем одну из возможностей определения параметров решения этого типа.

Поскольку переменных больше чем уравнений в системе (2.11), можно зафиксировать угол приложения первого импульса скорости $\varphi_1=\theta_0$, и предположить, что разница между углами приложения первого и второго импульсов скорости полвитка. Тогда $\psi_1=0$, $\psi_2=\pi$. После этого из третьего и четвертого уравнений системы (2.11) определяются величина третьего импульса скорости и угол его приложения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_3 &= \frac{x_s}{y_s}, \\ \Delta V_3 &= \frac{x_s^2 + y_s^2}{x_s}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь из первых двух уравнений системы (2.11) можно найти величины второго и первого импульсов скорости:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{1}{2}(\Delta V + a_s - \Delta V_3 \cos \psi_3 + \Delta V_3), \\ \Delta V_2 &= \frac{1}{2}(\Delta V - a_s + \Delta V_3 \cos \psi_3 - \Delta V_3). \end{aligned} \quad (2.13)$$

На рис. 2.9 приведена геометрическая интерпретация этого решения. У первых двух импульсов скорости отсутствуют радиальные и боковые составляющие. Как следует из сказанного выше углы приложения этих импульсов скорости $\varphi_1=\theta_0$, $\varphi_2=\theta_0+\pi$. На рисунке данным импульсам скорости соответствуют отрезки AB и BC .

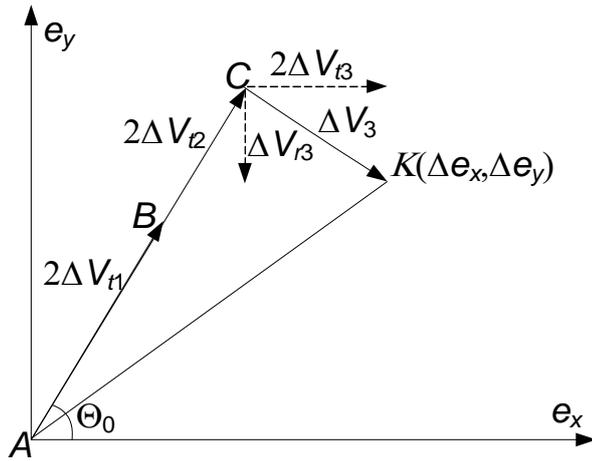
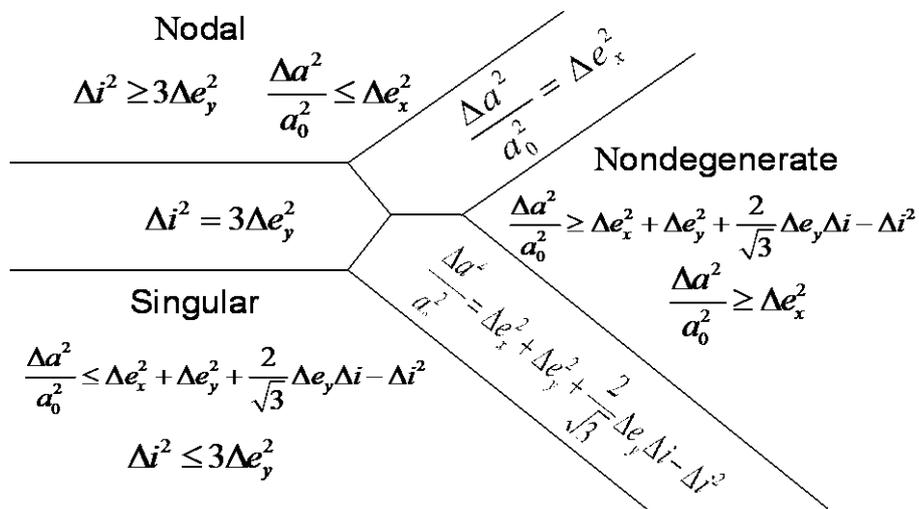


Рисунок 2.9. Геометрическая интерпретация особого решения.

Положение плоскости орбиты изменяется только третьим импульсом скорости, поэтому его угол приложения $\varphi_3=0$, а величина боковой составляющей Δi . Данный угол приложения определяет, параллельность оси e_x отрезка, соответствующего трансверсальной составляющей этого импульса скорости. Величины трансверсальной и радиальной составляющих должны быть такими, чтобы отрезок CK , соответствующий третьему импульсу скорости, был перпендикулярен отрезку AC .

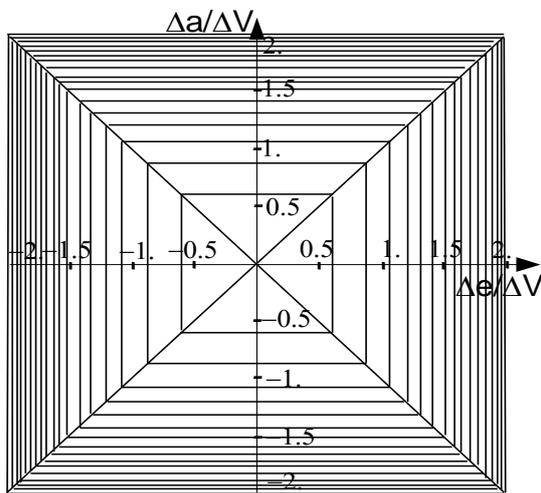
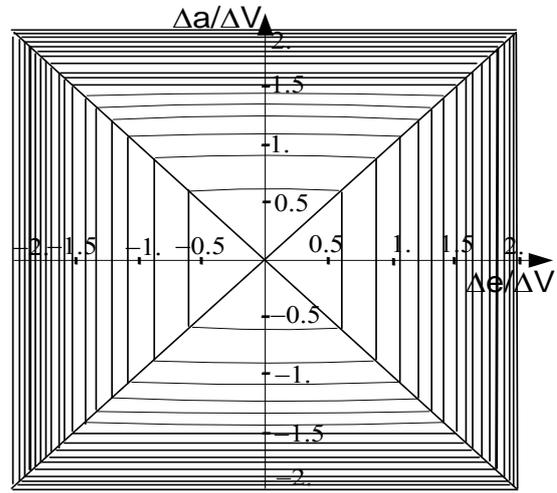
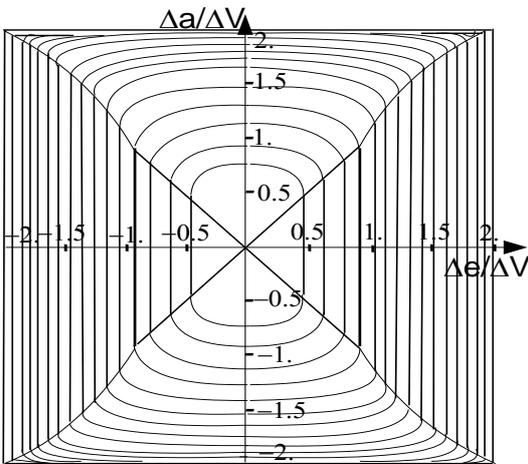
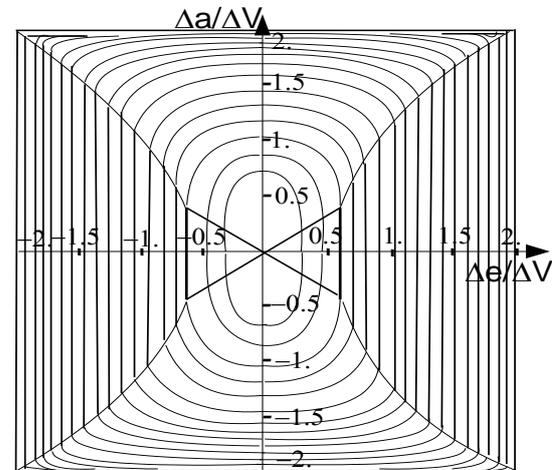
2.2.6. Области существования решений.

Тип оптимального решения, соответствующий конкретным отклонениям исходной и заданной орбит, может быть найден из следующей диаграммы.



Конкретный вид, расположения областей существования решений различного типа, представлен на рисунках 2.10(а)-2.10(е). Замкнутые контуры соответствуют различным значениям величины $\frac{\Delta i}{\Delta V}$, которая изменяется с шагом 0.05 от нулевого значения на границе рисунков до единицы в начале системы координат. Под каждым рисунком указана $\Delta\varphi$ разница между углами φ_e и φ_z (1.16).

На рисунке 2.10(а) область существования узлового решения представляет собой два треугольника, основаниями которых являются вертикальные границы квадрата, а вершины находятся в начале системы координат.

(а) ($\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 0$)(б) ($\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 5^\circ$)(в) ($\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 30^\circ$)(г) ($\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 60^\circ$)

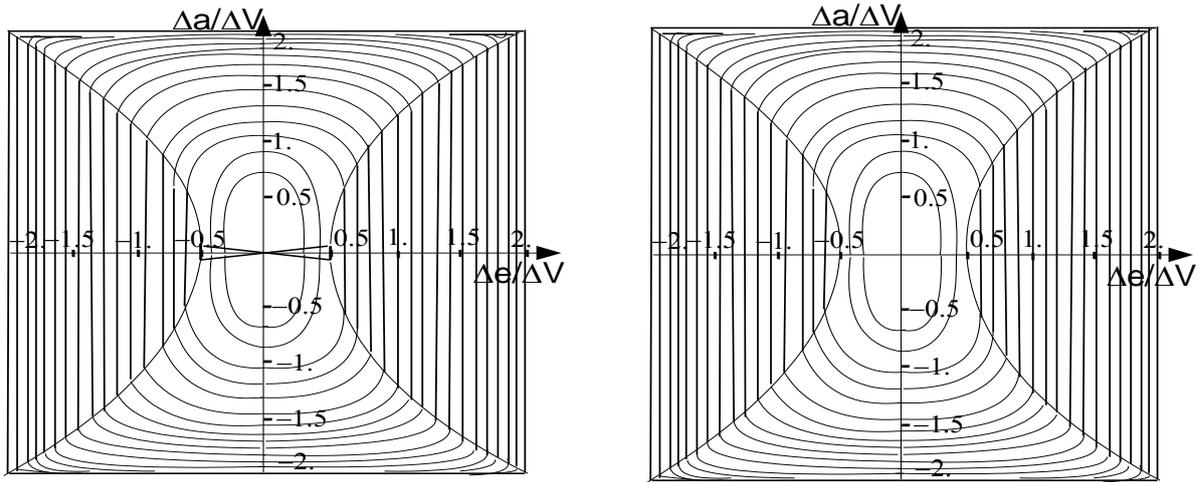
(д) ($\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 85^\circ$)(е) ($\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 90^\circ$)

Рисунок 2.10. Области существования решений различного типа

Область существования невырожденных решений это два оставшихся треугольника смыкающиеся вершинами, основаниями которых являются горизонтальные границы квадрата.

На рисунке 2.10(б) рядом с вертикальными границами квадрата появляется область существования особого решения, узловое решение занимает треугольную область, примыкающую к области особых решений. Область существования невырожденных решений занимает оставшуюся часть рисунка.

С увеличением разницы между углами φ_e и φ_z область существования узловых решений быстро уменьшается (рис. 2.10(в)-рис. 2.10(д)), в то время как область существования особых решений растет. В результате на рисунке 2.10(е) область существования узловых решений полностью отсутствует.

2.2.7. Оптимальное решение без радиальных составляющих импульсов скорости.

Эдельбаум описывал решение с нулевыми радиальными составляющими импульсов скорости, как частный случай невырожденного решения. Ему соответствует первый из рисунков 2.10, когда $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_z = 0$, следовательно, т.К на рис. 2.8 принадлежит оси абсцисс, а это значит, что радиальные составляющие

импульсов скорости равны нулю. Но поскольку для этого решения нарушено пятое условие системы (2.8) и нельзя воспользоваться четвертой формулой (2.8), то оно является четвертым типом оптимальных решений [87].

Если $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_6=0$, то уравнения системы (1.22) имеют вид:

$$\lambda=0,$$

$$\mu=2\lambda_1,$$

$$v = \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2} \cos(\theta - \theta_1),$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\lambda_4}{\lambda_5}.$$

Годограф базис-вектора представляет собой отрезок, параллельный оси v и пересекающим ось μ . На рис. 2.11 годограф- отрезок BC . Чтобы условия оптимальности были выполнены, годограф касается сферы в двух точках.

Из такого положения отрезка следует, что

$$\frac{v(\theta_1)}{\mu(\theta_1)} = -\frac{v(\theta_2)}{\mu(\theta_2)},$$

а это означает, что

$$\frac{\Delta V_{z1}}{\Delta V_{t1}} = -\frac{\Delta V_{z2}}{\Delta V_{t2}}.$$

Данное решение возможно, когда совпадают линия пересечения плоскостей начальной и конечной орбит и линия апсид относительной орбиты ($\Delta\varphi=0$, $\Delta e_y=0$, $\varphi_e=\varphi_z$). Таким образом углы приложения импульсов скорости отличаются на полвитка ($\theta_1-\theta_2=180^0$). На рисунке 2.10а именно такое решение (а не невырожденное решение) существует в треугольниках с горизонтальными основаниями. При сколь угодно малом нарушении условия $\varphi_e=\varphi_z$ в этих областях

существует уже невырожденное решение, поэтому только оно и упоминалось при описании областей существования решений различного типа.

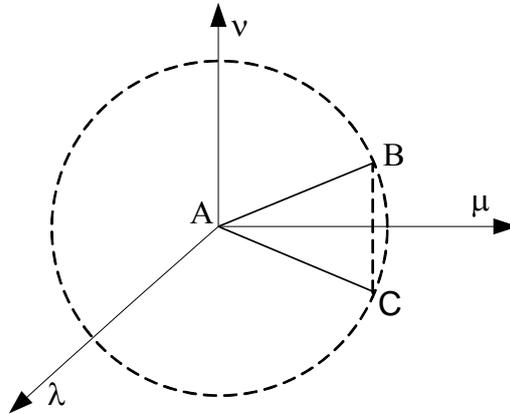


Рисунок 2.11. Годограф базис-вектора имеет вид отрезка

Двухимпульсное решение этого типа на первом интервале маневрирования может являться частью четырехимпульсного решения для маневров встречи КА типа «Союз», «Прогресс» с орбитальной станцией. Создать условия существования на первом интервале маневрирования этого оптимального и простого решения позволяют два импульса скорости второго интервала маневрирования.

2.2.8. Маневры без радиальных составляющих (универсальное решение).

В реальной работе довольно часто на параметры маневров КА накладываются различные ограничения. Это могут быть ограничения на моменты приложения импульсов скорости и их ориентацию, на величины импульсов скорости. Могут накладываться ограничения на параметры переходной орбиты. Типичным является запрет использовать радиальные или боковые составляющие импульсов скорости.

Параметры двухимпульсных маневров перехода между некомпланарными произвольными (ранее предполагалось, что линия пересечения плоскостей начальной и конечной орбит и линия апсид относительной орбиты совпадают)

орбитами, когда у импульсов скорости отсутствуют радиальные составляющие, можно найти численным методом.

Когда радиальные составляющие отсутствуют, остаются шесть свободных переменных (четыре составляющих импульсов ΔV_{t1} , ΔV_{z1} , ΔV_{t2} , ΔV_{z2} и два угла приложения импульсов скорости φ_1 , φ_2) и только пять ограничений в виде равенств (2.5). Чтобы найти решение достаточно зафиксировать угол приложения одного из импульсов скорости, например, $\varphi_1 = \varphi_{1f}$, а затем по формулам (2.2) определить значения переменных φ_2 , ΔV_{t1} , ΔV_{t2} , после этого из пятого и четвертого уравнений системы (2.5) определяются величины боковых составляющих импульсов скорости:

$$\begin{aligned}\Delta V_{z1} &= -\frac{\Delta i \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \Delta V_{z2} &= \frac{\Delta i \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Перебором угла φ_1 , находится решение доставляющее минимум СХС. Перебор производится на интервале $[0, \pi]$. Если на углы приложения импульсов скорости ограничения наложены, то угол перебирается только на разрешенном интервале.

Как показывает анализ оптимальных решений, найденных Эдельбаумом, у этих решений боковые и трансверсальные составляющие импульсов скорости связаны соотношением:

$$\left| \frac{\Delta V_{z1}}{\Delta V_{t1}} \right| = \left| \frac{\Delta V_{z2}}{\Delta V_{t2}} \right|.\tag{2.15}$$

Будем искать решение с нулевыми радиальными составляющими импульсов скорости с учетом дополнительного ограничения (2.15).

Решения этого типа, у которых трансверсальные и боковые составляющие импульсов скорости связаны соотношением (2.15), а $\Delta V_{r1} = \Delta V_{r2} = 0$, но $\theta_1 - \theta_2 \neq 180^\circ$, назовем *универсальными* решениями (universal solution, US). Данными решениями

можно воспользоваться и в том случае, когда нет запрета на использование радиальных составляющих импульсов скорости.

Как это делалось ранее, используем геометрический метод для определения параметров универсального решения [88].

Пусть ось e_x направлена по линии пересечения плоскостей начальной и конечной орбит, а точка K на плоскости e_x, e_y соответствует элементам относительной орбиты. Через точку C , делящую пополам отрезок AK , проведем прямую CM , параллельную оси e_x (рис. 2.12).

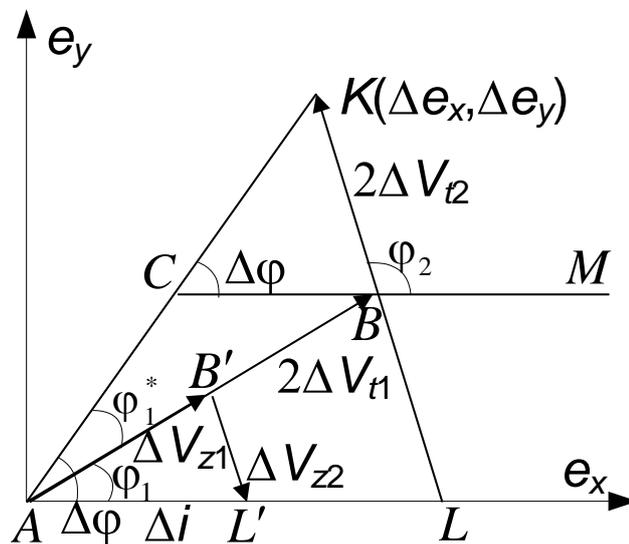


Рисунок 2.12. Геометрическая интерпретация универсального решения.

На этой прямой определяется точка B такая, что $AB+BK=\Delta a$, когда $|\Delta a|>\Delta e$, в противном случае $AB-BK=\Delta a$. Так как $AB=2\Delta V_{t1}$, а $BK=2\Delta V_{t2}$ ломаная ABK соответствует решению компланарной задачи. Пересечение продолжения отрезка KB с осью e_x обозначим L . На оси e_x отложим отрезок AL' ($AL'=\Delta i$). Параллельно отрезку LB построим отрезок $L'B'$. Так как отрезки AB' и $B'L'$ параллельны отрезкам AB и BK , ломаная $AB'L'$ соответствует составляющим импульсов, корректирующим боковое отклонение ($AB'=\Delta V_{z1}$, $B'L'=\Delta V_{z2}$). Так как по

построению $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'L'}{BK}$, то $\frac{\Delta V_{z1}}{\Delta V_{t1}} = -\frac{\Delta V_{z2}}{\Delta V_{t2}}$. Следовательно, найденное решение обладает необходимым свойством.

Используя рисунок (2.12) можно найти угол приложения первого импульса скорости [88]:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \Delta\varphi - \varphi_1^*, \\ \Delta\varphi &= \varphi_e - \varphi_z,\end{aligned}\tag{2.16}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1^*}{2} = \left(1 - \frac{\Delta e}{\Delta a}\right) \left(-\operatorname{ctg} \Delta\varphi + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \Delta\varphi + \frac{\Delta a^2}{\Delta a^2 - \Delta e^2}}\right).$$

Остальные параметры импульсов скорости находятся по формулам (2.2), (2.14).

Данное решение не является строго оптимальным, однако проведенные численные исследования показали, что его СХС достаточно близка к СХС описанных выше оптимальных решений. Это позволяет его использовать при решении практических задач, в которых требуется высокая скорость расчетов. Кроме того, близость полученных для упрощенных уравнений решений приводит к тому, что когда они используются в итерационной процедуре, обеспечивающей получение точного решения, то СХС универсального решения иногда даже меньше чем СХС оптимального решения. В сложных задачах, которые требуют большого числа итераций для выполнения с заданной точностью терминальных условий (такие задачи рассматриваются в шестой и восьмой главах), использование универсального решения дает значительное уменьшение требуемого числа итераций.

В любом решении задачи перехода импульсы скорости можно менять местами. Однако утверждение, что СХС перелета при этом не меняется, справедливо только в линейном приближении, надо сравнить оба решения. Деление импульсов скорости на части и реализация их на последовательных витках, позволяет уменьшить влияние ошибок исполнения импульсов скорости.

ГЛАВА III. ВСТРЕЧА НА КОМПЛАНАРНЫХ ОРБИТАХ

В задаче встречи требуется определить углы приложения и составляющие импульсов скорости, при которых осуществляется перелёт за фиксированное время в заданную точку конечной орбиты.

3.1. Постановка задачи

Для встречи на компланарных орбитах условия выхода за фиксированное время в заданную точку конечной орбиты имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ii} \cos \varphi_i) &= \Delta e_x, \\
 \sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ii} \sin \varphi_i) &= \Delta e_y, \\
 \sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ii} &= \Delta a, \\
 \sum_{i=1}^N (2\Delta V_{ri} (1 - \cos \varphi_i) + \Delta V_{ii} (-3\varphi_i + 4\sin \varphi_i)) &= \Delta t.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Импульсы скорости должны исполняться на двух заданных интервалах маневрирования. Длина каждого интервала – виток, расстояние между интервалами несколько витков. То, что интервалы маневрирования разделены несколькими витками, предоставляет ряд нужных возможностей. В случае, когда суммарная характеристическая скорость встречи (ΔV_{rdv}) превышает суммарную характеристическую скорость перехода (ΔV_{trf}) из-за большой первоначальной разницы в положениях КА вдоль орбиты, длительный интервал полета на промежуточной орбите позволяет существенно приблизить ΔV_{rdv} к ΔV_{trf} . Кроме того, на витках, следующих после первого интервала можно уточнить орбиту и пересчитать затем величины импульсов скорости второго интервала, исправив ошибки, реализации импульсов скорости на первом интервале маневрирования. В схеме маневрирования КА «Союз» и «Прогресс» используется специальный

дополнительный импульс скорости (в середине между интервалами маневрирования), исправляющий ошибки маневров первого интервала. Можно добавить специальный маневр для уклонения от столкновения с космическим мусором и т.д. В реальных проектах интервалы маневрирования разделяет весьма значительное число витков. Например, у КА «Союз» и «Прогресс» первый и последний интервалы маневрирования разделяет около 30 витков. У «Shuttle» более 40 витков, у европейского ATV несколько десятков витков и т.д. Определенные преимущества имеет и относительно короткая схема встречи [89], когда сближение осуществляется за несколько витков. В первую очередь это связано с удобством жизнедеятельности космонавтов. Однако разрешенный фазовый диапазон (разность аргументов широты КА-цели и активного КА в начальный момент перелета) становится чрезвычайно узким, что накладывает существенные ограничения на возможные окна стартов. Таким образом, для автоматических КА предпочтительней является многовитковая встреча, а для пилотируемых возможны оба варианта. В нештатных ситуациях для пилотируемых КА осуществляется переход от короткой схемы к обычной многовитковой.

Ограничения на моменты приложения импульсов скорости можно записать в виде:

$$\varphi_1 \subseteq F_1, \dots, \varphi_{N_1} \subseteq F_1, \quad \varphi_{N_1+1} \subseteq F_2, \dots, \varphi_{N_1+N_2} \subseteq F_2, \quad (3.2)$$

здесь N_1, N_2 – число импульсов скорости соответственно на первом и втором интервалах маневрирования ($N=N_1+N_2$), F_1, F_2 – соответственно первый и второй интервалы маневрирования.

Задача определения параметров оптимальных маневров встречи на компланарных орбитах формулируется следующим образом: надо определить $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, \varphi_i$ ($i=1, \dots, N$), при которых минимальна суммарная характеристическая скорость маневров ΔV :

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2}$$

при ограничениях (3.1), (3.2).

Уравнения для базис-вектора имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin(\theta - \theta_0) + 2\lambda_6, \\ \mu &= 2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos(\theta - \theta_0) - 3\lambda_6(\theta - \theta_0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3},$$

или

$$\begin{aligned} \lambda &= A(\cos(\theta - \theta_0) + 2B), \\ \mu &= A(-2\sin(\theta - \theta_0) - 3B(\theta - \theta_0) + \frac{C}{A}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3},$$

где $A = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}$, $B = \frac{\lambda_6}{A}$, $C = 2\lambda_1$.

В общем случае уравнения (3.4) в плоскости μ, λ описывают циклоиду. Форма циклоиды зависит только от константы B , константа A определяет масштаб годографа. При $B > \frac{2}{3}$ петля у циклоиды исчезает. При $B=0$ циклоида вырождается в эллипс, а при $A=0, B=0$ в точку. Таким образом, возможны три типа оптимальных решений:

А) годограф вырождается в точку, следовательно, как и для *переходов* между компланарными орбитами, импульсы скорости имеют только трансверсальные составляющие ($\lambda=0$), которые *все* или разгонные (если $\mu=1$) или

тормозные (если $\mu=-1$). В предыдущей главе эти решения были названы *компланарные особые решения (CSS)*.

Б) годограф вырождается в эллипс, аналогично переходам между компланарными орбитами, импульсы скорости имеют только трансверсальные составляющие ($\lambda=0$), часть из которых разгонные ($\mu=1$), остальные – тормозные ($\mu=-1$). Импульсы скорости располагаются на линии апсид относительной орбиты. Эти решения были названы *компланарные апсидальные решения (CAS)*.

В) годограф – циклоида, у импульсов скорости присутствуют радиальные составляющие (т. к. $\lambda \neq 0$), импульсы, прикладываемые на одном интервале маневрирования тормозные (трансверсальные составляющие отрицательные ($\mu < 0$)), на другом разгонные (трансверсальные составляющие положительные ($\mu > 0$)). Эти решения будем называть *компланарные невырожденные решения (CNDS)*.

В первых двух случаях суммарная характеристическая скорость задачи встречи ΔV_{rdv} равна суммарной характеристической скорости задачи перехода ΔV_{trf} ($\Delta V_{rdv} = \Delta V_{trf}$), в третьем $\Delta V_{rdv} > \Delta V_{trf}$.

Условия существования каждого из трех возможных типов решений задачи встречи будут сформулированы в четвертом параграфе данной главы.

Вначале будут рассмотрены процедуры определения параметров каждого из этих типов решений.

3.2. Встреча на компланарных непересекающихся орбитах (особое решение)

Решения этого типа существуют, когда встречу можно осуществить, разделив соответствующим образом между первым и вторым интервалами маневрирования импульсы скорости, необходимые для перехода между орбитами. Например, активный КА находится на внутренней орбите, КА-цель на внешней орбите несколько впереди активного КА (но не слишком далеко). Активный КА проводит на первом интервале маневры, увеличивающие большую полуось орбиты и изменяющие нужным образом вектор эксцентриситета. Затем

происходит процесс, который обычно называют «фазирование». Так как активный КА продолжает находиться на внутренней орбите, он постепенно, виток за витком, догоняет КА-цель. Когда он практически окажется под КА-целью, проводятся маневры на втором интервале маневрирования, обеспечивающие встречу двух КА. Если первоначально активный КА находился на внешней орбите, то КА-цель должен в начальный момент несколько отставать от активного КА. Далее аналогично предыдущему случаю сначала исполняются тормозные маневры на первом интервале маневрирования, затем следует этап фазирования, потом – завершающие тормозные маневры.

Исследуемым в данном параграфе особым решением CSS соответствует годограф базис-вектора в виде точки. У оптимального решения задачи встречи импульсы скорости имеют только трансверсальные составляющие, которые все или разгонные или тормозные. Об углах приложения импульсов базис-вектор не дает никакой информации. Суммарная характеристическая скорость таких маневров встречи совпадает с суммарной характеристической скоростью маневров перехода, частным случаем которых они являются:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N |\Delta V_{ii}| = \frac{|\Delta a|}{2}.$$

Рассматриваются двух-, трех-, и четырехимпульсные решения. Процедуры поиска параметров решений с различным числом импульсов скорости несколько отличаются. Решения с числом импульсов более четырех существенно не отличаются от четырехимпульсных решений.

Двухимпульсные решения. Определение параметров двухимпульсного решения начнем с оценки величин импульсов скорости. Четвертое уравнение системы (3.1) показывает, что для рассматриваемых перелетов продолжительностью несколько витков основное влияние на время прихода в точку встречи оказывает

трансверсальная составляющая первого импульса скорости. Это позволяет приближенно определить её величину:

$$\Delta V_{t1}^* \approx -\frac{\Delta t}{3\varphi_{10}} \quad (3.5)$$

где φ_{10} - произвольная точка первого разрешенного для маневрирования интервала. Здесь был использован тот факт, что длина первого интервала маневрирования существенно меньше его расстояния до точки встречи. В дальнейшем параметры маневра, при которых приближенно выполнено четвертое уравнение системы (3.1), будем помечать звездочкой. Геометрически условие (3.5) означает, что на плоскости e_x, e_y точка B (рис. 3.1(a)), соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания (орбите, получающейся после приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования, часто используется также термин «фазирующая орбита»), должна принадлежать окружности, имеющей радиус $R_1 = 2 \left| \frac{\Delta t}{3\varphi_{10}} \right|$, с центром в точке A ,

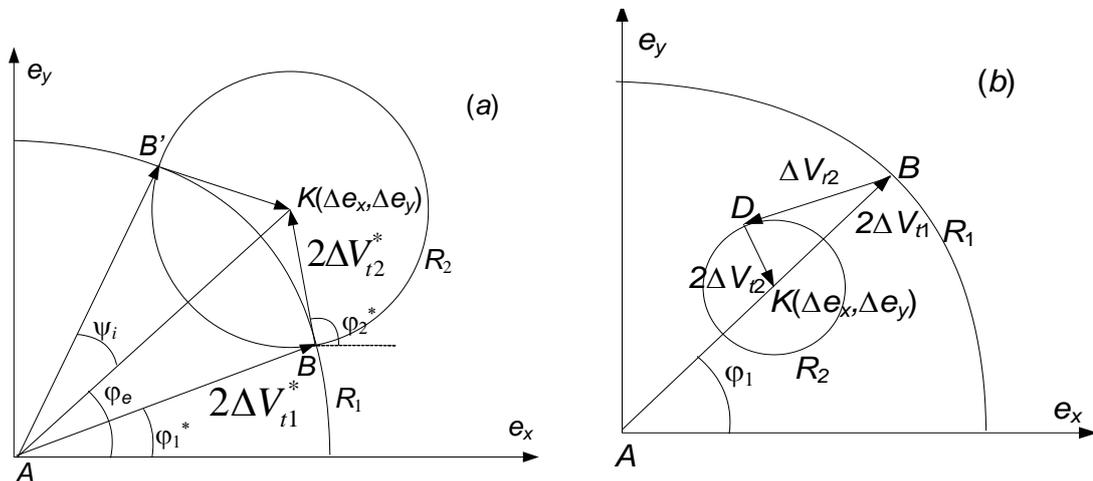


Рисунок 3.1. Двухимпульсные решения: (a) оба импульса скорости – трансверсальные; (b) второй импульс скорости имеет радиальную составляющую так как известна величина первого импульса скорости, но ещё не известен угол его приложения. То есть, импульсам скорости величины ΔV_{t1}^* , прикладываемым в

разных точках начальной орбиты, на плоскости e_x, e_y соответствуют отрезки длины $2\Delta V_{i1}^*$, проведённые из точки A под разными углами к оси e_x . Геометрическим местом концов этих отрезков и будет окружность, имеющая радиус R_1 .

Из формул (3.1), (3.5) следует, что

$$\Delta V_{i2}^* \approx \frac{1}{2} \Delta a + \frac{\Delta t}{3\varphi_{10}}, \quad (3.6)$$

таким образом, точка B должна также принадлежать окружности радиуса $R_2 = \left| \Delta a + 2 \frac{\Delta t}{3\varphi_{10}} \right|$ с центром в точке K (рис. 3.1(a)). Это следует из того, что вторым импульсом известной величины ΔV_{i2}^* необходимо прийти в точку K , но угол приложения этого импульса тоже пока не известен, значит в точку K можно перейти этим импульсом из любой точки окружности, имеющей радиус R_2 .

Двухимпульсное решение с нулевыми радиальными составляющими существует, если окружности пересекаются, т.е. когда выполнены условия:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &\geq \Delta e, \\ |R_1 - R_2| &\leq \Delta e. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для того чтобы найденное двухимпульсное решение принадлежало рассматриваемому типу решений CSS, необходимо совпадение знаков трансверсальных составляющих импульсов первого и второго интервалов маневрирования. При каких значениях параметров орбит это происходит, будет определено в четвертом параграфе этой главы.

Очевидно, что при пересечении окружностей имеются два двухимпульсных решения ABK и $AB'K$ (рис. 3.1(a)).

Углы приложения импульсов скорости φ_1^*, φ_2^* , при которых происходит пересечение окружностей, находятся из (3.1a), (3.1б):

$$\varphi_i^* = \varphi_e \pm \psi_i - 2\pi n_i + \frac{1}{2} \pi (1 - \text{sign} \Delta V_{ii}^*) \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

$$\text{где } \varphi_e = \arccos\left(\frac{\Delta e_x}{\Delta e_y}\right) \text{sign} \Delta e_y, \quad \psi_i = \arccos \frac{\Delta e^2 + 4(-1)^i (\Delta V_{i2}^{*2} - \Delta V_{i1}^{*2})}{4\Delta V_{ii}^{*2} \Delta e} \quad (i=1,2).$$

В соотношении (3.8) верхние знаки соответствуют точке B' , нижние - точке B . Константы n_1 и n_2 выбираются такими, чтобы углы φ_1^*, φ_2^* принадлежали соответственно первому и второму интервалам маневрирования. Найденные значения углов можно использовать в качестве начального приближения для итерационной процедуры [90], позволяющей определить параметры маневра, при которых четвертое уравнение системы (3.1) выполняется с заданной точностью. На очередной итерации этой процедуры величины трансверсальных составляющих импульсов скорости $\Delta V_{i1}^*, \Delta V_{i2}^*$ определяются из третьего и четвертого уравнения системы (3.1), где значения углов приложения импульсов скорости φ_1^*, φ_2^* вычислены на предыдущем шаге. Затем по формулам (3.8) уточняются значения углов приложения импульсов скорости. Если при найденных значениях $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \Delta V_{i1}^*, \Delta V_{i2}^*$ правая и левая части четвертого уравнения системы (3.1) не совпадают с заданной точностью, то вычисления продолжаются. Можно показать, что процедура сходится при выполнении условия

$$\left| 2 \frac{\text{tg} \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}}{(\varphi_1 - \varphi_2)} \right| < 1,$$

следовательно, пересечение окружностей в малой окрестности прямой AK не допускается, но в этой области оптимальны простые апсидальные решения, параметры которых будут определены ниже.

Если окружности радиусов R_1 и R_2 не пересекаются, то двухимпульсный переход с нулевыми радиальными составляющими обоих импульсов скорости невозможен. Для непересекающихся орбит этот случай имеет место, когда одна из окружностей находится целиком внутри другой. Для этой задачи наименьшей суммарной характеристической скоростью будет обладать маневр, у которого

отлична от нуля только радиальная составляющая импульса скорости с меньшей по модулю трансверсальной составляющей (рис. 3.1(b)). Итерационная процедура, позволяющая определять параметры таких маневров, описана в [90]. Суммарная характеристическая скорость таких маневров больше минимально возможной $\frac{|\Delta a|}{2}$, следовательно, если окружности не пересекаются, для получения оптимального решения необходимо использовать трех или четырехимпульсные схемы маневрирования.

Приведенный метод определения параметров маневров очень удобен для качественной оценки решения. Однако, у исследователей, проводящих эту оценку, как правило, имеются значения параметров орбит не в конечный, а в начальный момент времени (перед первым интервалом маневрирования). При продолжительности встречи до нескольких десятков витков вектора эксцентриситетов и полуоси меняются незначительно, поэтому в приведенных выше формулах вполне можно использовать их отклонения соответствующие начальному моменту. От Δt удобно перейти к Δu – начальной фазе. Начальной фазой называют разность в угловом положении КА-цели и активного КА в начальный момент времени. Тогда вместо ΔV_{i1}^* можно вначале приближенно найти ΔV_{i2}^*

$$\Delta V_{i2}^* \approx -\frac{\Delta u}{3\varphi_{10}},$$

затем находится ΔV_{i1}^* , а после этого φ_1^*, φ_2^* и т.д.

Трёхимпульсные решения. При анализе трехимпульсных маневров будем предполагать, что на первом интервале маневрирования прикладывается один импульс скорости, вариант с двумя импульсами на первом интервале рассчитывается аналогично. Предположение, что на первом интервале маневрирования прикладывается один импульс скорости, а на втором – два,

вполне обоснованно. В момент определения параметров маневров существует ошибка в знании элементов орбит активного КА и КА-цели. Маневры первого интервала также будут исполнены с ошибками. Всё это приведет к отличию сформированной орбиты от расчетной, поэтому на втором интервале маневрирования одного импульса скорости для перехода на заданную орбиту будет недостаточно, и на этом интервале все равно придется использовать два импульса.

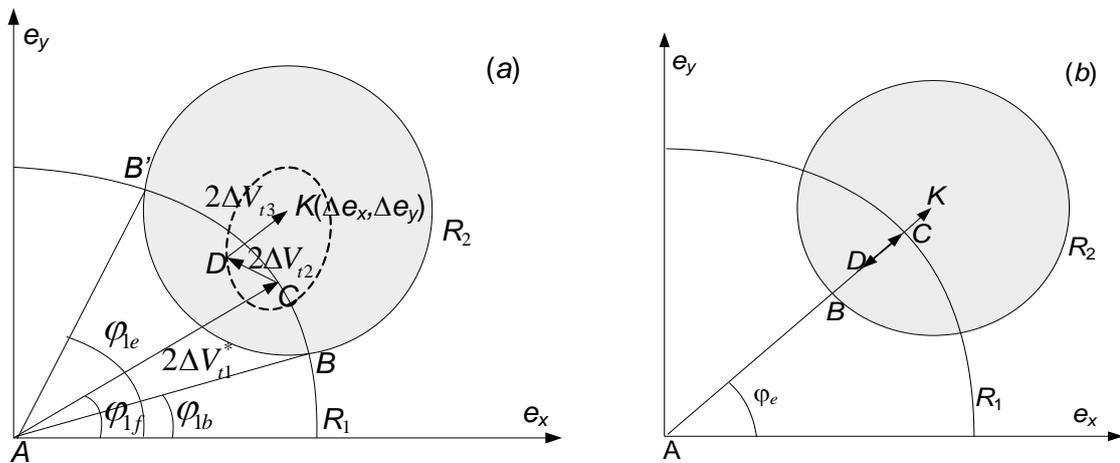


Рисунок 3.2. Трехимпульсные решения:

(a) общее решение; (b) апсидальное решение

Величину трансверсальной составляющей первого импульса скорости можно определить приближенно по формуле (3.5), а сумму трансверсальных составляющих импульсов второго интервала аналогично (3.6):

$$\Delta V_{\text{II}} = \Delta V_{t2}^* + \Delta V_{t3}^* \approx \frac{\Delta a}{2} + \frac{\Delta t}{3\varphi_{10}}. \quad (3.9)$$

Пусть окружности, имеющие радиусы $R_1 = 2|\Delta V_{t1}^*|$ и $R_2 = 2|\Delta V_{\text{II}}|$, пересекаются (рис. 3.2(a)), а знаки ΔV_{t1}^* и ΔV_{II} совпадают, что возможно при оптимальных значениях Δt для перелетов между непересекающимися орбитами.

Для существования рассматриваемых решений типа CAS необходимо, чтобы знаки трансверсальных составляющих импульсов скорости второго

интервала маневрирования совпадали, это возможно при $|\Delta V_{ii}^*| \leq |\Delta V_{\text{II}}|$ ($i=2,3$). Углы приложения этих импульсов могут быть любыми, следовательно, точка C , соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, должна принадлежать кругу радиусом R_2 с центром в т.К (рис. 3.2(a)). Это связано с тем, что переход в точку K на втором интервале маневрирования осуществляется не одним отрезком длины $2\Delta V_{\text{II}}$ (как в двухимпульсной схеме с одним импульсом скорости на втором интервале маневрирования), а двузвенной ломаной линией длины $2\Delta V_{\text{II}}$ (так как на втором интервале маневрирования прикладываются два импульса скорости, углы приложения которых могут быть любыми). Пример такой линии – ломаная CDK на рис.3.2(a). Таким образом, точка C может лежать не только на окружности радиуса R_2 , но и внутри неё. В то же время она должна принадлежать окружности, имеющей радиус R_1 . Следовательно, точка C должна принадлежать дуге BB' окружности радиуса R_1 (рис. 3.2(a)). Каждому положению точки C на дуге BB' соответствует множество решений, отличающихся углами приложения и величинами второго и третьего импульсов скорости, но имеющих одинаковую суммарную характеристическую скорость $\frac{1}{2}|\Delta a|$. Пример трехимпульсного решения изображен на рис. 3.2(a), это ломаная $ACDK$. Точка D , соответствующая вектору эксцентриситета орбиты, получающейся после исполнения первого импульса скорости на втором интервале маневрирования, должна принадлежать эллипсу с фокусами в точках C и K . Большая полуось этого эллипса равна ΔV_{II} (рис 3.2(a)).

В рассматриваемой трехимпульсной задаче встречи шесть переменных (три трансверсальных составляющих импульсов скорости и три их угла приложения) и четыре ограничения в виде равенств. Если дополнительно зафиксировать значения двух из шести переменных, то значения остальных переменных однозначно определяются из системы (3.1).

Зафиксируем углы приложения первого и второго импульсов скорости $\varphi_1 = \varphi_{1f}$, $\varphi_2 = \varphi_{2f}$. Решение интересующего типа можно получить, если $\varphi_{1f} \subseteq (\varphi_{1b}, \varphi_{1e})$,

т.е. точка C принадлежит дуге BB' . Естественно, что φ_{1f} и φ_{2f} должны принадлежать соответственно первому и второму интервалам маневрирования. Так как φ_1 задан, а ΔV_{t1}^* определяется из (3.5), то положение точки C известно (известен вектор эксцентриситета орбиты ожидания). Два последних импульса скорости обеспечивают переход со свободным временем на втором интервале маневрирования (переход из точки C в точку K). Угол приложения первого из этих импульсов задан, следовательно, используя формулы (2.2), можно определить ΔV_{t2}^* , ΔV_{t3}^* и φ_3^* [91]:

$$\Delta V_{t2}^* = \frac{\Delta \tilde{e}^2 - \Delta a^2}{4(\Delta \tilde{e}_y \sin \varphi_{2f} + \Delta \tilde{e}_x \cos \varphi_{2f} - \Delta a)},$$

$$\Delta V_{t3}^* = \frac{\Delta \tilde{a}}{2} - \Delta V_{t2}^*,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\frac{\Delta \tilde{e}_y}{2} - \Delta V_{t2}^* \sin \varphi_{2f}}{\frac{\Delta \tilde{e}_x}{2} - \Delta V_{t2}^* \cos \varphi_{2f}},$$

где $\Delta \tilde{e}_x = \Delta e_x - 2\Delta V_{t1}^* \cos \varphi_{1f}$, $\Delta \tilde{e}_y = \Delta e_y - 2\Delta V_{t1}^* \sin \varphi_{1f}$, $\Delta a = \Delta a - 2\Delta V_{t1}^*$.

Воспользовавшись значениями ΔV_{t1}^* , ΔV_{t2}^* , ΔV_{t3}^* , φ_3^* в качестве начального приближения, можно найти параметры маневра, при которых четвертое уравнение системы (3.1) выполнено с заданной точностью. Для этого подставим фиксированные углы приложения и найденные параметры импульсов скорости в левую часть четвертого уравнения системы (3.1) и вычислим сформированное значение Δt^* . Затем изменим в четвертом уравнении системы (3.1) Δt на величину $\Delta t - \Delta t^*$ ($\Delta t := \Delta t + \Delta t - \Delta t^*$) и повторим все вычисления. Процедура заканчивается, когда $|\Delta t - \Delta t^*| \leq \varepsilon$, где ε – точность выполнения этого уравнения. Так как имеется еще описанная в первой главе внешняя итерационная процедура, которая обеспечивает учет всех возмущений, то точность данной итерационной

процедуры, как правило, должна быть на порядок выше точности выполнения условия по времени во внешней итерационной процедуре.

Требование фиксации углов приложения импульсов скорости обычно связано с условиями полета. Если ограничений на моменты приложения импульсов скорости нет, то для простоты и надежности лучше использовать простейшее решение, у которого импульсы прикладываются на линии апсид относительной орбиты (апсидальное решение). Можно предположить, например, что третий импульс скорости имеет тот же угол приложения φ_e (1.14) на своем витке, что и первый импульс на своем витке, а угол приложения второго импульса скорости отличается на 180° от угла приложения третьего импульса. На рисунке 3.2(b) импульсам скорости такого решения соответствуют отрезки AC , CD , DK . Зная углы приложения импульсов на витке, легко вычислить значения углов φ_j :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_e + 2\pi(N_I - N_{ap}) - u_{ap}, \\ \varphi_2 &= \varphi_e - \pi + 2\pi(N_{II} - N_{ap}) - u_{ap}, \\ \varphi_3 &= \varphi_e + 2\pi(N_{II} - N_{ap}) - u_{ap},\end{aligned}\tag{3.10}$$

где N_{ap} , u_{ap} – номер витка и аргумент широты прицельной точки, N_I , N_{II} – номера витков, на которых прикладываются импульсы скорости первого и второго интервалов маневрирования соответственно.

Величины трансверсальных составляющих импульсов скорости однозначно определяются из системы (3.1):

$$\begin{aligned}\Delta V_{t2} &= \frac{1}{4}(\Delta a - \Delta e), \\ \Delta V_{t1} &= \frac{\Delta t - k_2 \Delta V_{t2} - \frac{1}{4} k_3 (\Delta a + \Delta e)}{(k_1 - k_3)},\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\Delta V_{i3} = \frac{1}{4}(\Delta a + \Delta e) - \Delta V_{i1},$$

где $k_i = 4\sin\varphi_i - 3\varphi_i$ ($i=1,2,3$).

В зависимости от расположения второго интервала маневрирования может существовать решение, у которого порядок исполнения импульсов скорости обратный. Угол приложения первого импульса скорости второго интервала маневрирования φ_e , а второй импульс прикладывается через полвитка.

Важно отметить, что при определении параметров апсидального решения никак не использовалось предположение о многовитковости встречи. Найденное аналитическое решение можно использовать для определения параметров маневров встречи любой продолжительности.

Рассмотренные решения существуют, если окружности радиусов R_1 и R_2 пересекаются или окружность радиуса R_1 целиком лежит внутри окружности радиуса R_2 . Если наоборот, окружность радиуса R_2 целиком лежит внутри окружности радиуса R_1 , то трехимпульсные решения CSS существуют только, если на первом интервале маневрирования прикладываются два импульса скорости.

Если одна из окружностей целиком лежит внутри другой, и трехимпульсные решения CSS существуют, среди них можно выделить четыре простейших трехимпульсных апсидальных решения (если два из трех импульсов скорости можно располагать как на первом, так и на втором интервалах маневрирования). Параметры этих решений аналогичным образом однозначно находятся из системы (3.1). Как было показано во второй главе, реальная (после уточнения параметров маневров с помощью итерационной процедуры, описанной в первой главе) суммарная характеристическая скорость этих решений может несколько отличаться. Если длина каждого из разрешенных интервалов маневрирования не превосходит витка, остаются только два возможных апсидальных решения.

Четырёхимпульсные решения. Использование четырёхимпульсной схемы позволяет на каждом интервале маневрирования иметь по два импульса скорости и таким образом не зависеть от взаиморасположения окружностей, имеющих радиусы R_1 и R_2 (не имеет значения, какая из окружностей расположена внутри другой окружности). Более того, наличие новых свободных переменных позволяет накладывать различные дополнительные ограничения на параметры маневров.

Оценим приближенно сумму трансверсальных составляющих импульсов скорости каждого из интервалов маневрирования аналогично тому, как это делалось для двух- и трехимпульсных маневров

$$\begin{aligned}\Delta V_{II} &= \Delta V_{t1}^* + \Delta V_{t2}^* \approx -\frac{\Delta t}{3\varphi_{10}}, \\ \Delta V_{III} &= \Delta V_{t3}^* + \Delta V_{t4}^* \approx \frac{\Delta a}{2} + \frac{\Delta t}{3\varphi_{10}}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Пусть окружности, имеющие радиусы $R_1=2|\Delta V_{II}|$ и $R_2=2|\Delta V_{III}|$, пересекаются и знаки ΔV_{II} , ΔV_{III} совпадают. В этом случае существует множество решений с одинаковой суммарной характеристической скоростью маневров $\frac{|\Delta a|}{2}$.

Точка C , соответствующая параметрам орбит ожидания таких решений, должна принадлежать множеству G – пересечению кругов радиусов R_1 и R_2 (рис.3.3). Это необходимо для совпадения знаков трансверсальных составляющих импульсов скорости на каждом из интервалов маневрирования. В задаче определяются значения восьми переменных φ_i , ΔV_{ii} ($i=1, \dots, 4$) при четырех ограничениях, следовательно, для однозначного решения задачи необходимо наложить четыре дополнительных ограничения. При этом надо учитывать, что получаемое решение должно оставаться решением типа CSS. Можно, например, фиксировать углы приложения трех импульсов скорости и отношение величин импульсов скорости

одного из интервалов. Пусть, например, $\varphi_1 = \varphi_{1f}$, $\varphi_3 = \varphi_{3f}$, $\varphi_4 = \varphi_{4f}$, $m = \frac{\Delta V_{t3}}{\Delta V_{t3} + \Delta V_{t4}}$.

Ограничение на распределение величин импульсов скорости на втором интервале маневрирования часто встречается в практической работе при расчете параметров маневров КА «Союз», «Прогресс».

Фиксация углов приложения импульсов скорости на втором интервале маневрирования означает, что точка C , соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, для второго интервала маневрирования должна принадлежать не всему кругу радиусом R_2 , а отрезку LN' (рис. 3.3(a)).

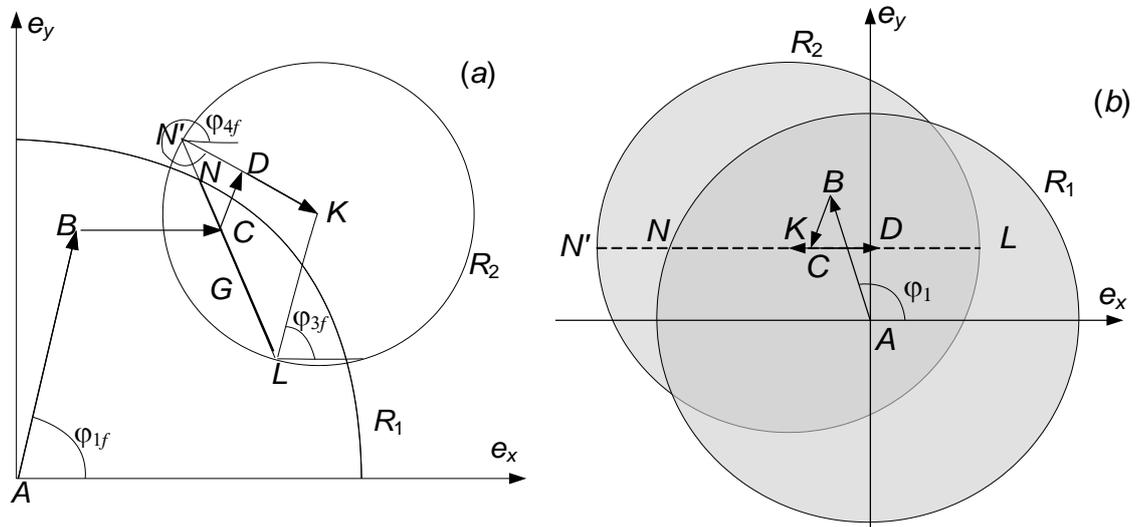


Рисунок 3.3. Четырехимпульсные решения:

(a) общее решение; (b) типичное решение для КА «Союз».

Одновременно точка C должна принадлежать кругу радиусом R_1 , следовательно, она обязательно должна принадлежать отрезку LN . Так как отношение величин импульсов скорости второго интервала маневрирования задано, а их сумма известна (3.12(b)), то тем самым известны величины этих импульсов ΔV_{t3}^* , ΔV_{t4}^* . Следовательно, известно и положение точки C на отрезке LN .

Первые два импульса скорости обеспечивают переход со свободным временем в т.С. Угол приложения одного из импульсов фиксирован,

следовательно, как и для второго интервала маневрирования трехимпульсных переходов, по аналогичным формулам можно определить величины импульсов скорости и угол приложения второго из них. В этих формулах надо заменить индексы «3» на «2» и «2» на «1», а величины $\Delta \tilde{e}_x, \Delta \tilde{e}_y, \Delta a$ определять по формулам (3.13) [91]:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{e}_x &= \Delta e_x - m \Delta V_{\text{II}} \cos \varphi_{3f} - (1-m) \Delta V_{\text{II}} \cos \varphi_{4f}, \\ \Delta \tilde{e}_y &= \Delta e_y - m \Delta V_{\text{II}} \sin \varphi_{3f} - (1-m) \Delta V_{\text{II}} \sin \varphi_{4f}, \\ \Delta a &= \Delta a - 2 \Delta V_{\text{II}}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Найденному решению соответствует ломанная $ABCDK$ (рис. 3.3(a)).

Значения $\Delta V_{t1}^*, \Delta V_{t2}^*, \Delta V_{t3}^*, \Delta V_{t4}^*$ и φ_2^* используются в качестве начального приближения для итерационной процедуры, которая аналогична процедуре для трехимпульсной задачи и позволяет выполнить четвертое уравнение системы (3.1) с заданной точностью.

Особенности схем маневрирования КК «Союз» и «Прогресс». При полете КА «Союз» углы приложения двух последних импульсов скорости фиксируются за виток и полвитка до точки встречи. Таким образом, импульсами скорости первого интервала маневрирования необходимо перейти на отрезок LN параллельный оси абсцисс (рис. 3.3(б)). Часто накладывается дополнительное ограничение, чтобы импульсы скорости последнего интервала маневрирования были примерно равной величины. Это означает, что т.С, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, должна располагаться на отрезке LN в окрестности точки K , тогда отрезок CD (третий импульс скорости) примерно равен отрезку DK (четвертому импульсу скорости). Угол приложения одного из импульсов скорости первого интервала маневрирования часто фиксируется таким образом, чтобы этот импульс исполнялся на линии пересечения плоскостей орбит КА «Союз» и орбитальной станции. Таким образом, наложены четыре дополнительных условия, которые позволяют однозначно определить величины всех импульсов скорости четырехимпульсной

компланарной встречи. Изображенная на рисунке 3.3(б) картинка соответствует реальному решению и реальному взаимному расположению окружностей для четырехимпульсной задачи, решаемой при баллистическом обеспечении полета КА «Союз».

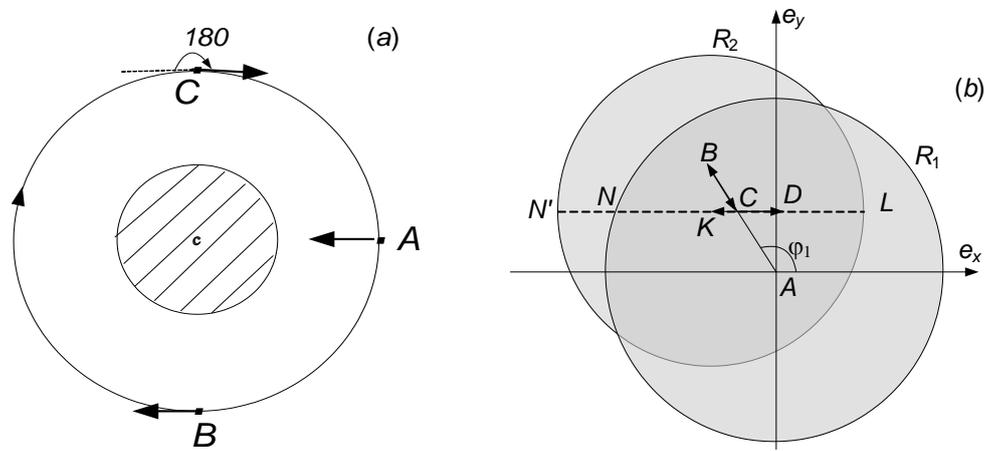


Рисунок 3.4. Схема маневрирования первых КК «Прогресс»:

(а) построение ориентации и схема исполнения маневров;

(б) пример решения для первых КК «Прогресс»

Схемы маневрирования, используемые для стыковки космических кораблей «Союз», «Прогресс» с орбитальной станцией в конце 70-х начале 80-х годов, заметно отличались от схем используемых позднее. Так для стыковки космических кораблей «Союз» использовалась не двухсуточная, а односуточная схема стыковки. Наибольшее отличие имела схема стыковки космических кораблей «Прогресс». Это была двухсуточная схема сближения, но с существенными ограничениями на ориентацию ДУ. За 22.5 минуты до начала рассчитанного маневра с помощью инфракрасной вертикали строилась ориентация на центр Земли (рис. 3.4(а) точка А). Затем через 22.5 минуты (рис. 3.4(а) т.В), когда построенная ранее ориентация близка к трансверсальной, прикладывается первый импульс скорости (он может быть разгонным или тормозным). Еще через 45 минут прикладывается еще один рассчитанный ранее импульс скорости, который также близок к трансверсальному (рис. 3.4(а) т.С).

Перед включением ДУ происходит разворот вектора тяги на 180 градусов, чтобы оба импульса скорости были на разгон.

На втором интервале маневрирования ориентация ДУ строится аналогичным образом. Таким образом, решается компланарная задача встречи, с ограничением, что второй импульс скорости исполняется примерно через полвитка после первого, а четвертый импульс скорости исполняется через полвитка после третьего. Если фиксирован угол приложения третьего импульса скорости (за виток до точки встречи), то остается только один свободный параметр – угол приложения первого импульса скорости, изменяя этот угол, можно получать решения, обладающие нужными свойствами. Например, получить решение, у которого примерно равны величины двух последних импульсов скорости (рис. 3.4 (б)). Найти такое решение можно аналитически, или перебирая угол приложения первого импульса скорости, и решая систему уравнений (3.1), при фиксированных углах приложения остальных импульсов скорости. Таким образом, можно найти решение задачи четырехимпульсной компланарной встречи, при использовании простейшей одноосной ориентации на центр Земли.

Также как и в случае трехимпульсных решений при отсутствии ограничений лучше использовать простейшее решение с приложением импульсов скорости в апсидальных точках относительной орбиты. Однако в отличие от трехимпульсного решения будет существовать произвол в выборе величины вектора эксцентриситета орбиты ожидания, т.е. существует произвол в положении т.С на отрезке LN (рис. 3.5).

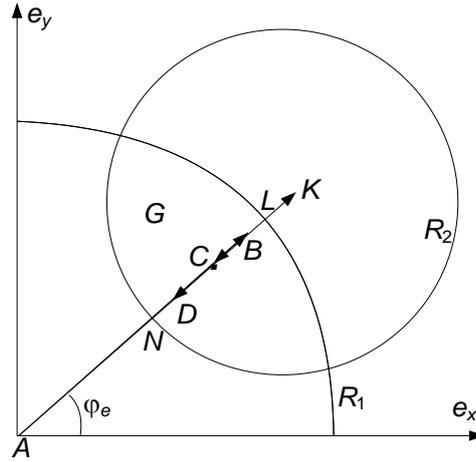


Рисунок 3.5. Четырехимпульсное апсидальное решение.

Чтобы устранить эту неопределенность целесообразно брать т.С посередине отрезка LN . Тогда величины двух импульсов скорости, прикладываемых в точках $\varphi_e + \pi$ на своих витках, будут одинаковы и равны $\frac{1}{8}(\Delta a - \Delta e)$, т.е. давать в сумме величину импульса скорости трехимпульсного решения, прикладываемого в том же направлении. Величины двух оставшихся импульсов скорости четырехимпульсного решения однозначно находятся из двух последних уравнений системы (3.1). Пример такого решения изображен на рис. 3.5. Первому импульсу скорости (его угол приложения $-\varphi_e$) соответствует отрезок AB , второму ($\varphi_e + \pi$) – отрезок BC , третьему ($\varphi_e + \pi$) – отрезок CD , четвертому (φ_e) – отрезок DK . Конечно в данном случае, когда речь идет об углах приложения импульсов скорости, то имеется в виду их положение на соответствующем витке.

Также можно выбрать положение т.С на отрезке (и соответственно величину эксцентриситета и фокального параметра орбиты ожидания) таким образом, чтобы обеспечить нужную эволюцию долготы восходящего узла орбиты ожидания. Эта возможность будет использоваться во втором параграфе шестой главы.

Как и в трехимпульсном случае, при определении параметров апсидального решения никак не использовалось предположение о

многовитковости встречи. Найденное аналитическое решение можно использовать для определения параметров маневров встречи любой продолжительности.

Реальная (после уточнения параметров маневров с помощью итерационной процедуры) суммарная характеристическая скорость различных апсидальных решений может несколько отличаться.

3.3. Встреча на компланарных пересекающихся орбитах (апсидальное решение)

Компланарное апсидальное решение (CAS) имеет место, если окружности, имеющие радиусы R_1 и R_2 , не пересекаются, и при этом одна из окружностей не находится внутри другой, т.е. когда выполнено условие $|R_1| + |R_2| \leq \Delta e$. Это возможно для переходов между пересекающимися орбитами при некоторых значениях $\Delta t(\Delta u)$. Подробно области существования решений различного типа будут рассмотрены в четвертом разделе этой главы.

Рассмотрим трехимпульсные маневры, у которых второй и третий импульсы скорости исполняются на втором интервале маневрирования. Все три импульса скорости исполняются на линии апсид относительной орбиты, следовательно, их углы приложения известны (3.10), таким образом, из системы (3.1) можно однозначно определить величины импульсов. Для этого используются формулы для апсидального трехимпульсного решения (3.11), только следует обратить внимание, что величина ΔV_2 будет уже отрицательной. Преимуществом апсидальных решений является то, что можно использовать одинаковые формулы независимо от типа орбит (пересекающиеся или непересекающиеся). На рисунке 3.6(a) изображено получающееся решение. Первому импульсу скорости соответствует отрезок AB , второму – BC , третьему – CK . Из (3.5) и (3.9) следует, что $AB \approx R_1$, а $CK-BC \approx R_2$.

У четырехимпульсных апсидальных маневров отрезки, соответствующие импульсам скорости, также принадлежат отрезку AK , соединяющему центры

окружностей (рис.3.6(b)). Первому импульсу соответствует отрезок AB , второму – BC , третьему – CD , четвертому – DK . Как следует из (3.12а), (3.12б), $AB-BC \approx R_1$, $DK-CD \approx R_2$.

Точные значения величин трансверсальных составляющих определяются из системы (3.1). Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, необходимо наложить дополнительное ограничение. Например, зафиксировать на отрезке EL положение т. C , соответствующей вектору эксцентриситета орбиты ожидания, или фиксировать отношение величин импульсов скорости одного из интервалов маневрирования, или наложить любое другое аналогичное ограничение, но следует помнить, что т. C всегда должна принадлежать отрезку EL , соединяющему ближайшие точки окружностей. Если дополнительных ограничений не наложено, то можно использовать простейшее решение, у которого т. C расположена посередине отрезка EL . Процедура определения параметров таких решений описана в предыдущем параграфе.

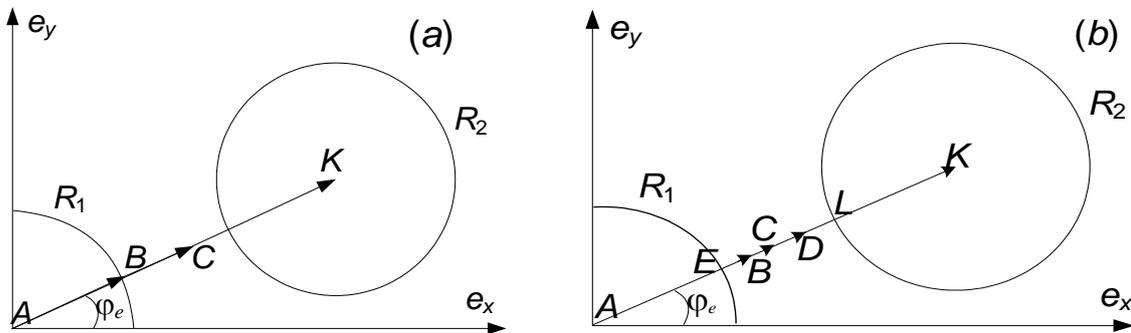


Рисунок 3.6. Апсидальные решения:

(a) трехимпульсное решение; (b) четырехимпульсное решение

В зависимости от порядка приложения импульсов скорости существуют два возможных трехимпульсных решения CAS и четыре четырехимпульсных апсидальных решения. Если длина каждого из разрешенных интервалов маневрирования не превосходит витка, остается только одно возможное апсидальное решение. Таким образом, чтобы найти действительно оптимальное решение, которое зависит от последовательности приложения импульсов

скорости, длина каждого из интервалов маневрирования должна быть полтора витка. Интервала маневрирования длиной один виток достаточно, если ограничиваться линеаризованными уравнениями движения, из которых следует, что последовательность приложения импульсов скорости не имеет значения. Реальная (после уточнения параметров маневров с помощью итерационной процедуры) суммарная характеристическая скорость различных апсидальных решений может несколько отличаться.

Как и в случае непересекающихся орбит при определении параметров апсидального решения никак не использовалось предположение о многовитковости встречи. Найденное аналитическое решение можно использовать для определения параметров маневров встречи любой продолжительности.

3.4. Невырожденное решение компланарной задачи встречи

В случае, когда из-за большой первоначальной разницы в положениях КА вдоль орбиты суммарная характеристическая скорость встречи (ΔV_{rdv}) превышает суммарную характеристическую скорость перехода (ΔV_{trf}), оптимальным будет невырожденное решение. Например, КА-цель находится так далеко впереди активного КА, расположенного на внутренней орбите, что тому сначала придется ещё уменьшить большую полуось, чтобы в процессе фазирования успеть догнать КА-цель, и уже потом импульсами скорости второго интервала маневрирования увеличить большую полуось до нужного значения. У решений этого типа всегда импульсы скорости одного интервала маневрирования разгонные, другого – тормозные.

Компланарные невырожденные решения (CNDS) существуют, если окружности, имеющие радиусы R_1 и R_2 , пересекаются в случае перелета между пересекающимися орбитами, или одна из окружностей целиком лежит внутри другой при перелете между непересекающимися орбитами.

Для невырожденного решения годограф базис-вектора имеет вид циклоиды. Чтобы необходимые условия оптимальности для четырехимпульсного перелета были выполнены, годограф должен быть симметричен относительно оси λ [13]. Следовательно, центр системы координат должен лежать либо посередине между петлями годографа (рис.3.7) (назовем такие решения годографом первого типа), либо на оси петли (годограф второго типа).

Первый тип годографа существует, если в системе (3.4а), (3.4б) $C=0$, $\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_b + \theta_f)$, второй – если $C=3BA\pi$, $\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_b + \theta_f) + \pi$. Угол θ_b соответствует началу первого интервала маневрирования (точка A , рис. 3.7), θ_f – концу второго интервала маневрирования (точка D , рис. 3.7).

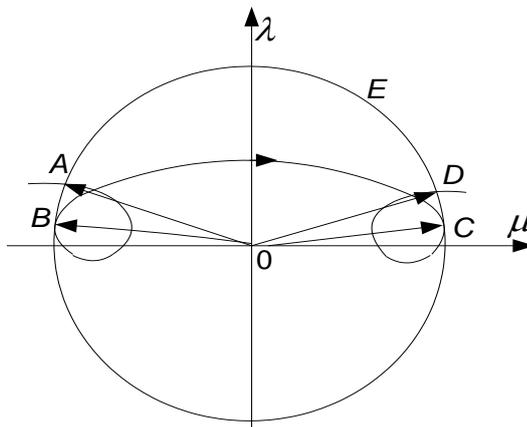


Рисунок 3.7. Вид годографа базис-вектора для встречи на компланарных орбитах

Из симметричности решения следуют ограничения на параметры маневра:

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_4 - \theta_3, \quad (3.14)$$

$$\frac{\lambda(\theta_1)}{\mu(\theta_1)} = -\frac{\lambda(\theta_4)}{\mu(\theta_4)}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\lambda(\theta_2)}{\mu(\theta_2)} = -\frac{\lambda(\theta_3)}{\mu(\theta_3)}. \quad (3.16)$$

Таким образом, у оптимального четырехимпульсного решения первый импульс скорости должен прикладываться в начале первого интервала

маневрирования $\theta_1=\theta_b$, последний импульс – в конце второго интервала маневрирования $\theta_4=\theta_f$, угол между моментами приложения первого и второго импульсов скорости равен углу между моментами приложения третьего и четвертого импульсов (3.14). Простые соотношения (3.15), (3.16) связывают и ориентацию импульсов скорости.

Из симметричности годографа следует, что если необходимые условия оптимальности выполнены для первого и второго импульсов скорости, то они выполняются и для третьего и четвертого импульсов.

Определение параметров четырехимпульсного решения. Запишем условие пересечения годографа базис-вектора с окружностью единичного радиуса для первого импульса скорости и условия касания годографа и окружности для второго импульса скорости:

$$\lambda^2(\theta_1)+\mu^2(\theta_1)=1, \quad (3.17)$$

$$\lambda^2(\theta_2)+\mu^2(\theta_2)=1, \quad (3.18)$$

$$\lambda(\theta_2)\dot{\lambda}(\theta_2)+\mu(\theta_2)\dot{\mu}(\theta_2)=0, \quad (3.19)$$

$$\lambda^2(\theta)+\mu^2(\theta)\leq 1 \quad \forall \theta \in [\theta_b, \theta_f]. \quad (3.20)$$

Обозначим $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$, $\theta = \frac{1}{2}(\theta_b+\theta_f) = \frac{1}{2}(\theta_4+\theta_1)$. Тогда система (3.17)-(3.19)

принимает вид:

$$A^2(\pm \cos \theta + 2B)^2 + A^2(\mp 2 \sin \theta - 3B\theta)^2 = 1, \quad (3.21)$$

$$A^2(\pm \cos(\theta - \Delta\theta) + 2B)^2 + A^2(\mp 2 \sin(\theta - \Delta\theta) - 3B(\theta - \Delta\theta))^2 = 1, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &(-\cos(\theta - \Delta\theta) \mp 2B) \sin(\theta - \Delta\theta) + (\mp 2 \sin(\theta - \Delta\theta) - \\ &- 3B(\theta - \Delta\theta))(\mp \cos(\theta - \Delta\theta) - 3B) = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где верхние знаки соответствуют годографу первого типа, а нижние – годографу второго типа.

Выразив из уравнений (3.21), (3.22) B , A и подставив их в (3.23), получаем уравнение для нахождения $\Delta\theta$ при заданном θ . Это уравнение для годографов и первого, и второго типа имеет вид:

$$9B^2(\theta - \Delta\theta) + (4\sin(\theta - \Delta\theta) + 6(\theta - \Delta\theta)\cos(\theta - \Delta\theta))B + 3\sin(\theta - \Delta\theta)\cos(\theta - \Delta\theta) = 0, \quad (3.24)$$

где $B = \frac{B_1}{B_2}$,

$$\begin{aligned} B_1 &= 3\sin(\theta - \Delta\theta)\cos(\theta - \Delta\theta)(\theta^2 - (\theta - \Delta\theta)^2) - \\ &- 3(\theta - \Delta\theta)(\sin^2\theta - \sin^2(\theta - \Delta\theta)), \\ B_2 &= 12(\theta - \Delta\theta)(\theta\sin\theta - (\theta - \Delta\theta)\sin(\theta - \Delta\theta)) + 4(\theta - \Delta\theta)(\cos\theta - \\ &- \cos(\theta - \Delta\theta)) - (\theta^2 - (\theta - \Delta\theta)^2)(6(\theta - \Delta\theta)\cos(\theta - \Delta\theta) + 4\sin(\theta - \Delta\theta)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Константа A определяется из уравнения (3.21):

$$A = ((\pm\cos\theta + 2B)^2 + (\mp 2\sin\theta - 3B\theta)^2)^{-1/2} \quad (3.26)$$

Уравнение (3.24) решается численно. Оно может иметь до 6 корней, часть из которых отсеивается по условию (3.20). Остаются корни, соответствующие годографу первого и/или второго типа.

Изменяя θ и определяя соответствующие ему значения $\Delta\theta$, можно получить зависимости расстояния между импульсами одного участка маневрирования $\Delta\theta$ от длины интервала перелета 2θ .

Эти зависимости изображены на рис. 3.8.

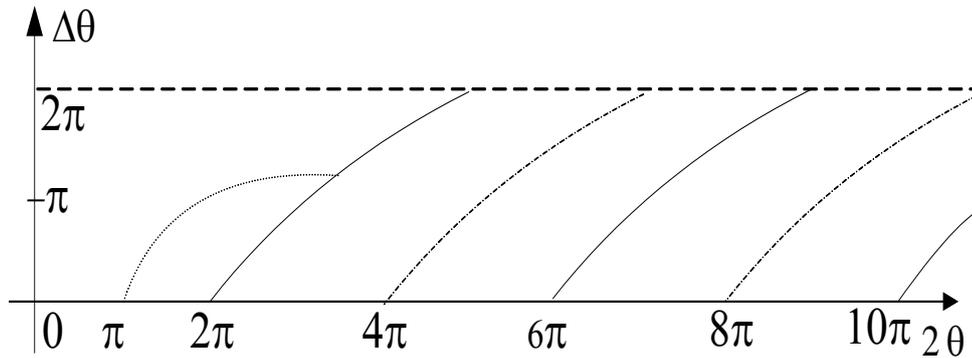


Рисунок 3.8. Зависимость углового расстояния между импульсами скорости от продолжительности перелета

Сплошные линии соответствуют годографу первого типа, штрихпунктирные – годографу второго типа. Длина непрерывного интервала существования каждого из решений – 3π . При угловой дальности перелета $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$ существуют решения обоих типов, на участках $[3\pi + 4\pi(N-1), 4\pi N]$ – решения только для годографа первого типа, на участках $[5\pi + 4\pi(M-1), 6\pi + 4\pi(M-1)]$ – только решения для годографа второго типа. Исключение составляет первая зависимость, изображенная точками, которая соответствует годографу "с одной петлей" [13]. В дальнейших рассуждениях значения N и M будут использоваться в качестве порядкового номера непрерывных кривых, соответствующих годографам первого и второго типов.

Зависимость $\Delta\theta = f(\theta)$ удобно представить в виде функции двух переменных: $\Delta\theta = f^*(\theta^*, N)$, где $\theta^* = \theta - 2\pi - 4\pi(N-1)$, $\theta^* \in [0, 3\pi]$. Изображенные на рис.3.8 зависимости близки по виду друг другу, т.е. функция f^* слабо зависит от N , и изменение $\Delta\theta$ на отрезке $[0, 3\pi]$ определяется в основном величиной θ^* . На рис. 3.9(а) приведена зависимость $\Delta\theta$ от θ^* для $N=5$. Ее отличие от зависимостей, полученных для больших N не превосходит 0.2° на всем интервале $[0, 3\pi]$, отличие от зависимостей для меньших N приведено на рис. 3.9(б). Аналогичная картина наблюдается у зависимостей, полученных для годографа второго типа.

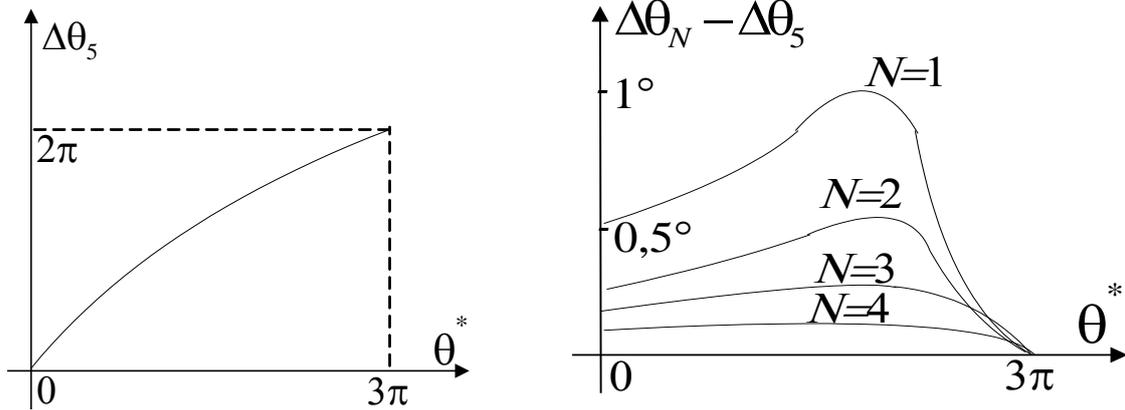


Рисунок 3.9 (а). Зависимость углового расстояния между импульсами скорости от продолжительности перелета для $N=5$

Рисунок 3.9 (б). Разность угловых расстояний между импульсами скорости для различных N

Кроме углов приложения импульсов скорости годограф базис-вектора позволяет определить ориентацию импульсов скорости. После того, как из уравнения (3.24) найдено значение $\Delta\theta$, определяются значения констант A и B по формулам (3.25), (3.26), а также значения λ, μ в точках θ_1, θ_2 . Зависимости тангажей $\vartheta = \arctg \frac{\lambda}{\mu}$ от θ^* для внешних импульсов скорости приведены на рис. 3.10(a).

Аналогичные зависимости для внутренних импульсов скорости приведены на рис. 3.10(b).

Из рисунка следует, что у внутренних импульсов скорости отношение λ/μ мало, и можно считать их чисто трансверсальными. У внешних импульсов скорости необходимо учитывать их радиальные составляющие.

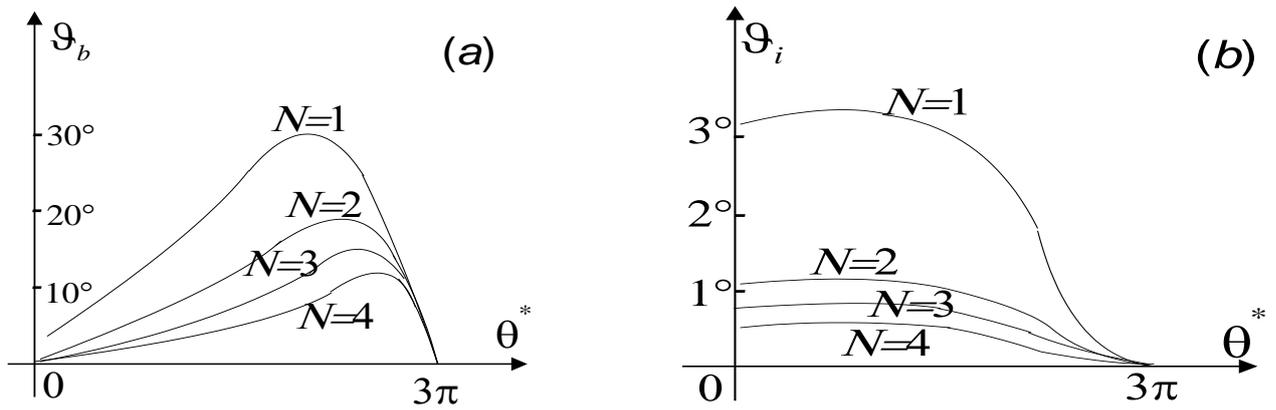


Рисунок 3.10. Зависимость тангажей импульсов скорости от продолжительности перелета: (а) для внешних импульсов скорости; (б) для внутренних.

Для ускорения процесса определения параметров оптимального перелета зависимости $\Delta\theta(\theta^*)$ и $\lambda/\mu(\theta^*)$ для годографов первого и второго типов можно приблизить аналитическими формулами [92]. Эти выражения должны быть и достаточно простыми, и достаточно точными. Функцию $\Delta\theta(\theta^*)$ можно аппроксимировать кубической параболой вида:

$$\Delta\theta = a(\theta^*)^3 + b(\theta^*)^2 + c\theta^* + d. \quad (3.27)$$

При этом зависимостью $\Delta\theta$ от значений N или M можно пренебречь вследствие близости кривых друг другу при различных N, M . Для всех кривых, соответствующих годографу первого типа, имеется общая зависимость от θ^* , коэффициенты a, b, c, d которой определялись по методу наименьших квадратов: $a = -0.00125, b = 0.003475, c = 0.74309, d = 0$. Для зависимости, соответствующей годографу второго типа, коэффициенты a, b, c, d имеют следующие значения: $a = -0.001213, b = 0.00302, c = 0.74444, d = 0$. Для годографа «с одной петлей» $a = 0.00575, b = -0.11271, c = 1.15557, d = -2.52301$.

Отличие $\Delta\theta$, полученного из (3.27), от $\Delta\theta$, определяемого путем решения уравнения (3.24), не превышает 0.7° для годографа первого типа и 0.55° для

годографа второго типа. Характерная зависимость $\Delta\theta = \Delta\theta_{\text{числ}} - \Delta\theta_{\text{аналит}}$ от $\tilde{\theta}^*$ для $N=3$ приведена на рис. 3.11.

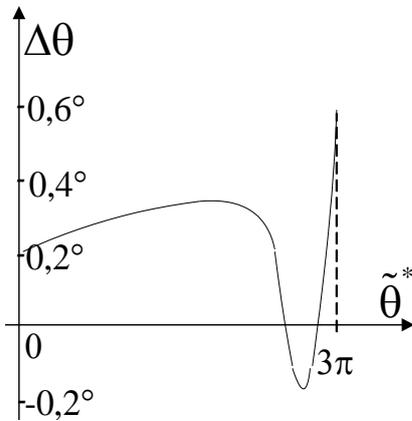


Рисунок. 3.11. Отличие в разности углов приложения импульсов между аналитическим и численным решениями

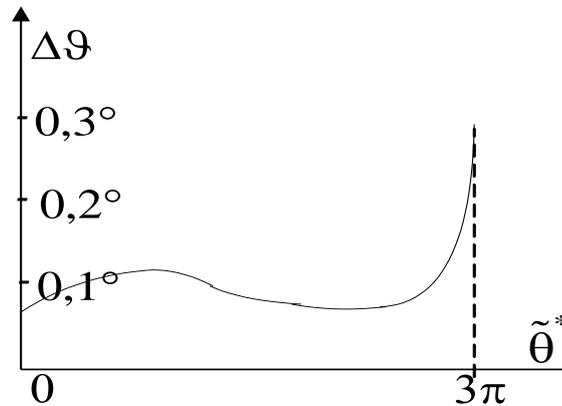


Рисунок 3.12. Отличие тангажей импульсов скорости аналитического и численного решений

Таким образом, найдена очень простая и достаточно точная формула для аналитического определения углов приложения импульсов скорости оптимального решения. Для аналитического приближения зависимости $\frac{\lambda}{\mu}(\tilde{\theta}^*)$ для внешних импульсов можно использовать выражение вида [93]:

$$\frac{\lambda}{\mu}(\tilde{\theta}^*) = l(3\pi - \tilde{\theta}^*)^g e^{f(3\pi - \tilde{\theta}^*)}, \quad (3.28)$$

где коэффициенты l , g , f зависят от N или M для годографов первого или второго типов соответственно. Для годографов первого типа

$$\begin{aligned} l &= 0.3605805e^{-0.2073523N} + 0.1938393, \\ g &= 0.7413017e^{-0.6305316N} + 1.1037093e^{-0.04167616N}, \\ f &= -0.1733134e^{0.0305692N} - 0.55892376, \end{aligned} \quad (3.29)$$

а для годографов второго типа

$$\begin{aligned}
l &= 0.39946973e^{-0.19462509M} + 0.18542422, \\
g &= 0.90946358e^{-0.5468307M} + 1.0936807e^{-0.03895865M}, \\
f &= -0.24736464e^{0.259488M} - 0.48186975.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

При N и M больше 10 значения $\frac{\lambda}{\mu}$ для годографов первого и второго типов для одинаковых значений N и M практически совпадают. Зависимость коэффициента l, g, f от N для годографа первого типа имеет вид:

$$\begin{aligned}
l &= 0.2918171e^{-0.05347094N} + 0.0622614, \\
g &= 0.8709496e^{-0.03271924N} + 0.09475382, \\
f &= 0.0000574N^2 - 0.0040646N - 0.7591687,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

а для годографа второго типа можно воспользоваться этими же выражениями, заменив N на M .

Формула (3.28) приближает зависимость $\frac{\lambda}{\mu}(\theta^*)$ с хорошей точностью ($\approx 1\%$) при $0 \leq \theta^* \leq 2.22\pi$. При увеличении θ^* ошибка растет, но на участке $2.22\pi \leq \theta^* \leq 3\pi$ она не превышает 10% от значения $\frac{\lambda}{\mu}$ (для зависимостей, у которых $N \leq 50$). На рис. 3.12 представлен график зависимости $\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_{\text{числ}} - \Delta\vartheta_{\text{аналит}}$ от θ^* при $N = 20$, где $\vartheta = \arctg\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

При значениях $N > 50$ на участке $0 \leq \theta^* \leq 2.45\pi$ величина $\vartheta = \arctg\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ не больше 0.1° , а максимум ϑ на участке $2.45\pi \leq \theta^* \leq 3\pi$ не превосходит 3° . Это позволяет считать внешние импульсы скорости оптимального решения для

перелетов продолжительностью более 100 витков чисто трансверсальными. Для годографа "с одной петлей" зависимость $\frac{\lambda}{\mu}$ от $\tilde{\theta}^*$ имеет вид:

$$\frac{\lambda}{\mu}(\tilde{\theta}^*) = (1.15557\tilde{\theta}^{*2} - 6.06497\tilde{\theta}^* + 9.51334)^{-1} \quad (3.32)$$

Таким образом, при заданной угловой дальности перехода $\theta_f - \theta_b$ по формулам (3.27), (3.28) определяются углы приложения и ориентация импульсов скорости оптимального четырехимпульсного маневра. После этого из системы (3.1) однозначно определяются величины импульсов скорости. Когда трансверсальные составляющие на каждом интервале маневрирования имеют одинаковые знаки, но отличаются на интервалах, то решение принадлежит рассматриваемому классу CNDS и локально оптимально.

Определение параметров двух- и трехимпульсных решений. Для того чтобы найти глобально оптимальное решение, необходимо найти еще трех- и двухимпульсные решения, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, и сравнить суммарную характеристическую скорость всех решений.

Для поиска параметров решений этого типа можно воспользоваться итерационными процедурами, описанными во втором разделе этой главы. Поскольку тангажи внутренних импульсов скорости малы, двухимпульсному решению также соответствуют точки пересечения окружностей, имеющих радиусы R_1 и R_2 (только знаки у ΔV_{t1} и ΔV_{t2} разные). Процедура определения параметров этих решений описана выше. У трехимпульсного решения фиксированными углами являются, угол начала первого интервала маневрирования $\varphi_1 = \varphi_{II}$ и угол конца второго интервала маневрирования $\varphi_3 = \varphi_{II}$ (два импульса скорости первый и последний прикладываются в точках, где циклоида пересекает окружность). Затем определяются величины трансверсальных составляющих импульсов скорости и угол приложения внутреннего импульса φ_2 . Если трехимпульсные решения этого типа существуют,

то этому углу соответствует момент касания циклоиды и окружности. Параметры маневров уточняются с помощью итерационной процедуры.

Несколько более сложной является процедура поиска параметров решения, у которого только один из импульсов скорости прикладывается на границе, а два других в точках касания циклоиды с окружностью. На том из интервалов, на котором исполняются два маневра, один из импульсов скорости также должен прикладываться на внешней границе интервала φ_{IIr} . Следовательно, момент приложения этого импульса скорости известен $\varphi_3 = \varphi_{IIr}$. Момент приложения второго импульса скорости этого интервала выбирается внутри интервала $\varphi_2 = \varphi_{IIf}$. Примерную величину трансверсальной составляющей импульса скорости первого интервала маневрирования ΔV_{t1} можно определить по формуле (3.5) или по более точной формуле (3.11д). После этого угол приложения первого импульса скорости φ_1 и величины импульсов скорости ΔV_{t2} и ΔV_{t3} определяются из системы (3.1):

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{\Delta e_y}{2\Delta V_{t1}} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} + \frac{\Delta e_x}{2\Delta V_{t1}} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} + \left(1 - \frac{\Delta a}{2\Delta V_{t1}}\right) \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}\right) - \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} - 2\pi n,$$

$$\Delta V_{t3} = (\Delta e_x + (2\Delta V_{t1} - \Delta a) \cos \varphi_2 - 2\Delta V_{t1} \cos \varphi_1) \frac{1}{2(\cos \varphi_3 - \cos \varphi_2)},$$

$$\Delta V_{t2} = \frac{1}{2} \Delta a - \Delta V_{t1} - \Delta V_{t3}.$$

Как всегда параметры маневров уточняются с помощью итерационной процедуры, чтобы четвертое уравнение системы (3.1) было выполнено с заданной точностью. После определения параметров маневров вычисляется СХС решения. Варьируя положение второго импульса на интервале маневрирования, можно найти оптимальное решение этого типа. Для этого можно использовать простой

перебор с постоянным шагом точек из соответствующего интервала маневрирования.

Пример. В качестве примера применения изложенной выше методики рассмотрим задачу определения параметров оптимального маневра, в результате которого КА должен изменить свое положение на круговой орбите и перейти в заданную точку за фиксированное время (происходящее при этом изменение в ориентации плоскости орбиты не имеет значения). Задача в такой постановке рассматривалась в работах ряда авторов.

Используя приведенные выше формулы, можно аналитически найти параметры оптимальных четырехимпульсных маневров. Интересно сравнить суммарную характеристическую скорость полученных решений с суммарной характеристической скоростью двухимпульсных и "рациональных" четырехимпульсных маневров, предложенных в работах [94, 95]. У "рациональных" четырехимпульсных маневров внутренние импульсы скорости отстают от внешних на половину витка.

Для данной задачи $\Delta e_x = \Delta e_y = \Delta a = 0$. Угол θ^* полностью определяет характер оптимального решения, Δt определяет только суммы трансверсальных составляющих первого и второго интервалов маневрирования (для расчетов было выбрано $\Delta t = 0.01$). Исследование проводилось для $N=1$, а θ^* изменялся в диапазоне $[0^\circ, 360^\circ]$ [93].

Оказалось, что оптимальные четырехимпульсные решения существуют для $\theta^* \in [0^\circ, 339^\circ]$. На рисунках 3.13 приведен вид оптимальных решений для различных θ^* .

Из рисунков 3.13 следует, что оптимальных трехимпульсных решений у задачи изменения положения на круговой орбите не существует. Какие бы не были два первых импульса скорости, которым соответствуют отрезки AB и BC , третьему импульсу должен соответствовать отрезок CK , но угол приложения

этого импульса скорости не совпадает с возможными оптимальными углами приложения импульсов скорости, которым соответствуют отрезки CD и DK (кроме того третья сторона треугольника должна быть равна сумме двух других, а это невозможно).

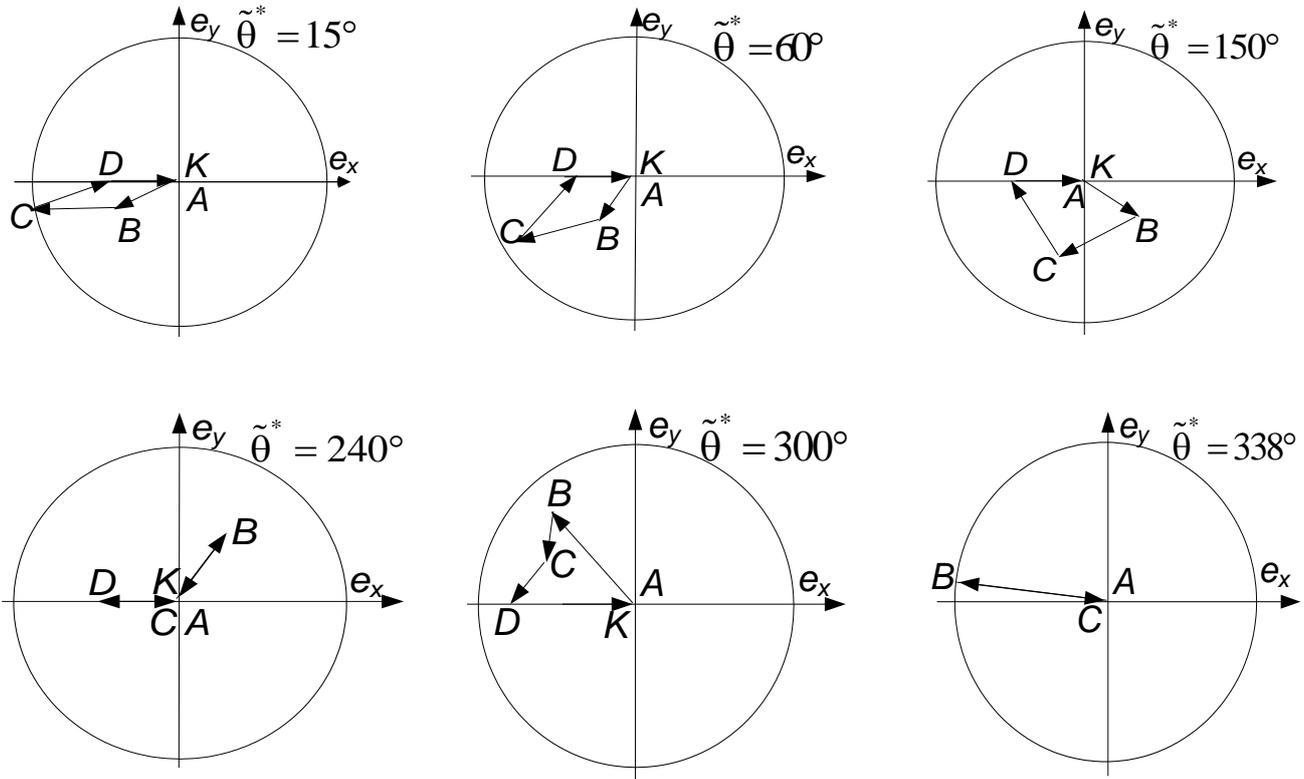


Рисунок 3.13. Вид оптимальных решений при различной дальности перелёта

В таблице 3.1 приведена суммарная характеристическая скорость оптимальных (ΔV_{opt}) и "рациональных" (ΔV_{r4}) четырехимпульсных решений, а также суммарная характеристическая скорость двухимпульсных решений (ΔV_2) и их отношение в процентах. У "рациональной" схемы все импульсы скорости одинаковы по величине, у оптимальной схемы величины внешних импульсов скорости отличаются от величин внутренних импульсов.

При небольших θ^* у оптимального решения мало и $\Delta\theta$ ($\Delta\theta \approx \frac{2}{3}\theta^*$), следовательно, два первых импульса скорости прикладываются в самом начале

перелета, а два последних – в конце. Суммарная характеристическая скорость оптимальной схемы близка к суммарной характеристической скорости двухимпульсной схемы. За счет существенно большего времени движения по орбите ожидания получается заметный выигрыш в суммарной характеристической скорости по сравнению с "рациональной" схемой.

Таблица 3.1

θ^*	ΔV_{opt}	ΔV_{r4}	$\frac{\Delta V_{opt}}{\Delta V_{r4}}$	ΔV_2	$\frac{\Delta V_{opt}}{\Delta V_2}$
5	1.060	2.065	51.35	1.070	99.1
15	1.0598	1.698	54.10	1.113	95.22
30	1.0594	1.819	58.24	1.242	77.88 .
45	1.058	1.698	62.32	1.452	72.89
60	1.0569	1.592	66.40	1.546	68.35
90	1.0506	1.415	74.26	2.870	36.59
120	1.050	1.273	82.46	6.400	16.41
150	1.0385	1.158	89.72	47.780	2.12
180	0.9857	1.061	92.90	5.000	19.72
210	0.9389	0.979	95.86	2.52	37.26
240	0.8745	0.9095	96.15	1.59	55.00
270	0.7900	0.849	93.07	1.09	72.48
300	0.6850	0.796	86.08	0.78	87.82
330	0.5620	0,749	75.03	0.593	99.77
338	0.5269	0.737	71.45	0.563	93.60
355	-	0.714	-	0.5303	-
360	-	0.796		0.5305	-

При росте θ^* растет $\Delta\theta$, в результате чего суммарная характеристическая скорость оптимальных решений приближается к суммарной характеристической скорости "рациональных" решений, но заметно ухудшается суммарная характеристическая скорость двухимпульсных решений.

При $\theta^* \approx 240^\circ$, когда $\Delta\theta \approx 180^\circ$, суммарная характеристическая скорость оптимальных и "рациональных" решений практически совпадает. При дальнейшем увеличении θ^* продолжает расти и $\Delta\theta$, но суммарная характеристическая скорость оптимальных решений опять становится заметно меньше суммарной характеристической скорости "рациональных" решений за счет возрастания величин внешних импульсов и уменьшения величин внутренних импульсов. Суммарная характеристическая скорость оптимальных решений опять приближается к суммарной характеристической скорости двухимпульсных решений. Когда θ^* становится примерно равным 339° (точное значение зависит от N), величина внутренних импульсов скорости уменьшается до 0. Оптимальное четырехимпульсное решение вырождается в двухимпульсное. При дальнейшем росте θ^* оптимальные по базис-вектору четырехимпульсные решения не существуют. На интервале $[339^\circ, 360^\circ]$ оптимальными будут являться двухимпульсные перелеты.

Как видно из таблицы, оптимальное четырехимпульсное решение дает наибольший выигрыш при $\theta^* = 60^\circ$. При этих углах суммарная характеристическая скорость оптимальных решений меньше "рациональных" или двухимпульсных решений более чем на 30%.

При росте N , когда растет продолжительность пребывания на орбите ожидания, разница в суммарной характеристической скорости оптимальной и "рациональной" схем уменьшается. Например, для $N=10$, $\theta^* = 30^\circ$ суммарная характеристическая скорость оптимальной схемы меньше суммарной характеристической скорости "рациональной" схемы всего на 5%.

3.5. Области существования различных типов решений

Качественно определить области существования различных типов решений помогает анализ взаимного расположения окружностей радиусов R_1 и R_2 при различных значениях Δu - начальной фазы.

Орбиты не пересекаются. Вначале рассмотрим вариант, когда орбиты не пересекаются. Для определенности положим $\Delta e_y=0$, $\Delta e_x>0$, $\Delta a>|\Delta e_x|$. Предположим, что КА-цель, находящийся на внешней орбите, в начальный момент отстаёт от активного КА, т.е. $\Delta u<0$, например, $\Delta u=\Delta u_l$ (рис. 3.14(a)). Тогда на первом интервале маневрирования необходимо приложить импульсы скорости с положительными трансверсальными составляющими, суммарной величиной ΔV_{II} большей, чем $\frac{|\Delta a|}{2}$, чтобы перейти на орбиту с полуосью большей, чем у орбиты КА-цели. Это позволит КА-цели догнать активный КА. На заключительном интервале придется приложить импульсы скорости с $\Delta V_{III}<0$.

Для всех $\Delta u<0$ окружность радиуса R_2 целиком расположена внутри окружности радиуса R_1 (рис. 3.15(a)). На этом рисунке большая окружность соответствует импульсам скорости первого интервала маневрирования, меньшая - второго, знаки у ΔV_{II} и ΔV_{III} разные, следовательно, оптимальным будет невырожденное решение (CNDS). Так как окружности не пересекаются, то возможны только трех- и четырехимпульсные решения. Трехимпульсное решение возможно только с двумя импульсами скорости на первом интервале маневрирования.

Области существования решений различного типа и число импульсов скорости, которые возможно использовать, приведены на рисунке 3.14(a) [91]. Двойка в круглых скобках перед числом три означает, что у трехимпульсного решения два импульса скорости должны прикладываться на первом интервале маневрирования. Двойка в круглых скобках после числа три означает, что два

импульса скорости должны прикладываться на втором интервале маневрирования.

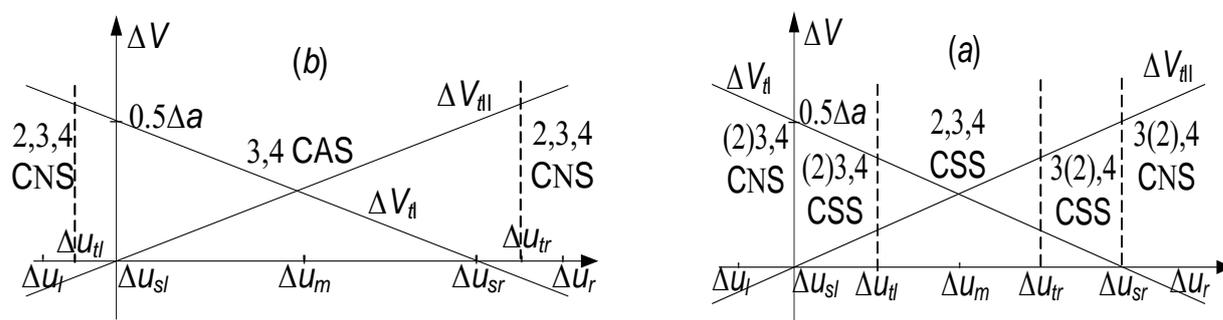


Рисунок 3.14. Области существования решений различного типа:

(a) для непересекающихся орбит; (b) для пересекающихся орбит

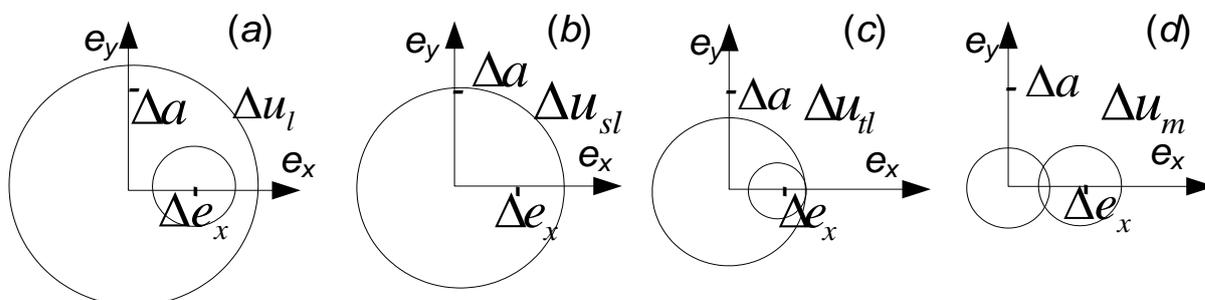


Рисунок 3.15. Изменение расположения окружностей, соответствующих сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования для непересекающихся орбит, при изменении значения начальной фазы

Если $\Delta u = \Delta u_{sl} \approx 0$ (здесь и далее индексом «s» обозначены моменты, когда радиус одной из окружностей равен нулю, а индексом «t» – моменты, когда окружности касаются), то можно сразу импульсами скорости первого интервала маневрирования перейти в нужную точку заданной орбиты. Конечно, рассматривается только качественная картина маневра и не учитывается время перелета на заданную орбиту. Этому случаю соответствует расположение окружностей на рисунке 3.15(b). Радиус второй окружности, который уменьшался с ростом Δu , в этот момент стал равен нулю.

Когда $\Delta u_{sl} < \Delta u < \Delta u_{tl}$, импульсы скорости на первом интервале маневрирования производят только часть необходимого изменения большой полуоси, остальная часть производится импульсами скорости второго интервала маневрирования. Знаки ΔV_{II} и ΔV_{III} совпадают, значит, будут иметь место особые решения (CSS). После Δu_{sl} радиус второй окружности растет с ростом Δu . Окружности, соответствующие Δu из этого интервала, не пересекаются, следовательно возможны только трех- и четырехимпульсные решения CSS (рис. 3.14(a)), причем как и у решений CNDS, на первом интервале маневрирования обязательно должно быть два импульса скорости. Момент касания окружностей, происходящий при $\Delta u = \Delta u_{tl}$, изображен на рисунке 3.15(c).

На интервале $\Delta u_{tl} < \Delta u < \Delta u_{tr}$ окружности пересекаются, следовательно, существуют двух-, трех- и четырехимпульсные решения CSS (рис. 3.14(a)). Момент, когда окружности имеют одинаковые радиусы ($\Delta u = \Delta u_m$), изображен на рисунке рис. 3.15(d).

При $\Delta u > \Delta u_m$ картина зеркально симметрична, т.е. существуют те же типы решений, но ΔV_{II} и ΔV_{III} меняются величинами.

Когда $\Delta u > \Delta u_{sr}$, КА–цель находится так далеко впереди активного КА, что тому сначала придется уменьшить большую полуось, чтобы в процессе фазирования успеть догнать КА–цель, и уже потом импульсами скорости второго интервала маневрирования увеличить большую полуось до нужного значения. Для этих значений Δu оптимальным опять будет трех- или четырехимпульсное невырожденное решение CNDS.

Можно оценить значения Δu , при которых происходит изменение знаков ΔV_{II} или ΔV_{III} и соответственно типа решения. Сумма трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования ΔV_{II} меняет знак при $\Delta u = \Delta u_{sl} \approx 0$, сумма трансверсальных составляющих импульсов скорости второго интервала маневрирования ΔV_{III} меняет знак при

$\Delta u = \Delta u_{sr} \approx 3\pi \Delta a N$, где N число витков от начала первого интервала маневрирования до точки встречи.

Касание окружностей в случае, когда радиус первой окружности больше радиуса второй окружности (рис. 3.15в), происходит при

$$\begin{aligned}\Delta V_{I} &= \frac{1}{4}(\Delta a + \Delta e), \\ \Delta V_{II} &= \frac{1}{4}(\Delta a - \Delta e),\end{aligned}\tag{3.33}$$

следовательно

$$\Delta u_{II} = \frac{3}{2} \pi N (\Delta a - \Delta e),\tag{3.34}$$

Касание окружностей, когда радиус второй окружности больше радиуса первой окружности, происходит когда

$$\Delta V_{I} = \frac{1}{4}(\Delta a - \Delta e),\tag{3.35}$$

$$\Delta V_{II} = \frac{1}{4}(\Delta a + \Delta e),$$

таким образом

$$\Delta u_{I} = \frac{3}{2} \pi N (\Delta a + \Delta e).\tag{3.36}$$

Орбиты пересекаются. На рис.3.14б изображены зависимости величин ΔV_{I} и ΔV_{II} от Δu для пересекающихся орбит. Для определенности также предполагаем, что $\Delta a > 0$.

Примеры расположения окружностей радиусов R_1 и R_2 для разности фаз Δu_I , Δu_{II} , Δu_{sl} , Δu_m приведены на рис. 3.16. Для времен симметричных относительно Δu_m отношение радиусов окружностей обратное.

Как видно из рисунков, при $\Delta u < \Delta u_{il}$ и $\Delta u > \Delta u_{tr}$ окружности пересекаются (3.16(a)), а $\Delta V_{il} \Delta V_{tr} < 0$, следовательно, оптимальным будет решение типа CNDS, причем возможны двух-, трех- и четырехимпульсные решения.

При $\Delta u_{il} < \Delta u < \Delta u_{tr}$ окружности не имеют общих точек, следовательно оптимальными будут трех- и четырехимпульсные решения CAS. Вычисление величин Δu_{il} , Δu_{tr} производится по тем же формулам (3.34), (3.36). Области существования решений различного типа и число импульсов скорости, которые возможно использовать для получения оптимального решения, приведены на рисунке 3.14(b).

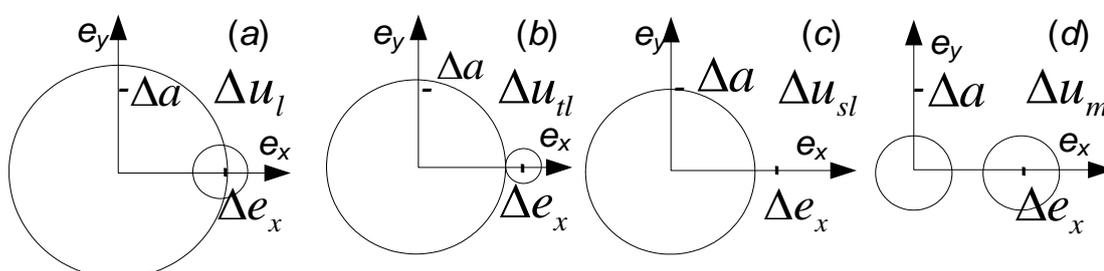


Рисунок 3.16. Изменение расположения окружностей, соответствующих сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования для пересекающихся орбит, при изменении значения начальной фазы

Суммируя сказанное выше в этой главе, можно предложить следующий простейший алгоритм поиска параметров оптимального решения. Используя формулы (3.34), (3.36) вычисляются величины Δu_{il} , Δu_{tr} . Сравнивая с ними имеющуюся величину отклонения по фазе Δu , устанавливается на каком из интервалов маневрирования необходимо иметь два импульса скорости. Из системы (3.1) однозначно определяются параметры апсидального трехимпульсного решения. Если это решение типа CSS или CAS, и оно удовлетворяет ограничениям на моменты приложения импульсов скорости, то задача решена. В противном случае, для поиска оптимального решения необходимо использовать алгоритмы, приведенные в третьем параграфе этой главы.

3.6. Области существования четырехимпульсных невырожденных решений

Как уже было отмечено, решение CNDS существуют, если окружности радиусов R_1 и R_2 имеют общие точки, а знаки ΔV_{I} и ΔV_{II} не совпадают. Очевидно, что чем большую часть от площадей окружностей занимает область их пересечения, тем выше вероятность существования решения CNDS. Взаимное положение окружностей зависит от разности эксцентриситетов Δe , которая определяет расстояние между центрами окружностей, а также от Δa и $\Delta t/3\varphi_{10}$, которые определяют величины радиусов окружностей. Для определения области существования четырехимпульсных невырожденных решений можно зафиксировать Δe и исследовать зависимость существования CNDS от Δa и $\Delta t/3\varphi_{10}$, так как существенна только относительная величина области пересечения окружностей. Исследование проводилось для $\Delta e=0.01$. На рисунках 3.17, 3.18 приведены области существования четырехимпульсных решений типа CNDS [93].

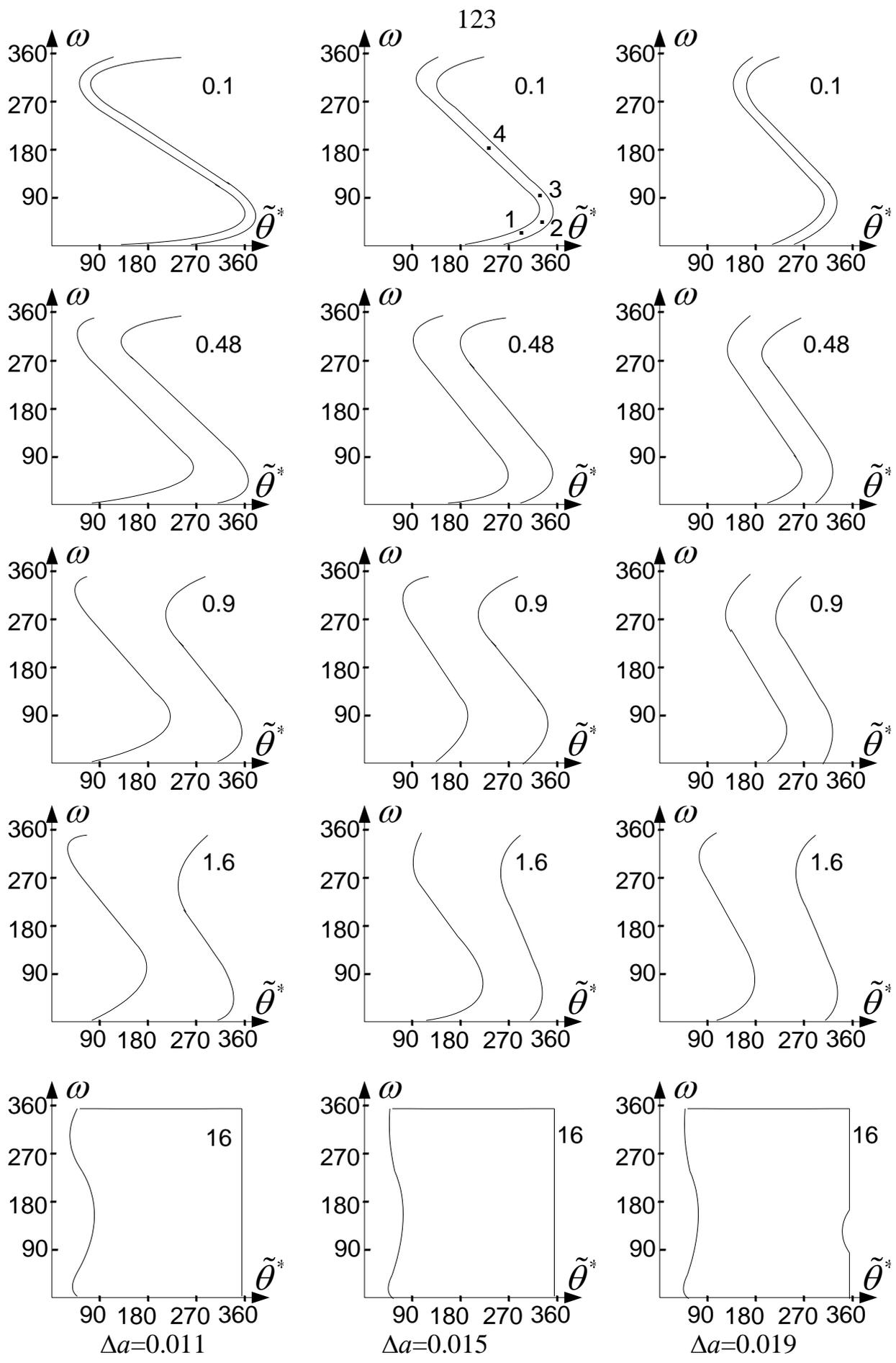


Рисунок 3.17. Области существования четырехимпульсных невырожденных решений для непересекающихся орбит: $\Delta a=0.001$, $\Delta a=0.005$, $\Delta a=0.009$

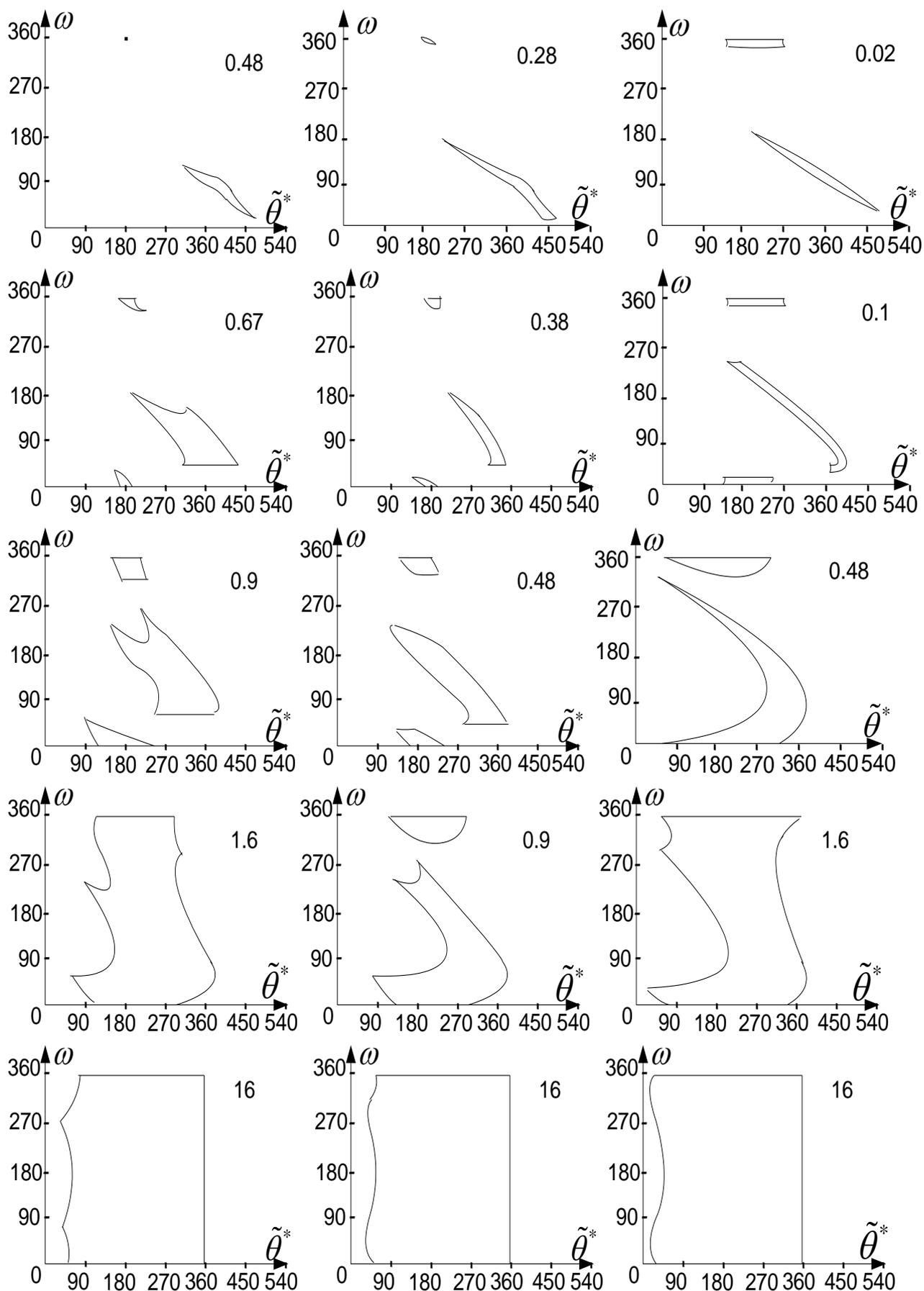


Рисунок 3.18. Области существования четырехимпульсных невырожденных решений для пересекающихся орбит.

Как уже отмечалось, основное влияние на вид годографа базис-вектора оказывает θ^* . Эта переменная, от которой существенным образом зависит существование решений CNDS, отложена на всех графиках по оси x . Угол θ^* изменяется от 0° до 360° . На этом интервале в диапазоне от 0° до 180° существуют решения обоих типов, от 180° до 360° - только одного типа (рис 3.7). Удобнее исследовать существование годографа одного типа (в данном случае - второго) на интервале от 0° до 540° . Это допустимо, т.к. зависимость годографа первого типа от θ^* на интервале от 0° до 180° практически совпадает с зависимостью годографа второго типа от θ^* на интервале от 360° до 540° . Вид годографа базис-вектора слабо зависит от N , а радиусы окружностей зависят от N только через отношение $\Delta t/3\varphi_{10}$, это позволило все исследование провести для постоянного значения $N=10$, а изменение отношения $\Delta t/3\varphi_{10}$ осуществлялось за счет изменения Δt . Значения Δt указаны в правом верхнем углу каждого графика. Значения Δa , приведенные внизу рисунка, относятся ко всем графикам соответствующего столбца. На существование решений типа CNDS существенное влияние оказывает и угол ω , задающий ориентацию линии апсид относительно направления на точку встречи. На графиках этот угол откладывается вдоль оси y .

Рассмотрим, как зависит форма областей существования CNDS от Δt и Δa . При малых Δt можно видеть узкие S-образные области (первые рисунки в каждом столбце). Это связано с тем, что радиус первой окружности мал, и можно считать, что основное влияние на существование решения оказывает расположение импульсов скорости второго интервала маневрирования.

Изобразим решения, соответствующие различным точкам, отмеченным на рисунке 3.17 (точки помечены цифрами) на одном рисунке (рис.3.19), для наглядности считая, что переход осуществляется в одну точку $(\Delta e_x, 0)$. При таком представлении отрезок, соответствующий последнему импульсу скорости, оказывается повернутым на угол ω относительно оси e_x (в действительности

отрезок, изображающий этот импульс, параллелен оси e_x , а на угол ω повернут отрезок, соединяющий начало координат с точкой $(\Delta e_x, \Delta e_y)$.

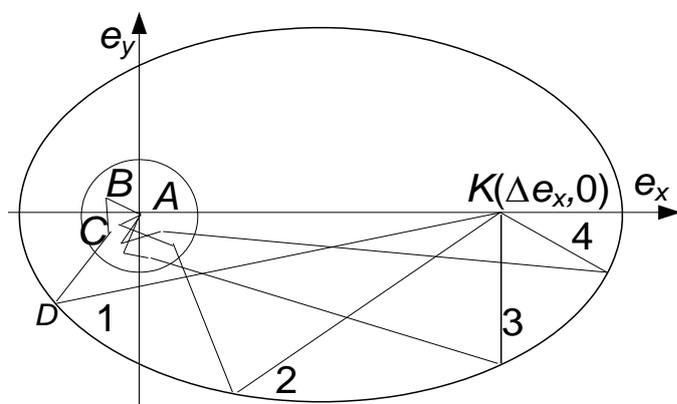


Рисунок 3.19. Четырехимпульсные невырожденные решения для различных значений угла ω при малых $\Delta t/3\varphi$

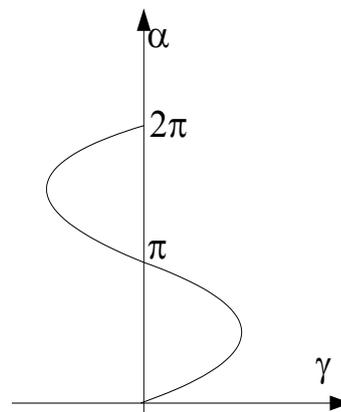


Рисунок 3.20. Зависимость угла наклона фокального радиуса к главной оси эллипса от угла между фокальными радиусами эллипса

Сумма импульсов скорости последнего интервала маневрирования этих решений примерно одинакова ($\Delta V_{t_3} + \Delta V_{t_4} \approx \frac{1}{2} \Delta a - \frac{\Delta t}{3\varphi_{t_0}}$). Точка начала отрезка, изображающего третий импульс скорости, за счет малости радиуса первой окружности близка к началу координат. Таким образом, конец этого отрезка лежит в окрестности эллипса с фокусами в точках $(0,0)$ и $(\Delta e_x, 0)$. Следовательно, зависимость угла ω от угла $\Delta\theta$ между третьим и четвертым импульсами скорости близка к зависимости угла α (наклона фокального радиуса r_2 к оси e_x) от угла γ (угол между фокальными радиусами эллипса). Эта зависимость имеет характерный S-образный вид (рис.3.20). Вид кривой зависит от параметров эллипса: чем больше величина большой полуоси при постоянном расстоянии между фокусами, тем кривая менее изогнута. Зависимость $\omega(\theta^*)$ можно рассматривать как сложную функцию $\omega(\Delta\theta(\theta^*))$. Так как функция $\Delta\theta(\theta^*)$ близка к линейной (см. рис. 3.8 и (3.27)), то вид кривой $\omega(\theta^*)$ определяется в основном

зависимостью $\omega(\Delta\theta)$. Этим и объясняется изменение формы областей существования CNDS на рис.3.17 при увеличении Δa .

Сглаживание кривой за счет роста радиуса второй окружности происходит и при увеличении Δt ($\Delta a = \text{const}$). В этом случае растет также радиус первой окружности, что приводит к увеличению числа допустимых решений за счет большей неопределенности в положении левого фокуса эллипса. На рисунках 3.17 хорошо видно, как в результате этого растет ширина области существования CNDS при увеличении Δt .

Аналогичный вид и зависимость от Δa и Δt имеют графики для варианта $\Delta e > \Delta a$ (рис.3.18). В этом случае сильнее сказывается влияние импульсов скорости первого интервала маневрирования, которые обязательно должны приводить т.С в область пересечения окружностей. Если это не происходит (как правило, при малых Δt и $\omega > 180^\circ$), то решения, которые присутствуют на графиках для $\Delta e < \Delta a$, на графиках для $\Delta e > \Delta a$ отсутствуют.

Общей закономерностью графиков на рис.3.17 и рис 3.18 является отсутствие решений при малых θ^* и отсутствие решений при $\theta^* > 360^\circ$ для больших значений Δt .

Отсутствие решений при малых θ^* очевидно, т.к. вследствие малых $\Delta\theta$ четырехимпульсные решения незначительно отличаются от двухимпульсных. Они существуют только при переходах между точками на одной и той же круговой орбите и для переходов между пересекающимися орбитами в узком диапазоне углов.

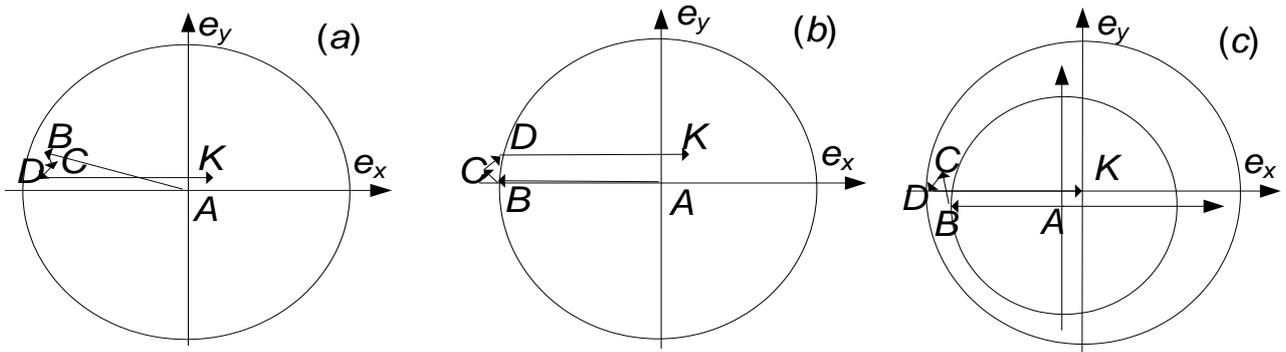


Рисунок 3.21. У решений с углами перелета θ^* близкими к 2π величины внешних импульсов скорости существенно превосходят величины внутренних импульсов: (a) $\theta^* < 2\pi$ оптимальное решение; (b), (c) $\theta^* > 2\pi$ не оптимальные решения.

При больших значениях $\frac{\Delta t}{3\varphi_{10}}$ радиусы окружностей существенно превосходят расстояние между их центрами. При углах перелета θ^* близких к 2π величины внешних импульсов скорости существенно превосходят величины внутренних импульсов (рис. 3.21(a)), вследствие этого существование решений CNS зависит от взаимной ориентации именно внешних импульсов скорости.

При $\theta^* < 2\pi$ т.В - конец отрезка, изображающего первый импульс скорости, лежит выше отрезка, изображающего последний импульс. Так как в этом случае $\Delta\theta \approx 240^\circ$, переход из т.В в т.Д осуществляется внутренними импульсами скорости, имеющими те же знаки трансверсальных составляющих, что и внешние импульсы соответствующего интервала маневрирования. Эти решения – типа CNDS. Если $\theta^* > 2\pi$, то т.В лежит ниже отрезка DK, и в этом случае или у одного (рис.3.21(c)), или у обоих (рис.3.21(b)) внутренних импульсов скорости знаки трансверсальных составляющих не совпадают со знаками трансверсальных составляющих внешних импульсов соответствующих интервалов маневрирования, следовательно, это не решения типа CNDS.

Как уже отмечалось, для данного примера решения второго типа на интервале 360° - 540° соответствуют решениям первого типа на интервале 0° - 180° . Из графиков видно, что решения обоих типов одновременно не существуют

даже при значительных величинах $\Delta t/3\varphi$, когда области существования решений CNDS второго типа заполняют практически все пространство $0^\circ-360^\circ$.

3.7. Задача Ламберта, её преимущества и недостатки.

Довольно часто для решения задачи встречи используется хорошо известная задача Ламберта (расчет параметров двухимпульсного маневра при фиксированных моментах приложения импульсов скорости). Представляется интересным сравнить ее возможности с возможностями приведенных выше методов. Ранее в этой главе было показано, что оптимальное двухимпульсное решение существует не для всех значений начального фазового отклонения Δu . Оценим, какой величины может достигать отличие суммарной характеристической скорости двухимпульсного решения от суммарной характеристической скорости оптимального трехимпульсного решения.

Для околокругового движения задача Ламберта имеет тривиальное решение. При фиксированных моментах приложения импульсов скорости $\varphi_1 = \varphi_{1f}$, $\varphi_2 = \varphi_{2f}$ имеется система четырех линейных уравнений (3.1) с четырьмя неизвестными $\Delta V_{r1}, \Delta V_{t1}, \Delta V_{r2}, \Delta V_{t2}$ (для встречи на компланарных орбитах). Решив эту систему и определив величины составляющих импульсов, находим суммарную характеристическую скорость маневров. Перебрав возможные сочетания φ_1 , φ_2 можно найти решение задачи встречи близкое к оптимальному. Чем больше будет рассмотрено сочетаний φ_1 , φ_2 , тем точнее будет найдено оптимальное решение.

Такой двухимпульсный метод решения задачи встречи имеет два преимущества. Во-первых, можно удовлетворить любым ограничениям на моменты приложения импульсов скорости. Во-вторых, метод надежно работает как для многовитковой встречи, так и для встречи небольшой продолжительности. Однако имеется проблема с оптимальностью найденного решения. Двухимпульсные решения с суммарной характеристической скоростью близкой к оптимальной (оба импульса скорости практически трансверсальные)

существуют только, когда окружности радиусов R_1 и R_2 пересекаются. Это пересечение имеет место у некоторых решений CSS для не пересекающихся орбит, и у решений типа CNDS для пересекающихся орбит.

Совсем другая ситуация, если окружности радиусов R_1 и R_2 не пересекаются. В этом случае, как было показано выше, оптимальных двухимпульсных решений (у которых оба импульса трансверсальные) не существует, следовательно, задача Ламберта будет давать неоптимальное решение при любом количестве просмотренных наборов точек φ_1, φ_2 .

Разница в суммарной характеристической скорости оптимального трехимпульсного и двухимпульсного решений будет тем больше, чем больше расстояние между точками окружностей. Такой случай имеет место, когда $\Delta e \gg |\Delta a|$ или $|\Delta a| \gg \Delta e$. Для пересекающихся орбит при росте разницы Δe и $|\Delta a|$ в пределе двухимпульсный маневр будет решать задачу практически за счет радиальных составляющих импульсов. На рисунке 3.22(a) двухимпульсному маневру соответствует ломаная $ABCK$, а радиальной составляющей первого импульса скорости - отрезок BC . Оптимальный трехимпульсный маневр (решение типа CAS) использует только трансверсальные составляющие, следовательно, суммарная характеристическая скорость задачи Ламберта ($\Delta V \approx \Delta e$) будет почти в два раза больше суммарной характеристической скорости оптимальных трехимпульсного или четырехимпульсного решений ($\Delta V = \frac{\Delta e}{2}$).

Для непересекающихся орбит разница может достигать почти трехкратной величины. Оптимальный среди двухимпульсных маневр изображен на рис 3.22(b). Ему соответствует ломаная $ABDK$. Это связано с тем, что появляется радиальная составляющая импульса величиной $\Delta V_{r2} \approx 2\Delta V_{t1} \approx \Delta a$. Общие затраты суммарной характеристической скорости двухимпульсного маневра можно оценить как $\Delta V \approx |\Delta V_{r2}| + |\Delta V_{t1}| = \frac{3}{2}|\Delta a|$, а у трехимпульсного трансверсального маневра суммарная характеристическая скорость $\Delta V \approx \Delta V_{t1} \approx \frac{|\Delta a|}{2}$. Такой вариант возникает

у решений, соответствующих отклонениям Δu близким к значениям Δu_{sl} или Δu_{sr} на рисунке 3.14(a).

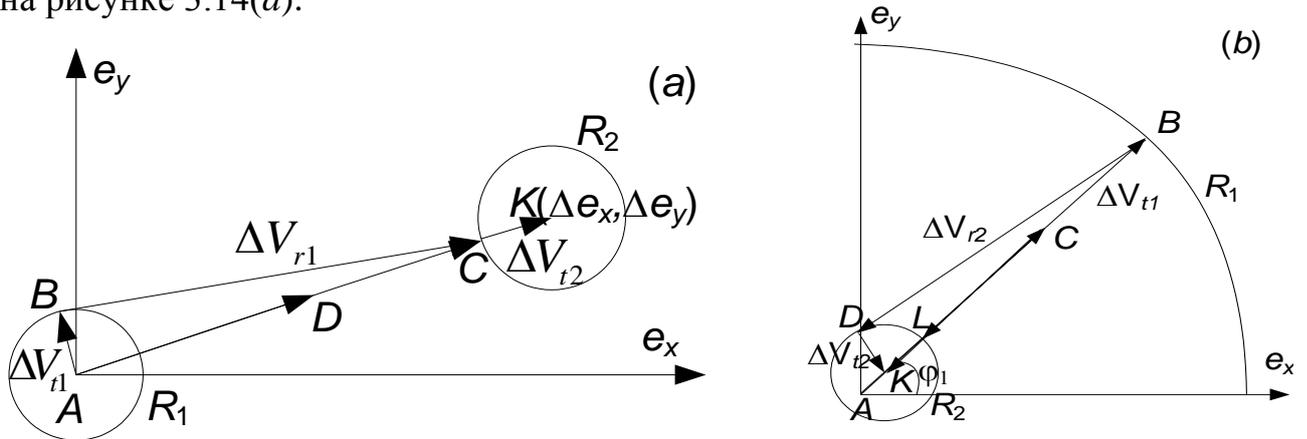


Рисунок 3.22. Решение задачи Ламберта:

(a) для пересекающихся орбит, (b) для непересекающихся орбит

3.8. Маневры с ограничениями на высоту переходной орбиты

В предыдущих параграфах были рассмотрены задачи, в которых на элементы орбиты ожидания не были наложены никакие ограничения, однако в практической работе встречаются задачи, когда эти ограничения существуют. Рассмотрим, например, маневры, у которых орбита ожидания должна лежать в заданном кольце с центром в центре притяжения, т.е.

$$r_{min} \leq r_p \leq r_a \leq r_{max}, \quad (3.37)$$

где r_{min}, r_{max} - радиусы внутренней и внешней окружностей кольца, r_p, r_a - радиусы перигея и апогея орбиты ожидания.

Ограничения такого типа часто возникают при решении задачи встречи. Например, чтобы догнать КА-цель, находящийся далеко впереди, активному КА необходимо резко уменьшить период орбиты ожидания. Это может привести к заметному уменьшению минимальной высоты орбиты, что, в свою очередь, может вызвать опасное торможение атмосферой. Существуют и другие многочисленные основания для введения подобных ограничений.

На рис.3.23 приведен пример перелета с исходной орбиты (обозначена T_0) на конечную (обозначена T_f), когда для орбиты ожидания (изображена пунктирной линией T_d) существенным является ограничение на минимальную высоту r_{min} . Чтобы за заданное время успеть догнать КА цель пришлось приложить тормозной импульс скорости ΔV_{t1} , перейти на орбиту ожидания, касающуюся круговой орбиты радиуса r_{min} , а на последнем интервале маневрирования, приложив два импульса скорости ΔV_{t2} и ΔV_{t3} , выйти в заданную точку конечной орбиты.

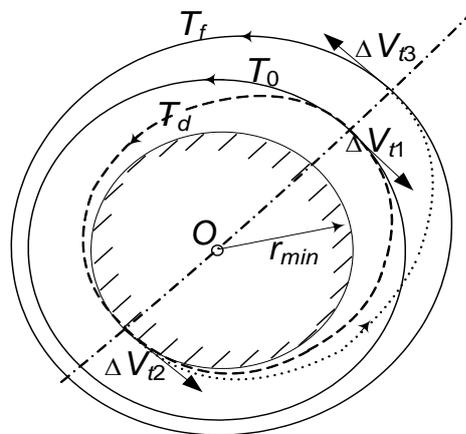


Рисунок 3.23. Перелет с ограничением на высоту орбиты ожидания

Вследствие важности задач маневрирования с ограничениями на высоту орбиты ожидания их решению было посвящено множество публикаций. Наиболее фундаментальные результаты получены в работе [2], в которой анализировались переходы между эллиптическими орбитами. Рассматриваемые в данной работе многовитковые перелеты между близкими околокруговыми орбитами имеют ряд особенностей, которые можно использовать для получения аналитических решений.

Как уже было показано выше, четвертое уравнение системы (3.1) позволяет оценить сумму трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования ΔV_{t1}^* многовиткового перелета, а, следовательно, приближенно определить величину большой полуоси орбиты ожидания

$$a_d = a_0 + 2\Delta V_{II}^*,$$

где a_d - большая полуось орбиты ожидания, a_0 - начальное значение большой полуоси орбиты активного КА, ΔV_{II}^* определяется из первого уравнения системы (3.12).

При последующем анализе задачи предполагается, что точное четвертое уравнение системы (3.1) заменено приближенным первым уравнением системы (3.12). Значения параметров оптимального маневра, при которых четвертое уравнение системы (3.1) выполнено с заданной точностью, как обычно, можно определить при помощи итерационной процедуры.

Очевидно, что сформулированная выше задача имеет решение, если

$$r_{min} \leq a_d \leq r_{max}, \quad (3.38)$$

в противном случае КА придет в точку встречи в заданное время, нарушив одно из ограничений (3.37).

Так как большая полуось орбиты ожидания известна, ограничению (3.37) эквивалентно ограничение на эксцентриситет орбиты ожидания [90]:

$$\begin{aligned} e_d &\leq e_s, \\ e_d &\leq e_b, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где e_d, e_s, e_b - соответственно эксцентриситеты орбиты ожидания, орбиты с полуосью a_d , касающейся нижней границы кольца, и орбиты с полуосью a_d , касающейся верхней границы кольца. Величины e_s, e_b вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} e_s &= \frac{a_d - r_{min}}{a_d}, \\ e_b &= \frac{r_{max} - a_d}{a_d}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ориентация линии апсид орбиты ожидания не существенна. Увеличивать эксцентриситет орбиты ожидания, сохраняя заданное значение большой полуоси,

больше меньшей из величин e_s, e_b нельзя, т.к. орбита выйдет за пределы ограничивающего кольца.

Таким образом, из неравенств (3.39) следует, что на плоскости e_x, e_y геометрическим местом точек, которые соответствуют допустимым значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания, является круг радиуса R_m (рис. 3.24), равного меньшей из величин e_s, e_b . Центр круга расположен в начале системы координат.

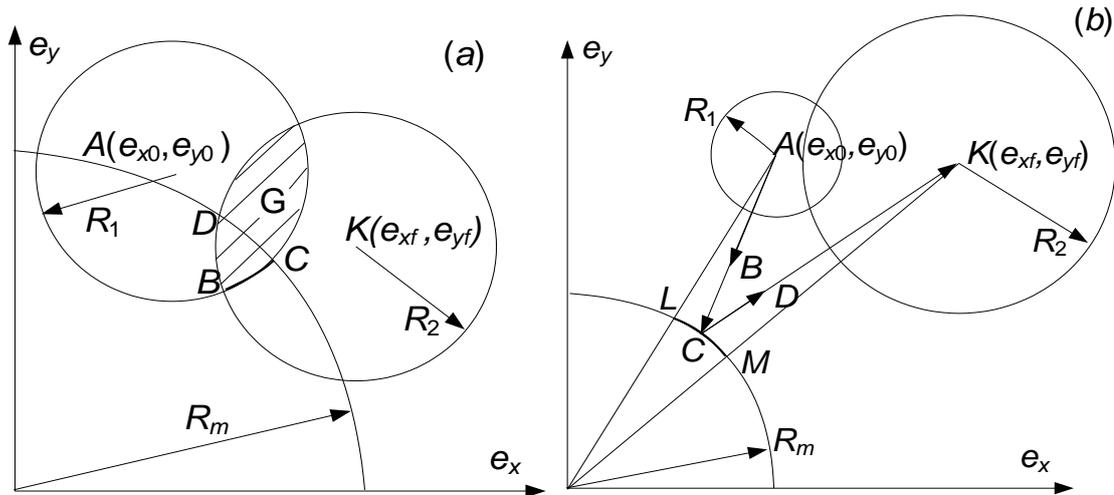


Рисунок 3.24. Взаимное расположение окружностей, соответствующих сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования и допустимым значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания: (а) среди решений обычной задачи встречи существуют решения, удовлетворяющие ограничениям на высоту орбиты ожидания; (б) необходимо искать специальные решения.

Построим окружности радиусов $R_1=2\Delta V_{II}^*$, $R_2=2\Delta V_{III}^*$ (ΔV_{II}^* определяется из второго уравнения системы (3.12)) с центрами в т.А (e_{x0}, e_{y0}) и т.К (e_{xf}, e_{yf}). Напомним, что точка А соответствует вектору эксцентриситета орбиты активного КА, а точка К соответствует вектору эксцентриситета орбиты КА-цели. В том случае, когда множество G на рис. 3.24(а) (множество точек пересечения кругов радиусов R_1 и R_2) имеет с кругом радиуса R_m общие точки, среди решений, исследованных в предыдущих параграфах, легко указать двух-, трех- и

четырёхимпульсные варианты, для которых указанные точки будут соответствовать допустимым значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания. Для двухимпульсного решения это точка B , для трехимпульсного решения с двумя импульсами скорости на втором интервале маневрирования это дуга BC , для четырёхимпульсного решения вся область BCD . Поскольку, для найденных таким образом решений, выполнены условия (3.39), то, следовательно, выполнено и условие (3.37). Параметры решений уточняются при помощи описанных ранее итерационных процедур, которые обеспечивают выполнение с заданной точностью четвертое уравнение системы (3.1).

Вариант, когда окружности радиуса R_1 и R_2 имеют общие точки (пересекаются или одна целиком расположена внутри другой) наиболее типичен для задач, в которых необходимо учитывать ограничения на высоту орбиты ожидания. Как правило, учитывать ограничения на высоту приходится, когда сумма трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования отрицательна, а второго положительна, а в этом случае окружности радиусов R_1 и R_2 имеют общие точки

Если ограничение по высоте довольно жесткое (a_d не сильно отличается от r_{min} или r_{max}), то эксцентриситет орбиты ожидания (радиус окружности R_m) будет небольшим. Если в этой задаче исходная и заданная орбиты имеют относительно большие эксцентриситеты, а разность их больших полуосей и векторов эксцентриситетов не велики, то общих точек у трех окружностей может не быть (рис. 3.24б). В этом случае оптимальным будет четырёхимпульсный маневр, которому соответствует ломаная $ABCDK$ (рис. 3.24б). Точка C , соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, должна принадлежать дуге LM (дуга LM - часть окружности радиуса R_m , заключенная между отрезками, соединяющими центры окружностей радиуса R_1 и R_2 с началом системы координат).

Если исходная и заданная орбиты пересекаются, то возможен вариант, когда кругу радиуса R_m принадлежат только внутренние точки отрезка E_1E_2 (рис.

3.25), в этом случае среди решений, оптимальных без учета ограничения (3.37), удовлетворять ограничению (3.37) будут только четырехимпульсные решения, допустимым значениям вектора эксцентриситета орбит ожидания которых соответствуют точки отрезка LN .

Когда ни множество G , ни отрезок E_1E_2 не имеют с кругом радиуса R_m общих точек, суммарная характеристическая скорость допустимого решения будет превосходить суммарную характеристическую скорость решения, получаемого без учета ограничения (3.37).

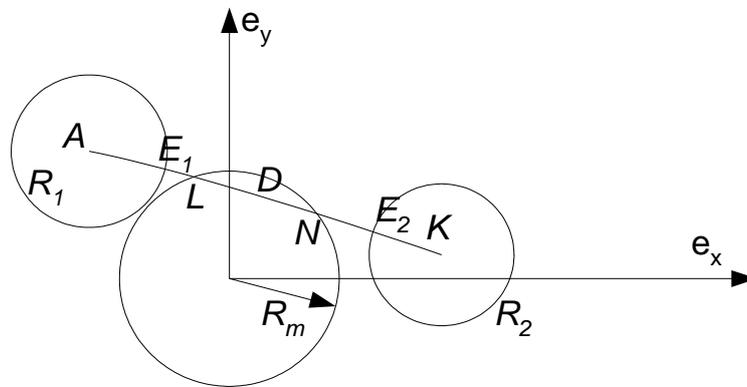


Рисунок 3.25. Среди оптимальных четырехимпульсных решений обычной задачи встречи на пересекающихся орбитах существуют решения, удовлетворяющие ограничениям на высоту орбиты ожидания

Определим, какие точки круга радиуса R_m могут соответствовать допустимым значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания, получающейся после проведения оптимального маневра в этом случае.

Рассмотрим четырехимпульсные маневры. Пусть $t.C$ (рис.3.26), соответствующая параметрам орбиты ожидания, является внутренней точкой круга радиуса R_m , не принадлежащей множеству P (P - множество точек пересечения кругов радиусов R_m и R_2). Для такого маневра значение минимальной суммарной характеристической скорости равно $\Delta V_c = 0.5(AC + CK)$. Минимальные затраты для перехода через произвольную $t.C'$, принадлежащую дуге L_1L_2 (рис. 3.26), меньше чем ΔV_c , т.к. $AC' + C'K < AC + CK$.

ГЛАВА IV. ВСТРЕЧА НА НЕКОМПЛАНАРНЫХ ОРБИТАХ

4.1. Постановка задачи

Для некомпланарной задачи встречи условия выхода на заданную орбиту имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ii} \cos \varphi_i) &= \Delta e_x, \\
 \sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ii} \sin \varphi_i) &= \Delta e_y, \\
 \sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ii} &= \Delta a, \\
 \sum_{i=1}^N (2\Delta V_{ri} (1 - \cos \varphi_i) + \Delta V_{ii} (-3\varphi_i + 4\sin \varphi_i)) &= \Delta t, \\
 \sum_{i=1}^N -\Delta V_{zi} \sin \varphi_i &= \Delta z, \\
 \sum_{i=1}^N \Delta V_{zi} \cos \varphi_i &= \Delta V_z,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где отклонения вычислены в точке встречи (ось x направлена на точку встречи).

Импульсы скорости, как и для компланарной задачи, должны принадлежать двум разрешенным для маневрирования угловым интервалам. Продолжительность интервала – виток, расстояние между интервалами составляет несколько витков.

Условие принадлежности импульсов скорости заданным интервалам маневрирования можно записать в виде:

$$\varphi_1 \subseteq F_1, \dots, \varphi_{N1} \subseteq F_1, \varphi_{N1+1} \subseteq F_2, \dots, \varphi_{N1+N2} \subseteq F_2, \tag{4.2}$$

где $N1, N2$ ($N=N1+N2$) – количество импульсов соответственно на первом и втором интервалах.

Требуется определить ΔV_{ri} , ΔV_{ti} , ΔV_{zi} , φ_i ($i=1, \dots, N$), при которых СХС маневров

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2}$$

при ограничениях (4.1), (4.2) будет минимальной. Уравнения для базис-вектора имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\lambda_2 \cos \theta + \lambda_3 \sin \theta + 2\lambda_6, \\ \mu &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \sin \theta + 2\lambda_3 \cos \theta - 3\lambda_6 \theta, \\ \nu &= \lambda_4 \sin \theta + \lambda_5 \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ – произвольные константы.

Уравнения (4.3) описывают спираль в пространстве λ, μ, ν . Когда $\lambda_6 = 0$, то уравнения (4.3) это уравнения эллипса или окружности, возможно также, что это уравнения отрезка или точки.

Когда годограф базис-вектора имеет вид спирали ($\lambda_6 \neq 0$), суммарная характеристическая скорость задачи встречи ΔV_{rdv} превышает суммарную характеристическую скорость задачи перехода ΔV_{trf} . Как и для компланарной задачи встречи в этом случае импульсы скорости одного из интервалов маневрирования будут тормозными, другого разгонными.

При $\lambda_6 = 0$ суммарная характеристическая скорость задачи встречи ΔV_{rdv} совпадает с суммарной характеристической скоростью задачи перехода ΔV_{trf} . Если разделить импульсы скорости и приложить эти части на нескольких витках, то решение задачи перехода не изменится, но меняется время выхода на заданную орбиту. Подобрать соответствующим образом разбиение импульсов, можно решить задачу встречи.

Идея делить импульсы скорости оптимального перехода для того, чтобы получить решение задачи встречи, довольно естественна и многократно

описывалась в литературе [22], [15]. Однако случай, когда суммарная характеристическая скорость задачи встречи ΔV_{rdv} превышает суммарную характеристическую скорость задачи перехода ΔV_{trf} (для таких решений годограф базис-вектора имеет вид спирали), авторами, как правило, не рассматривается, либо для него предлагается другой способ решения задачи, отличный от деления импульсов скорости оптимального перехода. Необходимо отметить, что традиционный метод деления импульсов скорости решения задачи перехода имеет ряд недостатков. Он не применим к задаче, в которой на импульсы скорости первого и второго интервалов маневрирования наложены разные ограничения, его нельзя использовать, когда наложены ограничения на параметры орбиты ожидания, и т.д. Для решения задач с такими ограничениями не подходят также и методы, изложенные в [15], [20].

Учитывая многовитковый характер рассматриваемой встречи, можно предложить три алгоритма расчета обеспечивающих её параметров маневров. Первый алгоритм также основан на решении задачи перехода, но является более универсальным, чем алгоритмы, описанные в [22], [15]. Он будет рассмотрен во втором разделе данной главы. Второй алгоритм (на каждом из интервалов маневрирования также решается задача перехода) основан на решении задачи минимизации в пространстве элементов орбиты ожидания. Частный случай этого алгоритма, используемый для расчета маневров дальнего наведения, рассмотрен в данной главе; алгоритм в общей постановке будет рассмотрен в седьмой главе. Кроме того, в данной главе рассмотрен алгоритм определения параметров оптимального невырожденного решения ($\lambda_c \neq 0$), основанный на использовании необходимых условий оптимальности.

4.2. Алгоритм решения некомпланарной задачи встречи, основанный на решении задачи перехода

Определение параметров маневров. Аналогично тому, как это делалось в третьей главе, оценим сумму трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования (ΔV_{I1}):

$$\Delta V_{I1} \approx -\frac{\Delta t}{3\varphi_0}, \quad (4.4)$$

где φ_0 – некоторый угол первого интервала маневрирования. Следовательно, можно найти изменение большой полуоси на первом:

$$\Delta a_{I1} \approx 2\Delta V_{I1}, \quad (4.5)$$

и на втором интервале маневрирования:

$$\Delta a_{II} \approx \Delta a - 2\Delta V_{II}. \quad (4.6)$$

Вводится переменная $\Delta a^* = |\Delta a_{I1}| + |\Delta a_{II}|$. Затем находится решение задачи перехода между орбитами, разность элементов которых $\Delta e_x, \Delta e_y, \Delta z, \Delta V_z, \Delta a^*$. На основе этого решения будет строиться решение задачи встречи. Когда знаки Δa_{I1} и Δa_{II} совпадают, то $\Delta a^* = |\Delta a|$, СХС задачи встречи равна СХС задачи перехода (соответствует случаю $\lambda_6 = 0$), решение задачи встречи оптимально. Когда $\Delta a^* > |\Delta a|$, СХС найденного решения будет больше СХС оптимального решения задачи встречи, соответствующего годографу базис-вектора в форме спирали, а то в свою очередь больше СХС решения задачи перехода. Для многовитковой встречи разница найденного решения и оптимального решения задачи встречи будет относительно небольшой.

Чтобы получить решение задачи встречи, найденные импульсы скорости делятся в пропорции $\frac{\Delta a_{I1}}{\Delta a^*}, \frac{\Delta a_{II}}{\Delta a^*}$, получаются четыре импульса скорости по два на первом и последнем витках перелета [88]. Если решение задачи перехода получено с помощью универсального решения (US) с составляющими импульсов скорости $\Delta V_{I1}, \Delta V_{z1}, \Delta V_{I2}, \Delta V_{z2}$ (ломаные АСК и АСЖ на рис. 4.1), то из него можно получить четырехимпульсное решение задачи встречи. Составляющие первого импульса скорости первого интервала маневрирования находятся по формулам:

$$\Delta V_{r1} = \Delta V_{r1} \frac{\Delta a_1}{\Delta a^*}, \Delta V_{z1} = \Delta V_{z1} \frac{\Delta a_1}{\Delta a^*}, \quad (4.7)$$

второго импульса скорости этого интервала по формулам:

$$\Delta V_{r2} = \Delta V_{r2} \frac{\Delta a_1}{\Delta a^*}, \Delta V_{z2} = \Delta V_{z2} \frac{\Delta a_1}{\Delta a^*}. \quad (4.8)$$

Трансверсальные и боковые составляющие двух импульсов скорости второго интервала маневрирования определяются по формулам:

$$\Delta V_{r11} = \Delta V_{r1} \frac{\Delta a_{II}}{\Delta a^*}, \Delta V_{z11} = \Delta V_{z1} \frac{\Delta a_{II}}{\Delta a^*}, \quad (4.9)$$

$$\Delta V_{r12} = \Delta V_{r2} \frac{\Delta a_{II}}{\Delta a^*}, \Delta V_{z12} = \Delta V_{z2} \frac{\Delta a_{II}}{\Delta a^*}. \quad (4.10)$$

Когда знаки Δa_1 и Δa^* совпадают, на первом интервале маневрирования углы приложения импульсов скорости задачи встречи совпадают с углами приложения импульсов скорости задачи перехода, в противном случае углы отличаются на 180° . Аналогично знаки Δa_{II} и Δa^* определяют углы приложения импульсов второго интервала.

Области существования решений. Вектору эксцентриситета орбиты ожидания найденного решения в пространстве e_x, e_y будет соответствовать т. D (рис. 4.1), принадлежащая отрезку AK (в начале рассматривается вариант непересекающихся орбит $\Delta a^* > \Delta e$).

Трансверсальным составляющим импульсов скорости этого решения соответствует ломаная $ABDEK$. Если изменять очередность реализации импульсов скорости на первом или последнем витках перелета, то можно получить ещё три вида ломаных: $AB'DE'K$, $ABDE'K$, $AB'DEK$. Эти четыре решения мало отличаются между собой при большой продолжительности встречи, но при короткой продолжительности порядок приложения импульсов скорости имеет значение. Возможность использовать разные решения может оказаться полезной и с точки

зрения попадания моментов приложения импульсов скорости в разрешенные интервалы маневрирования.

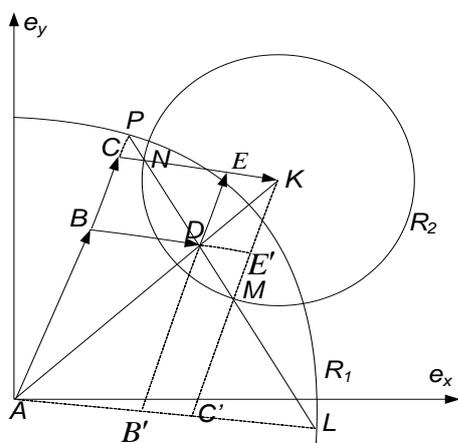


Рисунок 4.1. Решения задачи встречи, производные из решений задач перехода.

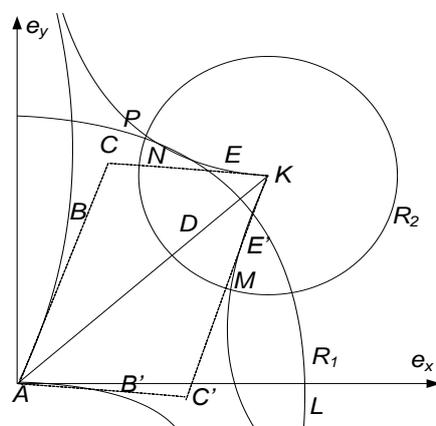


Рисунок 4.2. Области существования решений задачи встречи.

Области существования решений задачи встречи, СХС ΔV_{rdv} которых аналогична СХС решения задачи перехода ΔV_{trf} . ($\Delta a^* = |\Delta a|$), в пространстве Δu (начальной фазы) совпадают с областями существования решений CSS и CAS, соответствующей компланарной задачи встречи (отклонения от плоскости не учитываются), приведёнными на рис. 3.14а и 3.14б. Соответственно области существования решений, у которых затраты на встречу ΔV_{rdv} превышают затраты на переход ΔV_{trf} . ($\Delta a^* > |\Delta a|$) в пространстве Δu совпадают с областями существования решений CNDS, приведёнными на рис. 3.14а и 3.14б.

Для приближенного выполнения четвертого уравнения системы (4.1) требуется, чтобы сумма трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования равнялась $\frac{\Delta a_1}{2}$:

$$\Delta V_{t1} + \Delta V_{t2} = \frac{\Delta a_1}{2}.$$

Однако распределение величин трансверсальных составляющих импульсов скорости в рамках этой суммы может быть произвольным, а не только заданным соотношениями (4.6), (4.7). Таким образом, возможным значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания соответствует отрезок MN (рис. 4.1). В точках M и N четырехимпульсное решение вырождается в трехимпульсное, когда на втором интервале прикладывается только один импульс скорости величиной $\frac{\Delta a_{II}}{2}$. Угол приложения этого импульсаскорости совпадает с углом исполнения первого из импульсов описанного во второй главе универсального решения для точки M или с углом приложения второго импульса скорости для точки N .

Боковые составляющие должны быть распределены между импульсами таким образом, чтобы для каждого импульса скорости сохранялось соотношение боковой и трансверсальной составляющих, которое имело место для соответствующего импульса скорости задачи перехода.

Наиболее просто находятся параметры пропорционального решения, но, если, например, из-за ограничений на эксцентриситет орбиты ожидания требуется решение, которому соответствует точка отрезка MN , отличная от точки D (рис. 4.1), параметры такого решения также находятся достаточно просто.

Для разных значений Δu положение отрезка MN будет меняться, он будет перемещаться параллельно самому себе. Для значений $\Delta u \in [\Delta u_{sl}, \Delta u_{sr}]$ (см. раздел 3.4) допустимым множеством значений вектора эксцентриситета орбиты ожидания на плоскости e_x, e_y будет параллелограмм $ACKC'$. При $\Delta u = \Delta u_{sl}$ отрезок MN вырождается в т. K , а при $\Delta u = \Delta u_{sr}$ в т. A .

Когда Δu становится больше Δu_{sr} и продолжает расти, или становится меньше Δu_{sl} и продолжает уменьшаться, начинает расти Δa^* (на интервале $[\Delta u_{sl}, \Delta u_{sr}]$ оно было постоянным). Одновременно начинают расти радиусы обеих окружностей R_1 и R_2 , так как растут Δa_I и Δa_{II} (как всегда $R_1 = |\Delta a_I|$, $R_2 = |\Delta a_{II}|$), знаки которых теперь не совпадают. При каждом конкретном значении Δu возможным значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания вновь

соответствует отрезок, но его величина будет больше, чем у отрезка, соответствующего Δu из интервала $[\Delta u_{sl}, \Delta u_{sr}]$ и пересекающего ту же точку отрезка AK . Для значений $\Delta u < \Delta u_{sl}$ и $\Delta u > \Delta u_{sr}$ допустимым множеством значений вектора эксцентриситета орбиты ожидания на плоскости e_x, e_y будет геометрическая фигура, изображенная на рис 4.2, содержащая параллелограмм $ACKC'$.

При исследовании областей существования использовалось универсальное решение (US) (раздел 2.4), как самое простое, но аналогичную картину можно получить и для областей существования решений, описанных в работе Эдельбаума [83].

Рассмотрим теперь вариант, когда орбиты пересекаются и $\Delta a^* = |\Delta a|$. В этом случае на плоскости e_x, e_y окружности, имеющие радиусы R_1 и R_2 , не пересекаются (рис. 4.3). Универсальному решению задачи перехода соответствуют ломаные ACK и $AC'K$, а пропорциональным решениям задачи встречи – ломаные $ABDEK$, $AB'DE'K$, $ABDE'K$, $AB'DEK$. Выше упоминалось, что у решения задачи перехода между пересекающимися орбитами знаки трансверсальных составляющих импульсов скорости не совпадают. Следовательно, например, у решения $AB'DEK$ $R_1 = AB'B'D$ и $R_2 = EK-DE$, отсюда, $MB' = B'D$, а $DE = EN$.

Как и в случае непересекающихся орбит, распределение величин трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования в рамках суммы (4.10) может быть произвольным, а не только заданным соотношениями (4.6), (4.7). Таким образом, возможным значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания соответствует отрезок MN (рис. 4.3).

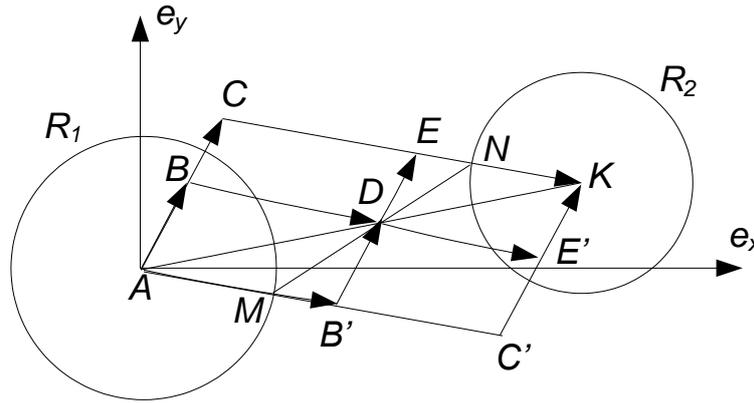


Рисунок 4.3. Решение задачи встречи для непересекающихся орбит.

В точках M и N четырехимпульсное решение вырождается в трехимпульсное. Точке M соответствует решение, когда на первом интервале прикладывается только один импульс скорости с трансверсальной составляющей $\frac{\Delta a_I}{2}$, угол приложения которого совпадает с углом приложения второго импульса скорости универсального решения задачи перехода. Точке N соответствует решение, когда один импульс скорости с трансверсальной составляющей $\frac{\Delta a_{II}}{2}$ прикладывается на втором интервале маневрирования.

Как и в случае встречи на непересекающихся орбитах для разных значений Δu положение отрезка MN будет меняться. Для значений $\Delta u \in [\Delta u_{sl}, \Delta u_{sr}]$ допустимым множеством значений вектора эксцентриситета орбиты ожидания на плоскости e_x, e_y будет параллелограмм $ACKC'$. При $\Delta u = \Delta u_{sl}$ отрезок вырождается в точку K , а при $\Delta u = \Delta u_{sr}$ в точку A . Когда Δu становится больше Δu_{sr} и продолжает расти, начинает расти и Δa^* (на интервале $[\Delta u_{sl}, \Delta u_{sr}]$ оно было постоянным). Одновременно начинают расти радиусы окружностей R_1 и R_2 , так как растут Δa_I и Δa_{II} , знаки которых теперь не совпадают. При каждом конкретном значении Δu возможным значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания опять соответствует отрезок, расположенный левее точки K , но его величина будет больше, чем у отрезка, соответствующего Δu из интервала $[\Delta u_{sl}, \Delta u_{sr}]$ и

пересекающего ту же точку отрезка AK . Для значений $\Delta u < \Delta u_{sl}$ и $\Delta u > \Delta u_{sr}$ допустимым множеством значений вектора эксцентриситета орбиты ожидания на плоскости e_x, e_y будет неограниченная геометрическая фигура, изображенная на рис 4.2.

Области существования обоих типов решений были исследованы в предположении, что четвертое уравнение системы (4.1) было заменено приближенным условием (4.10). Однако этого вполне достаточно, чтобы получить представление о виде этих областей.

Параметры любого из решений, принадлежащего допустимой области, можно уточнить при помощи итерационной процедуры, аналогичной процедуре описанной в главе 3 (изменяется величина Δa_1), чтобы четвертое уравнение системы (4.1) было выполнено с заданной точностью.

Необходимо отметить, что при незначительной продолжительности встречи, когда указанная итерационная процедура работает недостаточно эффективно, для определения параметров маневров можно воспользоваться задачей Ламберта. При фиксированных моментах приложения двух импульсов скорости из системы шести линейных уравнений (4.1) с шестью неизвестными определяются величины составляющих импульсов скорости $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, \Delta V_{zi}$ ($i=1,2$). Перебором возможных сочетаний φ_1, φ_2 , находится оптимальное решение. Использование задачи Ламберта на коротких интервалах маневрирования обоснованно, так как на этих интервалах обычно трудно расположить более двух маневров. Кроме того, нередко эти два маневра являются частью рассчитанного ранее четырех- или трехимпульсного маневра. Если двух импульсов скорости недостаточно для оптимального решения задачи и необходимо использовать трёх- или четырехимпульсную схему маневрирования, то для определения параметров маневров можно воспользоваться численным методом, изложенным в следующей главе.

При наличии дополнительных ограничений на углы приложения, ориентацию и величину импульсов скорости, а такие ограничения часто

встречаются в практических задачах, процедура поиска оптимального решения многовитковой задачи встречи несколько усложняется. Однако геометрический подход позволяет и в этом случае находить оптимальное аналитическое решение. Алгоритм решения задачи такого типа приведен в разделе 4.4.

4.3. Невырожденное решение некомпланарной задачи встречи

Численное определение параметров оптимального шестиимпульсного решения. Рассматривается невырожденное решение ($\lambda_6 \neq 0$), когда годограф базис-вектора имеет вид спирали в пространстве (μ, λ, ν) . При определенных характеристиках этой спирали существует шестиимпульсный оптимальный маневр. Как и у невырожденного четырехимпульсного решения компланарной встречи первый импульс скорости исполняется на левой границе первого из разрешенных интервалов маневрирования, в момент пересечения сферы единичного радиуса спиралью годографа базис-вектора. Это происходит, когда $\theta = 0$. Внутренние импульсы прикладываются в моменты, когда спираль касается сферы на первом и последнем витках спирали. Последний шестой импульс скорости исполняется на правой границе второго из разрешенных интервалов маневрирования, когда спираль выходит из сферы ($\theta = \theta_f$). В работе [7], было показано, что другого типа оптимальных невырожденных решений не может быть. Такое решение позволяет максимально разнести первый и последний импульсы скорости, что увеличивает время нахождения на фазирующей орбите и тем самым сокращает затраты СХС на перелет.

Чтобы спираль касалась сферы в четырех точках необходимо выполнение условий «симметричности» спирали относительно оси λ :

$$\mu(0) = -\mu(\theta_f), \lambda(0) = \lambda(\theta_f), \nu(0) = -\nu(\theta_f). \quad (4.11)$$

Из «симметрии» спирали следует симметрия моментов приложения импульсов скорости:

$$\theta_2 = \theta_f - \theta_5, \theta_3 = \theta_f - \theta_4. \quad (4.12)$$

Если найдены углы приложения и ориентация импульсов скорости на одном из интервалов маневрирования, то углы приложения и ориентация импульсов скорости на втором из интервалов маневрирования находятся с помощью (4.11), (4.12). Углы приложения и ориентацию импульсов скорости определяет расположение спирали, которое задается коэффициентами λ_i ($i=1, \dots, 6$).

Из условий (4.11) и (1.19) следуют уравнения:

$$\begin{aligned} -\lambda_2 &= -\lambda_2 \cos \theta_f + \lambda_3 \sin \theta_f, \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_3 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \sin \theta_f + 2\lambda_3 \cos \theta_f - 3\lambda_6 \theta_f, \\ \lambda_5 &= \lambda_4 \sin \theta_f + \lambda_5 \cos \theta_f, \end{aligned} \quad (4.13)$$

позволяющие уменьшить число независимых коэффициентов λ_i до трех.

Из соотношений (4.13) следует, что в число этих трех коэффициентов должны входить элементы пар λ_2 и λ_3 , λ_4 и λ_5 , λ_1 и λ_6 . Также должен входить коэффициент λ_6 , который оказывает максимальное влияние на форму спирали. В число независимых коэффициентов целесообразно выбрать $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$.

Для определения коэффициентов $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$ использовались два программных комплекса [96]. На вход подавался один параметр продолжительность перелета θ_f .

Эти ПК для фиксированной продолжительности перелета позволяют определить моменты приложения импульсов скорости и их ориентация. С помощью этих ПК были построены зависимости этих параметров импульсов от угловой продолжительности перелета.

Характеристики оптимального шестиимпульсного решения. Графики зависимости углов приложения второго θ_2 и третьего импульсов скорости θ_3 от угловой продолжительности встречи изображены на рис. 4.4. Нижние графики –

зависимости для второго импульса, верхние для третьего импульса. Угол приложения первого импульса скорости $\theta_1=0$.

Как можно видеть, графики практически повторяются при увеличении θ_f . Чтобы понять степень близости, эти графики изображены на одном рисунке, здесь была отброшена для каждого графика целая часть витков аргумента θ_f .

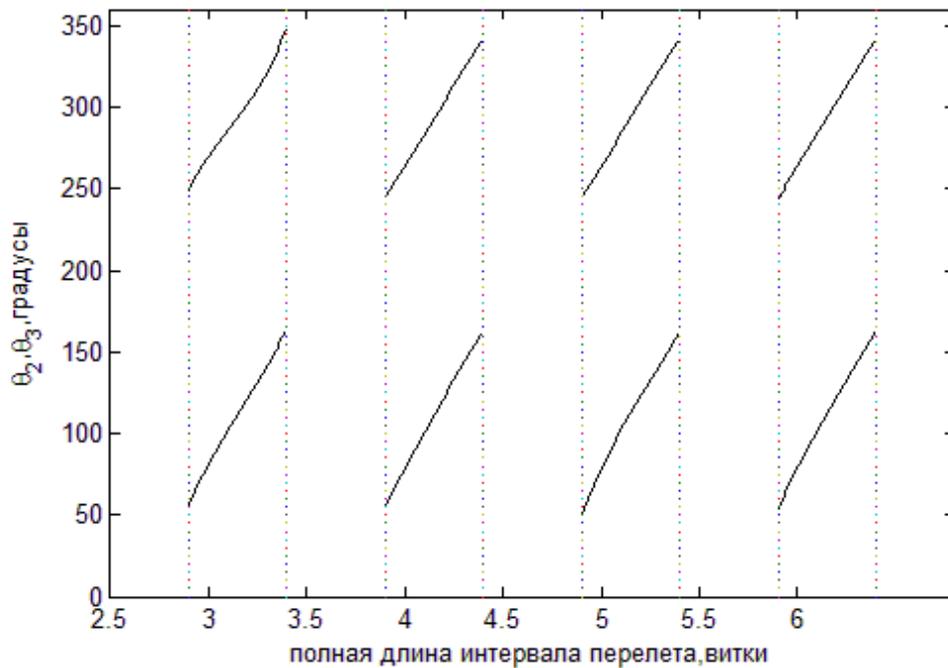


Рисунок 4.4. Разница между углами приложения первого и второго, а также первого и третьего импульсов скорости

Отбрасываемая часть обозначена $\bar{\theta}$. У первого графика θ_2 и первого графика θ_3 $\bar{\theta} = 2$, для второго $\bar{\theta} = 3$ и т.д. Остающаяся часть θ_f (обозначенная θ_f^*) должна принадлежать интервалу $\theta_f^* \in [0, 2]$. Можно видеть, что графики существуют, когда $\theta_f^* \in [0.9, 1.4]$. Вводится новая переменная $\theta^* = 0.5\theta_f^*$ и строятся графики зависимостей θ_2 и θ_3 от θ^* (рис.4.5 и рис. 4.6).

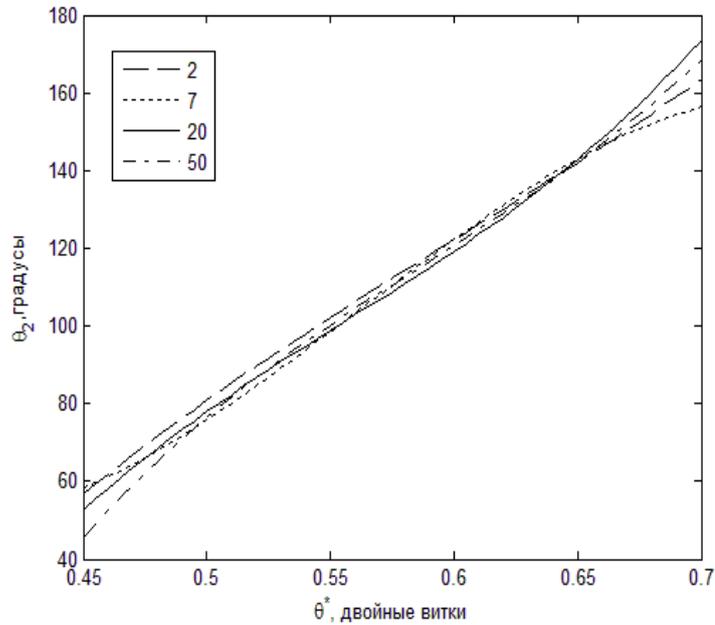


Рисунок 4.5. Приведенная разница между углами приложения второго и первого импульсов скорости

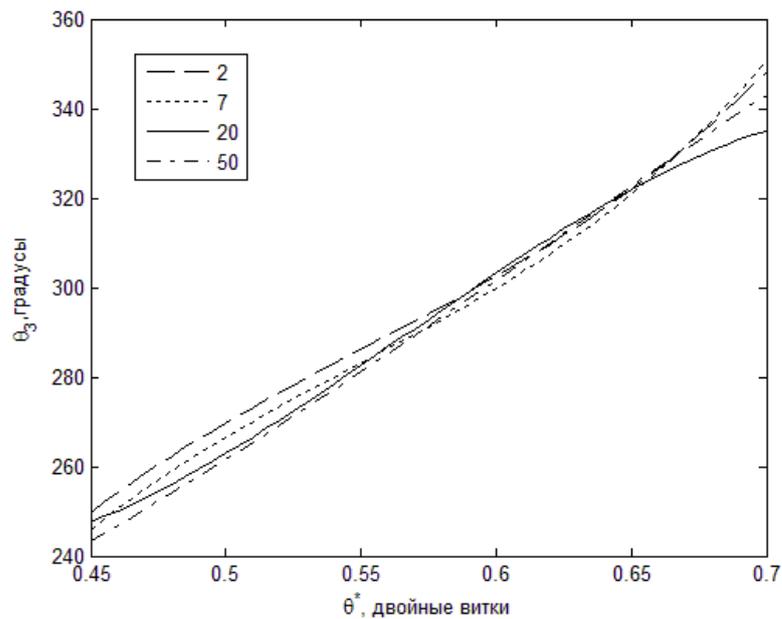


Рисунок 4.6. Приведенная разница между углами приложения третьего и первого импульсов скорости

Как можно видеть на рисунках 4.5 и 4.6, графики θ_2 и θ_3 почти идентичны. Небольшие отличия имеются в конце интервала существования невырожденных шестиимпульсных решений. Что вызвано с ошибками нарастающими, когда спираль вырождается в эллипс в момент приближения θ^* к 0.7. В этот момент λ_6

стремится к нулю. Когда $\theta^* > 0.7$ годограф базис-вектора имеет форму эллипса. Имеет место вырожденное решение задачи встречи, параметры которого находятся с помощью алгоритмов, описанных в предыдущем параграфе. Графики показывают, что углы приложения третьего и второго импульсов скорости отличаются примерно на 180° .

Графики зависимости курсов первого (β_1) и второго (β_2) импульсов скорости от θ^* представлены на рис. 4.7 и 4.8.

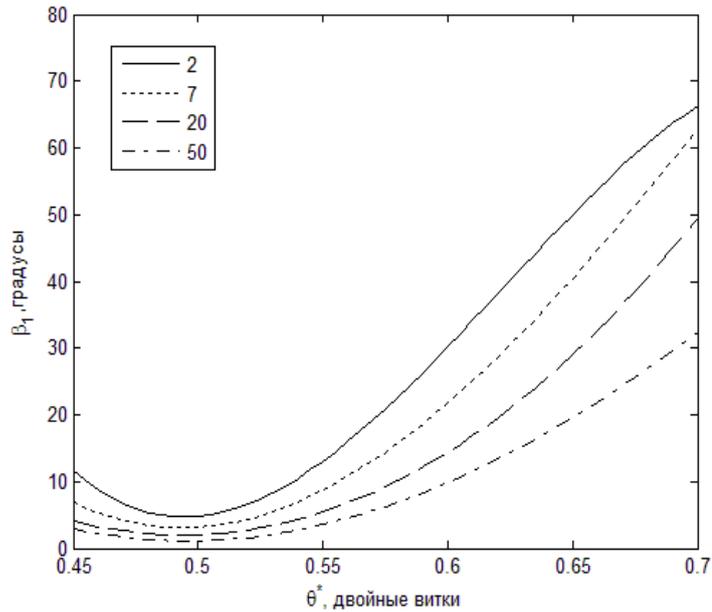


Рисунок 4.7. Зависимость курса первого импульса скорости от θ^*

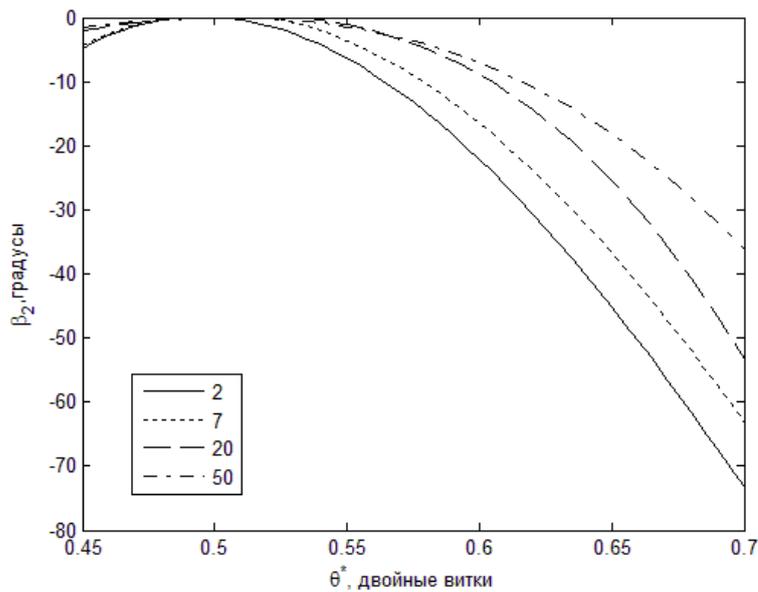


Рисунок 4.8. Зависимость курса второго импульса скорости от θ^*

Величины курсов второго и третьего импульсов скорости близки по модулю, но отличаются знаками, так как между углами приложения этих импульсов скорости около половины витка.

Зависимости тангажа первого импульса скорости от θ^* для разной продолжительности встречи (указанной около типа линии), приведены на рис. 4.9.

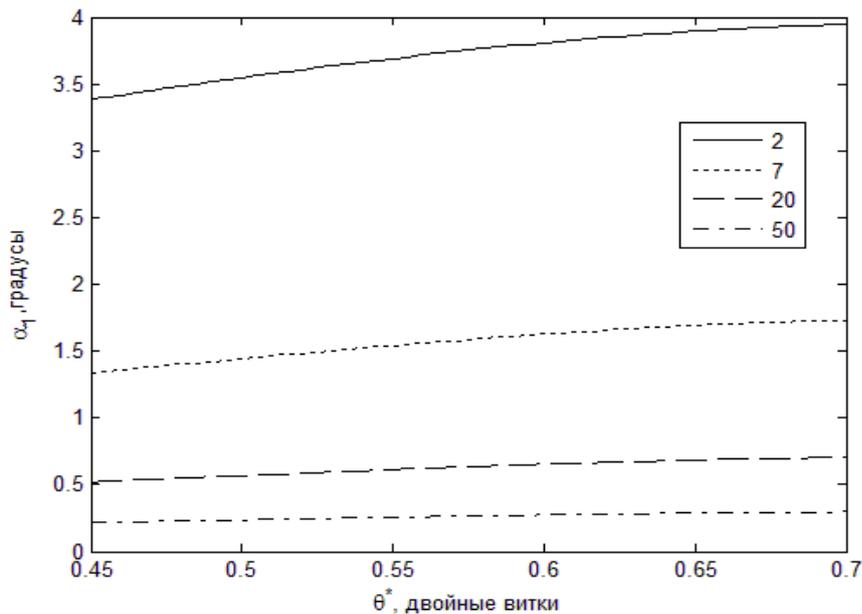


Рисунок 4.9. Зависимость тангажа первого импульса скорости от θ^*

График показывает, что тангаж первого импульса скорости достаточно мал. Если продолжительность встречи превышает 10 витков, то тангаж менее 1° . Похожий результат получен и для встречи на компланарных орбитах. Тангажи второго и третьего импульсов скорости также малы. Это позволяет считать радиальные составляющие импульсов скорости нулевыми. Таким образом, в качестве первого приближения импульсы скорости в плоскости орбиты можно считать чисто трансверсальными. Особенно высока точность этого приближения, когда продолжительность перелета превышает 10 витков.

Аналитические формулы для определения параметров импульсов скорости. Построенные графики можно использовать для нахождения аналитических формул, позволяющих определить параметры оптимальных

маневров. Было определено, что радиальные составляющие импульсов скорости практически нулевые, и что курсы второго и третьего импульсов скорости дают противоположную боковую ориентацию этих импульсов. Это означает, что достаточно определить только четыре аналитические функции от θ^* : курсы первого и второго импульсов скорости, а также углы приложения второго и третьего импульсов. Задача еще более упрощается, если предположить, что эти углы отличаются на 180° .

Из графиков на рисунках 4.5 и 4.6 следует, что углы приложения второго и третьего импульсов скорости θ_2 и θ_3 почти не зависят от продолжительности встречи $\bar{\theta}$, от целой части ее витков. Аппроксимация зависимостей $\theta_2(\theta^*)$ и $\theta_3(\theta^*)$ осуществляется с помощью полиномов третьей степени:

$$\begin{aligned}\theta_2(\theta^*) &= 724.8(\theta^*)^3 - 1382.3(\theta^*)^2 + 1298.9\theta^* - 317.1, \\ \theta_3(\theta^*) &= -35.9(\theta^*)^3 + 180.6(\theta^*)^2 + 213.9\theta^* + 116.6.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Необходимо помнить, что θ^* измеряется в долях двойного витка, а углы приложения импульсов скорости в (4.14) в долях витка. В первом приближении зависимость $\theta_3(\theta^*)$ можно не рассматривать и использовать формулу $\theta_3(\theta^*) = \theta_2(\theta^*) + 0.5$.

Анализ показывает, что ошибка аппроксимации, как правило, менее 3° , и только около границ приближается к 8° для встреч небольшой длительности. Это вполне удовлетворительная точность при поиске решения при упрощающих предположениях. При применении численных методов [101, 22] перебор углов приложения импульсов скорости на первом интервале маневрирования, когда решается четырехимпульсная задача, как правило, осуществляется с шагом 6° .

Курсы, как первого, так и второго импульсов скорости существенно зависят от продолжительности встречи (рис. 4.7 и 4.8). Зависимость курсов этих импульсов скорости от θ^* аппроксимируется полиномами третьей степени, коэффициенты которых зависят от $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}\beta_1(\theta^*) &= a_3(\theta^*)^3 + a_2(\theta^*)^2 + a_1\theta^* + a_0, \\ \beta_2(\theta^*) &= b_3(\theta^*)^3 + b_2(\theta^*)^2 + b_1\theta^* + b_0,\end{aligned}\tag{4.15}$$

здесь

$$a_3 = 0.48\bar{\theta}^{-3} - 44.76\bar{\theta}^{-2} + 1247.41\bar{\theta} - 10134.39,$$

$$a_2 = -0.80\bar{\theta}^{-3} + 75.58\bar{\theta}^{-2} - 2127.97\bar{\theta} + 18640.44,$$

$$a_1 = 0.44\bar{\theta}^{-3} - 41.96\bar{\theta}^{-2} + 1190.51\bar{\theta} - 11002.99,$$

$$a_0 = -0.08\bar{\theta}^{-3} + 7.69\bar{\theta}^{-2} - 219.44\bar{\theta} + 2112.89,$$

$$b_3 = -0.23\bar{\theta}^{-3} + 22.91\bar{\theta}^{-2} - 654.31\bar{\theta} + 2418.01,$$

$$b_2 = 0.39\bar{\theta}^{-3} - 38.13\bar{\theta}^{-2} + 1116.27\bar{\theta} - 5726.06,$$

$$b_1 = -0.21\bar{\theta}^{-3} + 20.71\bar{\theta}^{-2} - 619.14\bar{\theta} + 3854.87,$$

$$b_0 = 0.04\bar{\theta}^{-3} - 3.69\bar{\theta}^{-2} + 112.37\bar{\theta} - 798.44.$$

Ошибка аппроксимации не более градуса, это приемлемо для приближенного решения.

Это означает, что при известной продолжительности встречи (угловом расстоянии между началом первого интервала маневрирования и концом второго интервала маневрирования) для невырожденных шестиимпульсных решений по приведенным аналитическим формулам находятся углы приложения импульсов скорости и их ориентация. При получении данных формул были использованы необходимые условия оптимальности. Первый и последний импульсы скорости прикладываются в начале и конце интервала перелета. Углы приложения второго и третьего импульсов определяются по формулами (4.14), курсы этих импульсов определяются по формулами (4.15), боковая составляющая третьего импульса

скорости противоположна боковой составляющей второго импульса скорости. Радиальные составляющие всех импульсов скорости равны нулю. Как следует из формул (4.11), (4.12), импульсы скорости второго интервала маневрирования «симметричны» соответствующим импульсам скорости первого интервала маневрирования. На основании этой информации система (4.1) позволяет определить модули импульсов скорости.

Сравнение невырожденного шестиимпульсного решения и решения задачи Ламберта. Двухимпульсная задача Ламберта наиболее часто применяется при решении задачи встречи. Это делает интересным сравнение СХС двухимпульсного решения и СХС невырожденного шестиимпульсного решения. Как обычно, у двухимпульсного решения задачи Ламберта импульсы скорости прикладываются на первом и втором интервалах маневрирования. Решение задачи Ламберта находится перебором возможных углов исполнения импульсов скорости на первом и последнем витках встречи. Для каждого сочетания углов приложения импульсов скорости φ_1, φ_2 система (4.1) позволяет определить составляющие импульсов скорости $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, \Delta V_{zi}$ ($i=1,2$). Сравнением СХС решений для различных сочетаний φ_1, φ_2 , определяются углы, доставляющие минимум затратам СХС.

Величины импульсов скорости шестиимпульсного невырожденного решения находятся из системы (4.1) при этом используются формулы (4.14), (4.15), также используется предположение, что второй и третий, а также четвертый и пятый импульсы скорости разделяет половина витка, а первый и последний импульсы скорости прикладываются в начале и конце перелета.

Было установлено, что шестиимпульсное решение, удовлетворяющее условиям оптимальности, иногда не существует, при продолжительности встречи попадающей в область, в которой должны существовать шестиимпульсные решения (рис.4.4). У оптимальных невырожденных решений импульсы скорости на одном интервале разгонные, а на другом тормозные. Поэтому, если с помощью описанного выше алгоритма находится решение, у которого знаки

трансверсальных составляющих импульсов одного интервала не совпадают, то такое решение не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Начальная и конечная орбиты круговые ($\Delta e_x = \Delta e_y = 0$), отклонение между большими полуосями $\Delta a = 0.01$. Разница в ориентации плоскостей орбит активного и пассивного аппаратов задается отклонениями $\Delta z = 0.0001$, $\Delta V_z = 0.0001$. Разница фаз в точке встречи $\Delta u = -50^\circ$. Продолжительность встречи $\bar{\theta} = 5$.

С помощью описанного выше алгоритма параметры шестиимпульсного невырожденного решения находятся при произвольной продолжительности встречи, что и было сделано при решении задачи. СХС шестиимпульсного решения меньше СХС двухимпульсного решения, когда $\theta^* < 0$. Однако данные углы перелета не попадают в диапазоны, в которых существуют оптимальные решения, изображенные на рис. 4.4. Когда $\theta^* = 0.46$ получается максимальный выигрыш, который достигает 45%. При уменьшении θ^* преимущество шестиимпульсных решений постепенно сокращается, когда $\theta^* = 0.38$, граница области существования шестиимпульсных решений, их СХС меньше на 41%. В области $\theta^* \in [0.33, 0.38]$ спираль не вписывается в сферу. Формально необходимые условия оптимальности не выполнены, но как и у оптимальных решений трансверсальные составляющие импульсов скорости на одном интервале маневрирования имеют одинаковые знаки. Таким образом, найденное шестиимпульсное решение существенно лучше традиционного двухимпульсного.

Приведенный выше алгоритм, использующий соотношения (4.14), (4.15), позволяет найти также параметры пятиимпульсных маневров [97]. Если увеличивать время встречи, то можно получить решение, у которого близок к нулю первый или последний импульс. Формально время встречи будет больше заданной, но так как второй (или пятый) импульс будет принадлежать разрешенному интервалу маневрирования, то реальное время между крайними импульсами скорости будет меньше заданной продолжительности встречи. На пример, когда $\theta^* = 0.469$ у шестиимпульсного решения первый импульс

практически нулевой. Угол приложения второго импульса скорости (для пятиимпульсного маневра он будет первым) отличается от левой границы интервала маневрирования на 0.2 витка. Таким образом, в этом случае реальное расстояние между крайними импульсами скорости $\theta^* = 0.369$. Это значит, что на интервале $\theta^* \in [0.369, 0.469]$ существуют и шестиимпульсное, и пятиимпульсное решения, при этом пятиимпульсное получается из шестиимпульсного при $\theta^* = 0.469$. Спираль годографа базис-вектора пятиимпульсного решения начинается внутри единичной сферы, но удовлетворяет условиям оптимальности, т.к. имеет 4 точки касания и 1 точку пересечение сферы единичного радиуса. Продолжительность встречи, для которой возможно решение этого типа, зависит от расстояния до первой точки касания сферы.

Графики требуемой СХС (безразмерной) для двух-, пяти- и шестиимпульсных решений приведены на рис. 4.10.

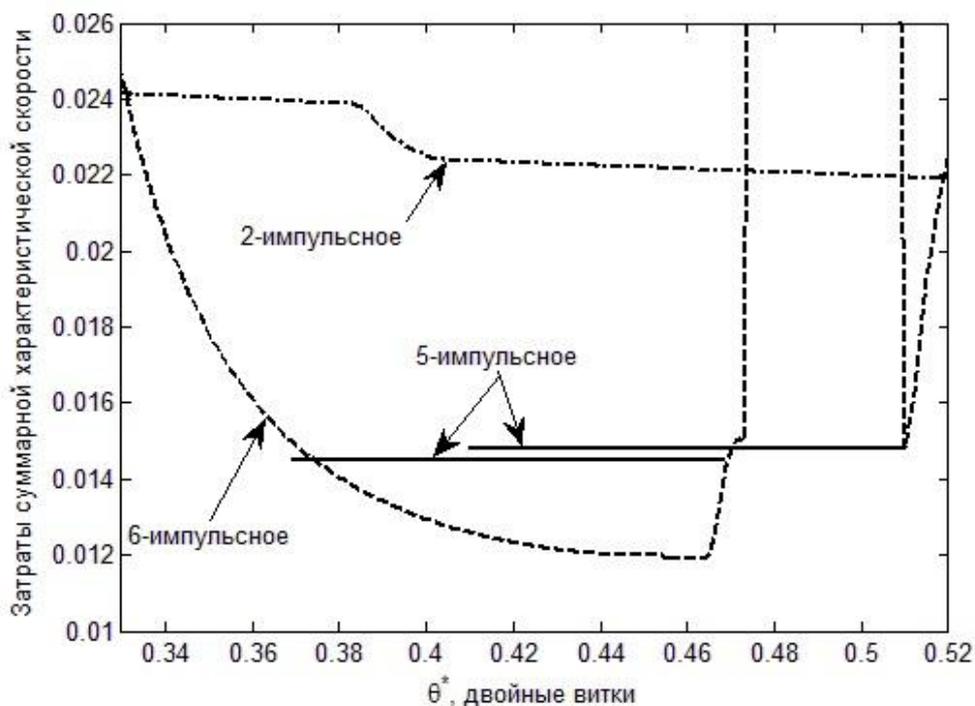


Рисунок 4.10. Графики СХС требуемой для реализации двух-, пяти- и шестиимпульсных маневров

На этом рисунке затраты для шестиимпульсного решения изображены штриховой линией, затраты для двухимпульсного решения изображены штрихпунктирной линией, сплошной линией – затраты для пятиимпульсного решения. Как можно видеть, когда θ^* приближается к 0.5, шестиимпульсное решение перестает существовать, однако при $\theta^* = 0.51$ имеется пятиимпульсное решение, также имеющее преимущество над решением задачи Ламберта. На интервале $\theta^* \in [0.51, 0.52]$ шестиимпульсное решение не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, т.к. одна из трансверсальных составляющих первого интервала маневрирования положительна. Но СХС даже такого шестиимпульсного решения меньше СХС решения задачи Ламберта.

В таблицах 4.1-4.3 представлены элементы двух- и шестиимпульсных решений для трех вариантов θ^* . В первых четырех строках каждой из таблиц приведены по три трансверсальных (ΔV_t) и боковых (ΔV_z) составляющих импульсов скорости шестиимпульсного решения на первом (индекс I) и втором (индекс II) интервалах маневрирования, а также углы исполнения второго и третьего импульсов скорости ($\Delta\phi_2$ и $\Delta\phi_3$), отсчитываемые от левой границы интервала. В пятой и шестой строках каждой из таблиц для двухимпульсного решения приведены соответственно радиальная, трансверсальная и боковая составляющие первого (ΔV_{2I}) и второго импульсов скорости (ΔV_{2II}), расстояние от момента исполнения данного импульса скорости до левой и правой границ разрешенной области маневрирования ($\Delta\phi_I$ и $\Delta\phi_{II}$), и затраты суммарной характеристической скорости в обоих случаях (ΔV_6 и ΔV_2).

Как следует из таблицы 4.3, пятиимпульсное решение не соответствует необходимым условиям оптимальности, однако, сокращает затраты СХС.

Следовательно, производные из шестиимпульсных, пятиимпульсные маневры, также дают возможность уменьшить затраты СХС и тем самым расширяют область, на которой многоимпульсные решения имеют преимущества.

Можно видеть, что хотя оптимальные многоимпульсные решения существуют не для любой продолжительности встречи, однако пяти- и

шестиимпульсные решения даже в этом случае дают заметное сокращение затрат СХС относительно решения традиционной задачи Ламберта.

Таблица 4.1

Параметры импульсов при $\theta^* = 0.33$

ΔV_{II}	0	0.0037	0.0049	$\Delta\varphi_2 = 0.0342$
ΔV_{III}	-0.0003	-0.0033	0	$\Delta\varphi_3 = 0.5719$
ΔV_{zI}	0.0047	-0.0028	0.0037	$\Delta V_6 = 0.0241$
ΔV_{zII}	-0.0003	0.0025	-0.004	$\Delta V_2 = 0.0241$
ΔV_{2I}	0.0201	0.0089	-0.001	$\Delta\varphi_I = 0$
ΔV_{2II}	0.0257	-0.0039	0	$\Delta\varphi_{II} = 0.8488$

Таблица 4.2

Параметры импульсов при $\theta^* = 0.38$

ΔV_{II}	0.002	0.0017	0.0049	$\Delta\varphi_2 = 0.0462$
ΔV_{III}	-0.0005	-0.0014	-0.0018	$\Delta\varphi_3 = 0.6166$
ΔV_{zI}	0.0019	-0.0006	0.0015	$\Delta V_6 = 0.014$
ΔV_{zII}	-0.0001	0.0004	-0.0016	$\Delta V_2 = 0.0239$
ΔV_{2I}	0.0072	0.0092	-0.0001	$\Delta\varphi_I = 0$
ΔV_{2II}	0.0178	-0.0042	0.001	$\Delta\varphi_{II} = 0.9443$

Таблица 4.3

Параметры импульсов при $\theta^* = 0.469$.

ΔV_{II}	0	0.0029	0.0059	$\Delta\varphi_2 = 0.0342$
ΔV_{III}	-0.0006	-0.0041	0.009	$\Delta\varphi_3 = 0.5719$
ΔV_{zI}	0.000001	-0.000018	0.000035	$\Delta V_6 = 0.0145$
ΔV_{zII}	0.000003	0.000026	0.00014	$\Delta V_2 = 0.0221$
ΔV_{2I}	-0.0227	0.0093	-0.0003	$\Delta\varphi_I = 0$
ΔV_{2II}	0.028	-0.0043	0.003	$\Delta\varphi_{II} = 0.1326$

4.4. Алгоритм расчета маневров дальнего наведения

Маневрами дальнего наведения называются маневры, целью которых является перевод КА в заданную окрестность орбитальной станции, в которой начинает работать аппаратура автономного сближения, обеспечивающая стыковку КА со станцией [22]. Постановка задачи расчета параметров маневров дальнего наведения существенно отличается от постановки классической задачи встречи (другой функционал, многочисленные ограничения для импульсов скорости), но даже для решения такой нестандартной задачи можно воспользоваться алгоритмами, описанными в третьей главе и втором параграфе этой главы.

Постановка задачи. Для обеспечения высокой точности выполнения терминальных условий, необходимой при расчете маневров дальнего наведения, используется итерационная схема, описанная в первой главе. Это позволяет при определении параметров импульсов скорости воспользоваться довольно простой системой уравнений (4.1).

При расчете четырёхимпульсных маневров дальнего наведения предполагается, что два импульса скорости прикладываются на первом интервале маневрирования, расположенном в начале перелета, и два на втором интервале маневрирования, расположенном в конце перелета. Расстояние между интервалами несколько витков. На первом интервале маневрирования на углы приложения импульсов скорости наложены ограничения:

$$\varphi_1 \in \Phi_1, \quad \varphi_2 \in \Phi_2, \quad (4.16)$$

где Φ_1, Φ_2 — заданные множества. Обычно это непрерывные интервалы, начинающиеся в районе $200^\circ \div 220^\circ$ одного витка и заканчивающиеся в районе $60^\circ \div 80^\circ$ следующего витка. Углы приложения третьего и четвертого импульсов скорости фиксированы на последнем витке полета:

$$\varphi_3 = \varphi_{3f}, \quad \varphi_4 = \varphi_{4f}. \quad (4.17)$$

Как правило, эти импульсы скорости прикладываются за виток и за половину витка до точки встречи.

Для того чтобы ошибки двигательной установки не приводили к существенному нарушению четвертого уравнения системы (4.1), фиксируется ориентация двух последних импульсов скорости:

$$\frac{\Delta V_{ri}}{\Delta V_{ii}} = \frac{a_{ri}}{a_{ii}}, \quad \Delta V_z = 0 \quad (i=3,4), \quad (4.18)$$

а для двух первых импульсов скорости в функционал задачи вводятся штрафные члены вида [22]:

$$Q_i = k \sqrt{(a_{ri} \Delta V_{ii} - a_{ii} \Delta V_{ri})^2 + (a_{ri}^2 + a_{ii}^2) \Delta V_{zi}^2},$$

здесь $a_{ri} = 2 - 2 \cos \varphi_i$, $a_{ii} = -3 + 4 \sin \varphi_i$, $k = k^* \delta \psi$, k^* – заданный коэффициент ($k^* > 0$), $\delta \psi$ – принятая максимальная ошибка ориентации импульсов скорости.

Требуется определить ΔV_{ri} , ΔV_{ii} , ΔV_{zi} , φ_i ($i=1, \dots, N$), минимизирующие функционал

$$F = \sum_{i=1}^4 \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ii}^2 + \Delta V_{zi}^2} + \sum_{i=1}^2 Q_i$$

при ограничениях (4.1), (4.16)-(4.18).

Алгоритм решения. Введем дополнительное ограничение:

$$\Delta V_{r1} = \Delta V_{r2} = 0, \quad (4.19)$$

упрощающее задачу. Отметим, что получающееся при этом решение близко к оптимальному (как было показано в третьей главе у оптимального многовиткового решения, как правило, радиальные составляющие импульсов скорости малы или равны нулю).

Расстояние от точки встречи до первого интервала маневрирования существенно превосходит величины самих интервалов. Поэтому как всегда можно перейти от четвертого уравнения системы (4.1) к приближенному

уравнению, определяющему сумму трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования:

$$\Delta V_{\text{I}} = \Delta V_{t1} + \Delta V_{t2} \approx -\frac{\Delta t}{3\varphi_0}, \quad (4.20)$$

где φ_0 - некоторая точка первого интервала маневрирования. Из третьего уравнении системы (4.1) определяется сумма трансверсальных составляющих двух последних импульсов скорости:

$$\Delta V_{\text{II}} = \Delta V_{t3} + \Delta V_{t4} \approx \frac{\Delta a}{2} + \frac{\Delta t}{3\varphi_0}, \quad (4.21)$$

Четырехимпульсному решению системы (4.1) при ограничениях (4.18), (4.19) на плоскости e_x, e_y соответствует ломаная $ABCDK$ (рис. 4.11), с началом и концом в точках A и K соответственно. При планировании экспедиций начальная разность фаз $\Delta\omega$ орбитальной станции и активного КА выбирается таким образом, чтобы у оптимального решения знаки трансверсальных составляющих всех импульсов скорости совпадали (это возможно, так как орбита выведения КА всегда лежит внутри орбиты станции).

В этом случае из ограничения (4.20) следует, что точка C , соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, принадлежит кругу с центром в точке A радиуса $R_1 = |2\Delta V_{\text{I}}|$ (рис. 4.12). Из (4.17), (4.18) и (4.21) следует, что точка C также должна принадлежать отрезку $L'N$ (рис. 4.12). На этом рисунке $L'L'' = NN' = \Delta V_{\text{II}}$, $KL'' \perp L'L''$, $NN' \perp N'K$, $L''K = \Delta V_{\text{II}} \frac{a_{r4}}{a_{t4}}$, $KN' = \Delta V_{\text{II}} \frac{a_{r3}}{a_{t3}}$. Таким образом,

точка C принадлежит отрезку LN . Положение точек L и N уточняется при помощи итерационной процедуры, которая несколько отличается от процедур, рассмотренных в главе III, т.к. необходимо учитывать радиальные составляющие импульсов скорости второго интервала маневрирования. Из рисунка видно 4.12, что точке L соответствует трехимпульсное решение, в котором на первом

интервале маневрирования прикладывается один импульс скорости. Неизвестные величины трансверсальных составляющих импульсов скорости и угол приложения импульса скорости первого интервала маневрирования легко находятся из первых трех уравнений (4.1) и (4.20). Если при найденных параметрах маневра четвертое уравнение системы (4.1) не выполнено с заданной точностью, то проводится следующая итерация. На второй и последующих итерациях вместо (4.20) используется четвертое уравнение системы (4.1), в которое подставлено значение угла приложения импульса скорости первого интервала маневрирования, вычисленное на предыдущей итерации

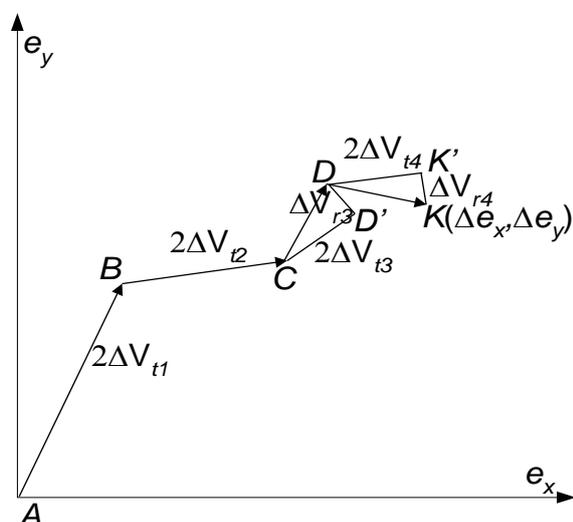


Рисунок 4.11. Геометрическая интерпретация маневров дальнего наведения

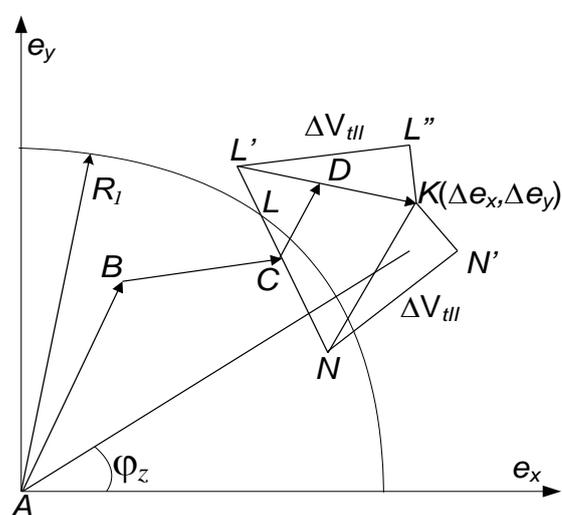


Рисунок 4.12. Вектору эксцентриситета орбиты ожидания соответствует отрезок LN

Аналогичным образом определяются параметры маневра, которому соответствует точка N . Это также трехимпульсный маневр, так как на втором интервале маневрирования только первый импульс скорости отличен от нуля. В задаче пять неизвестных: оба угла приложения импульсов скорости первого интервала и величины трансверсальных составляющих трёх импульсов скорости, следовательно, можно зафиксировать угол приложения одного из импульсов, а затем воспользоваться указанной итерационной процедурой.

Покажем, что когда положение отрезка LN известно, то можно определить углы приложения импульсов скорости φ_1 и φ_2 , при которых функционал F близок к своему минимальному значению.

Анализируя изменение входящей в функционал F суммы Q_1+Q_2 , можно показать, что ее минимум достигается, если угол приложения хотя бы одного из импульсов скорости первого интервала маневрирования лежит в малой окрестности линии узлов, $\varphi_i \in G = O_\varepsilon(\varphi_z)$, где $\varphi_z = \arctg \frac{\Delta z}{\Delta V_z} - \pi k (k = 1, 2, \dots)$. В этом случае затраты СХС на поворот плоскости орбиты близки к минимально возможным:

$$\Delta i = \Delta V_{zm} = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta V_z^2} \quad (4.22)$$

Будем предполагать, что углы множества G принадлежат одному из интервалов Φ_1 или Φ_2 . Это допустимо, т.к. длина каждого из разрешенных интервалов маневрирования превосходит полвитка.

Определим теперь, каким должен быть второй из углов приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования, чтобы суммарная характеристическая скорость $\Delta V_I = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\Delta V_{ii}^2 + \Delta V_{zi}^2}$ была минимальна при условии, что угол приложения одного из импульсов скорости принадлежит множеству G .

На рис. 4.13 i -й импульс скорости изображается отрезком, проекции которого на оси ΔV_t и ΔV_z равны $|\Delta V_{ti}|$ и $|\Delta V_{zi}|$ соответственно. Очевидно, что $\Delta V_I = \sqrt{\Delta V_{t1}^2 + \Delta V_{z1}^2} + \sqrt{\Delta V_{t2}^2 + \Delta V_{z2}^2}$ соответствует длине ломаной APM . Из (4.20), (4.22) следует, что минимально возможное значение ΔV_I равно $\Delta V_{Imm} = \sqrt{\Delta V_{t1}^2 + \Delta V_{z1}^2}$. Оно достигается, если $\frac{\Delta V_{z1}}{\Delta V_{t1}} = -\frac{\Delta V_{z2}}{\Delta V_{t2}}$, а $|\Delta V_{z1}| + |\Delta V_{z2}| = \Delta V_{zm}$ (на рис. 4.13 такому решению соответствует отрезок AE). Так подобрать величины ΔV_{z1} и ΔV_{z2} удастся лишь, когда углы приложения первых двух импульсов

принадлежат множеству G (местом приложения импульсов скорости является линия пересечения плоскостей орбит). Это четвертый тип оптимальных решений, рассмотренных во второй главе, когда годограф базис-вектора вырождается в отрезок. Решение этого типа существует, если на плоскости e_x, e_y прямая, проходящая через начало координат под углом φ_z к оси абсцисс, пересекает отрезок LN . Если прямая не пересекает отрезок LN , то изменение плоскости орбиты производится тем из импульсов скорости, угол приложения которого принадлежит множеству G (прикладывается на линии пересечения плоскостей орбит). Величина боковой составляющей этого импульса скорости равна ΔV_{zm} . Для решений такого типа ΔV_1 минимальна тогда, когда максимальна трансверсальная составляющая импульса скорости, изменяющего ориентацию плоскости орбиты. Например, если плоскость поворачивается вторым импульсом скорости, то $ADE < AD'E$ при $DM' > D'M'$ (рис. 4.13).

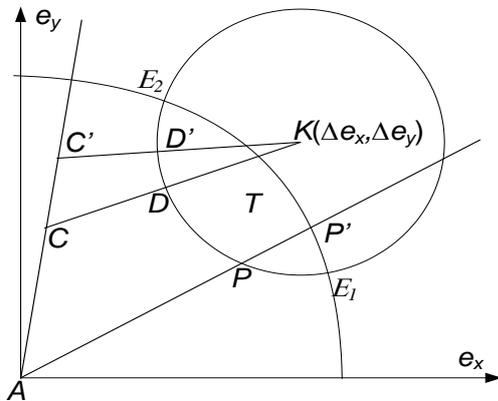


Рисунок 4.13. Сравнение суммарной характеристической скорости решений

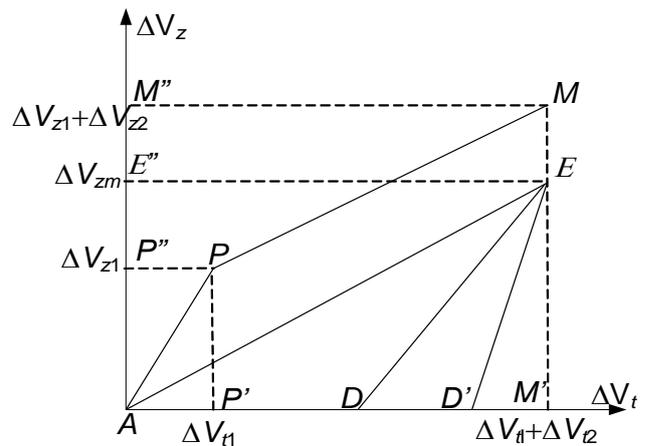


Рисунок 4.14. Углы приложения третьего и четвертого импульсов не фиксированы

Легко видеть, что для того чтобы трансверсальная составляющая импульса скорости, поворачивающего плоскость орбиты, была максимальна, необходимо, чтобы на плоскости e_x, e_y отрезок, соответствующий другому импульсу скорости первого интервала маневрирования, был перпендикулярен LN . Угол приложения

этого импульса должен принадлежать множеству $\varphi_n = \varphi^* - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ ($n=1,2, \dots$),

где $\varphi^* = \arctg \frac{e_{yN} - e_{yL}}{e_{xN} - e_{xL}}$; $e_{xL}, e_{yL}, e_{xN}, e_{yN}$ – координаты точек L и N соответственно.

Если знаки трансверсальных составляющих не совпадают или угол φ_n не принадлежит разрешенным интервалам маневрирования (4.16), то оптимальным будет решение, переходной орбите которого соответствует один из концов отрезка LN . При определении границ отрезка LN учитывается, что углы приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования принадлежат заданным множествам (4.16).

Суммарная характеристическая скорость найденного решения ΔV_{Σ} определялась при ограничении (4.19) и условии, что угол приложения одного из импульсов скорости первого интервала маневрирования принадлежит множеству G , поэтому ее необходимо сравнить с ΔV_m – минимально возможной суммарной характеристической скоростью перехода в заданную точку встречи. Если их разность меньше ΔF – допустимой точности определения минимума функционала F , то задача считается решенной.

Чтобы найти ΔV_m , требуется определить суммарную характеристическую скорость маневра, орбите ожидания которого соответствует фиксированная точка отрезка LN , затем, варьируя положение этой точки на отрезке LN , определяется само значение ΔV_m .

Прямая, проходящая через точки L и N , задаётся уравнением $e_y = d + be_x$,

$$\text{где} \quad d = (e_{yL} - e_{yN}) \frac{e_{yN} - e_{yL}}{e_{xN} - e_{xL}}, \quad b = \frac{e_{yN} - e_{yL}}{e_{xN} - e_{xL}}.$$

Для этой прямой зависимость ΔV_{Im} минимальной характеристической скорости импульсов первого интервала маневрирования от e_x имеет вид:

$$\Delta V_{Im}(e_x) = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\Delta V_{zm}^2 + E^2 - \Delta V_{il}^2 + \sqrt{(\Delta V_{zm}^2 - E^2 + \Delta V_{il}^2)^2 + 4(\Delta V_z(d + be_x) - \Delta ze_x)^2}},}$$

где $E^2=(d+be_x)^2+e_x^2$.

Здесь было использовано выражение для суммарной характеристической скорости переходов со свободным временем между близкими почти круговыми некомпланарными орбитами, приведенное в разделе 2.2 (невырожденный случай).

Зависимость СХС импульсов скорости второго интервала маневрирования ΔV_{II} от e_x имеет вид:

$$\Delta V_{II}(e_x)=\Delta V_{III}+(\Delta V_{IIN}-\Delta V_{IIL})\frac{e_x-e_{xL}}{e_{xN}-e_{xL}},$$

где $\Delta V_{IIL}=\Delta V_{II}(1+(\frac{a_{r3}}{a_{t3}})^2)^{1/2}$, $\Delta V_{IIN}=\Delta V_{II}(1+(\frac{a_{r4}}{a_{t4}})^2)^{1/2}$.

Минимизируя суммарную характеристическую скорость четырехимпульсного маневра $\Delta V=\Delta V_{Im}(e_x)+\Delta V_{II}(e_x)$ на отрезке $[e_{xL},e_{xN}]$, можно определить величину ΔV_m . Если $\Delta V_{\Sigma}-\Delta V_m\leq\Delta F$, задача считается решенной. В противном случае найденное решение используется в качестве начальной точки для минимизации функционала F методом деформируемого многогранника [98] или численными методами, изложенными в следующей главе.

Алгоритм применим и в случаях, когда величина импульсов скорости ограничена снизу, или когда требуется, чтобы импульсы скорости второго интервала маневрирования были примерно равны по величине и т.д.

Рассмотрим, например, как изменяется алгоритм, когда углы приложения импульсов скорости второго интервала маневрирования не фиксированы. В этом случае их можно варьировать, чтобы уменьшить величину функционала F . Как было показано в третьей главе, решения с совпадающими знаками трансверсальных составляющих всех импульсов скорости существуют, если пересекаются окружности радиусов R_1 и R_2 (рис. 4.14). Точки, соответствующие параметрам орбит ожидания таких решений, должны принадлежать множеству T

точек пересечения кругов. Среди этих точек надо найти такую, чтобы ΔV_1 была минимальной.

Если прямая, проведенная под углом φ_z к оси e_x , пересекает дугу E_1E_2 (например, прямая AP' на рисунке 4.14), то, как и при фиксированных углах φ_3, φ_4 , для любой точки отрезка PP' выбором соответствующего отношения величин ΔV_{z1} и ΔV_{z2} можно добиться, чтобы ΔV_1 достигала своего минимально возможного значения ΔV_{Imm} . Угол приложения третьего импульса скорости выбирается произвольно, а угол приложения четвертого импульса с ним однозначно связан и легко определяется.

Если прямая, проходящая под углом φ_z , не пересекает дугу E_1E_2 (например, прямая AC' на рисунке 4.14), то на ней надо найти такую точку C , чтобы AC была максимальной при условии, что $AC+CD=\Delta V_1$. Легко видеть, что для того, чтобы AC была максимальной, необходимо чтобы точка D принадлежала отрезку CK (рис. 4.14).

У оптимального допустимого перехода $ACDK$ на втором интервале маневрирования прикладывается один импульс скорости, угол приложения которого определяется по формуле:

$$\varphi_3 = 2 \arctg \frac{\Delta a \cos \frac{\varphi_z}{2} - \Delta e \cos(\arctg(\frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}) - \frac{\varphi_z}{2})}{-\Delta a \sin \frac{\varphi_z}{2} + \Delta e \sin(\arctg(\frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}) - \frac{\varphi_z}{2})} - 2\pi n \quad (n=1,2,\dots),$$

где $\Delta e = \sqrt{\Delta e_x^2 + \Delta e_y^2}$.

Примеры расчетов. Для примера рассмотрим решение трех задач [99]. У решения задачи 1 углы приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования принадлежат множеству G и связаны соотношением $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ (оптимальное положение точки C на отрезке LN – точка его пересечения прямой, проведенной под углом φ_z). При решении задачи 2 учитывалось дополнительное

ограничение: величины импульсов скорости второго интервала маневрирования должны быть примерно равными (точка C находится в середине отрезка LN). Начальные условия для задачи 2 практически совпадают с начальными условиями для задачи 1. У решения задачи 3 только один из углов приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования принадлежит множеству G (оптимальную точку на отрезке LN необходимо найти).

Исходные данные и результаты решения задач приведены в таблицах 4.4-4.8.

В таблице 4.4 приведены отклонения начальной орбиты от заданной. Безразмерные отклонения для наглядности умножены на $V_0=7771$ м/с, которая соответствует $r_0=6600$ км. В таблице 4.5 приведены разрешенные для приложения первых двух импульсов скорости интервалы маневрирования (в радианах, отсчитываются от точки встречи). Углы приложения третьего и четвертого импульсов скорости фиксированы: $\varphi_3=-360^\circ$, $\varphi_4=-180^\circ$. В таблице 4.6 приведены значения функционала F и суммарной характеристической скорости ΔV . Для контроля точности решения приведены значения глобального минимума функционала F_p , полученные при помощи численного алгоритма, использующего перебор точек пространства φ_1, φ_2 , этот алгоритм описан в главе V.

В таблице 4.7 приведены параметры решений каждой из задач. В таблице 4.8 для задачи 3 приведены результаты решений для всех анализируемых точек пространства φ_1, φ_2 .

Таблица 4.4

№ задачи	Δe_y	Δe_x	Δa	Δt	Δz	ΔV_z
1	-23.77	-22.88	108.83	-10005.87	-12.23	0.36
2	-23.75	-21.56	108.82	-10003.41	-12,19	0.31
3	-23.96	-22.41	109.06	-10004.56	-12.05	0.40

Таблица 4.5

№ задачи	Φ_1		Φ_2	
	φ_{11} , рад	φ_{12} , рад	φ_{21} , рад	φ_{22} , рад
1	-85.217	-79.959	-85.217	-79.959
2	-85.217	-79.959	-85.217	-79.959
3	-77.79	-73.449	-77.79	-73.449

Таблица 4.6

№ задачи	F	ΔV	F_p
1	75.63	57.35	75.68
2	78.24	60.10	75.71
3	74.39	57.72	74.04

Таблица 4.7

№ задачи	$-\varphi_1$	ΔV_{r1}	ΔV_{t1}	ΔV_{z1}	$-\varphi_2$	ΔV_{r2}
1	83.282	0.23	28.36	-8.28	80.140	0.10
2	83.736	0.33	26.38	0	80.136	0.09
3	77.002	0.25	27.80	-12.06	73.449	0.19

Таблица 4.7 Окончание

№ задачи	ΔV_{t2}	ΔV_{z2}	ΔV_{r3}	ΔV_{t3}	ΔV_{r4}	ΔV_{t4}
1	12.95	3.95	0	1.47	5.46	12.87
2	12.06	12.19	0	7.75	2.97	7.01
3	15.98	0	0	2.82	3.37	7.94

Таблица 4.8

№ Реш.	F	ΔV	$-\varphi_1$	$-\varphi_2$	ΔV_1	ΔV_2	ΔV_3	ΔV_4
1	77.18	59.95	77.774	73.861	31.97	16.27	11.22	0.54
2	76.21	59.64	77.062	73.861	28.62	19.33	0.54	11.16
3	76.20	59.63	77.070	73.861	28.61	19.33	0.64	11.05
4	74.53	57.86	77.002	73.743	31.00	15.22	0.53	11.11
5	74.39	57.72	77.002	73.449	30.30	15.99	2.82	8.62

Рассмотрим результаты решения каждой из задач. У решения задачи 1 углы приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования принадлежат множеству G , а трансверсальные составляющие всех импульсов скорости положительны. В этом случае найденное решение является глобально оптимальным, что подтверждает проверка (см. последний столбец таблицы 4.6). Небольшое отличие в пользу аналитического решения объясняется тем, что при численном решении практически невозможно точно попасть на углы из множества G .

Иногда при решении задачи требуется, чтобы величины импульсов скорости последнего интервала маневрирования были примерно равными. Предложенный алгоритм позволяет получать такое решение. Для этого надо воспользоваться итерационной процедурой аналогичной процедуре, приведенной в предыдущей главе.

При решении задачи 2 коэффициент $\tilde{k} = \Delta V_{t4} / (\Delta V_{t3} - \Delta V_{t4})$, определяющий положение точки C на отрезке LN , был выбран равным 0.5. Для того, чтобы величины третьего и четвертого импульсов полностью совпадали, следовало взять $\tilde{k} = 0.4769$. При решении задачи один из углов приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования выбирается на линии узлов, а другой угол определяется при помощи итерационной процедуры. Среди всех углов множества

G допустимым является только один, когда плоскость орбиты меняется вторым импульсом скорости.

Из таблицы 4.7 видно, что отношение боковой составляющей второго импульса скорости к его величине в решении задачи 2 существенно превосходит аналогичные отношения в решении задачи 1. Вследствие этого увеличивается суммарная характеристическая скорость перехода, и, следовательно, величина функционала F для задачи 2. Этот вывод подтверждает результаты, приведенные в таблице 4.7.

В задаче 3 у решения с углами приложения первых двух импульсов скорости из множества G , знаки у трансверсальных составляющих импульсов скорости не совпадают. В соответствии с приведенным алгоритмом принимается, что множеству G принадлежит только один из углов, а угол приложения другого импульса скорости первого интервала маневрирования необходимо определить.

Для исполнения второго импульса скорости подходит только одна точка множества G ($\varphi_2 = -73.861$). С помощью итерационной процедуры определяется такой угол приложения первого импульса скорости, чтобы параметрам орбиты ожидания соответствовала точка N . Так как учитывается ограничение на минимально возможную величину импульса скорости, то ΔV_{t4} приравнивается ее минимально возможному значению 0.5 м/с. Параметры решения приведены в первой строке таблицы 4.8. Во второй строке таблицы приведены параметры решения, вектору эксцентриситета орбиты ожидания которого соответствует точка L . После того как определено положение отрезка LN , находится оптимальное решение (третья строка таблицы 4.8), у которого на плоскости e_x, e_y отрезок, соответствующий первому импульсу скорости, перпендикулярен отрезку LN .

Для приложения первого импульса скорости тоже подходит только одна точка множества G ($\varphi_1 = -77.002$). Решение, соответствующее точке L , существует, его параметры приведены в четвертой строке таблицы 4. Решение, вектору эксцентриситета орбиты ожидания которого соответствует точка N' ($V_{t4} = 0.5$ м/с), и решение, у которого направление второго импульса скорости на плоскости e_x, e_y

перпендикулярно отрезку LN' , не являются допустимыми, так как используемые в них углы из множества G , не принадлежат разрешенному интервалу маневрирования. Первым допустимым углом будет угол $\varphi_2 = -73.449$. Это решение приведено в пятой строке таблицы 4.8. Как было показано, в этом случае найденное решение является оптимальным среди решений, у которых угол приложения первого импульса скорости принадлежит множеству G . Сравнение его с третьим решением из таблицы 4.8 показывает, что оно является и глобально оптимальным, поэтому его параметры и приведены в таблицах 4.6, 4.7.

Время решения задач существенно меньше, чем в численных алгоритмах, приведенных в [21], [22], [23]. Если углы приложения третьего и четвертого импульсов скорости не фиксированы, то время решения задачи в приведенном алгоритме не меняется, а в численных алгоритмах оно увеличивается на порядки.

Напомним, что для наглядности во всех таблицах безразмерные величины приведены умноженными на $V_0 = 7771$ м/с ($r_0 = 6600$ км).

4.5. Сравнение различных типов решений (NASA, ЦУП, комбинированное)

Часто для решения задачи встречи на некомпланарных орбитах предлагается использовать довольно простую схему маневрирования. Двумя импульсами скорости первого интервала маневрирования формируется круговая орбита, период которой обеспечивает необходимое время прилета к началу второго интервала, затем импульсами второго интервала обеспечивается выход в точку встречи на заданной орбите. На одном из этих интервалов или на промежуточной витке на линии пересечения плоскостей орбит прикладывается боковой импульс скорости, совмещающий плоскости орбит. Такая схема маневрирования (будем называть её «раздельная») привлекательна своей простотой, но требует излишних затрат суммарной характеристической скорости. При применении такой схемы даже маневры в плоскости орбиты могут быть не оптимальными. Данная схема применялась NASA, например, для стыковки Shuttle с МКС [16], [17].

На рисунке 4.15 приведен пример, когда использование круговой орбиты ожидания не увеличивает затрат суммарной характеристической скорости. Для этого необходимо, чтобы точка с координатами $(0,0)$ попала в область G , пересечения кругов, имеющих радиусы R_1 и R_2 (напомним, что $R_1=|\Delta a_I|$, $R_2=|\Delta a_{II}|$). Встреча будет осуществляться с помощью четырёх импульсов, которым соответствуют отрезки AB, BC, CD, DK . Однако если требуется незначительное изменение большого по величине вектора эксцентриситета (такой случай изображен на рисунке 4.16), то перелет с круговой орбитой ожидания может быть не оптимальным.

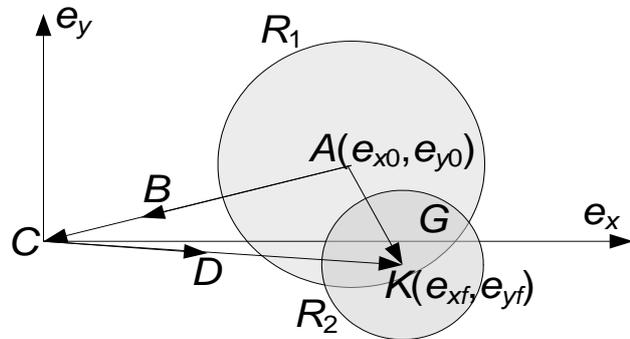
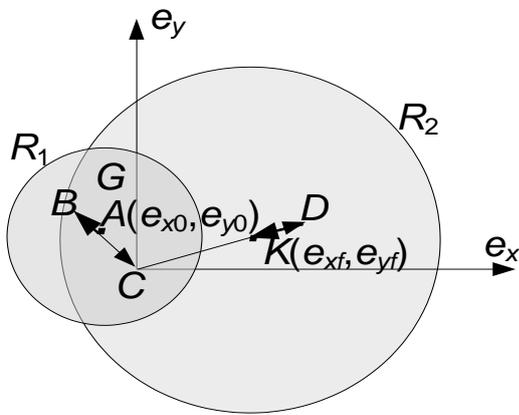


Рисунок 4.15. Сравнение суммарной характеристической скорости решений третьего и четвертого импульсов не фиксированы

Легко видеть, что длина ломаной $ABCDK$ (рис. 4.16), соответствующей затратам СХС «раздельной» схемы маневрирования, будет значительно больше суммы радиусов R_1 и R_2 , которая соответствует затратам СХС оптимального перелета между компланарными орбитами.

Сравнить полные затраты СХС с учетом затрат на изменение ориентации плоскости орбиты позволяет рисунок 4.17. Предположим, что мы имеем дело со случаем, изображенным на рисунке 4.15 и «раздельная» схема маневрирования имеет такие же затраты на компланарную встречу, что и у оптимального решения.

Сумма трансверсальных составляющих импульсов скорости первого интервала маневрирования равна $\Delta V_{т1}$, ей соответствует отрезок AD (рис. 4.17). Сумма трансверсальных составляющих импульсов скорости второго интервала маневрирования равна $\Delta V_{т2}$, ей соответствует отрезок DN . Минимальные затраты на поворот плоскости орбиты ΔV_{zm} , им соответствует отрезок AL . Импульс скорости, изменяющий плоскость орбиты, располагается между вторым и третьим маневрами в плоскости орбиты. Таким образом, «раздельной» схеме маневрирования соответствует ломаная $ADPE$. Схеме маневрирования, используемой российским центром управления полетом (ЦУП) при управлении движением «Союзов» и «Прогрессов», в которой импульсы скорости первого интервала маневрирования имеют и трансверсальные, и боковые составляющие, а импульсы второго интервала только трансверсальные составляющие, соответствует ломаная APE (рис. 4.17). Если прямая, проведенная под углом φ_z , пересекает отрезок LN (рис. 4.12), то т. P принадлежит отрезку LE (рис. 4.17).

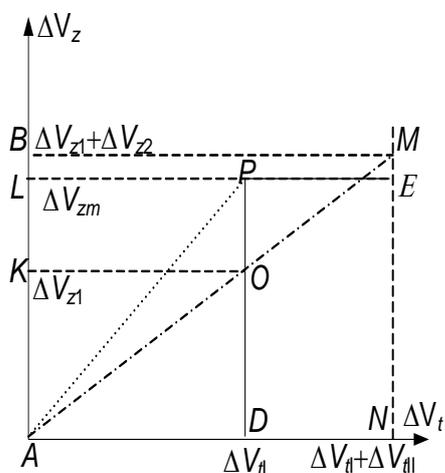


Рисунок 4.17. Сравнение суммарной характеристической скорости решений

Оптимальному решению, у которого коррекция положения плоскости орбиты производится всеми четырьмя импульсами скорости, имеющими как трансверсальные, так и боковые составляющие, соответствует отрезок AM , импульсам скорости первого интервала соответствует отрезок AO , импульсам второго - OM .

Очевидно, что длина ломаной $ADPE$ больше длины ломаной APE , в свою очередь длина ломаной APE больше длины отрезка AM . При уменьшении затрат на поворот плоскости орбиты (при уменьшении длины отрезка DP) разница в затратах суммарной характеристической скорости всех трех типов решений уменьшается. Время старта обычно выбирается таким образом, чтобы в момент вывода на орбиту активный КА оказался в плоскости орбиты пассивного КА. Это приводит к тому, что затраты СХС на изменение ориентации плоскости орбиты значительно меньше затрат на изменение, например, большой полуоси орбиты. В этих случаях все три типа решений имеют близкую суммарную характеристическую скорость. Как будет показано ниже, в более сложных задачах суммарная характеристическая скорость решений может отличаться очень существенно.

ГЛАВА V. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Задача расчета оптимальных параметров маневров, обеспечивающих встречу КА на близких околокруговых орбитах, с помощью описанной в первой главе итерационной процедуры сводится к задаче математического программирования.

Для решения этой задачи можно воспользоваться как приведенными в предыдущих главах аналитическими методами, так и разнообразными численными методами. Однако, в силу большой размерности задачи и ограничений различного вида попытки прямого использования численных методов приводят к очень большим затратам машинного времени. Поэтому при использовании численных методов желательно учитывать особенности рассматриваемых задач, что позволит ускорить процесс минимизации.

В этой главе приводится численный метод [22,99,100,101], который в течение многих лет успешно использовался в баллистическом центре ИПМ им. М.В. Келдыша РАН для расчета маневров КА «Союз», «Прогресс», модулей «Квант», «Природа» и т.д. [69]. Несмотря на свою относительную простоту метод достаточно универсален, обладает необходимым быстродействием, а главное обеспечивает высокую надёжность получения решения задачи.

5.1. Постановка задачи, общий метод решения

Если учесть влияние второго члена разложения в ряд гравитационного поля планеты (c_{20}), то система (1.12) примет вид [22]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \{ \Delta V_{ri} \sin[(1-\gamma)\varphi_i] + 2\Delta V_{ii} \cos[(1-\gamma)\varphi_i] \} &= \Delta e_x, \\ \sum_{i=1}^N \{ -\Delta V_{ri} \cos[(1-\gamma)\varphi_i] + 2\Delta V_{ii} \sin[(1-\gamma)\varphi_i] \} &= \Delta e_y, \\ \sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ii} &= \Delta a, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^N \{2\Delta V_{ri} [1 - \cos((1-\gamma)\varphi_i)] + \Delta V_{ri} [-3(1-\gamma)\varphi_i + 4\sin((1-\gamma)\varphi_i)]\} = \Delta t,$$

$$\sum_{i=1}^N (-2\beta\Delta V_{ii}\varphi_i \cos u_i \sin 2i_0 - \Delta V_{zi} \sin \varphi_i) = \Delta z,$$

$$\sum_{i=1}^N (2\beta\Delta V_{ii}\varphi_i \sin u_i \sin 2i_0 + \Delta V_{zi} \cos \varphi_i) = \Delta V_z,$$

где $\beta = -c_{20} \frac{3r_e^2}{2r_0^2}$, $\gamma = \frac{\beta}{2}(5\cos^2 i_0 - 1)$, $c_{20} = -1082,637 \cdot 10^{-6}$, $r_e = 6378140$ м, i_0, r_0 -

наклонение и радиус опорной орбиты, u_i - аргументы широты точек приложения импульсов скорости.

Заметим, что, если продолжительность встречи не велика (не превышает нескольких дней), то достаточно пользоваться более простой системой (4.1).

Углы приложения импульсов скорости должны принадлежать заданным множествам

$$\varphi_i \in F_1, \dots, \varphi_N \in F_n \quad (5.2)$$

Множества F_i могут быть меньше витка и/или состоять из нескольких отдельных интервалов, как это было у первых КА «Прогресс». Ограничения на моменты приложения импульсов скорости связаны с зонами видимости с Земли, конструктивными особенностями аппаратов и т.д. Иногда углы приложения импульсов скорости фиксируются, например, при расчете четырех- и трехимпульсных маневров КА «Союз» и «Прогресс» предполагалось, что углы приложения третьего и четвертого импульсов скорости фиксированы за виток и полвитка до точки встречи.

Задача поиска параметров оптимальных маневров формулируется следующим образом: надо определить $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ii}, \Delta V_{zi}$ φ_i ($i=1, \dots, N$) при которых минимален функционал

$$W = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2} + \sum_{i=1}^N Q_i$$

при ограничениях (5.1),(5.2).

Функционал задачи может включать вместе с суммарной характеристической скоростью ΔV слагаемые Q_i , учитывающие особенности задачи, но желательно, чтобы Q_i были выпуклыми функциями от составляющих импульсов скорости, как и ΔV . Например, как уже было сказано в главе IV, для КА «Союз» и «Прогресс» функционал имел вид [22]:

$$W = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2} + \sum_{i=1}^N k_i \sqrt{(a_{ri}\Delta V_{ti} - a_{ti}\Delta V_{ri})^2 + (a_{ri}^2 + a_{ti}^2)\Delta V_{zi}^2}.$$

Здесь $a_{ri}=2-2\cos\varphi_i$, $a_{ti}=-3+4\sin\varphi_i$, $k_i=k_i*\delta\psi$ ($k_i^*>0$) - заданные коэффициенты, $\delta\psi$ - принятая максимальная ошибка ориентации импульсов скорости.

В отличие от пространства составляющих импульсов скорости, в пространстве углов приложения импульсов скорости функционал W имеет локальные минимумы. К тому же множества F_i могут быть достаточно сложными. Вследствие этого процесс минимизации обычно проводится в два этапа [22]: при каждом фиксированном $\boldsymbol{\varphi}^T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ вычисляется минимум функционала

$$W_m(\boldsymbol{\varphi}) = \min_{\Delta V} W(\boldsymbol{\varphi}, \Delta V) \quad (5.3)$$

по переменным $\Delta V^T = \{\Delta V_{r1}, \Delta V_{t1}, \Delta V_{z1}, \dots, \Delta V_{rN}, \Delta V_{tN}, \Delta V_{zN}\}$ при ограничениях (5.1). На втором этапе перебором точек из допустимого для приложения импульсов скорости множества $F = F_1 * F_2 * \dots * F_N$, находится глобальный минимум функционала $W_m(\boldsymbol{\varphi})$ по переменным $\boldsymbol{\varphi}^T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$.

Необходимо обратить внимание, что этапы проводятся не последовательно, а попеременно. Берется точка из множества F , для неё минимизацией в пространстве составляющих импульсов скорости вычисляется W_m , берется новая точка из множества F , вычисляется соответствующее ей значение W_m и т.д., пока

не будет найдено решение оптимальное как в пространстве составляющих импульсов скорости, так и в пространстве углов приложения импульсов скорости.

В двух следующих параграфах будет подробно рассмотрен каждый из этих этапов решения задачи.

Найденное решение используется в описанной в первой главе итерационной процедуре, обеспечивающей выполнение терминальных условий с заданной точностью с учетом влияния атмосферы, заданного числа гармоник гравитационного поля, продолжительной работы ДУ и т.д.

5.2. Минимизация в пространстве составляющих импульсов скорости

Эту минимизацию можно проводить различными методами, но лучше всего её вообще избежать. Для этого число используемых составляющих импульсов скорости должно быть равно числу учитываемых ограничений системы (5.1). Предположим необходимо учитывать все шесть уравнений системы, значит, будут использоваться шесть составляющих импульсов скорости: четыре плоских и две боковых. Для двухимпульсной задачи все ясно, т.к. необходимо использовать все шесть имеющихся составляющих импульсов. Для трех- и четырехимпульсных задач необходимо отказаться от использования некоторых из составляющих импульсов скорости. Как было показано в третьей главе, для четырехимпульсной задачи целесообразно отказаться от использования радиальных составляющих импульсов скорости. Тогда величины трансверсальных составляющих импульсов скорости однозначно определяются из системы (5.1). У трехимпульсной задачи можно отказаться от использования радиальных составляющих тех двух импульсов скорости, которые прикладываются на одном интервале маневрирования. Тогда трансверсальные составляющие импульсов скорости и радиальная составляющая импульса скорости, который один прикладывается на своем интервале маневрирования, также однозначно определяются из системы (5.1). Необходимо помнить, что круг, соответствующий трансверсальным составляющим двух импульсов скорости,

исполняемых на одном интервале маневрирования (см. раздел 3.3), не должен находиться внутри окружности, соответствующей трансверсальной составляющей импульса скорости единственного на своем интервале. Если же это происходит, то необходимо изменить распределение числа импульсов между интервалами.

Если использовать приведенный прием сокращения числа используемых составляющих, то возможен небольшой проигрыш в суммарной характеристической скорости ΔV , за счет отсутствия некоторых радиальных составляющих, но он вполне компенсируется простотой и надежностью получаемого решения.

Сложнее с боковыми составляющими, поскольку не ясно у каких импульсов скорости их лучше использовать. Можно порекомендовать, в трех импульсной задаче использовать боковые составляющие тех импульсов скорости, для которых было принято решение не использовать радиальные составляющие. Для четырехимпульсной задачи можно порекомендовать использовать боковые составляющие импульсов скорости, исполняемых на первом интервале маневрирования. Тогда на втором интервале маневрирования перед стыковкой будет решаться более простая задача практически без боковых составляющих. Если стремимся уменьшить суммарную характеристическую скорость, то боковые составляющие импульсов скорости надо использовать на том интервале, на котором больше сумма трансверсальных составляющих. При большой продолжительности встречи и при больших отклонениях долготы восходящего узла (Ω) лучше использовать боковые составляющие импульсов скорости обоих интервалов маневрирования. Существует и ещё одна простая возможность выбора оптимальных боковых составляющих импульсов скорости, о которой будет рассказано ниже.

Если необходимо найти оптимальное решение, то минимизации в пространстве составляющих импульсов скорости не избежать. Чтобы её упростить, при поиске $W_m(\varphi)$ линейные ограничения (5.1) используются для перехода к безусловной минимизации в пространстве меньшей размерности. В

этом случае размерность пространства минимизации сократится на число учтенных ограничений в виде равенств.

Важным является вопрос, какие из составляющих импульсов скорости выбрать в качестве независимых переменных. Для составляющих импульсов скорости, лежащих в плоскости орбиты, это очевидно. Трансверсальные составляющие вносят основной вклад в изменение элементов орбиты, их величины существенно меняются при изменении углов приложения импульсов скорости, в то время как величины радиальных составляющих всегда остаются близкими к нулю. Таким образом, в качестве независимых переменных лучше брать радиальные составляющие, а в качестве начальной точки процесса минимизации использовать их нулевые значения. Это позволит существенно сократить число шагов минимизации, необходимых для нахождения минимума.

Сложнее с боковыми составляющими импульсов скорости, поскольку трудно заранее выделить те из них, которые будут вносить небольшой вклад в процесс минимизации и, следовательно, могут быть использованы как независимые переменные. Однако, если имеется возможность изменять назначение независимых боковых составляющих импульсов скорости от одного набора углов приложения импульсов скорости к другому, то возможность выделения менее эффективных составляющих существует.

При большой продолжительности встречи наиболее эффективны те боковые составляющие, углы приложения импульсов скорости которых ближе к экватору, т.к. изменение наклона оказывает вековое влияние на изменение ДВУ. Следовательно, в качестве независимых лучше использовать те составляющие импульсов скорости, углы приложения которых дальше от экватора.

При относительно небольшой продолжительности встречи (расстояние между интервалами маневрирования не превышает нескольких десятков витков) коррекция наклона не оказывает заметного влияния на ДВУ. В этом случае эффективность боковой составляющей зависит только от близости угла приложения импульса скорости к оптимальному направлению коррекции

плоскости орбиты φ_z (линии пересечения плоскостей орбит). На рис. 5.1(a) приведены направление оптимальной коррекции плоскости орбиты φ_z , величина бокового отклонения Δi (AK), которое необходимо скорректировать ($\Delta i = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta V_z^2}$), и четыре угла приложения импульсов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Если рассматривать только коррекцию бокового отклонения, то использование второй и третьей боковых составляющих (этому решению соответствует ломаная ABK) будет эффективнее, чем использование первой и четвертой составляющих, т.к. длина соответствующей этому решению ломаной ADK , больше длины ломаной ABK . Таким образом, оптимально использовать боковые составляющие импульсов скорости, углы приложения которых наиболее близки к φ_z и лежат по разные стороны от этого направления [101].

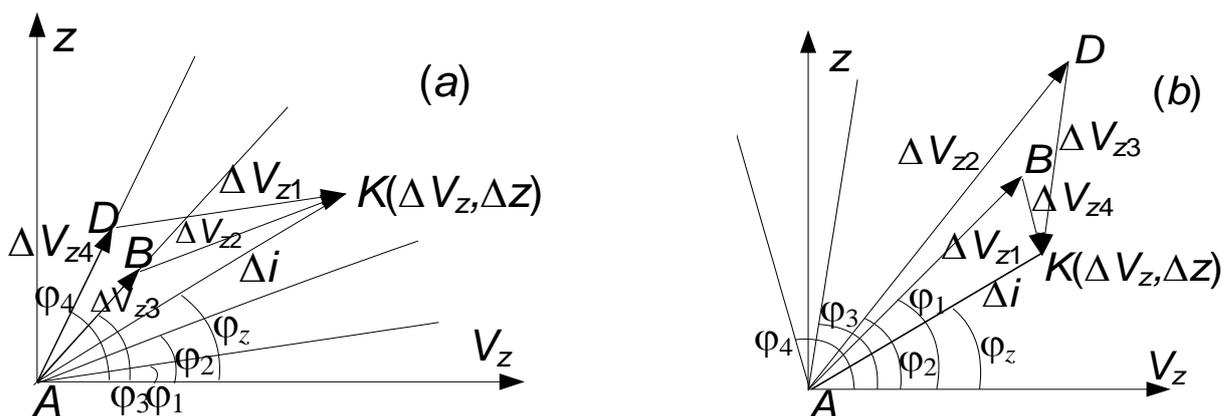


Рисунок 5.1. Двухимпульсная коррекция бокового отклонения:

- (a) импульсы скорости прикладываются с разных сторон от линии узлов;
- (б) импульсы скорости прикладываются с одной стороны от линии узлов

Если все углы приложения импульсов лежат с одной стороны от направления φ_z (рис. 5.1 (б)), то брать надо не две ближайшие, а одну ближайшую и одну самую отдаленную составляющие импульсов скорости. Этому решению соответствует ломаная ABK на рис. 5.1 (б). Решению с использованием двух других составляющих соответствует ломаная ADK , длина которой очевидно больше длины ломаной ABK . Таким образом, определены наиболее эффективные

составляющие. Остальные менее эффективны, их и следует выбрать в качестве независимых переменных при минимизации функционала W , а в качестве начальной точки процесса минимизации берутся их нулевые значения.

Используя эту же оценку эффективности боковых составляющих, можно вообще избавиться от минимизации в их пространстве, оставив две наиболее эффективные составляющие.

Полезным является еще один вывод, который следует из рассмотренных выше примеров. Для коррекции боковых отклонений эффективней использовать наборы углов приложения импульсов скорости, в которых присутствуют углы, лежащие по разные стороны от направления φ_z .

Поскольку в процессе обеспечения полетов реальных КА приходится решать задачи с различным числом импульсов скорости и с различными ограничениями, программное обеспечение должно быть достаточно универсальным.

Для обеспечения этой универсальности при минимизации в пространстве составляющих импульсов скорости применяется следующая схема вычислений

При помощи матрицы J задаётся, какие отклонения необходимо корректировать (от полного вектора отклонений Δ , который используется в системе (5.1), переходим, если требуется, к вектору меньшей размерности $\Delta_k = J\Delta$). В соответствующей шкале ставятся признаки, какие составляющие импульсов скорости, обозначим их ΔV_k , будут использоваться для решения задачи. Формируется матрица влияния A_k этих составляющих импульсов скорости на выделенные отклонения. Ограничения (5.1) принимают вид

$$A_k \Delta V_k = \Delta_k \quad (5.4)$$

Ещё в одной шкале указывается, какие из составляющих импульсов скорости являются независимыми переменными, в пространстве которых будет проводиться оптимизация, их обозначим ΔV_i , остальные составляющие будут зависимыми переменными, их обозначим ΔV_d ($\Delta V_k = \Delta V_i + \Delta V_d$).

На соответствующие части можно разбить и матрицу A_k , тогда ограничение (5.4) принимает вид

$$A_i \Delta V_i + A_d \Delta V_d = \Delta_k \quad (5.5)$$

Из системы (5.5) можно найти ΔV_d

$$\Delta V_d = A \Delta V_i + \Delta_k^* \quad (5.6)$$

где $A = -A_d^{-1} A_i$, $\Delta_k^* = A_d^{-1} \Delta_k$.

Таким образом, перешли к безусловной минимизации W в пространстве ΔV_i

$$W = W(\Delta V_i).$$

Необходимые для минимизации градиентными методами частные производные W по независимым переменным вычисляются по аналогичной схеме с использованием информации из тех же шкал. Основой служат вычисляемые по аналитическим формулам производные по всем используемым составляющим импульсов скорости.

Если требуется сделать нулевыми только часть отклонений (Δ_k), то остальные отклонения ($\Delta_p = \Delta - \Delta_k$) добавляются в минимизируемый функционал в виде штрафов

$$W = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ii}^2 + \Delta V_{zi}^2} + \sum_{i=1}^N Q_i + \sqrt{\Delta_p^t G \Delta_p},$$

здесь G - заданная матрица. Например, можно требовать точного выхода в окрестность орбитальной станции, а отклонения по скоростям не обязательно должны быть нулевыми, тогда за счет штрафов их можно уменьшить. Такая ситуация обычно возникает, когда число используемых составляющих импульсов скорости меньше числа терминальных ограничений.

Следует отметить, что в качестве метода минимизации в пространстве составляющих импульсов целесообразно использовать метод сопряженных

градиентов, эффективность которого для данного класса задач примерно на 10% выше эффективности метода наискорейшего спуска [100].

5.3. Поиск минимума в пространстве углов приложения импульсов скорости

Минимизация в пространстве углов приложения импульсов скорости (на множестве F) является более сложной из-за того, что область минимизации может состоять из нескольких отдельных областей, из-за наличия локальных минимумов и из-за того, что само значение функционала получается в результате минимизации в пространстве составляющих импульсов скорости. По этим причинам трудно применить какой-нибудь эффективный численный метод и обычно используют простой перебор точек из разрешенных интервалов, что позволяет найти глобальный минимум функционала W , но требует значительных затрат машинного времени.

Желание ускорить процесс поиска глобального минимума заставляет искать возможность сократить число точек множества F , для которых проводится вычисление W_m . Для этого можно одновременно использовать два метода. Первый – геометрический, использующий приведенные в главе III результаты, позволяет очень быстро и просто исключить заведомо не оптимальные точки. Вторым методом, основан на использовании оценки снизу величины W_m .

Для объяснения идеи первого метода [101] построим, как всегда, окружности, имеющие радиусы R_1 и R_2 (рис.5.2), соответствующие сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования. Как было показано в главах III, IV, для оптимального решения задачи многовитковой встречи точка, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания должна, принадлежать области G (области пересечения кругов, имеющих радиусы R_1 и R_2).

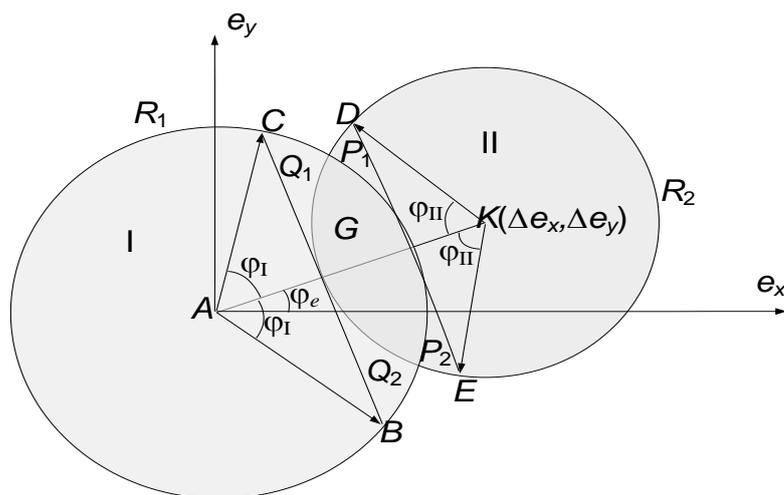


Рисунок 5.2. Области существования оптимальных решений для перелетов между непересекающимися орбитами

Таким образом, нецелесообразно использовать углы приложения импульсов скорости первого интервала маневрирования, при которых точка, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, будет принадлежать области I. Аналогично нецелесообразно использовать углы приложения импульсов скорости второго интервала маневрирования, при которых точка, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, будет принадлежать области II. Область I это полуплоскость, образованная прямой, проходящей через точки C и B (CB перпендикулярна AK) и касающейся окружности с центром в т.К. Область I не содержит область G (рис. 5.2). Область II это полуплоскость, образованная прямой, проходящей через точки D и E (DE перпендикулярна AK) и касающейся окружности с центром в т.А. Область II также не содержит область G.

Таким образом, набор точек из множеств F отсеивается, если $\varphi_e + \varphi_I < \varphi_1 < \varphi_e + 2\pi - \varphi_I$ и одновременно $\varphi_e + \varphi_I < \varphi_2 < \varphi_e + 2\pi - \varphi_I$, или когда $0 < \varphi_3 < \varphi_e + \pi - \varphi_{II}$ или $\varphi_e + \pi + \varphi_{II} < \varphi_3 < 2\pi$ и одновременно $0 < \varphi_4 < \varphi_e + \pi - \varphi_{II}$ или $\varphi_e + \pi + \varphi_{II} < \varphi_4 < 2\pi$, где

$$\varphi_I = \arccos \frac{\Delta e - R_2}{R_1}, \quad \varphi_{II} = \arccos \frac{\Delta e - R_1}{R_2}, \quad \varphi_e = \arctg \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}.$$

Напомним, что углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ отрицательные, поэтому перед проверкой этих условий их надо путем увеличения на нужную величину $2\pi k$ привести к значению из диапазона $[0, 2\pi]$.

Набор точек из пространства F также отсеивается, если углы приложения импульсов скорости первого интервала лежат выше прямой AK , а углы приложения импульсов скорости второго интервала лежат ниже прямой AK или наоборот. При таких углах приложения трансверсальных импульсов скорости точка, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, также не будет принадлежать области G .

Пример решения, которое должно быть исключено по этому критерию (вектору эксцентриситета орбиты ожидания соответствует точка C), приведен на рис. 5.3.

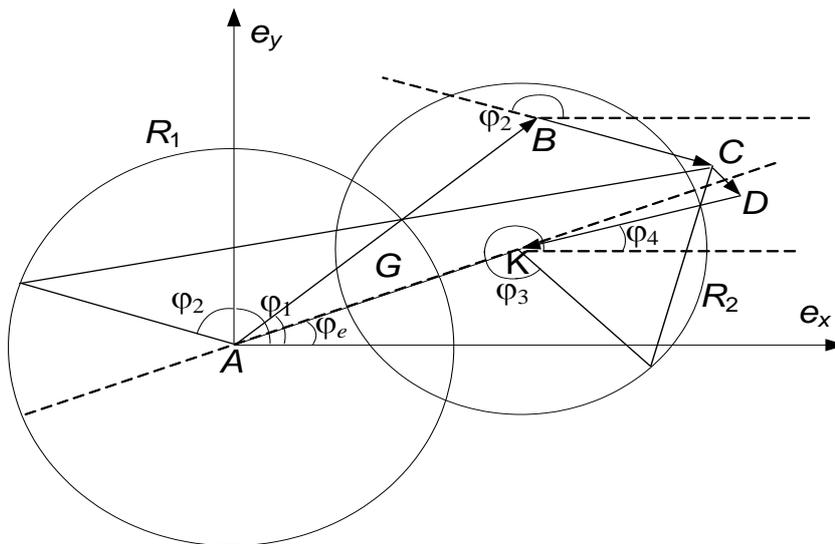


Рисунок 5.3. Пример неоптимального решения

Импульсам скорости этого решения соответствуют отрезки AB, BC, CD, DK . Углы приложения импульсов скорости первого интервала φ_1, φ_2 лежат выше прямой AK , а углы приложения импульсов скорости второго интервала φ_3, φ_4 лежат ниже прямой AK .

Таким образом, для существования оптимального решения не допустимо, чтобы одновременно было выполнено условие $\varphi_e < \varphi_1, \varphi_2 < \varphi_e + \pi$, и $\varphi_e + \pi < \varphi_3, \varphi_4 < 2\pi$ или $0 < \varphi_3, \varphi_4 < \varphi_e$ или наоборот $\varphi_e < \varphi_3, \varphi_4 < \varphi_e + \pi$, и $\varphi_e + \pi < \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$ или $0 < \varphi_1, \varphi_2 < \varphi_e$.

Можно использовать и другие геометрические построения, сокращающие ещё большее число точек множества F , для которых проводится численная оптимизация, но необходимо помнить, что алгоритм должен быть достаточно простым, чтобы давать выигрыш по времени по сравнению с вычислением W_m .

Если окружности не пересекаются, то точка, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, должна принадлежать области D (рис.5.4).

Используя алгоритм, аналогичный приведенному выше, также можно при переборе исключить, значительное число возможных точек множества F и для непересекающихся орбит.

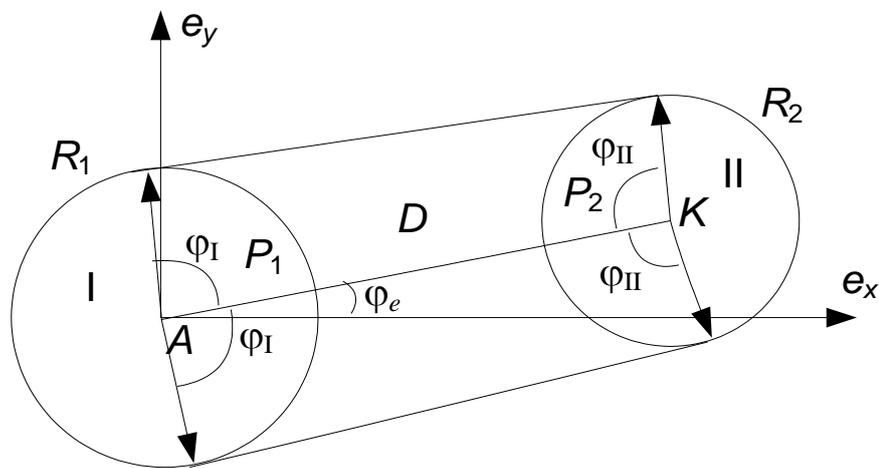


Рисунок 5.4. Области существования оптимальных решений перелетов между пересекающимися орбитами

На втором этапе происходит отсеивание точек из областей G или D , для которых решение компланарной задачи встречи оптимально, однако имеются большие затраты на коррекцию положения плоскости орбиты. Для отсеивания применяется алгоритм [23], использующий оценку снизу минимизируемого функционала W и $L\pi_\tau$ последовательность [102] для перебора точек из множества F . Аналитическая оценка снизу W_n , вычисление которой требует значительно меньше времени, чем численное определение W_m , позволяет значительно сократить общее время решения задачи. Если величина W_n больше чем

минимальное значение функционала W , найденное к этому моменту, то численный поиск минимума в пространстве составляющих импульсов скорости (определение W_m) для данного набора углов приложения импульсов скорости можно не проводить.

Поясним эту процедуру на примере, изображенном на рисунке 5.5. На этом рисунке значение функционала W_m показано сплошной линией, значение оценки снизу W_n - точечной.

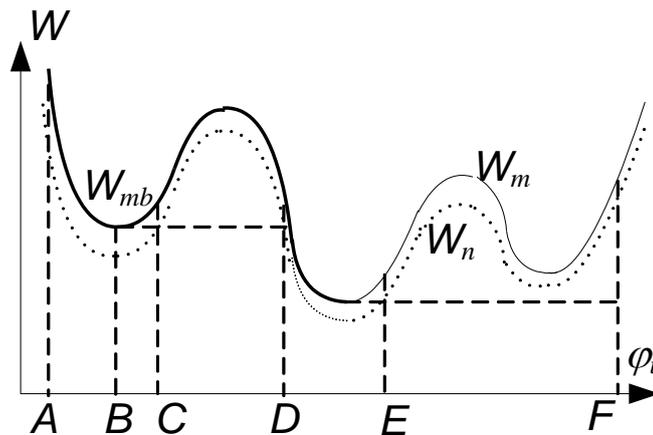


Рисунок 5.5. Использование оценки снизу минимизируемого функционала

Необходимо найти минимум функционала W_m на интервале AF . Предположим, что перебор точек интервала происходит с постоянным шагом от точки A к точке F . До точки C значение W_m будет вычисляться для всех точек. Начиная с точки C значение W_n будет больше значения W_m в точке B и все точки на интервале CD будут исключены (значение W_m для них вычисляться не будет). При дальнейшем переборе аналогичным образом будут отброшены и точки на интервале EF .

Если $\Delta a^* = |\Delta a|$ (определение Δa^* дано в первом параграфе четвертой главы), то в качестве оценки снизу для непересекающихся орбит можно использовать величину

$$W_n = \sqrt{\Delta a^2 + (|\Delta V_{zi}| + |\Delta V_{zk}|)^2}, \quad (5.7)$$

а для пересекающихся орбит величину

$$W_n = \sqrt{\Delta e^2 + (|\Delta V_{zi}| + |\Delta V_{zk}|)^2}, \quad (5.8)$$

где Δa , Δe – разность больших полуосей орбит и модуль разности их векторов эксцентриситетов, $\Delta V_{zi}, \Delta V_{zk}$ – две наиболее эффективные боковые составляющие импульсов скорости, процедура определения которых была описана выше. В противном случае в формулах используется большая из величин Δa^* или Δe .

Точки $L\pi_\tau$ последовательности были выбраны для перебора точек из множества F потому, что они позволяют наиболее эффективно использовать возможности величины W_n . Замечательным свойством $L\pi_\tau$ последовательности является то, что каждые 2^n её точек равномерно распределены в единичном кубе размерности N [102]. Множество F можно вписать в многомерный прямоугольник $L=L_1*L_2*...*L_N$, где L_i отрезок минимальной длины, содержащий множество F_i . Если мы возьмем 2^n точек $L\pi_\tau$ последовательности, то из её свойств следует, что для i -ой переменной в каждой $\frac{L_i}{2^n}$ части отрезка L_i будет находиться точка $L\pi_\tau$ последовательности. Таким образом, для каждого n точки последовательности равномерно распределены по отрезку L_i , а при росте n плотность распределения увеличивается.

То, что просмотр отрезка осуществляется не с мелким постоянным шагом, начиная с какой-то его части, а просматривается весь отрезок с каждым раз всё более уменьшающимся шагом, позволяет быстро определить районы существования локальных минимумов. Таким образом, текущее значение W_n будет сравниваться со значением функционала W близким к глобальному минимуму, и большее число точек будет исключено из рассмотрения.

Эта возможность показана на рис. 5.6. Пусть после просмотра первых четырех точек (они обозначены в том порядке, в каком их выдает $L\pi_\tau$ последовательность), равномерно распределенных на интервале AF , в четвертой точке было вычислено минимальное текущее значение функционала W_{m4} . Для

всех последующих точек текущее значение W_n будет сравниваться с W_{m4} и как минимум будут исключены все точки на интервалах AB, CD и EF .

Если в процессе последующего перебора одна из точек попадет в окрестность глобального минимума (т.М), это позволит в дальнейшем не вычислять W_m для ещё большего количества точек.

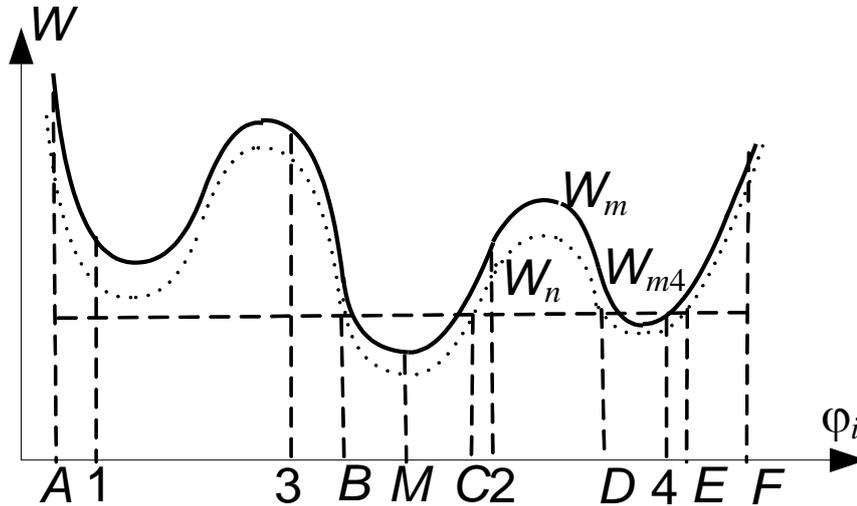


Рисунок 5.6. Использование $L\pi$ последовательности

Существует еще один способ ускорить процесс поиска минимума в пространстве углов приложения импульсов скорости. Рассмотрим задачу, когда углы приложения двух последних импульсов скорости фиксированы. Тогда первыми двумя импульсами скорости необходимо перейти на отрезок LN (рис. 5.7). Первому импульсу скорости соответствует отрезок AB , второму – BC . Изменяя угол приложения первого импульса скорости φ_1 и для каждого φ_1 , определяя угол приложения второго импульса скорости φ_2 , можно построить зависимость φ_2 от φ_1 для перелета в т. N . На рис. 5.8 данная зависимость изображена сплошной линией. Затем аналогичная зависимость строится и для перелета в т. L . На рис. 5.8 эта зависимость изображена пунктирной линией. Построенные зависимости являются границами областей G ,

Оптимальные углы приложения импульсов скорости для коррекции бокового отклонения принадлежат множеству

$$\varphi_z = \varphi_{z0} - \pi k (k = 1, 2, \dots),$$

($\varphi_{z0} = \arctg \frac{\Delta z}{\Delta V_z}$ - угол, который линия пересечения плоскостей орбит составляет

с осью x), этим углам соответствуют штрихпунктирные прямые на рис. 5.8. Если прямые пересекаются внутри области G (т.А и т.В на рис. 5.8), то существует оптимальное решение, у которого углы приложения первого и второго импульсов скорости принадлежат множеству φ_z . Этот вариант возможен, когда на рис. 5.7 прямая AP , проведенная под углом φ_{z0} , пересекает отрезок LN . Таким образом, начинать поиск оптимальных углов приложения импульсов скорости целесообразно с углов φ_1 и φ_2 , принадлежащих множеству φ_z . Если такое решение существует, то оно оптимально. Если решение этого типа не существует, то можно рассмотреть решения, у которых только один из углов φ_2, φ_1 принадлежит множеству φ_z . Определив параметры близкого к оптимальному решения, можно переходить к поиску оптимально решения на всей возможной области углов приложения импульсов скорости, с помощью описанных выше методов.

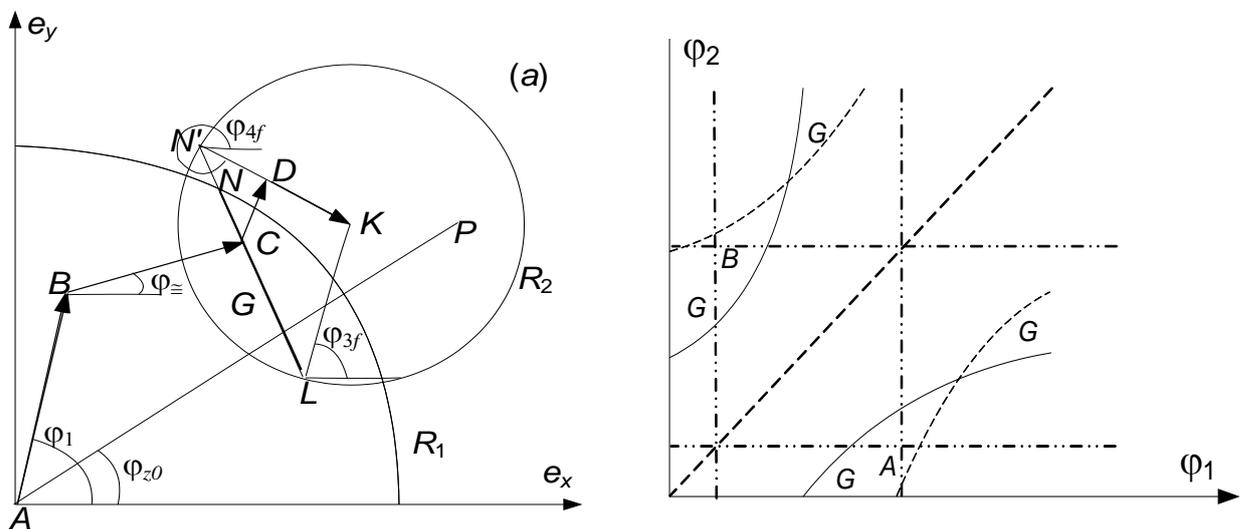


Рисунок 5.7. Геометрическое место вектора эксцентриситета переходной орбиты
 Рисунок 5.8. Области существования оптимальных решений

5.4. Использование графического диалога с задачей

Численный метод весьма универсален, а в случае, когда число используемых составляющих импульсов совпадает с числом терминальных ограничений, достаточно быстрый и очень надежный. Существенным его недостатком является то, что нет объяснения, почему получили именно такое решение, и непонятно, как будет меняться решение, например, при учете дополнительных ограничений. Используя только численные методы, трудно выбрать схему маневрирования, т.е. определить какое минимальное число импульсов скорости достаточно использовать для оптимального решения задачи и в каких местах эти импульсы необходимо прикладывать. Численные методы более пригодны для нахождения оптимальных параметров маневров заданной схемы маневрирования.

Устранить эти недостатки позволяет организация графического диалога с задачей. Впервые графический диалог был использован А.К.Платоновым и Р.К.Казаковой [57] при определении параметров маневров для межпланетных перелетов, и доказал свою высокую эффективность. В процессе диалога с задачей на экране монитора указывались моменты приложения импульсов скорости на начальной и конечной орбитах, величины и ориентация импульсов скорости определялись с помощью решения задачи Ламберта.

В книге Ю.А. Захарова [58] дано описание графического диалога для расчета межорбитальных перелетов с конечной тягой. От импульсного решения с помощью методов нелинейного программирования осуществляется переход к решению задачи с конечной тягой. Предполагалось применение графического диалога на стадии проектирования полёта КА и при выборе характеристик самого КА. На экране монитора также изображались начальная и конечная орбита и переходная орбита.

Нештатные ситуации, возникавшие на орбите при полете КА типа «Союз», «Прогресс», показали необходимость создания эффективного графического диалога с задачей, позволяющего оперативно выбрать новую схему

маневрирования, учитывающую дополнительные ограничения, вызванные нештатной ситуацией на орбите. Такой диалог был создан в баллистическом центре Института прикладной математики [69].

Как уже было показано в предыдущих главах, при решении задачи определения параметров маневров перелёта между близкими околокруговыми орбитами импульсы скорости можно изобразить на плоскости составляющих вектора эксцентриситета. На экране монитора рисуется ломаная линия, соответствующая импульсам скорости найденного численным методом решения. Рисуются также окружности, соответствующие сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости каждого из интервалов маневрирования, таким образом, рисунок на экране аналогичен рисункам 3.3, 4.12.

Взаимное положение четырехзвенной ломаной и окружностей позволяет судить, например, насколько устойчиво решение к ошибкам знания орбит и исполнения импульсов. Это зависит от того насколько глубоко точка, соответствующая вектору эксцентриситета орбиты ожидания, находится внутри области пересечения окружностей. Можно оценить, насколько углы приложения импульсов скорости, принадлежащих первому интервалу маневрирования, близки к углам оптимальной коррекции плоскости орбит (это направление также изображается на экране) и т.д. На экране существует возможность задать графически или числами новые значения углов приложения импульсов скорости и вернуться после этого в задачу, для определения новых значений величин импульсов скорости. Таким образом, можно учитывать дополнительные ограничения на место приложения и величины импульсов скорости, сокращать число используемых импульсов и т.д.

Можно учесть ошибки исполнения и/или ориентации импульсов скорости, изобразив соответствующие эллипсы с центрами в концах векторов, соответствующих импульсам скорости. Ошибки в работе ДУ часто приводят к возникновению нештатных ситуаций, поэтому их надо учитывать при выборе схемы маневрирования в этом случае. Учет, влияния ошибок исполнения

импульсов скорости, был рассмотрен в монографии [184]. Графический диалог позволит выбрать решение, у которого эллипс ошибок лежит глубоко в области пересечения двух окружностей, соответствующих сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования.

Также с помощью графического диалога можно учесть ограничение на высоту переходной орбиты. В этом случае центры окружностей, соответствующих сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования, находятся в точках $(\Delta e_{x0}, \Delta e_{y0})$ и $(\Delta e_{xf}, \Delta e_{yf})$. Из неравенств (3.39) следует, что на плоскости e_x, e_y геометрическим местом точек, которые соответствуют допустимым значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания, является круг радиуса R_m равного меньшей из величин e_s, e_b (3.40). Центр круга расположен в начале системы координат. На экране также изображается этот круг (рис. 3.24)

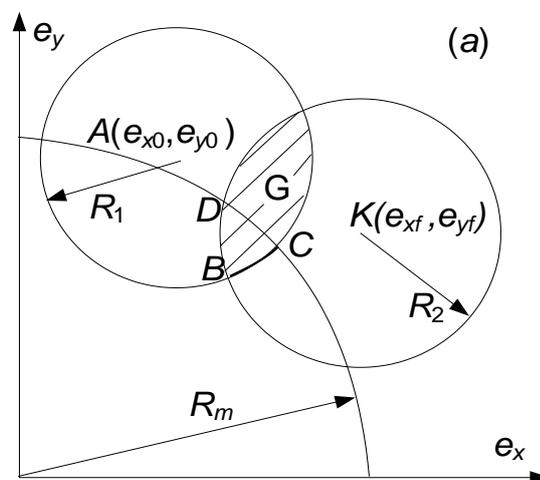


Рисунок 5.9. Взаимное расположение окружностей, соответствующих сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования и допустимым значениям вектора эксцентриситета орбиты ожидания

Изменяя с помощью графического диалога углы приложения импульсов скорости можно найти решение, у которого конец вектора эксцентриситета

орбиты ожидания принадлежит области DBC . Чем ближе к точке B конец вектора эксцентриситета орбиты ожидания, тем надежнее выполнено ограничение на высоту орбиты ожидания.

Вызов графического диалога происходит на заданных итерациях. Использование графического диалога позволяет объединить возможности численного и аналитического методов. Он особенно эффективен на стадии выбора схемы маневрирования, а также в случае возникновения нештатных ситуаций в полете. Если полет проходит штатно и используется давно выбранная и проверенная схема маневрирования, то можно обойтись только численным методом, т.к. достаточно просто определить параметры оптимальных маневров и отправить их в реализацию.

5.5. Использование итерационной процедуры для точного учета ограничений на высоту орбиты ожидания

Эту же процедуру можно эффективно использовать для точного выполнения ограничений на параметры орбиты ожидания и для многих других целей. Рассмотрим, например, её использование для точного учета ограничения на высоту орбиты ожидания.

Пусть на i -й итерации задача решалась при ограничении, что высота орбиты ожидания h должна быть больше заданной величины h_{mi} . Было найдено решение, у которого вычисляемая по аналитическим формулам высота h_{ai} удовлетворяла этому ограничению ($h_{ai} > h_{mi}$). В процессе численного интегрирования уравнений движения с учетом рассчитанных импульсов скорости, определяется также и высота орбиты ожидания h_i , соответствующая этому решению. Определяется разница $\Delta h = h_{ai} - h_i$ между значениями высоты, рассчитанными при помощи аналитического метода и численного интегрирования. На следующей $i+1$ итерации в качестве ограничения по высоте используется величина $h_{mi+1} = h_m + \Delta h$, где h_m – заданное минимально возможное значение высоты орбиты ожидания.

Такой прием позволяет использовать довольно простые формулы для вычисления высоты орбиты ожидания и в тоже время выполнять ограничение на высоту с высокой точностью.

Для определения параметров маневров, удовлетворяющих ограничению на высоту h_{mi} , можно воспользоваться численно аналитическим методом, приведенным в 4.6. Если же для решения задачи используется численный метод, и число ограничений в виде равенств совпадает с числом используемых составляющих импульсов, то выполнение ограничения на высоту просто проверяется для очередного найденного решения. После определения величин составляющих импульсов для очередной точки из множества F , проверяется выполнение ограничения $h_{ai} > h_{mi}$, и, если ограничение не выполнено, то решение отсеивается, а если выполнено, то проверяется оптимальность найденного решения и, если оно лучше предыдущих, оно становится текущим оптимальным решением.

Процедура, аналогичная процедуре изменения h_{mi} , используется при решении задачи, когда только часть из терминальных отклонений требуется сделать нулевыми (Δ_k), а остальные отклонения (Δ_p) добавляются в минимизируемый функционал в виде штрафов.

ГЛАВА VI. ФОРМИРОВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ И СПУТНИКОВЫХ ГРУПП

Описанные в предыдущих главах алгоритмы можно использовать для расчета параметров маневров спутников, входящих в спутниковые системы (СС). Вместе с тем маневры таких спутников в некоторых случаях имеют свои особенности, которые необходимо учитывать.

Несмотря на всё их отличие для любой СС, необходимо решить две задачи: вначале определить параметры маневров, формирующих заданную конфигурацию этой СС, а затем рассчитать маневры, поддерживающие эту конфигурацию.

Задача поддержания будет рассмотрена в следующей главе. В данной главе рассматривается задача создания спутниковой системы. Данная задача практически аналогична рассмотренной ранее задаче встречи. Движение каждого спутника рассматривается независимо, и его необходимо переместить в фиксированную точку конечной орбиты за определенное время. В отличие от классической задачи встречи, время перевода спутника в фиксированную точку орбиты не жестко ограничено, а может выбираться в достаточно широких диапазонах. Задача существенно усложняется, когда спутник необходимо перевести на орбиту, ДВУ которой на десятки градусов отличается от ДВУ исходной орбиты.

6.1. Перемещение КА в спутниковой системе

Прежде чем перейти к рассмотрению общего случая расчета параметров маневров формирования спутниковых систем, рассмотрим два частных случая, описанных в работе [103]. Полученные зависимости будут положены в основу для вывода формул для общего случая. Эти два частных случая: изменение положения КА на круговой орбите и перелет КА в другую рабочую плоскость.

6.1.1. Перемещение КА вдоль орбиты.

Рассмотрим перевод спутника вдоль орбиты на угол Δu от исходной точки ($|\Delta u| \leq 180^\circ$, $\Delta u > 0$, если новая точка расположена впереди исходной). Далее угол Δu будет измеряться в долях витка.

Перевод осуществляется за N витков полёта точки-цели. Число N выбирается таким, чтобы спутнику не приходилось значительно удаляться от исходной орбиты. Вариант значительного отлета от исходной орбиты рассмотрен в работах Г.Г. Райкунова [104].

Используя четвертое уравнение системы (3.1), оценивается величина трансверсальной составляющей импульса скорости ΔV_t , обеспечивающая перелет в новую точку:

$$\Delta V_t \approx -\frac{\Delta u}{3N} V_0, \quad (6.1)$$

где $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ – скорость движения спутника по круговой орбите радиуса r_0 .

Момент приложения импульса скорости на витке можно взять любым.

На последнем витке в апоцентре ($\Delta u > 0$) или перицентре ($\Delta u < 0$) прилагается противоположно направленный, но такой же по величине, импульс скорости, восстанавливающий круговую орбиту. Общие затраты СХС будут:

$$\Delta V \approx \frac{2|\Delta u|}{3N} V_0. \quad (6.2)$$

Перелет в новую точку был осуществлен за счет изменения большой полуоси орбиты, в результате появляется отклонение в долготе восходящего узла $\Delta \Omega$, за счет разной эволюции орбит в нецентральной гравитационном поле. Вычислить это отклонение можно с помощью известного выражения, учитывающего влияние второго члена разложения потенциала гравитационного поля на изменение ДВУ орбиты за виток:

$$\delta\Omega = -\frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \cos i, \quad (6.3)$$

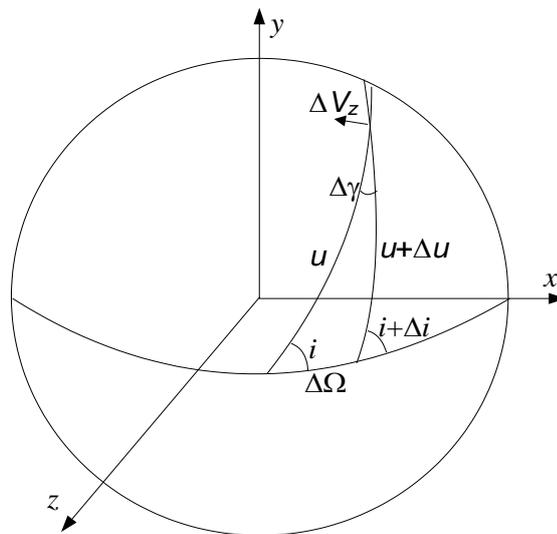
где p – фокальный параметр (в нашем случае $p=r_0$), i – наклонение орбиты, $\mu=\gamma M=3,986028*10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$ (γ –гравитационная постоянная, M – масса планеты) , $\varepsilon=2,634*10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2$. Подставив в (6.3) изменение p , полученное в результате импульса скорости ΔV_t , выразив ΔV_t через Δu из (6.1), после умножения на N , получаем выражение для возникающего отклонения в ДВУ:

$$\Delta\Omega = \frac{4}{3} \delta\Omega \Delta u. \quad (6.4)$$

Вычислим также отклонения элементов орбиты Δi и $\Delta\Omega$, в результате приложения бинормального импульса ΔV_z , в точке орбиты, имеющей аргумент широты u (рис. 6.1). Это поможет определить величину боковой составляющей импульса скорости, которая будет использована для компенсации возникшего отклонения ДВУ.

В результате бинормального импульса скорости плоскость орбиты поворачивается на угол:

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta V_z}{V_0}. \quad (6.5)$$



Риснок 6.1. Коррекция ориентации плоскости орбиты.

Из теоремы синусов для сферического треугольника:

$$\frac{\sin \Delta\gamma}{\sin \Delta\Omega} = \frac{\sin(180^\circ - (i + \Delta i))}{\sin u}. \quad (6.6)$$

Окончательное выражение для изменения ДВУ, с учетом малости величин $\Delta\gamma$, Δi и $\Delta\Omega$, имеет вид [105]:

$$\Delta\Omega = \frac{\sin u}{\sin i} \Delta\gamma = \frac{\sin u}{\sin i} \frac{\Delta V_z}{V_0}. \quad (6.7)$$

Из теоремы косинусов для сферического треугольника:

$$\cos(180^\circ - (i + \Delta i)) = -\cos \Delta\gamma \cos i + \sin \Delta\gamma \sin i \cos u. \quad (6.8)$$

Для изменения наклона орбиты получаем:

$$\Delta i = \cos u \Delta\gamma = \cos u \frac{\Delta V_z}{V_0}. \quad (6.9)$$

Зная отклонения Δi и $\Delta\Omega$ можно найти угол пересечения орбит u

$$\operatorname{tg} u = \frac{\Delta\Omega \sin i}{\Delta i}. \quad (6.10)$$

Возникшее отклонение ДВУ, вычисляемое по формуле (6.4), можно скорректировать непосредственно, прикладывая импульс скорости в апексе или вертексе орбиты. Величина боковой составляющей:

$$\Delta V_{z\Omega} \approx \frac{\sin i}{\sin u} \Delta\Omega V_0 = \frac{4}{3} \frac{\sin i}{\sin u} \delta\Omega \Delta u V_0. \quad (6.11)$$

Разделив эту боковую составляющую на две равные части между трансверсальными импульсами скорости первого и второго интервалов маневрирования получаем [103]:

$$\Delta V = 2\sqrt{\Delta V_t^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta V_{z\Omega}\right)^2} = \frac{2}{3}|\Delta u|V_0\sqrt{\frac{1}{N^2} + 4\delta\Omega^2 \sin^2 i}. \quad (6.12)$$

Скорректировать отклонение ДВУ можно, изменив наклонение начальной орбиты с помощью боковой составляющей импульса скорости величиной:

$$\Delta V_{zi} = -\frac{4\Delta u}{3N\operatorname{tgi}}V_0. \quad (6.13)$$

а затем восстановив наклонение с помощью аналогичного, но противоположно направленного импульса скорости, также прилагаемого на экваторе, но в конце перелета.

Затраты СХС имеют вид [103]:

$$\Delta V = 2\sqrt{\Delta V_t^2 + \Delta V_{zi}^2} = \frac{2|\Delta u|}{3N}V_0\sqrt{1 + \frac{16}{\operatorname{tg}^2 i}}. \quad (6.14)$$

Оптимальной будет стратегия, совмещающая оба подхода к коррекции ДВУ. Импульсы скорости прикладываются в некоторой промежуточной точке. Боковая составляющая ΔV_z одновременно меняет и наклонение и ДВУ, ее величина определяется из уравнения:

$$\left(Nk \cos u + 2\frac{\sin u}{\sin i}\right)\frac{\Delta V_z}{V_0} = \frac{4}{3}\delta\Omega\Delta u. \quad (6.15)$$

Величина ΔV_z минимальна, если импульсы скорости прикладываются на аргументе широты u_0 :

$$u_0 = \operatorname{arctg} \frac{2}{Nk \sin i}. \quad (6.16)$$

При этом ΔV_z определяется по формуле:

$$\Delta V_z = \frac{4\delta\Omega\Delta u}{3\sqrt{N^2(\delta\Omega \operatorname{tg} i)^2 + \frac{4}{\sin^2 i}}} V_0. \quad (6.17)$$

Затраты СХС определяются по формуле [103]:

$$\Delta V = 2\sqrt{\Delta V_t^2 + \Delta V_z^2} = \frac{2}{3}|\Delta u|V_0\sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{4\delta\Omega^2 \sin^2 2i}{N^2\delta\Omega^2 \sin^4 i + 4\cos^2 i}}. \quad (6.18)$$

6.1.2. Изменение долготы восходящего узла рабочей плоскости

В некоторых случаях КА необходимо перевести в заданную точку, расположенную в другой рабочей плоскости. Таким образом, необходимо скорректировать как отклонение по широте Δu , так и отклонение по ДВУ $\Delta\Omega$. Каждое из отклонений может достигать нескольких десятков градусов.

Для уменьшения больших затрат СХС, требующихся для прямой коррекции большого отклонения ДВУ, можно использовать нецентральность гравитационного поля. Для этого необходимо создать разницу в величине большой полуоси и наклона. Необходимо, также создать разницу в числе витков полета КА и целевой точки (эта разница обозначается n).

Из четвертого уравнения системы (3.1) можно найти суммарную трансверсальную составляющую импульсов скорости первого интервала маневрирования ΔV_{i1} :

$$\Delta V_{i1} = -\frac{\Delta u + n}{3(N + n)} V_0. \quad (6.19)$$

Коррекция отклонения по ДВУ, осуществляется с помощью комбинированной стратегии, импульсы скорости прикладываются оптимальной точке, имеющей широту u , и в точке, отстоящей от неё на половину витка. С учетом (6.15) уравнение для коррекции ДВУ имеет вид:

$$-4(N+n)\delta\Omega \frac{\Delta V_{i1}}{V_0} - ((N+n)\delta\Omega \operatorname{tg} i \cos u - 2 \frac{\sin u}{\sin i}) \frac{\Delta V_z}{V_0} = \Delta\Omega - \delta\Omega n \quad (6.20)$$

Предполагается, что на первом интервале маневрирования (в начале перелета) и втором интервале маневрирования (в конце перелета) прикладываются по два импульса скорости.

Оптимальное значение угла приложения боковой составляющей импульса скорости находится по формуле:

$$u_0 = \operatorname{arctg} \frac{2}{(N+n)\delta\Omega \operatorname{tg} i \sin i}. \quad (6.21)$$

Из этих уравнений определяется сумма боковых составляющих на первом интервале:

$$\frac{\Delta V_z}{V_0} = \frac{3\Delta\Omega - (4\Delta u + 7n)\delta\Omega}{3\sqrt{(N+n)^2\delta\Omega^2 \operatorname{tg}^2 i + \frac{4}{\sin^2 i}}}, \quad (6.22)$$

а затем СХС перелета [103]:

$$\Delta V = \frac{2}{3} V_0 \sqrt{\frac{(\Delta u + n)^2}{(N+n)^2} + \frac{(3\Delta\Omega - (4\Delta u + 7n)\delta\Omega)^2}{(N+n)^2\delta\Omega^2 \operatorname{tg}^2 i + \frac{4}{\sin^2 i}}}. \quad (6.23)$$

Оптимальное значение n близко к величине:

$$n_{opt}^* = \frac{3\Delta\Omega - 4\Delta u \delta\Omega}{7\delta\Omega}, \quad (6.24)$$

доставляющей минимум второму слагаемому в формуле (6.23).

Т.к. n целое число, то подбором величины n нельзя полностью компенсировать отклонение ДВУ, однако оставшаяся часть не может превысить $0.5\delta\Omega$ и легко компенсируется боковой составляющей ΔV_z .

Исследование затрат ΔV от n проведено в работе [138].

6.2. Универсальный алгоритм определения параметров маневров, формирующих спутниковую систему

Задача перемещения КА в фиксированную точку на конечной орбите будет решаться в наиболее общей постановке: и большая полуось, и эксцентриситет, и наклонение начальной и конечной орбиты могут иметь незначительные отклонения. Отличие ДВУ может достигать любой величины. Такие задачи встречаются при формировании и обслуживании СС, возвращении крупногабаритного космического мусора, доставке грунта с других планет и их спутников и т.д.

В отличие от задачи с фиксированной продолжительностью перелета рассмотренной в третьей и четвертой главах, в данной задаче продолжительность встречи (число витков полета точки-цели N) необходимо определить. Еще одним определяемым параметром является разница числа витков полета точки-цели и спутника n . Удачный выбор N и n дает возможность компенсировать основную часть отклонения ДВУ.

Большая продолжительность встречи приводит к проблеме со сходимостью описанной в первой главе итерационной процедуры. Дополнительную сложность добавляет то, что необходимое изменение эволюции орбиты после маневров на первом интервале меняет ориентацию вектора эксцентриситет в точке встречи.

Расчет n , отличия в числах витков перелета точки-цели и спутника. Вначале предположим, что время перелета задано (N фиксировано). Такая задача имеет самостоятельный интерес и часто встречается в практической работе. Наличие быстрого решения такой задачи, позволяет получить решения для различных N на заданном интервале. Таким образом, можно найти величину N , при которой достигается компромисс между желанием сократить как время перелета, так и расход горючего, который растет при сокращении времени перелета (Pareto оптимизация). Решение о компромиссной величине N

принимается оператором, анализирующем зависимость затрат СХС от продолжительности полета.

Когда N фиксировано, в начале решения задачи определяется n - разница числа витков перелета точки-цели и спутника. После определения этой разницы далее необходимо решить задачу, которая аналогична классической задаче встречи, однако и в этой задаче нецентральность гравитационного поля оказывает существенное влияние и усложняет процесс решения.

Итерационную процедуру, с помощью которой будет определяться оптимальное значение n , будем называть «внешней». Используемую ранее для выполнения граничных условий итерационную процедуру, назовем «внутренней».

Первоначально при определении n предполагается, что корректируемыми являются не все элементы орбиты. Корректируемыми являются большая полуось, аргумент широты, наклонение, ДВУ. Разницу этих элементов в начальный момент t_0 обозначим $\Delta a_0, \Delta u_0, \Delta i_0, \Delta \Omega_0$. Как всегда суммы трансверсальных составляющих импульсов скорости первого и второго интервалов маневрирования обозначим ΔV_{I} и ΔV_{II} . Также как обычно, предполагаем, что первый интервал маневрирования занимает весь первый виток перелета, а второй весь последний виток.

Вначале рассмотрим случай, когда Δi_0 достаточно мало и изменение наклонения не участвует в изменении Ω . Предполагается, что для решения задачи на этом этапе используются только трансверсальные составляющие импульсов скорости.

Учитывая (6.5), (6.24) условия компенсации отклонений $\Delta a_0, \Delta u_0, \Delta \Omega_0$ можно приближенно записать в виде [106, 107]:

$$2 \frac{\Delta V_{I} + \Delta V_{II}}{V_0} = \frac{\Delta a_0}{a_0},$$

$$-3(N+n) \frac{\Delta V_{I}}{V_0} = -3N \frac{\Delta V_{I} + \Delta V_{II}}{V_0} + \Delta u_0^* + n, \quad (6.25)$$

$$-4(N+n)\delta\Omega\frac{\Delta V_{\text{I}}}{V_0} = -4N\delta\Omega\frac{\Delta V_{\text{I}} + \Delta V_{\text{II}}}{V_0} + \Delta\Omega - \delta\Omega n,$$

здесь $\Delta u_0^* = \frac{\Delta u_0}{2\pi}$, предполагается также, что вначале $\Delta\Omega = \Delta\Omega_0$, после первой итерации внешней итерационной процедуры $\Delta\Omega = \Delta\Omega_0 + \Delta\Omega_1$ (где $\Delta\Omega_1$ – отклонение ДВУ после первой итерации) и т.д.

Из второго и третьего уравнений можно найти выражение для n , которое не зависит от величин импульсов

$$n = \frac{3\Delta\Omega}{7\delta\Omega} - \frac{4}{7}\Delta u_0^*. \quad (6.26)$$

Это довольно простое выражение для n позволяет сделать несколько важных выводов. Во-первых, n не зависит от продолжительности встречи N . Как увидим далее, для аккуратных решений это не совсем так, но зависимость действительно очень слабая. Во-вторых, как уже отмечалось для частной задачи в предыдущем параграфе, найденная величина n более чем вдвое меньше простейшей оценки $\Delta\Omega/\delta\Omega$. Начальное фазовое рассогласование Δu_0 вносит добавку, которая не превышает половину витка, но, т.к. при вычислении n идет округление до ближайшего целого числа, отклонение Δu_0 может изменить значение n на единицу.

От продолжительности встречи зависит сумма трансверсальных составляющих импульсов первого интервала маневрирования, эту сумму можно найти из (6.25):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{\text{I}}}{V_0} &= \frac{N\Delta a_0}{2(N+n)a_0} - \frac{\Delta u_0^* + n}{3(N+n)}, \\ \frac{\Delta V_{\text{II}}}{V_0} &= \frac{\Delta a_0}{2a_0} - \frac{\Delta V_{\text{I}}}{V_0}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Более точное значение n можно получить, если учитывать изменение наклона i . Обозначим ΔV_{ZI} и ΔV_{ZII} суммы боковых составляющих импульсов

скорости первого и второго интервалов маневрирования. В предположении, что импульсы скорости исполняются в восходящем или нисходящем узле, можно получить уточненную систему уравнений [106, 107, 156]:

$$\begin{aligned}
2 \frac{\Delta V_{\text{I}} + \Delta V_{\text{III}}}{V_0} &= \frac{\Delta a_0}{a_0}, \\
-3(N+n) \frac{\Delta V_{\text{I}}}{V_0} &= -3N \frac{\Delta V_{\text{I}} + \Delta V_{\text{III}}}{V_0} + \Delta u_0^* + n, \\
\frac{\Delta V_{\text{zI}} + \Delta V_{\text{zII}}}{V_0} &= \Delta i_0, \\
-4(N+n) \delta \Omega \frac{\Delta V_{\text{I}}}{V_0} - (N+n) \delta \Omega \operatorname{tg} i \frac{\Delta V_{\text{zI}}}{V_0} &= \\
= -4N \delta \Omega \frac{\Delta V_{\text{I}} + \Delta V_{\text{III}}}{V_0} - N \delta \Omega \operatorname{tg} i \frac{\Delta V_{\text{zI}} + \Delta V_{\text{zII}}}{V_0} + \Delta \Omega - \delta \Omega n.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

В системе (6.28) переменных больше, чем уравнений. Считая, что n является независимой переменной, из системы (6.28) находятся составляющие импульсов скорости:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{\text{I}} &= V_0 \left[\frac{N \Delta a_0}{2(N+n)a_0} - \frac{\Delta u_0^* + n}{3(N+n)} \right], \\
\Delta V_{\text{III}} &= V_0 \frac{\Delta a_0}{2a_0} - \Delta V_{\text{I}} \\
\Delta V_{\text{zI}} &= \frac{V_0}{N+n} \left[N \Delta i_0 - \frac{4(\Delta u_0^* + n) \delta \Omega + 3(\delta \Omega n - \Delta \Omega)}{3 \delta \Omega \operatorname{tg} i} \right], \\
\Delta V_{\text{zII}} &= V_0 \Delta i - \Delta V_{\text{zI}}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Таким образом, СХС зависит от n . Окончательное решение находится после одномерной оптимизации функционала

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_{\text{I}}^2 + \Delta V_{\text{zI}}^2} + \sqrt{\Delta V_{\text{III}}^2 + \Delta V_{\text{zII}}^2}.$$

по n . Поиск минимума начинается с начального значения, вычисляемого по формуле (6.26).

Когда n определено, выполняется численное или численно-аналитическое (оно предпочтительнее, учитывая большую продолжительность встречи) интегрирование уравнений движения точки-цели и активного КА до прицельной точки. Прицельная точка задаётся номером витка и аргументом широты. Определяется разность элементов конечной и начальной орбит. Затем вычисляются углы приложения и составляющие импульсов скорости, которые формируют все элементы конечной орбиты за исключением долготы восходящего узла.

При вычислении импульсов скорости, поддерживается наклонение фазирующей орбиты, соответствующее оптимальному n . После нескольких итераций внутренней итерационной процедуры, корректируемые элементы достигают необходимой малости. Затем сравнивается оставшееся отклонение ДВУ $\Delta\Omega_1$. Если $|\Delta\Omega_1| > |\delta\Omega^*|$, где $\delta\Omega^* = \Delta\Omega_0/n$, то $\Delta\Omega_0$ меняется на $\Delta\Omega_1$ и производится следующая итерация внешней итерационной процедуры (уточняется n). Ниже представлена блок-схема алгоритма вычисления n .

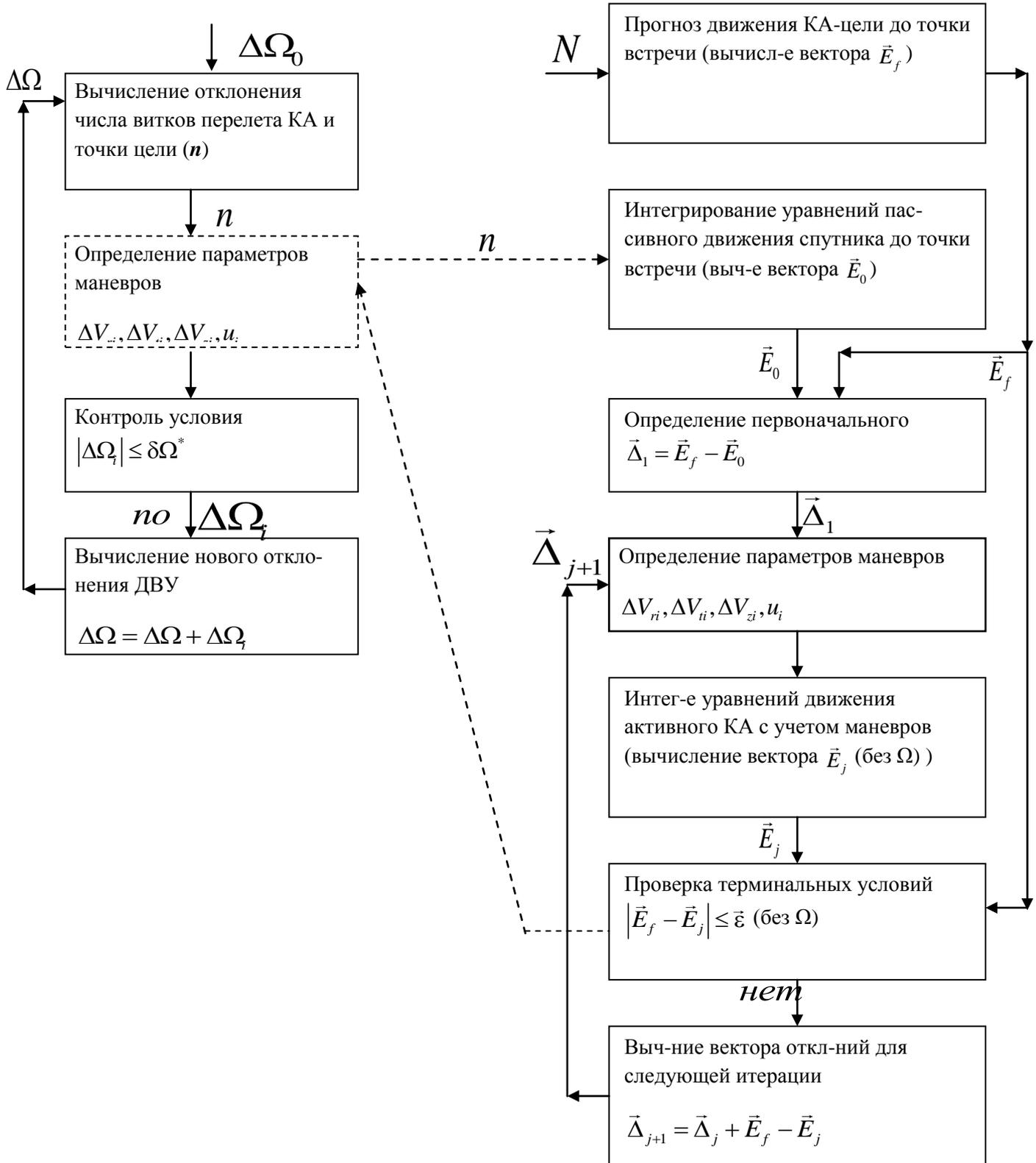


Схема вычисления разницы в числе витков полета n

Коррекция вектора эксцентриситета, совмещенная с коррекцией большой полуоси. Когда окончательное значение n найдено, можно перейти к определению параметров маневров, обеспечивающих перелет на заданную орбиту. Аналогично тому, как это делалось для обычных задач встречи, решение также будет состоять из решения задачи перехода на первом и втором интервалах маневрирования, но из-за существенного влияния нецентральности гравитационного поля эти решения будут отличаться.

На рис. 6.2 OK – вектор эксцентриситета целевой орбиты в точке встречи, OA' и OA вектора эксцентриситета орбиты спутника в начальный и в конечный моменты перелета. Необходимое изменение вектора эксцентриситета – вектор AK .

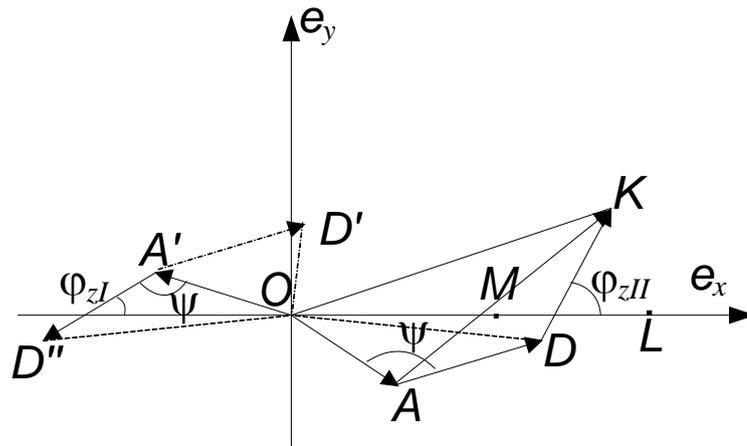


Рисунок 6.2. Схема коррекции вектора эксцентриситета

Рассмотрим вариант, когда точка встречи лежит на экваторе. Пусть ДВУ не корректируется, а наклонение корректируется (первые итерации внешней итерационной процедуры). Тогда ось e_x , является и оптимальным направлением коррекции наклонения (необходимое изменение наклонения задается вектором OL).

С помощью формул (6.27) оценивается (с большой точностью за счет сотен витков перелета) требуемое изменение большой полуоси на первом (Δa_I) и втором (Δa_{II}) интервалах маневрирования.

Фиксация положения т. M на отрезке OL позволяет распределить изменение наклона между первым и вторым интервалами. Аналогично фиксация положения т. D на плоскости e_x, e_y , позволяет распределить между интервалами маневрирования изменение вектора эксцентриситета. Таким образом, получаются две задачи расчета параметров маневров перехода. После решения этих задач, находятся оптимальные значения суммарной характеристической скорости каждого из переходов (ΔV_{trfI} и ΔV_{trfII}), и, следовательно, находим суммарную характеристическую скорость встречи $\Delta V = \Delta V_{trfI} + \Delta V_{trfII}$. Изменяя расположения т. M и т. D и для каждого расположения решая две задачи перехода можно найти оптимальное решение задачи встречи [107].

При определении ΔV_{trfII} второго интервала маневрирования нецентральность гравитационного поля можно не учитывать. Известно изменение всех элементов орбиты: для большой полуоси оно находится по формуле (6.27), вектор DK определяет необходимую коррекцию вектора эксцентриситета, вектор ML задает необходимый поворот плоскости орбиты. Также определен угол φ_{2II} между векторами DK и ML (рис. 6.2). Тем самым имеется вся необходимая информация для решения задачи перехода на этом интервале маневрирования с помощью одного из методов описанных во второй главе.

Однако при решении задачи перехода на первом интервале маневрирования (нахождении ΔV_{trfI}) нецентральность гравитационного поля учитывать необходимо. Изменение вектора эксцентриситета орбиты начальной орбиты (вектор OA') на требуемый вектор AD даст вектор OD' , однако его величина заметно меньше вектора OD . Получить реальный корректируемый вектор можно, если под углом ψ к OA' из точки A' провести отрезок равный по величине отрезку AD . Угол ψ это угол между векторами AD и OA . В этом случае получается необходимый вектор OD'' , который после эволюции орбиты, сформированной первыми двумя импульсами скорости, перед началом второго интервала маневрирования займет требуемое положение OD . Таким образом, углы между оптимальными направлениями коррекций плоскости орбиты и вектора

эксцентриситета на первом и втором интервалах маневрирования отличаются. Угол φ_{zI} не равен углу φ_{zII} (рис. 6.2). Именно разницей углов φ_{zI} и φ_{zII} объясняется сдвиг точки D с отрезка AK .

Изменение ориентации плоскости орбиты. В общем случае необходимо одновременно корректировать и наклонение, и долготу восходящего узла. В этом случае углы, на которых оптимально поворачивать плоскость орбиты, также могут отличаться на первом и втором интервалах маневрирования.

Отложим по оси абсцисс Δi_0 – разницу наклонений конечной и начальной орбит (рис. 6.3(a)), которую надо скорректировать, а по оси ординат отложим отклонение долготы восходящего узла (обозначенное $\Delta\Omega_r$), остающееся после коррекции плоскостных элементов.

Коррекцию отклонения $\Delta\Omega_r$ можно осуществить двумя способами.

Предположим, что найденному оптимальному значению n соответствует изменение наклонения орбиты импульсами скорости первого интервале маневрирования на Δi_n , а импульсами скорости второго интервала маневрирования на $\Delta i_0 - \Delta i_n$. При таком распределении коррекции наклонения за счет эволюции орбиты произойдет изменение ДВУ в конечной точке на величину $\Delta\Omega_n$.

На рисунке 6.3(a) влияние изменения наклонения Δi_n на изменение ДВУ изображается отрезком LM . Угол, образованный осью абсцисс с отрезком LM , определяется продолжительностью перелета $N+n$ и величиной $\delta\Omega_t g i$ (эволюцией орбиты).

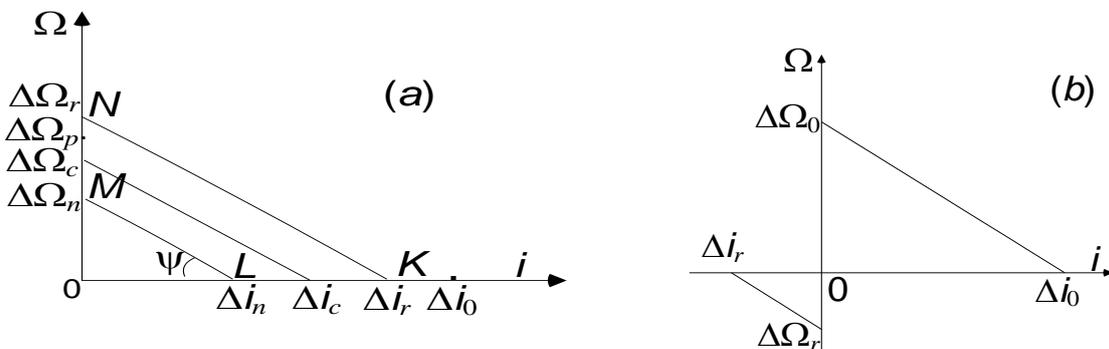


Рисунок 6.3. Коррекция ориентации плоскости орбиты

Таким образом, после коррекции плоскостных элементов орбиты и наклоения остается отклонение ДВУ $\Delta\Omega_r - \Delta\Omega_n$.

Для того чтобы полностью скорректировать отклонение по долготе восходящего узла, на первом интервале необходимо изменить наклонение на Δi_r . Для того чтобы найти Δi_r надо из точки $N(0, \Delta\Omega_r)$ провести отрезок NK параллельный отрезку ML . Это метод коррекции ДВУ с помощью наклоения. Не корректируя непосредственно ДВУ, только за счет удачного выбора наклоения орбиты ожидания (Δi_r) можно полностью убрать отклонение в ДВУ. Это простой и надёжно работающий метод, но он может быть не оптимальным по затратам суммарной характеристической скорости.

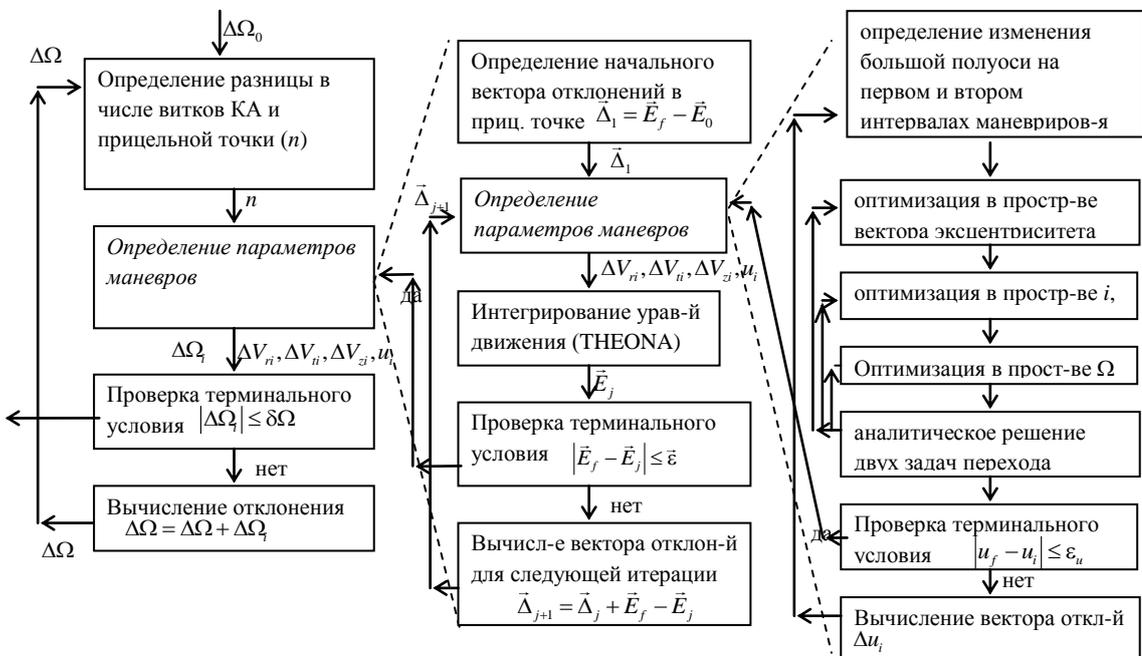
Более универсальным и оптимальным является комбинированный метод [107]. Пусть на первом интервале наклонение изменяется на Δi_c , а на втором на $\Delta i_0 - \Delta i_c$, это вызовет изменение ДВУ на $\Delta\Omega_c$. Останется отклонение $\Delta\Omega_r - \Delta\Omega_c$, т.к. Δi_c не совпадает с Δi_r . Коррекция оставшегося отклонения $\Delta\Omega_r - \Delta\Omega_c$ распределяется между интервалами маневрирования и осуществляется боковыми составляющими. Можно корректировать Δi_c и $\Delta\Omega_p - \Delta\Omega_c$ на первом витке перелета, а $\Delta i_0 - \Delta i_c$ и $\Delta\Omega_r - \Delta\Omega_p$ на последнем витке (рис. 6.3(a)). Оптимальные углы приложения боковых составляющих импульсов скорости уже не находятся на экваторе. Эти углы разные на первом и последнем витке перелета. Изменение Δi_c и $\Delta\Omega_p$ позволяет получить несколько вариантов коррекции ориентации плоскости орбиты. Это позволяет и на первом, и втором интервале маневрирования приблизить оптимальное направление коррекции ориентации плоскости орбиты к оптимальному направлению коррекции вектора эксцентриситета, и, следовательно, сократить СХС ΔV_{trfI} и ΔV_{trfII} .

Если знаки $\Delta\Omega_r$ и $\Delta\Omega_0$ не совпадают (здесь $\Delta\Omega_0$ изменение ДВУ, которое произойдет при изменении на первом интервале наклоения на Δi_0), то для итогового уменьшения отклонения по ДВУ, на первом витке необходимо не

сокращать, а увеличивать разницу в наклонении (рис. 6.3(б)). Тогда оптимальное значение Δi_c находится перебором точек отрезка $[\Delta i_r, \Delta i_0]$, а не точек отрезка $[0, \Delta i_0]$ (рис. 6.3(б)).

Общая схема алгоритма решения задачи. Ниже приведена общая схема алгоритма решения задачи. Решение состоит из трех вложенных итерационных процедур. «Внешняя» используется для определения оптимального отличия числа витков полета n . «Внутренняя» – для формирования с заданной точностью конечной орбиты (для каждого фиксированного значения n). Третья процедура служит для обеспечения с необходимой точностью времени выхода на заданную орбиту при приближенном определении параметров маневров.

При уточнении значения n , определяются углы приложения и составляющие импульсов скорости, формирующие заданную орбиту за исключением ДВУ. Когда оптимальное значение n найдено, для него во «внутренней» и третьей процедурах корректируются все элементы орбиты, включая ДВУ. Это решение и является окончательным решением задачи.



Примеры применения алгоритма для расчета маневров формирования спутниковых систем. На основе описанного выше алгоритма был разработан программный комплекс (ПК) «ГАМА» [106, 107]. Данный ПК особенно эффективен для расчета параметров маневров формирования и обслуживания спутниковых систем. С помощью этого ПК были рассчитаны параметры маневров перелета в заданную позицию на соседней рабочей плоскости для СС «Globalstar». В таблице 6.1 для заданной последовательности числа витков полета заданной точки приведены: время перелета, полные затраты СХС и отдельно затраты СХС на маневрирование в плоскости орбиты, а также затраты СХС на изменение ориентации плоскости орбиты.

Таблица 6.1

N	$T(\text{дни})$	$\Delta V(\text{м/с})$	ΔV_{inpln}	ΔV_{outpln}
800	63.2	534.06	517.97	114.12
1000	79	425.86	395.79	147.78
1200	94.8	342.34	337.59	56.68
1400	110.6	290.17	285.17	53.41
1600	126.4	252.63	249.33	40.61
1800	142.2	223.76	218.81	46.42
2000	158	201.21	199.46	25.78
2200	173.8	182.32	179.21	33.06
2400	189.6	166.99	164.41	28.64
2600	205.4	154.13	151.93	25.41
2800	231.2	143.93	143.03	15.67

Высота начальной орбиты и орбиты цели 1414км, наклонение $i=52^\circ$, угол между плоскостями орбит $\Delta\Omega=45^\circ$.

На основании данной таблицы можно сделать вывод, что компромиссная продолжительность перелета лежит в районе 2400 витков. Решение, соответствующее данной продолжительности перелета, приведено в Примере 6.1.

Пример 6.1.

	** initial orbit	** final orbit **
Hmin(km)	1410.0	1412.0
Hmax(km)	1418.0	1416.0
Uprg(deg)	10.0	90.0
I (deg)	52.000	52.001
gOMG(deg)	45.0	90.0
Nrev	1.0	1.0
Ulat(deg)	15.50	105.80

$$dV= 166.99 \quad dVinpln= 164.42 \quad dVoutpl= 28.65 \quad Niter= 86 \quad 08$$

Nimp	Nrev	Ulat	dVrd	dVtr	dVlt
1	2.	191.66	0.0	42.3301	-6.2140
2	3.	15.24	0.0	41.8784	9.7993
3	2317.	162.37	0.0	-40.1753	6.0814
4	2318.	342.36	0.0	-40.0335	-6.5529

6.3. Разноуровневые спутниковые системы

Характеристики разноуровневой спутниковой системы. Последнее время в печати большое внимание уделяется разноуровневым спутниковым системам [108, 109, 110],[111], в которых спутники располагаются на круговых орбитах, имеющих разные радиусы. Спутники разбиты на несколько групп, каждая из которых представляет собой обычную одноуровневую спутниковую систему, а их объединение дает систему с новыми свойствами. При заметно отличающихся больших полуосях орбит разных уровней возникает разница в скорости прецессии плоскостей их орбит. В результате будет иметь место разный вековой уход ДВУ, что приведёт к непрерывному увеличению угла между плоскостями орбит. Чтобы орбиты разных уровней имели одинаковый уход ДВУ, необходимо, чтобы они имели разное наклонение. Большая полуось a_{\max} и наклонение i_{\max} орбиты одного

уровня, связанной с большой полуосью a_m и наклоном i_m орбиты другого уровня, следующим приблизительным соотношением:

$$\frac{\cos i_{\max}}{a_{\max}^{7/2}} = \frac{\cos i_m}{a_m^{7/2}}. \quad (6.30)$$

Далее орбиты с разными большими полуосями, но с одинаковой эволюцией ДВУ будем называть «синхронизированными».

Формула (6.30) справедлива независимо от величины первоначального отклонения ДВУ орбит, поэтому орбиты спутников на разных уровнях будут сохранять одинаковую взаимную конфигурацию в пространстве.

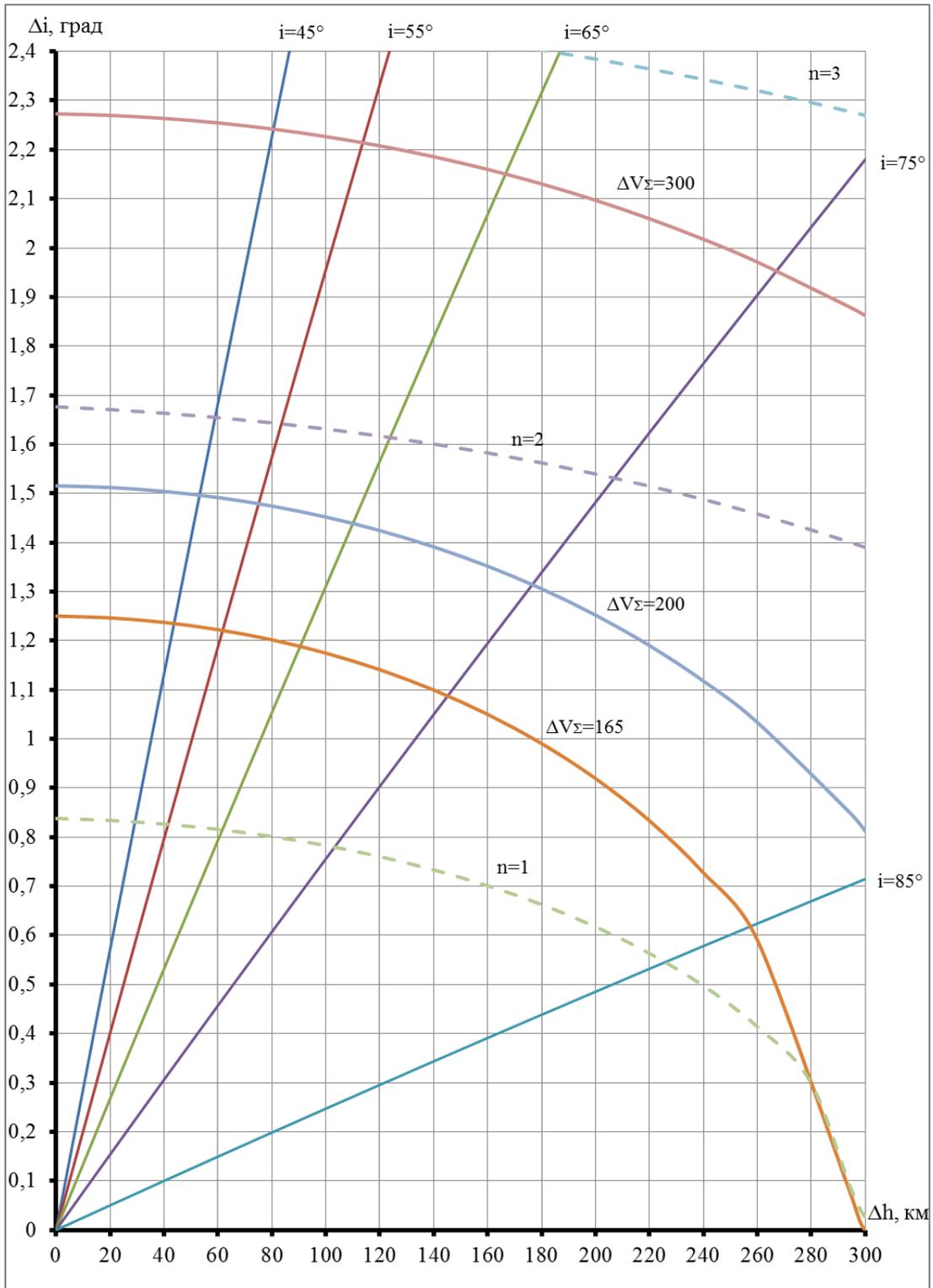


Рис. 6.4 – Зависимость изменения наклона от изменения высоты для орбиты нижнего уровня высотой $h=600$ км

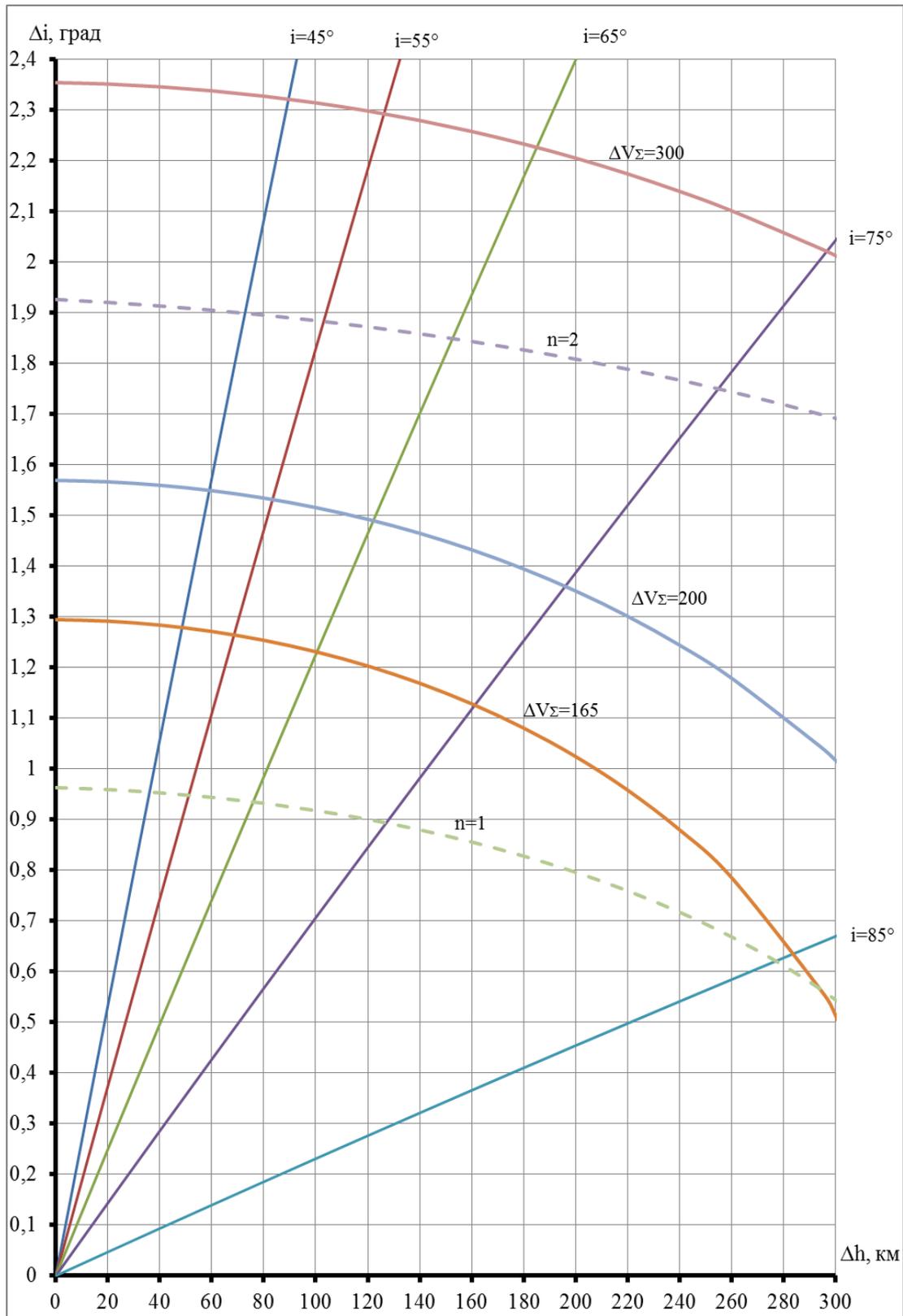


Рис. 6.5. Зависимость изменения наклона от изменения высоты для орбиты нижнего уровня высотой $h=1100$ км

Оценка энергетики перелета на орбиту другого уровня. Для перелета с синхронизированной орбиты на орбиту другого уровня (точка на конечной орбите не заданна) необходимо скорректировать отличие по высоте и наклонению. Затраты суммарной характеристической скорости на такой импульсный переход ΔV_{Σ} являются нижней оценкой затрат суммарной характеристической скорости на решение реальной задачи перелета, в которой учитываются коррекция фазы и то, что реальные маневры исполняются двигателями малой тяги. Затраты суммарной характеристической скорости на импульсный переход можно найти используя формулы

$$\begin{aligned}\Delta V_t &= \frac{V_0}{2r_0} \Delta a, \\ \Delta V_z &= V_0 \Delta i, \\ \Delta V_{\Sigma} &= \sqrt{\Delta V_t^2 + \Delta V_z^2}\end{aligned}$$

Используя выражение для ΔV_{Σ} можно найти зависимость Δi от Δh для фиксированных затрат ΔV_{Σ}

$$\Delta i = \sqrt{\frac{\Delta V_{\Sigma}^2}{V_0^2} - \frac{\Delta h^2}{4r_0^2}} \quad (6.31)$$

Такие линии для $\Delta V_{\Sigma}=165\text{м/с}$, $\Delta V_{\Sigma}=200\text{м/с}$ и $\Delta V_{\Sigma}=300\text{м/с}$ изображены на рисунках 6.4 и 6.5.

Получить более точную оценку необходимых затрат суммарной характеристической скорости ΔV_{Σ} можно, если учесть реальную продолжительность маневров, когда маневры исполняются двигателями малой тяги. Поскольку корректируются отклонение большой полуоси Δa и наклонения Δi , то на витке оптимально делать два одинаковых маневра, середина которых находится на линии узлов.

Найти угловую продолжительность маневра $\Delta \phi$ и угол β , задающий ориентацию ДУ в орбитальной системе координат, можно из системы

$$\frac{\Delta a}{2n} = \frac{2w \cos \beta}{w_c} \Delta \varphi, \quad (6.32)$$

$$\frac{\Delta i}{2n} = 2 \frac{w \sin \beta}{w_c} \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right), \quad (6.33)$$

здесь n – число витков, на которых производятся одинаковые маневры. Пересчитав $\Delta \varphi$ одного маневра в ΔV всех маневров по формуле

$$\Delta V = 2n \frac{w}{w_c} \Delta \varphi, \quad (6.34)$$

можно найти реальные затраты суммарной характеристической скорости необходимые для перехода на синхронизированную орбиту.

Используя формулу

$$\left(\frac{\Delta a w_c}{4n w \Delta \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\Delta i w_c}{4n w \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right)} \right)^2 = 1 \quad (6.35)$$

можно найти зависимость Δi от Δh , когда двигатель работает один виток ($n=1$), два витка ($n=2$), три витка ($n=3$). На рисунках 6.4, 6.5 эти зависимости изображены пунктирными линиями. Таким образом, определены области, которых можно достичь непрерывным маневрированием в течение одного или двух витков.

Определение оптимального начального фазового отклонения. Было найдено изменение ΔV при переходе от импульсной модели маневров к модели, в которой учитывается реальная тяга ДУ. На следующем этапе при выборе схемы обслуживания необходимо учитывать коррекцию разности фаз $\Delta \psi$. Представляет интерес частота максимального сближения вдоль орбиты, когда разница фаз равна нулю (или заданному значению). На рисунке 6.6 представлена зависимость числа таких встреч на интервале времени один год от отклонения по высоте.

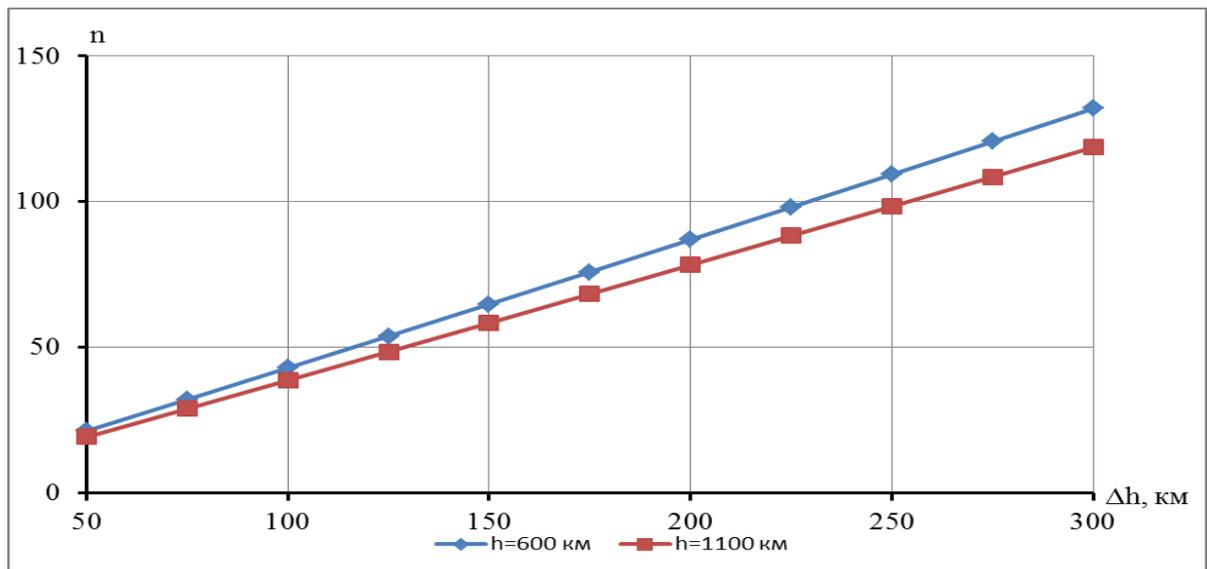


Рис. 6.6. Зависимость количества встреч от разности высот

На рисунке 6.7 представлена зависимость времени между соседними встречами от отклонения по высоте. Можно видеть, что время между встречами мало при большом отличии высот, когда велики затраты суммарной характеристической скорости на переход. Компромиссными являются средние высоты, когда и затраты суммарной характеристической скорости относительно не велики и возможность встречи появляется достаточно часто.

Если в начальный момент перелета $\Delta\psi \approx 0$, то необходимо сразу перелетать на конечную орбиту (для импульсных маневров). Если в начальный момент перелета $\Delta\psi > 0$, но разница фаз не превосходит величины, которую можно устранить за пассивный полет на витках, оставшихся до момента встречи, то затраты на встречу не превосходят затрат на переход между орбитами. Так примерно определяется диапазон оптимальных фаз для импульсных переходов, который зависит от разности больших полуосей орбит и продолжительности перелета. При большем или меньшем начальном фазовом отличии затраты на встречу будут больше затрат на переход.

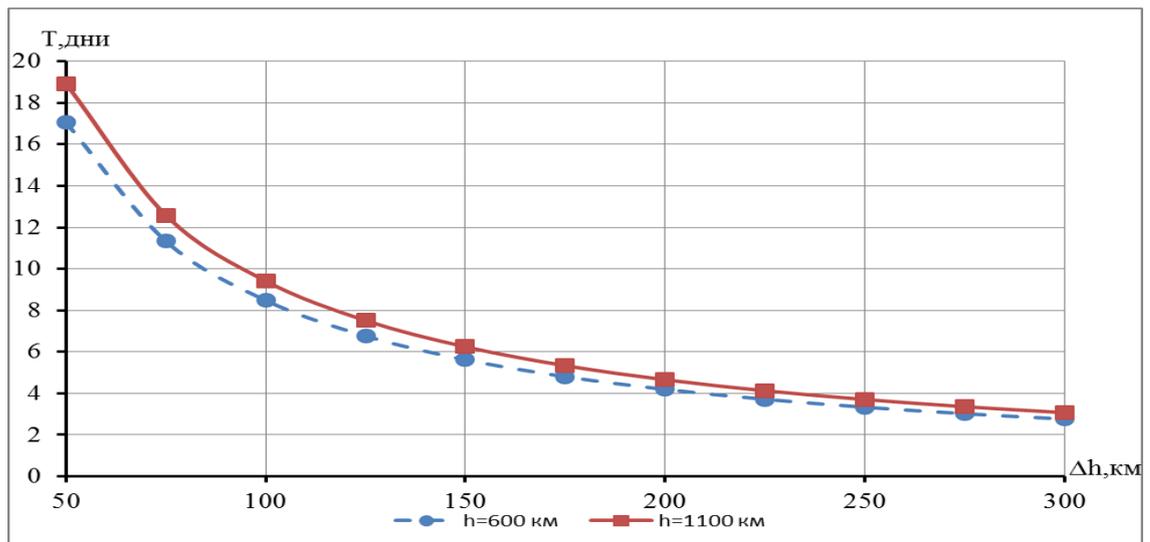


Рис. 6.7. Зависимость времени между встречами от разности высот

6.4. Определение параметров маневров формирования спутниковых групп (Formation Flying)

Метод, разработанный во втором разделе данной главы, может успешно применяться и для расчета параметров маневров формирования спутниковых групп (СГ) (formation flying (FF)). Рассмотрим задачу создания FF “Aqua Train”.

С помощью ПК «ГАМА» была исследована одна из задач перевода спутника в FF “Aqua Train”. Эта спутниковая группа состоит из шести спутников, которые расположены на идентичных орбитах, но имеется сдвиг по ДВУ и аргументу широты. Примерное расположение спутников показано на рис. 6.8 звездочками.

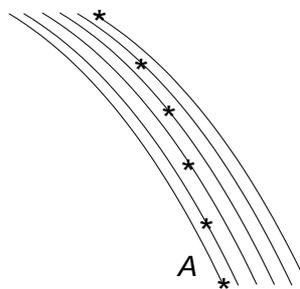


Рисунок 6.8. Положение спутников в Formation Flying “Aqua Train”

В таблице 6.2 приведена зависимость затрат ΔV для перевода спутника из одной рабочей точки группы в другую от продолжительности перевода. Данная таблица позволяет найти компромиссное время перелета. Решение, соответствующее продолжительности перелета 1540 витков, приведено в Примере 3.1.

Таблица 6.2

N	T (дни)	ΔV (м/с)	ΔV_{inpln}	ΔV_{outpln}
340	23.3	180.58	138.61	112.07
490	33.6	124.15	88.49	81.71
640	43.9	93.61	69.68	55.27
790	54.15	78.77	58.05	44.94
940	64.4	66.67	50.11	34.07
1090	74.7	57.85	39.78	30.84
1240	85.02	52.58	35.99	26.08
1390	95.3	47.78	29.43	24.22
1540	105.6	44.69	24.82	23.45

Пример 6.2

	начальная орбита	орбита цели
H_{min} (км)	663.0	705.0
H_{max} (км)	663.1	705.1
ω_{prg} (град)	53.968	77.149
i (град)	98.0800	98.2055
Ω (град)	263.28	266.04
$Ulat$ (град)	0.	30.0

$$dV=44.69 \text{ м/с} \quad dV_{inpln}=24.82\text{м/с} \quad dV_{outpl}=23.46\text{м/с} \quad Niter=30 \quad 11$$

N_{imp}	N_{rev}	$Ulat$	dV_{rd}	dV_{tr}	dV_{lt}
1	2.	184.95	0.0	0.024	-3.52
2	3.	11.08	0.0	0.316	16.43
3	1552.	179.71	0.0	10.703	1.37
4	1553.	1.70	0.0	13.779	-2.14

$$N_days: 105.6 \quad n= 15.0 \quad REV_{fnlTG}= 1540. \quad REV_{fnlCH}= 1555.$$

В рассмотренных выше примерах спутники было необходимо разместить на достаточно большом расстоянии друг от друга. В том случае, когда спутники должны быть расположены на небольшом расстоянии друг от друга, стратегия маневрирования при создании спутниковой группы несколько отличается от описанной выше. Большое значение приобретает оценка возможности столкновения спутников в процессе их перевода в заданное место в группе. Уменьшить эту опасность может позволить использование прицельного вектора, который обеспечит безопасное направление подлета к спутниковой группе. Использование окончательного прицельного вектора, позволит занять заданное место в спутниковой группе. Также большое внимание следует уделить компенсации ошибок исполнения маневров. Один из алгоритмов расчета маневров создания близко расположенной спутниковой группы описан в работе [157].

ГЛАВА VII. «ГИБКОЕ» ПОДДЕРЖАНИЕ ЗАДАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ

Различают две стратегии поддержания: «жесткое» (в зарубежной литературе чаще используется термин «абсолютное») и «гибкое» («относительное») поддержание. Если движение спутника удерживается в окрестности заданного движения, и его маневры рассчитываются независимо от положения других спутников системы, то говорят о «жестком поддержании» [73], [59], [121]. Для обеспечения согласованного движения всех спутников системы используется «гибкое» поддержание. «Гибкое» поддержание требует меньших затрат СХС по сравнению с «жестким», т.к. не корректируются параметры орбиты, аналогично меняющиеся у всех КА системы. Например, большая полуось всех орбит может уменьшаться под действием атмосферы практически одинаковым образом, а взаимные угловые расстояния спутников, определяющие конфигурацию системы, будут практически постоянны. «Относительное» поддержание является более сложной задачей, т.к. при расчете параметров маневров одного из спутников необходимо учитывать положение всех остальных элементов системы.

7.1. Постановка задачи

Необходимо определить параметры маневров, которые обеспечивают поддержание требуемой конфигурации спутниковой системы, в которой спутники расположены на нескольких круговых орбитах, имеющих одинаковый радиус и наклонение, но отличающихся долготой восходящего узла. Требуется, чтобы на фиксированном интервале времени (интервале поддержания) взаимные отклонения спутников от их номинальных значений по аргументу широты u , долготе восходящего узла Ω и наклонению i не превосходили заданных величин δu , $\delta\Omega$, δi . Необходимо учитывать ограничения на минимальную и максимальную величину маневров, на число маневров, выполняемых на заданном интервале времени, обеспечить равномерный расход топлива спутниками, входящими в систему.

Элементы орбит спутников не фиксированы, а важны только их взаимные угловые расстояния, определяющие конфигурацию системы. Таким образом, рассматривается случай «относительного» («гибкого») поддержания состояния системы.

7.2. Вычисление элементов базовых орбит

Назовем базовыми орбитами орбиты, разницы значений контролируемых параметров которых соответствуют номинальным величинам. Если известны элементы (u, Ω, i) для одной из базовых орбит, для всех остальных базовых орбит они однозначно определяются из условия номинального расположения спутников в системе.

Для примера, рассмотрим систему из 6 спутников (STARSYS). Их начальные условия приведены в таблице 7.1 [76]. Номинальные угловые расстояния по широте между спутниками в одной плоскости $u_d=180^\circ$, расположение спутников в разных плоскостях отличается между собой на $u_m=120^\circ$.

Таблица 7.1

№ спутника	a [км]	i [град]	Ω [град]	U [град]
11	7377.178	52.9992	0.057	10.043
12	7377.004	52.9994	0.134	189.913
21	7378.914	52.9995	120.025	130.085
22	7379.607	53.0010	119.945	310.057
31	7378.106	52.9998	240.011	250.120
32	7378.647	52.9989	239.925	69.847

Приведем все спутники в одну точку, например, соответствующую положению спутника 11. Для этого вычтем из аргументов широты других спутников номинальные угловые расстояния u_d и/или u_m : $u_{11p}=u_{11}=10.043^\circ$, $u_{12p}=u_{12}-u_d=9.913^\circ$, $u_{21p}=u_{21}-u_m=10.085^\circ$, $u_{22p}=u_{22}-u_d-u_m=10.057^\circ$, $u_{31p}=u_{31}-2u_m=10.120^\circ$, $u_{32p}=u_{32}-u_d-2u_m+360^\circ=9.847^\circ$. Найдем такое значение приведенного базового аргумента широты u_{bp} , чтобы максимальные отклонения от него были равны по абсолютной

величине. Легко видеть, что u_{bp} равно среднему арифметическому минимального и максимального значений u_p . В данном случае u_{31p} и u_{32p} , следовательно, $u_{bp}=9.9835^\circ$, а максимальные отклонения $\Delta u_{max0}=\pm 0.1365^\circ$. Зная u_{bp} приведенной базовой орбиты легко вычислить аргументы широты базовых орбит всех спутников. Для этого необходимо добавить номинальные угловые расстояния u_d и/или u_m : $u_{11b}=u_{bp}=9.9835^\circ$, $u_{12b}=u_{bp}+u_d=189.9835^\circ$, $u_{21b}=u_{bp}+u_m=129.9835^\circ$, $u_{22b}=309.9835^\circ$, $u_{31b}=249.9835^\circ$, $u_{32b}=69.9835^\circ$. Аналогичная процедура применяется и для нахождения базовых значений долготы восходящего узла. Подставив $\Omega_d=0$, $\Omega_m=120^\circ$, получаем $\Omega_{11b}=0.0295^\circ$, $\Omega_{12b}=0.0295^\circ$, $\Omega_{21b}=120.0295^\circ$, $\Omega_{22b}=120.0295^\circ$, $\Omega_{31b}=240.0295^\circ$, $\Omega_{32b}=240.0295^\circ$. Ещё проще находится базовое значение наклона, которое одинаково для всех спутников системы $i_b=52.99995^\circ$. Таким образом, найдены элементы всех базовых орбит на начальный момент времени.

Аналогичный алгоритм применяется и, если плоскости или спутники в плоскости расположены не на одинаковом, но известном номинальном угловом расстоянии друг от друга. Переход к элементам приведенной базовой орбиты удобен тем, что независимо от числа спутников в системе можно иметь дело только с одним значением каждого из элементов, эти параметры определяют положение всех остальных базовых орбит.

7.3. Общий алгоритм решения задачи

Легко видеть что, если максимальные отклонения контролируемых элементов орбит от вычисленных значений соответствующих элементов базовых орбит будут меньше половины точности поддержания конфигурации системы, то взаимные отклонения контролируемых элементов любой пары спутников будут меньше заданных величин δu , $\delta \Omega$, δi , что и требуется по условию задачи. Предполагается, что в начале интервала поддержания конфигурация системы удовлетворяет наложенным ограничениям. Цель проведения маневров обеспечить, чтобы и на всем интервале поддержания эти ограничения не были нарушены.

Так как для круговых орбит зависимость Ω и u от времени близка к линейной, то и зависимость от времени взаимных отклонений по этим элементам также близка к линейной. Это позволяет предположить что, если в начале и в конце интервала поддержания контролируемые параметры спутника отклоняются от соответствующих параметров своей базовой орбиты не более чем на половину требуемой точности поддержания состояния системы, то это ограничение выполнено и внутри интервала поддержания. Если это ограничение выполнено для всех элементов орбиты каждого из спутников, входящих в систему, то взаимные отклонения по каждому из контролируемых элементов орбиты любых двух спутников не превосходят допустимых значений $(\delta u, \delta \Omega, \delta i)$. Для краткости $\left[-\frac{\delta u}{2}, \frac{\delta u}{2} \right]$, $\left[-\frac{\delta \Omega}{2}, \frac{\delta \Omega}{2} \right]$, $\left[-\frac{\delta i}{2}, \frac{\delta i}{2} \right]$ окрестность элементов базовой орбиты будем обозначать $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right]$.

Таким образом, задача контроля взаимных отклонений на всем интервале поддержания эквивалентна гораздо более простой задаче перевода каждого из спутников в $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right]$ окрестность своей базовой орбиты в конце интервала поддержания.

Это позволяет предложить следующий алгоритм решения задачи [112]. Выбирается точка в пространстве элементов приведенной базовой орбиты в конце интервала поддержания. Определяются элементы базовой орбиты для каждого из спутников на этот момент. Для каждого спутника вычисляются параметры импульсов скорости, обеспечивающих его оптимальный (по затратам суммарной характеристической скорости) перевод в $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right]$ окрестность базовой орбиты. Вычисляется значение функционала задачи, соответствующее данной точке пространства элементов приведенной базовой орбиты. Анализируется изменение значения функционала по сравнению со значением в предыдущей точке и

осуществляется переход к следующей точке в пространстве элементов приведенной базовой орбиты.

Процесс поиска параметров оптимальной базовой орбиты в конце интервала поддержания (переход к следующей точке) можно осуществлять численным методом, например, с помощью метода деформируемого многогранника [98], или простым перебором с постоянным шагом, поскольку область, на которой ищется минимум, довольно ограничена.

Процедура заканчивается, когда будет найдено оптимальное положение приведенной базовой орбиты в конце интервала поддержания. Календарь маневров, обеспечивающий перевод спутников в окрестность базовых орбит, соответствующих этой точке, будет являться решением задачи.

Предположение о достаточности контроля состояния системы в начале и конце интервала поддержания позволяет при первоначальном определении параметров маневров каждого из спутников использовать только информацию об его орбите и элементах базовой орбиты и не учитывать движение остальных спутников, что существенно упрощает задачу. Информация о движении всей системы используется для уточнения календаря маневров, если нарушены какие-нибудь ограничения. Например, число спутников, выполняющих маневр на одном и том же витке, превышает допустимое.

Для того чтобы найти исходную точку для процесса минимизации, начальные условия всех спутников подтягиваются до момента окончания интервала поддержания и определяются значения контролируемых параметров u, Ω, i . Вычитанием номинальной разницы долготы восходящих узлов и аргументов широты параметры приводятся к окрестности соответствующих величин одного из спутников (аналогичная процедура нахождения приведенных величин уже была описана выше). Затем вычисляются средние арифметические значения наклонов и приведенных аргументов широты и ДВУ, которые и используются как начальная точка для минимизации в пространстве параметров приведенной базовой орбиты.

Оптимальными считаются значения параметров приведенной базовой орбиты, для которых минимален функционал [113]

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta V_j}{\Delta V_j^*} \quad (7.1)$$

где n - число спутников, ΔV_j^* - располагаемый импульс скорости для j -го спутника, ΔV_j - суммарный импульс скорости, требуемый для перевода этого спутника в окрестность его базовой орбиты. Минимизация такого функционала позволяет равномерно распределять затраты топлива между спутниками. Равномерность распределения затрат обеспечивает и минимизация функционала, предложенного Г.В. Можаяевым:

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta V_j^* - \Delta V_j}. \quad (7.2)$$

Применение этого функционала особенно эффективно, когда у спутников остается мало топлива. Естественно, что решения, у которых $\Delta V_j^* - \Delta V_j < 0$, не рассматриваются. Можно использовать и другие функционалы, в которых присутствуют ΔV_j^* и V_j , или минимизировать функционал обычного вида $F = \sum \Delta V_j$.

7.4. Определение параметров маневров

Предполагается, что используются только трансверсальные и боковые составляющие импульсов скорости, т.к. этих двух переменных в сочетании с оптимальным углом приложения импульса скорости достаточно, чтобы перевести спутник одним маневром в нужную точку пространства u, Ω, i .

С учетом (6.1), (6.9), (6.20), система уравнений для определения аргумента широты точки приложения импульса скорости u_j и его трансверсальной и боковой составляющих $\Delta V_{tj}, \Delta V_{zj}$ имеет вид:

$$(-3U_j + 4 \sin U_j) \frac{\Delta V_{tj}}{V_0} = \Delta u_j,$$

$$\cos u_j \frac{\Delta V_{zj}}{V_0} = \Delta i_j, \quad (7.3)$$

$$-4U_j \delta \Omega \frac{\Delta V_{tj}}{V_0} - (U_j \delta \Omega \operatorname{tg} i \cos u_j - \frac{\sin u_j}{\sin i}) \frac{\Delta V_{zj}}{V_0} = \Delta \Omega_j,$$

где $\Delta u_j, \Delta \Omega_j, \Delta i_j$ – отклонения контролируемых параметров j -го спутника, вычисленных в конце интервала поддержания, от параметров базовой орбиты в этой точке, u_j -аргумент широты точки приложения импульса скорости, U_j - угол от этой точки до точки, в которой вычисляются отклонения.

Рассматривается одноимпульсная схема, поскольку уменьшение числа используемых импульсов скорости также важно для процесса поддержания, как и минимизация функционала задачи, а корректируемые отклонения и импульсы скорости, как правило, небольшие. Однако, если сохранение имеющегося первоначально отклонения по i , или даже его увеличение, позволяет уменьшить отклонение по Ω , и, как следствие, ΔV_j , то оптимально перейти к двухимпульсной схеме, рассмотренной в первом параграфе седьмой главы.

Если величина импульса скорости больше допустимой, то он разбивается на несколько импульсов, прикладываемых на разных витках. Если величина импульса скорости меньше допустимой, то можно сместить точку приложения импульса скорости на виток с большим номером, увеличив тем самым величину трансверсальной составляющей. Если нарушение ограничения на один из параметров наступает раньше, чем можно приложить минимальный импульс скорости, то он прикладывается перед нарушением ограничения и затем возможно наступление скользящего режима.

Если корректируется только наклонение, импульс скорости прикладывается на экваторе, если корректируется только долгота восходящего узла, а система спутников расположена на большом удалении от Земли (см. первый параграф

данной главы), то импульс скорости прикладывается в апексе или вертексе орбиты. Это оптимальные точки для коррекции соответствующих параметров. Номер витка, на котором прикладывается импульс скорости, не имеет значения. Если корректируется только положение вдоль орбиты, то импульс скорости прикладывается в той из апсидальных точек, которая дает максимальное уменьшение эксцентриситета орбиты. При этом импульс скорости прикладывается на витке ближайшем к началу интервала поддержания конфигурации системы.

Если корректируются одновременно отклонения по аргументу широты и по долготе восходящего узла или по наклонению, то импульс прикладывается в апексе или вертексе орбиты или на экваторе витка ближайшего к началу интервала поддержания, причем из двух возможных точек выбирается та, которая позволяет уменьшить эксцентриситет орбиты.

Если в процессе поддержания состояния системы или при её создании орбита какого-нибудь из спутников получает достаточно большой эксцентриситет, может возникнуть потребность в его целенаправленной коррекции. В этом случае придется использовать два импульса, чтобы одновременно оптимально корректировать все элементы орбиты. Сначала из системы (7.3) находятся величины составляющих импульса и оптимальный угол поворота плоскости орбиты, а затем по формулам для оптимального перехода между близкими околокруговыми орбитами определяются параметры двух импульсов. Используемая в этих формулах, разность больших полуосей орбит Δa вычисляется по формуле:

$$\Delta a = 2a \frac{\Delta V_{ij}}{V_0}, \quad (7.4)$$

а угол, на который необходимо повернуть орбиту, по формуле:

$$\Delta \gamma = \frac{\Delta V_{zj}}{V_0}, \quad (7.5)$$

где $\Delta V_{ij}, \Delta V_{zj}$ составляющие импульса скорости, определённые из системы (7.3).

7.5. Использование итерационной процедуры.

При помощи итерационной процедуры (аналогичной процедуре описанной в первой главе) осуществляется уточнение параметров импульсов скорости, чтобы параметры базовой орбиты были сформированы с необходимой точностью. На этом этапе также каждый из спутников рассматривается отдельно.

Используемая в итерационной процедуре "прицельная" орбита на первой итерации совпадает с базовой орбитой. После определения (в линейном приближении) параметров импульсов скорости, формирующих прицельную орбиту, осуществляется численное [114] или численно-аналитическое [115, 116, 117, 118] прогнозирование движения спутника для точного определения параметров фактически сформированной орбиты в конце интервала поддержания. Для данной задачи вследствие большого числа спутников, которые могут входить в систему, длительных интервалов поддержания, многократного применения прогноза, использование численно-аналитического прогнозирования, несомненно, предпочтительней. Вычисляются отклонения сформированных элементов орбиты от элементов базовой орбиты, если отклонения больше допустимых, то элементы прицельной орбиты изменяются на вычисленную разницу. Затем снова вычисляются маневры, которые должны сформировать новую прицельную орбиту, вычисляются отклонения сформированной орбиты от базовой и т.д., пока отклонения не станут в K раз меньше требуемой точности поддержания конфигурации системы (обычно $K=10$). Эта процедура, позволяющая устранить неточности линейного приближения при определении величины импульсов скорости, повторяется для каждого спутника системы.

Несмотря на небольшую величину импульсов применение итерационных процедур необходимо, поскольку интервалы поддержания могут быть весьма продолжительны.

7.6. Выбор точки прицеливания

Выбор базовой орбиты в качестве прицельной точки наиболее прост и надежно обеспечивает выполнение терминальных условий. Однако часто в качестве прицельной точки предпочтительнее использовать ближайшую границу разрешенного диапазона, а не его середину [112]. Это уменьшает затраты ΔV и увеличивает время пребывания корректируемого элемента орбиты в разрешенном диапазоне, т.к. этот элемент может меняться от одной границы к другой через весь разрешенный диапазон, а не через его половину.

Для примера, рассмотрим изменение аргументов широты системы из четырех спутников. На рис. 7.1 изображены их приведенные аргументы широты в начальный момент поддержания $u_{1p}, u_{2p}, u_{3p}, u_{4p}$ и в конечный момент $u_{1pf}, u_{2pf}, u_{3pf}, u_{4pf}$ (если коррекция не проводилась).

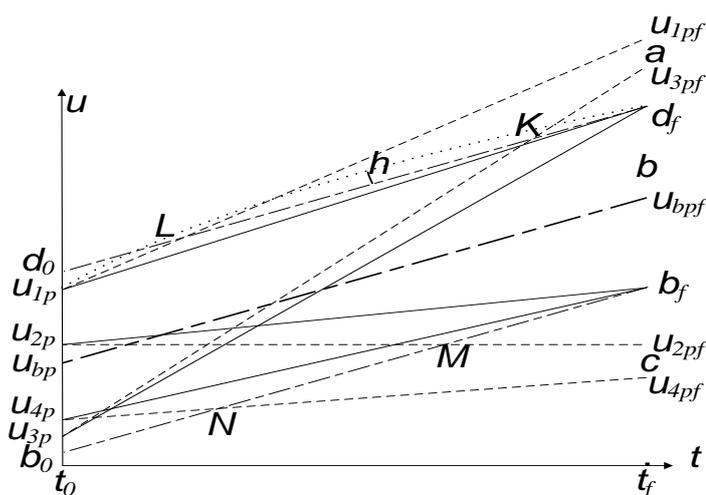


Рисунок 7.1. Изменение аргументов широты спутников на интервале поддержания. Пунктирными линиями показано изменение аргументов широты до проведения маневров, сплошными линиями — после проведения маневров

Аргументу широты приведенной базовой орбиты в начальный момент соответствует точка u_{bp} , а выбранному значению аргумента широты базовой орбиты в конечный момент времени соответствует точка u_{bpf} . Разрешенная полоса (разрешенный диапазон) ограничена штрих пунктирными линиями, проходящими

через точки d_0 и d_f и через точки b_0 и b_f ($d_0 - u_{bp} = u_{bp} - b_0 = d_f - u_{bpf} = u_{bpf} - b_f = 0.5\delta u$). Изменение аргументов широты спутников по времени, если не проводить коррекцию их движения, показано пунктирными линиями. Сплошными линиями показано изменение аргументов широты после проведения маневров. Как можно видеть, в качестве прицельных точек выбирался не аргумент широты базовой орбиты u_{bpf} , а ближайшая граница разрешенного диапазона.

Из первого уравнения системы (7.3) следует, что затраты на коррекцию отклонения по аргументу широты u пропорциональны величине этого отклонения. Следовательно, затраты, необходимые для коррекции всех отклонений по u , пропорциональны сумме расстояний от точек $u_{1pf}, u_{2pf}, u_{3pf}, u_{4pf}$ до прицельных точек. Обозначим $u_{1pf} - u_{3pf} = a$, $u_{3pf} - u_{2pf} = b$, $u_{2pf} - u_{4pf} = c$. Если прицельной точкой для всех спутников является аргумент широты приведенной базовой орбиты $u_{bpf} \in [u_{3pf}, u_{2pf}]$, то сумма расстояний до этой точки $\sum |u_{ipf} - u_{bpf}|$ равна $a + 2b + c$ и не зависит от расположения точки u_{bpf} на интервале (u_{3pf}, u_{2pf}) . Это очень важное свойство, которое можно эффективно использовать. Например, если в качестве u_{bpf} взять одну из граничных точек u_{3pf} или u_{2pf} , то соответствующий спутник не должен маневрировать и тем самым уменьшается общее число применяемых маневров без изменения СХС маневров. Существенно сокращается и интервал поиска оптимального значения u_{bpf} , которое целесообразно искать в диапазоне $[u_{3pf}, u_{2pf}]$.

Если точка u_{bpf} сдвинута на x от интервала (u_{3pf}, u_{2pf}) , но не выходит из интервала (u_{4pf}, u_{1pf}) , то сумма будет уже $a + 2b + c + 2x$. Если точка u_{bpf} выбрана так, что ни u_{3pf} , ни u_{2pf} не попадают в интервал (d_f, b_f) , а прицельными точками являются ближайшие из границ d_f и b_f (как на рис. 7.1), то сумма будет $a + 2b + c - 2\delta u$, и опять не зависит от конкретного расположения точки u_{bpf} . Таким образом, использование в качестве прицельных точек границ d_f и b_f помогает уменьшить ΔV на величину $\frac{2\delta u}{3U} V_0$. Увеличивается и время пребывания в разрешенном

диапазоне уже после интервала поддержания, т.к. дрейф будет происходить в направлении заданном коррекцией, т.е. от ближней границы разрешенного диапазона к дальней. Недостатком использования границ в качестве прицельных точек является повышение вероятности выхода за пределы границ разрешенного диапазона внутри интервала поддержания. Это наиболее вероятно, когда сплошная линия близка к штрих-пунктирной, т.е. когда начальная и конечная точки лежат с одной стороны от прямой $u_{bp}u_{bpf}$. На рис. 7.1 это линии $u_{1p}d_f$ и $u_{4p}b_f$. Изобразим реальное изменение аргумента широты первого спутника точечной линией. Как видим, внутри интервала поддержания спутник максимально выходит за пределы разрешенного диапазона на величину h . Чтобы устранить это нарушение можно сдвинуть прицельную точку на соответствующую величину вглубь разрешенного диапазона. Вычисление выхода за границы разрешенного диапазона и сдвиг прицельной точки осуществляются в процессе итерационного выполнения терминальных условий. Необходимо отметить, что, выиграв в числе импульсов скорости (когда один из спутников не маневрирует), затем теряем в продолжительности поддержания, т. к. спутник выйдет из заданного диапазона сразу после окончания интервала поддержания. Но, если у спутника осталось мало топлива, и ему нежелательно маневрировать, возможность избежать маневра становится для него очень важной.

Также можно показать, что если число спутников нечетное, то оптимально аргументы широты всех спутников приводить в окрестность аргумента широты «внутреннего» спутника (большие и меньшие значения аргумента широты имеют одинаковое число спутников). Если на рис. 7.1 отбросить четвертый спутник (оставить в системе три спутника), то в этом примере приводить аргументы широты первого и второго спутников надо в окрестность точки u_{3pf} .

Иногда предлагается выбирать один из спутников и с ним согласовать движение всех остальных спутников системы (выбрать «вожака»). Все поддерживаемые параметры орбит остальных спутников согласуются с параметрами орбиты спутника-вожака. Но, как показывает приведенный выше

пример, каждый из параметров орбит спутников оптимально приводить к «внутреннему» значению этого параметра. «Внутренние» значения разных параметров могут принадлежать различным спутникам. Таким образом, в качестве вожака оптимально выбрать фиктивный спутник, поддерживаемыми параметрами орбиты которого являются «внутренние» параметры, реально относящиеся к разным спутникам. Это упрощенный подход, но он показывает возможную не оптимальность выбора конкретного спутника в качестве спутника-вожака. Параметры такого фиктивного спутника могут быть использованы в качестве начального значения для численного поиска оптимальных значений, к которым надо привести параметры всех спутников. Необходимо помнить, что значения всех параметров вычисляются не вначале, а в конце интервала поддержания, и именно в этот момент определяются параметры фиктивного спутника.

7.7. Определение интервалов маневрирования

Рисунок 7.1 позволяет ответить на вопрос, как быстро необходимо проводить коррекцию отклонения по аргументу широты для выбранного положения приведенной базовой орбиты в конце интервала поддержания u_{bpf} . Крайние точки проведения маневров это точки пересечения штриховых и штрих пунктирных линий (т.*L*, т.*K*, т.*M*, т.*N*). При проведении маневров в эти моменты времени в качестве прицельной точки нельзя использовать ближайшую границу разрешенного диапазона, т.к. в дальнейшем, сплошная линия будет совпадать с граничной штрих пунктирной линией, и высока вероятность выхода из разрешенного диапазона.

На всем интервале поддержания наклонение орбит i меняется незначительно, поэтому его целесообразно приводить к некоторому среднему значению (уменьшая тем самым абсолютные величины отклонений по i), чтобы не возникали вековые уходы по Ω . Для некоторых спутников целесообразно вообще не корректировать

наклонение, если сохранение первоначального отклонения по i позволяет уменьшить имеющееся первоначально отклонение по Ω .

На рис. 7.2 показано возможное изменение Ω для каждого из четырех рассмотренных ранее спутников. Пунктирными линиями изображено изменение Ω после проведения коррекции аргумента широты и наклонения. Очевидно, что для третьего и четвертого спутников для выбранного значения Ω_{bpf} коррекцию Ω можно не проводить, т.к. Ω_{3pf} и Ω_{4pf} попадают в разрешенный диапазон (d_f, b_f) . Для первого спутника пунктирная прямая $\Omega_{1p}\Omega_{1pf}$ пересекает границу разрешенного диапазона штрихпунктирную прямую d_0d_f , следовательно, необходимо изменить Ω раньше критической точки K . Целесообразно сделать это в начальный момент, совместив с коррекцией других отклонений, и уменьшив тем самым число импульсов и ΔV маневра.

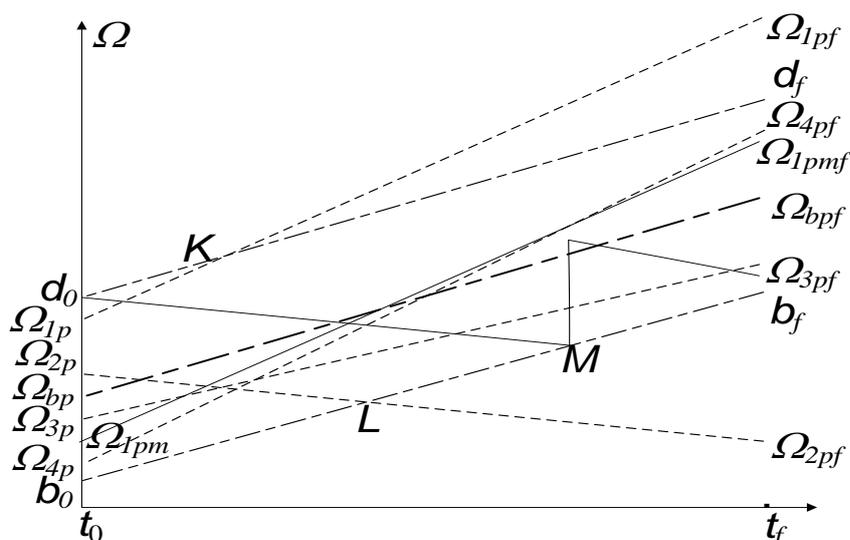


Рисунок 7.2. Изменение долготы восходящего узла спутников на интервале поддержания. Пунктирными линиями показано изменение долготы восходящего узла до проведения маневров, сплошными линиями — после проведения маневров

Изменение Ω происходит скачком, новое значение после импульса будет Ω_{1pm} , а дальнейшему изменению соответствует прямая $\Omega_{1pm}\Omega_{1pmf}$, которая принадлежит разрешенной полосе. Прицельной была выбрана точка внутри

разрешенного диапазона (d_f, b_f) , чтобы не происходило нарушение ограничения сразу после окончания интервала поддержания.

Аналогично для второго спутника, но изменение Ω в начальный момент ограничено величиной $d_0 - \Omega_{2p}$, поэтому затем в точке M необходимо провести новую коррекцию Ω .

Процедура нахождения параметров импульсов повторяется для каждого спутника, пока все спутники системы не будут переведены на свои базовые орбиты.

Получить близкое к оптимальному решение можно с помощью численных методов. Однако, учесть перечисленные выше физически ясные возможности уменьшения ΔV и числа импульсов при использовании численных методов (как правило, это симплекс метод [76], [77], [119, 120]) практически невозможно, т.к. отклонения проверяются в равно отстоящие друг от друга моменты времени, а не в моменты, когда происходит нарушение условий поддержания.

После определения полного календаря маневров проверяется выполнение ограничений для всех спутников системы внутри интервала поддержания. В первую очередь контролируется выполнение ограничения на общее число маневров в течение заданного интервала маневрирования. Если маневров больше, то превышающая часть переносится на более позднее время. При этом в первую очередь переносятся маневры, не содержащие трансверсальной составляющей импульса (т.к. их можно выполнять на любом витке), затем переносятся маневры спутников содержащих большие запасы топлива, а также переносятся импульсы, величина которых близка к минимально возможной. Когда календарь маневров сформирован, производится совместное интегрирование уравнений движения всех спутников с учетом рассчитанных импульсов скорости. Вычисляются максимальные отклонения контролируемых параметров внутри интервала поддержания. Если предположение о линейной зависимости отклонений не достаточно точно, и для каких-нибудь спутников отклонения корректируемых элементов орбиты превышают допустимые, то сдвигаются прицельные точки для

этих элементов или рассчитываются дополнительные импульсы скорости, уменьшающие эти отклонения.

Для полностью сформированного календаря маневров, вычисляется значение функционала F и принимается решение об окончании задачи или формируются новые значения элементов приведенной базовой орбиты, а затем повторяется вся процедура поиска календаря маневров, соответствующего этой орбите.

7.8. Пример расчета параметров маневров

В таблице 7.2 приведены результаты расчета календаря маневров [112] для системы спутников, начальные условия которых содержатся в таблице 7.1.

Таблица 7.2

№ спутника	Виток	u_i [град]	ΔV_i [м/с]	ΔV_z
11	3	330.4	0.476	0
12	2	150.5	0.528	0
21	4	151.7	-0.418	0
22	1	331.2	-0.801	0
31	6	35.7	0	0
32	5	330.5	-0.261	0

Конфигурация системы поддерживалась на интервале шесть месяцев, отклонения по каждому из контролируемых параметров не должны превосходить 0.1° . Суммарные затраты на поддержание $\Delta V=2.485$ м/сек.

Как можно видеть из таблицы, корректируется только отклонение по аргументу широты, а отклонения по i и Ω даже без корректирующих импульсов остаются в разрешенном диапазоне. Положение базовой орбиты в конце интервала поддержания было выбрано таким образом, чтобы спутник 31 совсем не маневрировал.

Изложенная в этом параграфе методика расчета календаря маневров, обеспечивает поддержание конфигурации системы на интервале времени, длина которого от нескольких дней до двух десятков месяцев. При расчете учитываются особенности задачи, что позволяет использовать минимальное число маневров и

исполнять их в оптимальные моменты времени. Методика в первую очередь предназначена для расчета маневров поддержания систем спутников расположенных на высотах от 800 до 1500км, но стратегия коррекции отклонения по аргументу широты применима и для систем спутников, на высотах около 20000 км, т.к. имеет универсальный характер.

Для определения параметров маневров относительного поддержания конфигурации системы спутников на больших высотах, когда существенным является, например, притяжение Луны и Солнца, можно воспользоваться алгоритмом, описанным в работе Ю.П. Улыбышева [78]. В работах Г.В. Можаяева [74] и Р.Ф. Муртазина [75], рассмотрены задачи, сходные с задачей, исследованной в данном разделе. В этих работах предполагалось, что маневры исполняются в начальный [74] или в начальный и конечный моменты времени [75]. В промежуточные моменты состояние системы не контролировалось. На примере конкретных спутниковых систем было проведено сравнение стратегий «относительного» и «абсолютного» (жесткого) поддержаний, из которого следует, что на «относительное» поддержание лучше по обоим параметрам: и по затратам СХС, и по числу маневров.

7.9. Поддержание угла между плоскостями орбит разноуровневой спутниковой системы

Постановка задачи. В задаче требуется обеспечить удержание угла (γ) между плоскостями двух орбит разноуровневой спутниковой системы (такие системы были описаны в предыдущей главе) в диапазоне $\pm\Delta\gamma_{\max}$. Как и ранее будем называть орбиты с разными большими полуосями, но с одинаковой эволюцией ДВУ – синхронизированными.

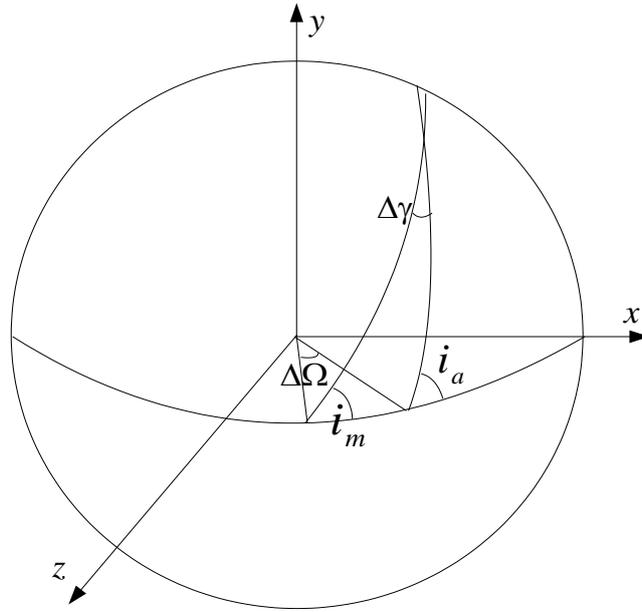


Рисунок 7.3. Угол между плоскостями орбит

Орбита пассивного КА (ПКА) и близкая к синхронизированной орбита активного КА (АКА) имеют заметно отличающиеся наклонения. Используя теорему косинусов для сферического треугольника (рис. 7.3), можно найти максимальную допустимую разницу в ДВУ, чтобы угол между орбитами не выходил за границы разрешенного диапазона:

$$\Delta\Omega_{\max} = \arccos\left(\frac{\cos\Delta\gamma_{\max} - \cos i_a \cos i_m}{\sin i_a \sin i_m}\right),$$

здесь i_a – наклонение орбиты АКА, i_m – наклонение орбиты ПКА.

Предполагается, что в начальный момент АКА находится на орбите с элементами a_0, i_0 , ПКА – на орбите с элементами a_m, i_m , причем $a_m > a_0$ (пассивный КА находится на более высокой орбите).

Обозначим a_{0c} значение большой полуоси орбиты АКА, которое для наклонения i_0 дает орбиту, синхронизированную с орбиту ПКА. Аналогично i_{0c} обозначено наклонение, которое для большой полуоси a_0 дает орбиту, синхронизированную с орбитой ПКА. Чтобы из начальной орбиты сделать

орбиту, синхронизированную с орбитой ПКА, надо a_0 изменить до величины a_{0c} или i_0 до величины i_{0c} .

В процессе поддержания угла между плоскостями надо также удерживать высоту и наклонение орбиты АКА в заданных диапазонах. Эти процессы оптимально совместить с поддержанием угла между плоскостями.

Если абсолютно точно известна начальная орбита АКА и орбита ПКА и идеально исполнен маневр перевода на синхронизированную орбиту, в дальнейшем на всем интервале поддержания будет сохраняться первоначальный промах по ДВУ $\Delta\Omega_0$ (если не учитывать разную эволюцию других элементов). На рисунке 7.4 данная зависимость $\Delta\Omega$ от времени изображена пунктирной линией.

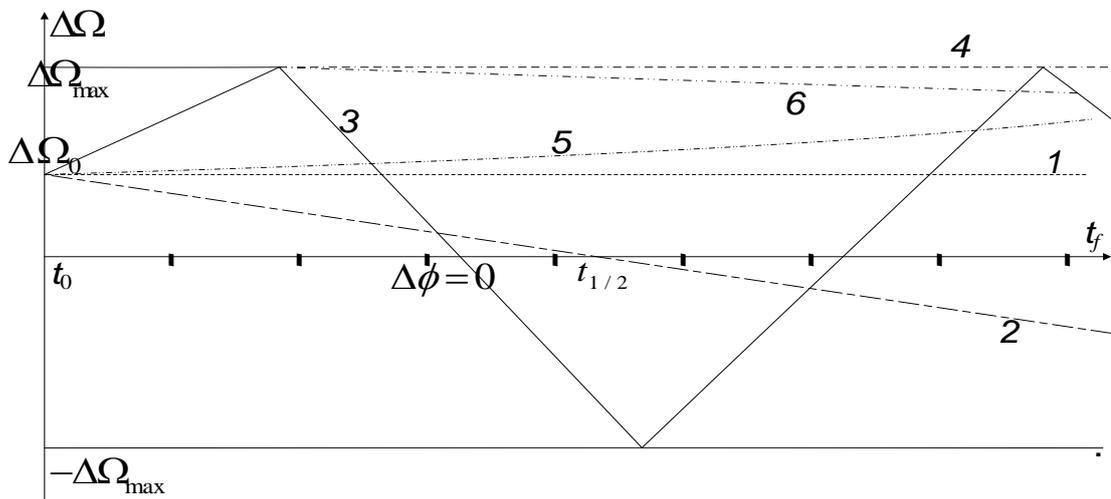


Рис.унок 7.4. Зависимость $\Delta\Omega$ от времени

За счет ошибок формирования синхронизированной орбиты этот промах может начать увеличиваться с течением времени, и в итоге угол γ выйдет из разрешенного диапазона.

Алгоритм решения. Существуют различные стратегии, позволяющие сохранить угол γ в разрешенном диапазоне. Однако, так как основное изменение этого угла происходит за счет изменения отклонения по ДВУ, то все стратегии сводятся к различному изменению $\Delta\Omega$, которое вычисляется с помощью алгоритма, описанного в [122].

Можно сформировать орбиту, имеющую небольшое отличие в скорости прецессии от орбиты ОКА, чтобы в конце интервала поддержания получить отклонение ДВУ равное $-\Delta\Omega_0$. Эта зависимость изображена штрих пунктирной линией 2. При таком изменении $\Delta\Omega$ в середине интервала поддержания его значение будет близким к нулю. Получить $\Delta\Omega=0$ можно на любой заданный момент времени.

Данный подход к поддержанию угла между орбитами позволяет существенно уменьшить затраты и количество выполняемых маневров по сравнению со схемой, когда поддержание осуществляется за счет последовательного изменения высоты орбиты на фиксированную величину $+\Delta h$ и $-\Delta h$, изменение высоты происходит, когда $\Delta\Omega$ достигает граничного значения. Этому варианту на рисунке 7.4 соответствует сплошная пилообразная ломанная 3.

Наиболее эффективной является стратегия, при которой первоначально ожидается момент нарушения ограничения на величину угла γ , а затем (несколькими витками ранее) осуществляется маневр, синхронизирующий орбиты. Данной стратегии на рис. 7.4 соответствует линия 4.

Рассмотренные схемы достаточно точно описывают изменение ДВУ орбит, для которых мало влияние атмосферы. Если влияние атмосферы существенно, то поскольку АКА находится ниже ПКА, то тормозиться он будет сильнее. Вследствие этого даже у первоначально синхронизированной орбиты разница высот будет увеличиваться (у орбиты АКА высота убывает быстрее) что приведет к постепенному увеличению разницы ДВУ орбит. Например, на рисунке 7.4 изменение ДВУ для первоначально синхронизированной орбиты будет представлено не прямой 1, а линией 5. Чтобы учесть этот и другие эффекты изменения разницы ДВУ надо стремиться сформировать в конце интервала поддержания величину разницы ДВУ несколько меньшую максимально допустимой $\Delta\Omega_{\max}$ (линия 6).

Влияние эффекта разной степени уменьшения высоты орбит необходимо учитывать при определении параметров маневров.

Ниже приведен достаточно простой пошаговый алгоритм определения параметров маневров поддержания угла между плоскостями орбит ПКА и АКА:

Начальные условия обоих аппаратов подтягиваются на общий момент времени t_0 ; определяются элементы орбиты АКА $\Omega_{a0}, a_{a0}, i_{a0}$ и элементы орбиты ПКА $\Omega_{m0}, a_{m0}, i_{m0}$

Затем начальные условия обоих аппаратов подтягиваются на момент окончания интервала поддержания t_f ; определяются элементы орбиты АКА $\Omega_{af}, a_{af}, i_{af}$ и элементы орбиты ПКА $\Omega_{mf}, a_{mf}, i_{mf}$.

Вычисляется отклонение ДВУ орбиты ПКА и орбиты АКА на момент t_f :

$$\Delta\Omega_f = k(\Omega_{mf} - \Omega_{af}). \quad (7.6)$$

Коэффициент k позволяет учесть эффект разной степени уменьшения высоты орбит, сдвигая конечное значение Ω_{mf} в разрешенную область (линия б на рис. 7.4).

Определяется необходимая добавка $\Delta\omega_{d0c}$ к скорости прецессии ω_{0c}

$$\Delta\omega_{d0c} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}, \quad (7.7)$$

где $\Delta t = t_d - t_f$.

Определяется Δi_0 , если $\Delta\omega_d < 0$, или Δa_0 если $\Delta\omega_d > 0$, на которые надо изменить соответствующий элемент начальной орбиты

$$\Delta i_0 = \frac{\Delta\omega a_0^{7/2}}{20.647 \cdot 10^{13} \sin i_0}, \quad (7.8)$$

$$\Delta a_0 = \frac{\Delta\omega a_0^{9/2}}{20.647 \cdot 10^{13} \cos i_0}. \quad (7.9)$$

По формулам из предыдущих глав (для близкого к импульсному случаю или варианту ДУ малой тяги) рассчитываются параметры маневра, осуществляющего необходимое изменение орбиты.

С помощью традиционной итерационной процедуры, в которой контролируется значение сформированного отклонения $\Delta\Omega_f$, уточняются параметры маневра.

ГЛАВА 8. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ КОМПЛЕКСОВ ПРОГРАММ

Описанные в предыдущих главах методы и алгоритмы были использованы при создании нескольких программных комплексов, предназначенных для расчета параметров маневров КА в реальных проектах. Данные программные комплексы были использованы для расчета параметров маневров дальнего наведения КА типа «Союз» «Прогресс», для расчета маневров, обеспечивающих встречу при значительном первоначальном отклонении ДВУ (создание спутниковых систем), для решения различных задач маневрирования, связанных с проблемой космического мусора. В данной главе будут приведены примеры решения этих задач.

8.1. Расчет параметров маневров КА «Союз»

В данном разделе рассматриваются задачи определения параметров оптимальных маневров, которые решались в БЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН при баллистико-навигационном обеспечении полета КА «Союз ТМ-30» [101]. Для расчета параметров маневров использовался программный комплекс «Flight» [69], в котором был реализован численный метод, описанный в пятой главе.

В момент выхода на орбиту КА «Союз ТМ-30» разность в угловом положении корабля и станции (разность фаз) составляла $\Delta u \approx 197^\circ$.

Перед первым интервалом маневрирования решалась четырехимпульсная задача. При этом предполагалось, что на 17 витке прикладывается фиксированный импульс скорости величиной 2м/с.

Исходные данные и результаты расчета четырехимпульсной задачи представлены в примере 8.1. В первой части примера приведены начальные условия обоих аппаратов (в гринвичской вращающейся системе координат). Заданы F и a_p динамической атмосферы, а также, сколько гармоник разложения гравитационного потенциала Земли будет учитываться при численном

интегрировании уравнений движения. Прицельная точка задана номером витка и аргументом широты, а также приведено время её достижения пассивным аппаратом. Заданы прицельный вектор и точности выполнения терминальных условий. Отличные от нуля значения диагональных элементов матриц J и J_z указывают, отклонения каких параметров необходимо корректировать.

Во второй части примера приведены разрешенные для приложения импульсов скорости интервалы маневрирования (они заданы номером витка, аргументом широты правой и левой границ) и шаги перебора точек из этих интервалов. Отметим, что углы приложения третьего и четвертого импульсов скорости фиксированы за виток и за пол витка до точки встречи. В массиве $V_r V_i V_z$ указано, какие составляющие импульсов скорости можно использовать для решения задачи (первая позиция соответствует ΔV_r , вторая - ΔV_i , третья - ΔV_z , «1» в соответствующей позиции показывает, что эту составляющую надо использовать, «0» – не надо). В следующей строке определяется, в какой системе координат фиксируется ориентация ДУ во время реализации соответствующего маневра (0-инерциальная стабилизация, 1-орбитальная стабилизация). Эта информация указывается для каждого импульса скорости отдельно, поскольку иногда ориентация ДУ на разных интервалах маневрирования может фиксироваться в разных системах координат. Приводятся также ограничения на минимальную и максимальную величины импульсов скорости, и на минимальное угловое расстояние между ними. В последней строке приводятся значения коэффициентов k_i для функционала W .

В третьей части примера приведена информация о фиксированных импульсах скорости.

В четвертой части представлены полученные на последней итерации результаты определения параметров маневров (составляющие импульсов скорости и аргументы широты точек их приложения). В следующей строке указано сколько потребовалось итераций для решения задачи, приведены значения функционала W , затрат суммарной характеристической скорости и

суммы боковых составляющих импульсов скорости, а также общее число рассмотренных точек пространства F , и число точек отсеянных по различным критериям.

В пятой части дается информация о маневрах, полученная после численного интегрирования. Приводится время включения и время работы ДУ, величина и ориентация импульсов скорости. Поскольку ориентация ДУ фиксировалась в инерциальной системе координат, время включения и ориентация ДУ выбирались таким образом, чтобы на расчетную точку приложения импульса скорости приходилась середина активного участка, а ориентация ДУ в этот момент совпадала с расчетной ориентацией импульсов скорости. Этим объясняется наличие небольших отрицательных тангажей, величина которых пропорциональна величине импульсов, хотя радиальные составляющие импульсов не использовались. Этим объясняется и то, что аргументы широты моментов включения ДУ (последний столбец) немного меньше расчетных моментов приложения импульсов. В этой части примера приведены также отклонения корабля от станции после проведения всех маневров.

В конце примера приведены элементы орбиты долговременной орбитальной станции (ДОС) и элементы орбиты активного КА в начальный момент и после каждого из маневров.

Пример 8.1

	ДОС	КА	Параметры атмосферы	Грав. поле
виток	782.	3.	$F_0=125.0$	$a_p=12.0$ $Ngarm=8.$
дата	06.04.00	04.04.00	прицельная точка:	
время	85139.26	104719.62	виток	аргм. шир.(гр) дата время
X	3.159596	5.570846	33.	344.80 06.04.00 90048.42
Y(км)	-4.262639	-3.503213	приц. вектор:	
Z	-4.110163	.0	R, V_r, V_n, N, Z, V_z (км,м/с)	
V_x	6.286519	2.291193	0. 0. -12.5 0. 0. 0.	
V_y (км/с)	1.022838	3.694669	точности: R, V_r, V_n, N, Z, V_z (км,м/с)	
V_z	3.774388	6.110578	.100 .050 .050 .500 .100 .050	
S	.0390	.0340	диаг. матрицы $J=1. 1. 1. 1. J_z=1. 1.$	

интервалы маневрирования

N импульса	1	2	3	4
виток начала интервала	3	3	32	33
аргум. широты левой границы (град)	200.	200.	344.8	164.8
аргум. широты правой границы (град)	440.	440.	344.8	164.8
шаг перебора интервала (град)	3.0	3.0	0.	0.
используемые составл-е импульса ($V_r V_t V_z$)	011	011	010	010
тип стабилизации ДУ (0-инерц., 1-орбитальн.)	0.	0.	0.	0.
огран-е на миним-ю величину импульса (м/с)	.5	.5	.5	.5
огран-е на максим-ю величину импульса (м/с)	60.	60.	60.	60.
огр-е на мин-е раст-е между импульсами (град)	120.	120.	120.	120.
значения коэффицентов k_i	.007	.007	0.	0.

фиксированные импульсы:

N имп.	виток	арг.шир.(U)	dV (м/с)	курс	тангаж
3	17.	344.8	2.	0.	0.

Приближенное решение: составл-е имп-в и их углы приложения

Номер импульса	1	2	3	4
dV_{ri} dV_{ti} dV_{zi} :	0.	21.25 -10.95	0.	10.84 5.47
Виток арг. шир.:	3.	263.	3.	437.
$N_{it}=5$.	$W=129.70$	$dV_{sum}=64.71$	$dV_{zsum}=16.42$	$N_{all}=821.$
				$NdV=134.$

N	дата	время	dV	курс	танг.	T (с)	вит	арг.шир.
1	20000404.	115124.0	23.90	27.26	-1.94	56.6	3.	261.06
2	20000404.	123445.1	12.14	333.20	-.97	28.6	3.	436.03
3	20000405.	90615.8	2.00	0.	0.	4.7	17.	344.80
4	20000406.	73028.1	6.29	0.	-.49	14.7	32.	344.31
5	20000406.	81501.2	22.38	0.	-1.74	52.2	33.	163.06

Отклонения от станции: км, м/сек

$$R = -0.001 \quad V_r = .008 \quad V_n = -12.499 \quad N = -.046 \quad Z = .0 \quad V_z = 0.$$

Вит.	U	H_{min}	U_{min}	H_{max}	U_{max}	ω	i	Ω	e
782	344.	330.0	7.9	341.6	308.7	41.6	51.6687	117.6062	.00082
3.	360.	192.0	61.2	238.	264.8	71.5	51.6920	130.1112	.00369
3.	264.	237.7	261.1	264.3	86.4	258.8	51.6391	129.7626	.00135
4.	78.	254.6	10.8	274.7	268.8	88.9	51.6315	129.5567	.00022
17.	345.	253.1	7.9	276.0	256.2	10.5	51.6690	123.9449	.00152
32.	345.	253.8	5.4	285.5	185.8	357.7	51.6675	117.9373	.00311
33.	166.	285.1	163.1	337.4	305.7	152.3	51.6688	117.7708	.00447

Приц-я точка: высота (км)=332.6, широта=-11.9, долгота (град)= 332.4

После реализации на третьем и четвертом витках двух первых из рассчитанных импульсов скорости и определения орбиты по измерениям на 13-15 витках решается трехимпульсная задача. При этом определяются параметры маневра на 17 витке и параметры маневров на последнем интервале маневрирования. Применение этого вначале фиксированного, а затем уточняемого маневра на 17 витке позволяет компенсировать ошибки реализации маневров первого интервала маневрирования. В первую очередь их влияние на время прилёта в точку встречи. Компенсировать отклонение этого параметра маневрами последнего интервала маневрирования намного сложнее. Исходные данные для решения трехимпульсной задачи и рассчитанные параметры маневров приведены в примере 8.2.

После исполнения маневра на 17 витке и последующего определения орбиты перед последним интервалом маневрирования на 31-32 витках решается двухимпульсная задача. Исходные данные для её решения и рассчитанные параметры маневров приведены в примере 8.3.

Пример 8.2

	ДОС	КА	Параметры атмосферы	Грав. поле
виток	782.	15.	$F_0=125.0$ $a_p=12.0$	$Ngarm=8.$
дата	06.04.00	05.04.00	прицельная точка:	
время	85137.89	44135.78	виток	аргм. шир.(гр) дата время
X	3.160009	3.866979	33.	344.20 06.04.00 90037.94
Y(км)	-4.262298	5.393846	приц. вектор:	
Z	-4.110167	.0	R, V_r, V_n, N, Z, V_z (км,м/с)	
V_x	6.286416	-3.518402	0. 0. -12.5 0. 0. 0.	
V_y (км/с)	1.023499	2.514312	точности: R, V_r, V_n, N, Z, V_z (км,м/с)	
V_z	3.774374	6.081848	.100 .050 .050 .500 .100 .050	
S	.0390	.031559	диаг. матрицы $J=1. 1. 1. 1. J_z=1. 1.$	

интервалы маневрирования

N импульса	1	2	3
виток начала интервала	17	32	33
аргум. широты левой границы (град)	164.	344.2	164.2

аргум. широты правой границы (град)	410.	344.2	164.2
шаг перебора интервала (град)	1.0	0.	0.
используемые составл-е импульса ($V_r V_t V_z$)	011	010	010
тип стабилизации ДУ (0-инерц., 1-орбитальн.)	0.	0.	0.
огран-е на миним-ю величину импульса (м/с)	.5	1.9	1.9
огран-е на максим-ю величину импульса (м/с)	60.	60.	60.
огр-е на мин-е раст-е между имп-сами (град)	120.	120.	120.
значения коэффициентов k_i	.007	0.	0.

Приближенное решение: составл-е имп-в и их углы приложения

Номер импульса	1	2	3
Сост-е им-в $dV_{ri} dV_{ti} dV_{zi}$:	0. .61 0.	0. 7.87 0.	0. 21.47 0.
Виток арг. шир. (U):	17. 349.0	32. 344.2	33. 164.2
$Nit= 5.$ $W= 29.95$ $dVsum= 29.95$ $dVzsum= .00$ $Nall= 248.$			

	дата	время	dV	курс	танг.	$T(c)$	вит	арг.шир.
1	20000405.	90737.9	.608	0.	.11	1.4	17.	348.95
2	20000406.	73014.9	7.868	0.	-.62	18.4	32.	343.5
3	20000406.	81452.0	21.471	0.	-1.66	49.9	33.	162.54

Отклонения от станции: (км, м/сек)

$$R=0. \quad V_r=0. \quad V_n=-12.500 \quad N=0. \quad Z=-.402 \quad V_z=.052$$

Rev	U	$Hmin$	$Umin$	$Hmax$	$Umax$	ω	i	Ω	e
782.	344.2	329.6	7.9	341.5	308.7	41.93	51.6685	117.6067	.00081
15.	0.	257.5	160.9	274.7	271.3	45.32	51.6695	124.9542	.00120
17.	349.0	255.8	13.3	275.4	270.3	29.49	51.6715	123.9506	.00107
32.	344.8	256.9	4.9	285.5	135.3	357.44	51.6686	117.9417	.00285
33.	165.9	285.1	165.9	337.3	305.0	152.20	51.6699	117.7753	.00446

Приц-я точка: высота (км)=332.7, широта=-12.4, долгота (град)=332.1

Пример 8.3

	ДОС	КА	Параметры атмосферы			Грав. поле		
виток	782.	30.	$F_0=125.0$	$a_p=12.0$	$Ngarm=8.$			
дата	06.04.00	06.04.00	прицельная точка:					
время	84937.62	30537.89	виток аргм. шир.(гр)		дата	время		
X	2.379805	2.004973	33.	344.20	06.04.00	90037.64		
Y(км)	-4.351406	6.325135	приц. вектор:					
Z	-4.522517	0.	$R,$	$V_r,$	$V_n,$	$N,$	$Z,$	V_z (км,м/с)
V_x	6.709404	-4.125250	0.	0.	-14.54	0.	0.17	0.
V_y (км/с)	.459303	1.300320	точности: R, V_r, V_n, N, Z, V_z (км,м/с)					

V_z 3.089667 6.083085 .100 .050 .050 .500 .100 .050
 S .0390 .031063 диаг. матрицы $J=1. 1. 1. 1. J_z=1. 1.$
 интервалы маневрирования

N импульса	1	2
виток начала интервала	32	33
аргм. широты левой границы (град)	284.2	104.2
аргм. широты правой границы (град)	404.2	224.2
шаг перебора интервала (град)	3.0	3.0
используемые составл-е импульса ($V_r V_t V_z$)	111	111
тип стабилизации ДУ (0-инерц., 1-орбитальн.)	0.	0.
огран-е на миним-ю величину импульса (м/с)	.5	.5
огран-е на максим-ю величину импульса (м/с)	60.	60.
огр-е на мин-е раст-е между имп-сами (град)	120.	120.
значения коэффицентов k_i	.007	.007

Приближенное решение: составляющие импульсов и их углы приложения

Номер импульса	1	2
$dV_{ri} dV_{ti} dV_{zi}$:	-2.15 5.78 -2.19	2.36 21.50 -2.29
Виток арг. шир. (U):	32. 323.2	33. 164.2
$Nit=3. W=29.17 dV_{sum}=28.30 dV_{zsum}=4.48 N_{all}=1410.$		

N	дата	время	dV	курс	танг.	$T(c)$	вит	арг.шир.
1	20000406.	72513.7	6.545	20.75	-19.15	15.3	32.	323.20
2	20000406.	81518.6	21.753	6.09	6.24	50.6	33.	164.20

Отклонения от станции: (км, м/сек)

$R=-.001 V_r=.001 V_n=-14.54 N=.002 Z=.170 V_z=0.$

Rev	U	$Hmin$	$Umin$	$Hmax$	$Umax$	ω	i	Ω	e
782.	344.2	330.6	360.0	343.6	300.8	44.95	51.6680	117.6063	.00078
30.	0.	256.2	10.0	274.6	271.3	42.31	51.6707	118.9471	.00134
32.	324.2	257.5	4.4	279.7	114.9	351.86	51.6715	117.9378	.00166
33.	167.6	277.7	164.2	337.0	306.8	153.62	51.6683	117.7690	.00506

Приц-я точка: высота (км)=333.0, широта=-12.4, долгота (град)= 332.12

Для приведенной в примере 8.1 четырехимпульсной задачи проиллюстрируем возможности графического диалога для анализа и изменения получаемого решения.

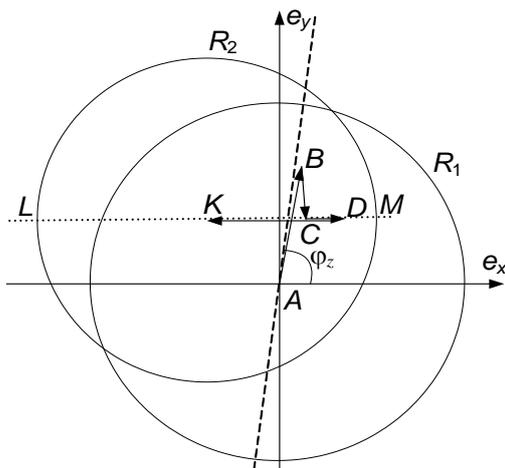


Рисунок 8.1. Оптимальное решение

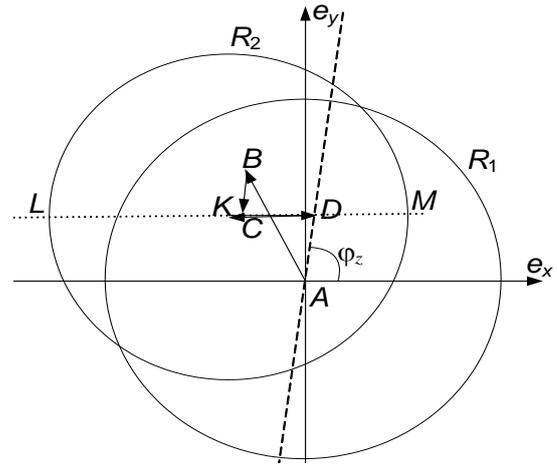


Рисунок 8.2. Решение с уравниванием величин третьего и четвертого импульсов скорости

На рисунке 8.1 изображена картинка, которую оператор видит на экране монитора, после решения задачи на итерации с заданным номером (в данном случае после пятой итерации).

Поскольку углы приложения третьего и четвертого импульсов скорости фиксированы за π и 2π до точки встречи, отрезок LM , с которого импульсами скорости второго интервала маневрирования можно перейти в конечную точку K , параллелен оси e_x и проходит через точку K . Направлению оптимальной коррекции плоскости орбиты соответствует пунктирная линия, проведенная через точку A под углом φ_z к оси e_x . Решению задачи (трансверсальным составляющим импульсов скорости) соответствует ломаная $ABCDK$. Можно видеть, что пунктирная линия пересекает отрезок LM . Как было показано в разделе 4.2, в этом случае оптимальным будет решение, у которого импульсы скорости первого интервала маневрирования прилагаются в точках оптимальной коррекции плоскости орбиты (на линии пересечения плоскостей орбит), а величины боковых составляющих пропорциональны величинам трансверсальных составляющих импульсов скорости. Действительно, у приведенного в примере 8.1 решения,

найденного при помощи численного метода, модули отношений боковых составляющих импульсов скорости к трансверсальным составляющим у первого и второго импульсов примерно равны, а соответствующие трансверсальным составляющим импульсов отрезки AB и BC близки к пунктирной прямой. Небольшое отличие от оптимального аналитического решения связано с тем, что перебор углов приложения импульсов скорости осуществлялся с шагом 3° , поэтому было невозможно точно попасть в оптимальное решение. Третьему импульсу скорости соответствует отрезок CD четвертому DK . Видно, что у оптимального решения импульсы второго интервала (отрезки CD и DK) сильно отличаются по величине. Из рисунка также видно, что, для получения решения, у которого импульсы скорости второго интервала маневрирования будут примерно равны по величине, необходимо уменьшать угол приложения первого импульса скорости. В этом случае отрезок, соответствующий первому импульсу скорости, будет приближаться к точке K .

В разработанном в баллистическом центре ИПМ графическом диалоге существует возможность изменять углы приложения импульсов скорости, а затем обращаться к численному методу для определения величин импульсов скорости. С помощью этой возможности были выбраны углы приложения первого и второго импульсов скорости, обеспечившие получение решения с необходимыми свойствами (рис 8.2). Параметры импульсов скорости этого решения и их углы приложения приведены в Примере 8.4

Пример 8.4

Номер имп-са	1	2	3	4
$V_{ri} V_{ti} V_{zi}$:	.0 21.89 .45	.0 10.09 16.72	.0 14.11 .0	.0 14.95 .0
Виток арг. шир.:	3. 221.0	3. 440.	32. 344.8	33. 164.8
$Nit=8$.	$W=70.49$	$dV_{sum}=70.49$	$dV_{zsum}=17.16$	

У этого решения $CD \approx DK$. Направление отрезка, изображающего второй импульс скорости, близко к направлению пунктирной прямой, следовательно, именно этим импульсом в основном осуществляется коррекция плоскости орбиты

(это видно и по величинам боковых составляющих импульсов скорости). Поскольку затраты на коррекцию плоскости орбиты у нового решения не распределены пропорционально между первым и вторым импульсами скорости, суммарная характеристическая скорость нового решения на 5.8 м/с больше чем у решения, приведенного в примере 8.1.

При решении каждой из приведенных выше задач использовалась итерационная процедура, описанная в первой главе. Эффективность функционирования этой процедуры хорошо видна из данных по итерациям для четырехимпульсной задачи, приведенным в Примере 8.5. Последовательно, по итерациям выведена следующая информация: номер текущей итерации (Nit); суммарный вектор отклонений (SVD), который используется на этой итерации в системе 5.1 для определения параметров маневров; вычисленные на этой итерации составляющие импульсов скорости ($dV_i(V_r, V_n, V_z)$), номера витков и углы приложения импульсов скорости (N_i, U_i), а также получающиеся после реализации маневров, отклонения элементов орбиты корабля от элементов орбиты станции измененных на величину прицельного вектора (CD). Суммарный вектор отклонений (SVD) имеет размерность м/с (координатные составляющие вектора отклонений умножаются на угловую скорость движения по опорной круговой орбите). Используемый на первой итерации суммарный вектор отклонений совпадает с вектором отклонений нескорректированной орбиты корабля от орбиты станции, приведенным в самом начале Примера 8.5. Для ускорения сходимости итерационной процедуры углы приложения импульсов скорости фиксировались на третьей итерации. Как можно видеть из примера, итерационная процедура позволяет быстро и с высокой точностью обеспечить выполнение терминальных ограничений (после каждой итерации отклонения уменьшаются почти на порядок).

Пример 8.5

CD начальные отклонения корабля от станции+ прц. век. [км, м/с]

$R=-141.47$ $V_R=-11.25$ $V_N=95.79$ $N=17538.6$ $Z=2.635$ $V_Z=3.287$

$Nit=1$ *SVD*: 162.504 11.250 -95.792 -20146.397 3.026 3.287

V_{ri}, V_{ti}, V_{zi} : 0. 25.45 4.48 0. 9.68 .02 0. -.77 0. 0. 32.34 0.

$N_i U_i$: 3. 302.0 3. 440.0 32. 344.8 33. 164.8

CD: $R=15.48$ $V_R=-25.47$ $V_N=-11.89$ $N=-1468.2$ $Z=-18.07$ $V_Z=-5.35$

$Nit=2$ *SVD*: 144.713 36.728 -83.893 -18459.880 -17.729 -2.070

V_{ri}, V_{ti}, V_{zi} : 0. 25.58 -13.28 0. 6.47 4.58 0. 5.84 0. 0. 22.92 0.

$N_i U_i$: 3. 263.0 3. 437.0 32. 344.8 33. 164.8

CD: $R=-1.413$ $V_R=17.47$ $V_N=1.70$ $N=3.443$ $Z=1.231$ $V_Z=.310$

$Nit=3$ *SVD*: 146.336 19.253 -85.587 -18463.836 -16.315 -1.760

V_{ri}, V_{ti}, V_{zi} : 0. 21.12 -10.84 0. 10.94 5.59 0. 6.26 0. 0. 22.41 0.

$N_i U_i$: 3. 263.0 3. 437.0 32. 344.8 33. 164.8

CD: $R=.170$ $V_R=-.408$ $V_N=-.207$ $N=7.379$ $Z=.021$ $V_Z=-.007$

$Nit=4$ *SVD*: 146.140 19.661 -85.380 -18472.312 -16.291 -1.767

V_{ri}, V_{ti}, V_{zi} : 0. 21.23 -10.91 0. 10.84 5.48 0. 6.29 0. 0. 22.38 0.

$N_i U_i$: 3. 263.0 3. 437.0 32. 344.8 33. 164.8

CD: $R=.002$ $V_R=-.044$ $V_N=.001$ $N=-.597$ $Z=-.010$ $V_Z=-.003$

$Nit=5$ *SVD*: 146.138 19.705 -85.382 -18471.626 -16.302 -1.771

V_{ri}, V_{ti}, V_{zi} : 0. 21.24 -10.94 0. 10.83 5.47 0. 6.29 0. 0. 22.38 0.

$N_i U_i$: 3. 263.0 3. 437.0 32. 344.8 33. 164.8

CD: $R=-.001$ $V_R=.008$ $V_N=.001$ $N=-.046$ $Z=0.$ $V_Z=0.$

8.2. Примеры расчета параметров маневров в проекте “Mars sample return mission”.

Описанная в шестой главе методика расчета параметров маневров встречи большой продолжительности была реализована в виде программного комплекса, получившего название “GAMA” [106, 107]. Для прогноза движения КА в комплексе использовано высокоточное численно-аналитическое интегрирование уравнений движения “THEONA” [115, 116]. Использование в одном ПК сочетания численно-аналитического прогноза движения КА и численно-аналитического определения параметров позволило за два десятка секунд не только найти решение задач, но построить зависимость СХС от продолжительности перелета. Доходящая до несколько месяцев продолжительность перелета, обусловила плохую сходимость итерационной процедуры, обеспечивающей выполнение терминальных условий. С этим в первую очередь была связана сложность разработки ПК “GAMA”. Для демонстрации возможностей ПК “GAMA” и изложенной в шестой главе методики, положенной в его основу, будут рассмотрены две задачи встречи на орбите Марса [123, 124], [107].

В несостоявшемся проекте “Mars sample return mission” [70] предполагалось, возвращение двух капсул с марсианским грунтом.

Первая капсула, доставленная предыдущим КА, выводилась на орбиту Марса за два года до прилета возвращаемого аппарата. Поэтому предполагалось значительное расхождение в ДВУ орбит возвращаемого аппарата и капсулы. В задаче 1 рассматривалось отклонение $\Delta\Omega=182^\circ$. Вторая капсула доставлялась самим аппаратом, но из-за её длительного пребывания на поверхности Марса и из-за того, что возвращаемый аппарат в это время осуществлял захват первой капсулы, также возникает значительное расхождение в ДВУ ($\Delta\Omega=80^\circ$). В конечном счете, проект не пошел в реализацию, однако приведенные в работе [70] постановки задач оказались очень интересны. Это позволило сравнить решения, найденные различными методами. Данное сравнение уже было использовано в [71]. В этой работе решена первая из задач, приведенных в [70]. Результаты,

полученные в [70], [71] и результаты, полученные с помощью к/п "GAMA" [123, 124], [107], приведены в таблице 8.1.

В работе NASA [70] для решения обеих задач применялась традиционная методика [16], [17], в которой поворот плоскости орбиты осуществляется с помощью специальных импульсов скорости. Далее подобные решения будем называть – «раздельные». В третьей строке таблицы 8.1 приведено решения задачи 1, полученное NASA. Потребовалось 10 импульсов и 320.8 м/с СХС, при продолжительности встречи 123.9 дня. Комплексу "GAMA" для «раздельного» решения потребовалось 6 импульсов и суммарная характеристическая скорость $\Delta V=233.7$ м/с, при продолжительности встречи 123.1 дня. Информация о решении приведена во второй строке таблицы 8.1, параметры решения приведены в Пример 8.6.

В начале примера 8.6 приведены элементы орбит активного КА и КА-цели: минимальная и максимальная высоты над поверхностью Марса H_{min} и H_{max} , аргумент перицентра ω , наклонение i и ДВУ Ω , номер витка и аргумент широты N_{rev} и $Ulat$. Далее приведены СХС маневров и отдельно затраты СХС на маневрирование в плоскости орбиты и на совмещение плоскостей орбиты, а также число итераций, потребовавшихся для решения всей задачи (с уточнением n) и на решение задачи при фиксированном значении n . В следующих строках приведены параметры каждого из маневров: номер витка и аргумент широты момента приложения импульса скорости, а также его составляющие. Далее приведены продолжительность встречи (в днях), значение n , и отдельно число витков полета активного КА и КА – цели. В следующей строке приведены затраты СХС необходимые для изменения вектора эксцентриситета и наклонения орбиты. Завершается пример приведением заданных точностей выполнения терминальных условий и отклонениями в точке встречи сформированной маневрами орбиты от заданной конечной орбиты.

Использовалось апсидальное четырёхимпульсное решение, поэтому четыре внутренних импульса скорости чисто трансверсальные. Углы приложения импульсов одного интервала маневрирования отличаются на 180. Но, как было

показано, направления оптимальной коррекции эксцентриситета разные для первого и второго интервалов маневрирования. Два импульса скорости (первый и последний), исполняемые на экваторе, предназначены для коррекции наклона, однако за счет целенаправленного распределения величин они корректируют и отклонение по ДВУ. Четыре внутренних импульса скорости предназначены для решения задачи встречи на компланарных орбитах. Достаточно было и трех импульсов, но четыре импульса скорости позволяют найти решение более устойчивое к ошибкам как определения орбиты, так и исполнения маневров.

В решении [70] пять трансверсальных импульсов обеспечивают необходимую эволюцию плоскости орбиты для устранения основной разницы в ДВУ, но не решают полностью задачу встречи, а лишь обеспечивают выход на орбиту на 0.5км ниже заданной орбиты. В этот момент разница в положении вдоль орбиты может составлять половину витка. Затем осуществляется необходимое ожидание на этой близкой орбите, чтобы активный КА догнал КА цель (ожидание может продолжаться до двух недель), после этого с помощью двух дополнительных импульсов осуществляется переход на заданную орбиту в малую окрестность КА цели. Так как во время этого окончательного фазирования возникает отклонение по ДВУ, для его коррекции используется специальный импульс скорости, прикладываемый в апексе орбиты. Эти дополнительные импульсы скорости объясняют ту большую разницу в числе используемых импульсов, которая есть в двух сравниваемых решениях. Основное отличие в затратах суммарной характеристической скорости связано с разной схемой коррекции отклонения вектора эксцентриситета (см. раздел 4.5).

Чтобы получить оптимальное решение необходимо, чтобы импульсы скорости имели все составляющие (будем называть такие решения «комбинированные»). В Пример 8.7 приведено решение этого типа, найденное с помощью к/п "GAMA". Для решения задачи потребовалось 4 импульса скорости (величина второго импульса всего 0.54м/с), суммарная характеристическая скорость $\Delta V=202.4$ м/с. Информация об этом решении приведена в первой строке таблицы 8.1.

В четвертой строке таблицы 8.1 приведено трехимпульсное решение, описанное в работе [71]. Решение получено с помощью численного метода. Оно имеет близкие характеристики: затраты СХС $\Delta V=199.52$ м/с, время перелета 133.04 дня. Можно видеть, что расход СХС уменьшился, зато время перелета, как и следовало ожидать, увеличилось. Дальнейшее увеличение времени перелета позволит еще более сократить расход СХС. Такая возможность была реализована посредством КП "ГАМА" и приведена в Примере 8.8. В этом решении используются 4 импульса, $\Delta V=194.6$ м/с, продолжительность перелёта - 144.7 дня, параметры решения приведены в пятой строке таблицы 8.1.

Можно заметить, что во всех приведенных примерах, при поиске «комбинированных» решений и на первом и на втором из интервалах маневрирования параметры импульсов скорости задачи перехода определялись с помощью универсального метода (отсутствовали радиальные составляющие). Было использовано для сравнения и решение из работы Эдельбаума [83], однако СХС была меньше всего на доли процента, а сходимость итерационной процедуры выполнения терминальных условий хуже.

Как было показано ранее, расход СХС уменьшаются при увеличении времени перелета. Высокая скорость расчета ПК "ГАМА" позволяет найти компромиссное время перелета. ПК "ГАМА" позволяет перебирать с заданным шагом число N_f , которое определяет продолжительность перелета КА-цели. При каждом фиксированном N_f получается полное решение задачи, определяются СХС и все параметры импульсов скорости (Пример 8.9) [103]. Данная возможность существенно сокращает полное время решения задачи, по сравнению с решением ряда задач для разных значений N_f . Анализ результатов расчетов, приведенных в Примере 1.4, показывает, что в работе [70] действительно выбрано близкое к оптимальному компромиссное время перелета, так как в промежутке 1350-1400 витков СХС перестает заметно уменьшаться при увеличении времени перелета. Дальнейшее увеличение времени перелета не имеет смысла.

Для второй задачи проекта также приведено оптимальное «комбинированное» решение (Пример 8.10), «раздельное» решение (Пример 8.11) и решение (Пример 8.12) с перебором числа витков полета КА цели (от 800 до 1800 с шагом 200 витков). Сравнить полученные результаты, с результатами [70] можно с помощью таблицы 8.2.

Результаты расчетов, приведенные в Примере 8.12, показывают, что в работе [70] и для второй задачи определено наилучшее компромиссное время перелета. Во всех перечисленных выше примерах предполагались импульсные маневры, т.к. не было информации об используемой ДУ.

ЗАДАЧА 1

Пример 8.6

	начальная орбита	орбита цели
<i>Hmin</i> (км)	250.0	500.0
<i>Hmax</i> (км)	1400.0	700.0
ω (град)	4.0	184.0
<i>i</i> (град)	45.0	46.0
Ω (град)	2.0	184.0
<i>Nrev</i>	1.0	1.0
<i>Ulat</i> (град)	184.0	184.0

$$dV = 233.68 \text{ м/с} \quad dVinpln = 184.68 \text{ м/с} \quad dVoutpl = 49.00 \text{ м/с} \quad Niter = 95 \quad 16$$

<i>Nimp</i>	<i>Nrev</i>	<i>Ulat</i>	<i>dVrd</i>	<i>dVtr</i>	<i>dVlt</i>
1	1.	180.00	0.0	0.0	-47.09
2	2.	185.22	0.0	54.93	0.0
3	3.	5.22	0.0	0.15	0.0
4	1221.	36.48	0.0	-0.67	0.0
5	1222.	216.48	0.0	-128.92	0.0
6	1222.	0.00	0.0	0.0	1.91

$$N_days: 123.1 \quad n = -169.0 \quad REVfnlTG = 1392. \quad REVfnlCH = 1223.$$

$$U1opt = 185.2 \quad E1opt = 109.57 \quad E2opt = 256.5 \quad Z1opt = 47.09 \quad Z2opt = 1.91$$

Заданные точности выполнения терминальных условий

e_x	e_y	a	t	i (град)	Ω (град)
0.0001	0.0001	0.01	0.1	0.0005	0.0005

Отклонения в точке встречи после выполнения маневров

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi (град)	$\Delta \Omega$ (град)
0.0000199	0.0000008	0.0011981	-0.0932687	0.0000011	0.0000036

Пример 8.7

$dV= 202.39$ м/с $dVinpln= 184.22$ м/с $dVoutpl= 56.66$ м/с $Nit=93$ 15

$Nimp$	$Nrev$	$Ulat$	$dVrd$	$dVtr$	$dVlt$
1	2.	186.10	0.0	54.09	-47.41
2	3.	306.19	0.0	0.54	0.09
3	1221.	210.05	0.0	-78.71	-5.47
4	1222.	224.74	0.0	-50.86	3.66

$N_days: 123.1$ $n= -169.0$ $REVfnlTG= 1392.$ $REVfnlCH= 1223.$ $U1opt=183.6$

$E1opt= 107.66$ $E2opt= 257.14$ $Z1opt= 47.5$ $Z2opt=2.1$

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi	$\Delta \Omega$
0.0000002	-0.0000002	-0.0000124	-0.0400580	-0.0000013	-0.0000171

Пример 8.8

$dV= 194.59$ м/с $dVinpln= 186.35$ м/с $dVoutpl= 53.82$ м/с $Niter= 79$ 14.

$Nimp$	$Nrev$	$Ulat$	$dVrd$	$dVtr$	$dVlt$
1	2.	188.50	0.0	50.13	-21.05
2	3.	11.30	0.0	-12.81	4.56
3	1461.	195.93	0.0	5.72	-0.71
4	1462.	5.09	0.0	-117.67	27.48

$N_days: 144.7$ $n= -173.0$ $REVfnlTG= 1636.$ $REVfnlCH= 1463.$

$U1opt=184.6$ $E1opt= 125.88$ $E2opt= 246.60$ $Z1opt= 25.6$ $Z2opt=28.1$

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi	$\Delta \Omega$
-0.0000001	0.0000004	-0.00024	-0.0424021	0.0000052	-0.0000115

Пример 8.9

$dV= 205.66$ м/с $dVinpln= 183.11$ м/с $dVoutpl= 60.77$ м/с $Niter= 73$ 14

$Nimp$	$Nrev$	$Ulat$	$dVrd$	$dVtr$	$dVlt$
1	2.	189.67	0.0	50.87	-47.84
2	3.	34.56	0.0	-2.08	0.67
3	1279.	244.60	0.0	-126.83	-6.51
4	1280.	84.65	0.0	3.30	-5.73

$N_days: 128.2$ $n= -169.0$ $REVfnlTG= 1450.$ $REVfnlCH= 1281.$

$U1opt=185.6$ $E1opt= 105.56$ $E2opt= 259.90$ $Z1opt= 48.5$ $Z2opt= 2.2$

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi	$\Delta \Omega$
-0.0000008	0.0000003	0.0000469	0.0951869	0.0000012	0.0000456

$Nrevtg$	dV	$dVinpln$	$dVoutpl$	n
1050.	293.40	284.35	51.11	-168.
1100.	275.40	266.82	51.52	-168.
1150.	259.69	251.39	54.81	-169.
1200.	245.23	235.24	55.75	-169.
1250.	231.92	221.97	56.34	-170.
1300.	219.46	210.91	53.97	-172.
1350.	208.59	196.96	55.30	-171.
1400.	206.87	187.01	51.38	-169.
1450.	205.66	183.11	60.76	-169.

Таблица 8.1

	ЗАДАЧА 1			
	Число маневров	ΔV (м/с)	%	Время (дни)
GAMA (комбинир-е)	4	202.39	100	123.1
GAMA (раздельное)	6	233.68	115.5	123.1
NASA (раздельное)	10	320.8	158.5 (137.3)	123.9
UT&JetPL (комбинир-е)	3	199.52	98.6	133.04
GAMA (комбинир-е)	4	194.6	96.1	144.7

ЗАДАЧА 2

Пример 8.10

	начальная орбита	орбита цели
H_{min} (км)	475.6	446.8
H_{max} (км)	724.4	553.2
ω (град)	279.3	238.4
i (град)	46.0	45.0
Ω (град)	80.2	1.2
N_{rev}	1.0	1.0
U_{lat} (град)	356.5	105.8

$dV=145.36$ м/с $dV_{inpln}=130.35$ м/с $dV_{outpl}=56.14$ м/с $N_{iter}=73$ 11

N_{imp}	N_{rev}	U_{lat}	dV_{rd}	dV_{tr}	V_{lt}
1	2.	190.96	0.00	-42.60	6.48
2	3.	348.66	0.00	-41.48	-25.61
3	1430.	322.68	0.00	28.90	-2.50
4	1431.	260.91	0.00	17.35	1.53

$N_{days}: 116.9$ $n=59.0$ $REV_{fnlTG}=1374.$ $REV_{fnlCH}=1433.$ $U_{1opt}=86.0$
 $E_{1opt}=16.30$ $E_{2opt}=40.14$ $Z_{1opt}=-51.1$ $Z_{2opt}=-2.2$

Заданные точности выполнения терминальных условий

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi	$\Delta \Omega$
0.0001	0.0001	0.01	0.1	0.0005	0.0005

Отклонения в точке встречи после выполнения маневров

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi	$\Delta \Omega$
0.0000002	0.0000001	0.000023	-0.0148	-0.0000002	-0.000001

Пример 8.11

$dV=181.74$ $dVinpln=130.84$ $dVoutpln=50.91$ $Nit=86$ 16

$Nimp$	$Nrev$	$Ulat$	$dVrd$	$dVtr$	Vlt
1	1.	180.00	0.0	0.0	46.34
2	2.	265.26	0.0	-83.76	0.0
3	3.	85.26	0.0	-0.11	0.0
4	1430.	48.07	0.0	44.10	0.0
5	1431.	228.07	0.0	2.86	0.0
6	1432.	0.00	0.0	0.0	-4.55

$N_days: 116.9$ $n=59.0$ $REVfnlTG=1374.$ $REVfnlCH=1433.$ $U1opt=85.3$
 $E1opt=167.31$ $E2opt=82.47$ $Z1opt=46.3$ $Z2opt=-4.5$

Δe_x	Δe_y	Δa	Δt	Δi	$\Delta \Omega$
-0.0000005	0.0000086	0.0004194	-0.0837062	0.0000011	0.000012

Пример 8.12

$dV=125.47$ $dVinpln=112.10$ $dVoutpl=55.34$ $Niter=30$ 10

$Nimp$	$Nrev$	$Ulat$	$dVrd$	$dVtr$	$dVlt$
1	2.	347.32	0.0	-43.37	-24.18
2	3.	196.98	0.0	-31.32	18.18
3	1859.	174.50	0.0	33.43	11.68
4	1860.	60.77	0.0	3.96	-1.28

$N_days: 153.2$ $n=62.0$ $REVfnlTG=1800.$ $REVfnlCH=1862.$
 $E1opt=22.39$ $E2opt=32.04$ $Z1opt=-41.0$ $Z2opt=-12.2$

<i>Nrevtg</i>	<i>dV</i>	<i>dVinpln</i>	<i>dVoutpl</i>	<i>n</i>
800.	203.00	193.26	55.37	58.
1000.	176.27	166.28	56.06	60.
1200.	156.45	145.34	54.29	60.
1400.	145.78	130.06	62.01	60.
1600.	134.80	119.72	59.00	61.
1800.	125.46	112.10	55.34	62.

Таблица 8.2

	ЗАДАЧА 2			
	Число маневров	ΔV (м/с)	%	Время (дни)
GAMA (комбинир-е)	4	145.36	100	116.9
GAMA (раздельное)	6	181.74	125	116.9
NASA (раздельное)	10	219.6	151 (120.8)	116.9

Таким образом, для обеих задач получены решения с существенно меньшей СХС по сравнению с решениями, приведенными в работе [70]. В работе [71] для первой задачи приведено близкое по затратам СХС решение, но при использовании описанного в этой работе численного метода возникает проблема с определением компромиссного времени перелета. ПК «GAMA» позволяет получить решение, устойчивое к ошибкам исполнения маневров, такой возможности нет у ПК NASA и JPL/TU.

8.3 Задачи маневрирования, связанные с проблемой космического мусора

Последнее время значительное внимание уделяется проблеме обеспечения безопасности полетов КА, из-за возможности их столкновения с объектами

космического мусора. Можно выделить три типа задач маневрирования, связанных с проблемой космического мусора.

Задача уклонения. Наиболее очевидной и хорошо изученной является задача уклонения от столкновения с космическим объектом (КО). Проводятся специальные маневры, которые выводят КА из опасной зоны. Как правило, выполняется трансверсальный маневр, реализуемый за полвитка до предполагаемой точки столкновения и поднимающий КА выше опасной области [50]. Однако, выполнить этот специальный маневр уклонения не всегда возможно. В первую очередь это относится к КА, совершающим маневры встречи. Например, у КА «Союз» и «Прогресс» после выполнения первых двух маневров (на 2-3 витках) из серии четырех связанных маневров встречи, начинаются глухие витки, на которых нельзя проводить маневры. Если орбита фазирования, сформированная первыми двумя маневрами, представляет опасность в плане столкновения на ней с КО, то изменить ее специальным импульсом скорости и за счет этого уклониться от столкновения уже нет возможности. Единственный выход состоит в следующем. Спрогнозировать фазирующую орбиту, которую должны сформировать два первых оптимальных импульса скорости, и, если на этой орбите существует возможность столкновения с КО, то необходимо найти новое решение четырехимпульсной задачи встречи с учетом дополнительного ограничения, что КА после первых двух маневров не должен проходить через опасную область. Найти новое решение можно с помощью геометрической интерпретации импульсов скорости, построив на плоскости e_x, e_y две традиционные окружности, соответствующие сумме трансверсальных составляющих импульсов скорости (глава 3) и область, в которой существует опасность столкновения [125]. Особенно эффективно для поиска такого решения будет использование графического диалога с задачей. Графический диалог позволит найти компромиссное решение, когда КА достаточно далеко выводится из опасной области без существенного увеличения затрат СХС.

Задача оценки. Особенно велика вероятность столкновения с маневрирующим КО, т.к. возникают трудности с прогнозом его движения. Оценка исполненных активным КО маневров позволяет повысить точность прогноза его движения. Задача оценки исполненных маневров заметно отличается от задачи расчета оптимальных маневров перелета на заданную орбиту. Алгоритмы оценки одно- и двухимпульсных маневров активных КО и результаты оценки маневров реальных КА приведены в работах [126, 127, 128]. Применяемый в этих работах численно-аналитический подход к оценке маневров, базируется на численно-аналитических методах, используемых для определения параметров маневров перелета во второй и третьей главах. Алгоритмы, описанные в работах [126, 127, 128], и по скорости работы и по точности оценки маневров имеют существенное преимущество по сравнению с другими немногими известными алгоритмами оценки [129] [130] [139].

Задача увода. Уменьшить вероятность столкновения с КО, а в будущем помешать ее существенному увеличению может увод КО на орбиты захоронения. Задачи этого типа были рассмотрены в работах [131-137].

Существует две возможности уменьшения загрязненности космического пространства. Первая состоит в том, чтобы не увеличивалось число КО, для этого необходимо, чтобы КА в конце срока их активного существования, переводились на орбиты захоронения [122]. Вторая возможность заключается в очистке космического пространства от уже существующих КО и в первую очередь от крупногабаритных космических объектов (ККО). разрушение крупногабаритного космического объекта приводит к появлению большого числа осколков [140], что ведет к лавинообразному росту числа КО. Данный эффект известен под названием синдром Кесслера [141, 140].

Согласно результатам исследований [142, 140, 143], удаление 3-5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволит предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора.

Существует множество проектов возвращения ККО. Наиболее эффективными являются две схемы, в которых один специально посылаемый КА-сборщик может убрать несколько ККО.

Первая схема предполагает последовательный облёт некоторого количества объектов и внедрение в сопло каждого из них малого КА, способного перевести ККО на орбиту захоронения [144]. В соответствии с резолюцией ООН [181] и решением межагентского координационного комитета по космическому мусору (МККМ) [182] был издан ГОСТ 52925-2008[183], согласно которому для низких орбит (высота менее 2000км) орбитой захоронения (орбитой увода) является орбита, на которой искусственный спутник Земли (ИСЗ) будет находиться не более 25 лет.

Вторая схема предусматривает использования одного КА, который с помощью специального узла [145, 146] захватывает ККО и вместе с ним перелетает на орбиту захоронения, а затем летит к следующему ККО.

В первую очередь на орбиты с прогнозируемым сроком баллистического существования необходимо переводить последние ступени ракет-носителей и разгонные блоки. На основании изучения геометрических характеристик этих объектов можно сделать вывод, что их площадь минимального поперечного сечения, как правило, не превышает 5 м^2 [132].

Анализ каталога NORAD [147] позволяет определить пять групп объектов с площадью поперечного сечения более 5 м^2 [132], расположенных на низких околокруговых орбитах. При выделении этих групп было использовано требование малых отличий в наклонении орбит, т.к. коррекция этого элемента требует наибольших затрат СХС.

Первая группа (наклонение 71°) содержит 23 объекта, вторая (наклонение 74°) содержит 11 объектов, третья (наклонение 81°) - 28 объектов, четвертая (наклонение 83°) - 52 объекта, пятая (наклонение $97^\circ - 100^\circ$ солнечно синхронные орбиты (ССО)) - 46 объектов.

Группы определялись по каталогу КО на 21 ноября 2013 года. Время, на которое берется каталог, не существенно, т.к. оценки носят качественный характер и служат для определения возможности и эффективности различных схем возвращения ККО.

Для каждой из групп были рассмотрены обе схемы перевода объектов группы на орбиты захоронения [131-137]. Для расчетов СХС перелета к ККО при наличии существенного отклонения ДВУ использовались формулы (6.28), (6.29), при близких значениях ДВУ формулы из главы 2. Последовательность облета определялась на основе анализа портрета эволюции отклонений ДВУ. Для каждой из групп была определена СХС необходимая для облета всех составляющих ее элементов и требующееся для этого время. Было проведено сравнение полученных результатов для разных схем возвращения, а также сравнение с результатами других исследователей этой проблемы [149, 150]. Были предложены рекомендации по конструкции КА-сборщика, определено число КА-сборщиков и КА-заправщиков, необходимых для перевода элементов каждой из групп на орбиты захоронения.

8.4. Маневрирование с помощью двигателей, имеющих ограниченную постоянную тягу

Задачи этого типа занимают особое место среди задач оптимального маневрирования КА. Им посвящено значительное число статей, можно назвать, например, работы коллектива, которым руководили Т.М. Энеев и В.А.Егоров [158, 159, 160, 161], работы западных авторов [162], [163], [164]. Интересны работы, в которых описано управление реальными КА [19]. Выпущено несколько очень интересных монографий [166], [167], [168], [9], [169]. Особенно следует отметить работы М.С. Константинова [170] и В.Г. Петухова [171, 172, 173]. В силу сложности задач, в которых предполагается, что маневрирование осуществляется с помощью ДУ малой тяги, они традиционно решались численными методами с использованием принципа максимума Понтрягина [155]

или задача разбивались на последовательность более простых частных задач [18], имеющих тривиальное решение, аналогично схеме, используемой для расчёта маневров Shuttle. В последние годы для решения задач с большой протяженностью маневров Ю.П. Улыбышев успешно использует метод внутренней точки [174, 175, 176].

Вопросам маневрирования с помощью ДУ ограниченной мощности также было уделено большое внимание. Были разработаны простые и эффективные алгоритмы определения параметров маневров перехода между компланарными орбитами при фиксированной ориентации ДУ в орбитальной системе координат (ОСК) и инерциальной системе координат (ИСК), алгоритм определения оптимальной изменяющейся ориентации ДУ [177,178]. В пространстве отклонений большой полуоси и эксцентриситета конечной и начальной орбит установлены области, в которой оптимальна каждая из упомянутых выше ориентаций ДУ [179]. Разработан численно-аналитический алгоритм расчета параметров маневров перехода между некомпланарными орбитами [128]. Середины продолжительных участков маневрирования определяются с помощью импульсных решений [180]. Рассмотрены задачи встречи на компланарных и некомпланарных орбитах [184], когда маневрирование осуществляется на каждом витке и когда маневрирование осуществляется на двух разнесенных интервалах.

Ниже приведен пример решения задачи встречи, когда маневрирование на нескольких десятках витков осуществлялось с помощью двигателей малой тяги.

Довыведение МКА на солнечно–синхронную орбиту. В качестве примера рассматривается задача перевода малого космического аппарата (МКА) с орбиты выведения на рабочую солнечно–синхронную орбиту высотой 491км. Одно из налагаемых ограничений заключается в том, что из–за проведения различных технологических операций маневрировать можно не ранее, чем на 50 витке полета. Для того чтобы уменьшить влияние ошибок в определении орбиты, выполненном до начала маневрирования и влияние ошибок, связанных с реализацией рассчитанных маневров, требуется изменение элементов орбиты

было поделено в пропорции 0.8:0.2 между первым и вторым интервалами маневрирования. Первый интервал начинается на 50 витке, второй интервал маневрирования начинался на 85 витке. Сформированная орбита контролировалась в восходящем узле 93 витка. Уточнение орбиты после исполнения маневров первого интервала и последующий пересчет параметров маневров второго интервала позволяет существенно увеличить точность формирования заданной орбиты.

Относительно небольшая продолжительность полёта (43 витка) от начала первого интервала маневрирования до контрольной точки, достаточно большая высота начальной и конечной орбиты, позволили для решения задачи использовать итерационную процедуру, описанную в первой главе. Параметры маневров определялись при использовании простейшей модели движения (центральное поле, линеаризованные уравнения движения). По условию задачи ориентация ДУ фиксировалась в ОСК. При прогнозе учитывалось влияние гравитационного поля 8^*8 и динамическая модель атмосферы.

Ниже приведены таблицы, содержащие входную информацию и результаты расчётов.

В таблице 8.3 приведены элементы начальной и конечной орбиты: минимальная и максимальная высоты орбиты, аргумент перицентра, наклонение и долгота восходящего узла орбиты, номер витка, аргумент широты, баллистический коэффициент, дата и время начальных условий.

Таблица 8.3

Элементы орб.	Нач. орбита	Кон. орбита
Hmin (km)	418.33000	511.00000
Hmax (km)	420.35500	511.10000
Uprg (deg)	218.91800	0.13400000
I (deg)	97.594000	97.544000
gOMG (deg)	11.120000	17.190000
Nrev	1.0000000	1.0000000
Ulat (deg)	93.750000	0.10000000
S (ball)	0.78333000E-02	0.67113000E-02

T (t.sec)	448.28006	966.07807
Data	20120425.000	20120501.000
Time	43120.065	42118.065

В таблице 8.4 приведены используемые характеристики МКА и его двигательной установки: тяга (н), удельный импульс, масса МКА (кг), минимальное время между окончанием одного маневра и началом следующего (с), минимальная и максимальная продолжительность маневров (с).

В таблице 8.5 первое число это – номер витка, на котором должна быть сформирована заданная орбита. Следующие два числа это номера витков, определяющих начало первого и второго интервалов маневрирования. Четвёртое число в массиве показывает, сколько будет витков запрещенных для маневрирования, а затем приводятся значения самих витков. На этих запрещенных для маневрирования витках можно уточнить параметры орбиты и пересчитать величины оставшихся маневров.

В таблице 8.6 заданы точности формирования элементов конечной орбиты: проекций вектора эксцентриситета, большой полуоси [км], времени [с], наклона [град], долготы восходящего узла [град]. Если соответствующее число 0, то данный элемент орбиты не корректируется. Во второй строке таблицы приведены отклонения сформированной орбиты от заданной конечной орбиты.

Таблица 8.4

Тяга	Уд.имп	Вес	ΔT	Tmin	Tmax
0.20	2060.0	300.0	600.0	0.25	3600.0

Таблица 8.5

Nf	N1	N2	N	N11	N21
93.	50.	85.	2.	55.	91.

Таблица 8.6

Ex	Ey	A	T	I	grOMG
0.000250	0.000250	0.010000	0.000000	0.000500	0.000000
-0.000002	0.000000	-0.004580	10.825450	0.000000	-0.068249

В таблице 8.7 приведены параметры импульсного решения, которое используется для оценки качества полученного решения с малой тягой. Приведены суммарный импульс скорости и отдельно суммы трансверсальных и боковых составляющих, а также углы, определяющие момент оптимальной коррекции вектора эксцентриситета и изменения ориентации плоскости орбиты. Эти пять параметров позволяют понять физику задачи.

Далее для сравнения в таблице 8.8 выводятся суммарный импульс скорости и маневрирования при «раздельной» схеме коррекции. В этой схеме отдельно исполняются маневры для изменения элементов в плоскости орбиты и маневры, служащие для поворота плоскости орбиты. Суммарные импульсы скорости для этих маневров это второе и третье числа в таблице. Далее приведены общее число необходимых маневров и число витков, на которых они исполняются. Раздельная схема маневрирования в настоящее время довольно часто используется при маневрировании находящихся на орбите МКА с малой тягой.

В таблице 8.9 приведены параметры основного решения: суммарный импульс скорости и отдельно суммы трансверсальных и боковых составляющих, а также общее число маневров и число итераций, потребовавшееся для формирования заданной орбиты с необходимой точностью.

В таблице 8.10 приведена аналогичная информация отдельно о маневрах на первом и втором интервалах маневрирования.

В таблице 8.11 приведены номер каждого из маневров, виток и аргумент широты его начала и конца, курс и тангаж, задающие ориентацию вектора тяги, величина эквивалентного импульса скорости.

В таблице 8.12 для каждого маневра выводятся дата и время его начала и конца, а также продолжительность маневра в минутах, и величина массы МКА после маневра.

Таблица 8.7

dV _{imp}	dV _{inpln}	dV _{outpl}	UE _{opt}	UZ _{opt}
41.53	41.02	6.51	263.2	0.00

Таблица 8.8

dVsp	dVinpln	dVoutpl	Nman	Nrev
47.56	41.02	6.55	42.	14.

Таблица 8.9

dV	dVinpln	dVoutpl	Nman	Niter
42.30	41.02	7.71	38.0	6.0

Таблица 8.10

dV	dVinpln	dVout	Nman	Rt
33.60	33.03	6.18	30	0.8
8.70	8.57	1.53	8	0.2

Таблица 8.11

Nman	REVbg	U_bg	REVfn	U_fn	COURSE	PITCH	dVi
1	50	138.55	50	248.05	10.50	0.00	1.162
2	50	295.45	51	36.99	-10.69	0.00	1.078
...
29	65	138.55	65	248.05	10.50	0.00	1.162
30	65	295.45	66	36.99	-10.69	0.00	1.078
31	85	139.24	85	245.61	10.21	0.00	1.128
32	85	297.16	86	36.13	-10.02	0.00	1.048
...
37	88	139.24	88	245.61	10.21	0.00	1.128
38	88	297.16	89	36.13	-10.02	0.00	1.048

Таблица 8.12

man	DATAbg	TIMEbg	DATAfn	TIMEfn	dT	Massa
1	20120428.	85324.5	20120428.	92147.2	28.38	299.83
2	20120428.	93407.0	20120428.	100028.3	26.35	299.68
...
29	20120429.	82041.1	20120429.	84922.5	28.69	295.35
30	20120429.	90149.1	20120429.	92828.6	26.66	295.19
31	20120430	154954.8	20120430	161748.2	27.89	295.03
32	20120430	163120.9	20120430	165721.3	26.01	294.88
...
37	20120430	203340.2	20120430	210137.6	27.96	294.09
38	20120430	211511.8	20120430	214116.1	26.07	293.93

Отметим, что суммарная характеристическая скорость импульсного решения и решения с малой тягой практически совпадают, что говорит о высоком качестве решения, учитывающего протяженность работы ДУ. Вместе с тем суммарная характеристическая скорость традиционного «раздельного» решения заметно больше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В диссертации разработаны аналитические, численно-аналитические и численные методы для решения основных задач маневрирования КА в окрестности круговой орбиты. Были разработаны:

- аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров перехода между некомпланарными орбитами, при условии, что у импульсов скорости отсутствуют радиальные составляющие;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных двух-, трех- и четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора вырождается в точку;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных трех- и четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид эллипса;
- аналитический метод расчета параметров оптимальных четырехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид циклоиды;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных трехимпульсных маневров встречи на компланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид циклоиды;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи на компланарных орбитах, при наличии ограничений на высоту орбиты ожидания;
- метод расчета параметров маневров встречи, позволяющий уменьшить влияние ошибок определения орбиты и реализации маневров на первом интервале маневрирования;
- универсальный численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи на некомпланарных орбитах;

- аналитический метод расчета параметров оптимальных шестиимпульсных маневров встречи на некомпланарных орбитах, когда годограф базис-вектора имеет вид спирали;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров дальнего наведения;
- численный метод расчета параметров оптимальных маневров дальнего наведения;
- графический диалог с задачей, позволяющий находить компромиссные решения при наличии противоречивых ограничений;
- универсальный численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров встречи на некомпланарных орбитах при наличии значительного (десятки градусов) первоначального отклонения долготы восходящего узла;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров, гибкого поддержания заданной конфигурации спутниковой системы;
- численно-аналитический метод расчета параметров оптимальных маневров, поддержания угла между плоскостями орбит разноуровневой спутниковой системы.

Данные методы имеют универсальный характер и применимы для широкого класса КА, участвующих в различных проектах. Они успешно использовались при баллистическом обеспечении полетов отечественных и зарубежных КА. Быстрота и надежность получения решения с помощью этих методов, позволяют их использовать для определения параметров маневров на борту КА, что затруднительно для громоздких численных методов. Особенно эффективно использование численно-аналитических методов, когда в процессе получения решения основной задачи приходится решать большое количество обычных задач встречи.

Полученные в диссертационной работе результаты позволяют сделать **следующие выводы:**

- 1) Для классической задачи встречи средней продолжительности установлены типы возможных оптимальных решений, определены области их существования и предложены численно-аналитические методы определения параметров маневров этих решений.
- 2) Разработанные численно-аналитические методы определения параметров маневров позволяют решать все основные задачи маневрирования в окрестности круговой орбиты.
- 3) Достоверность и эффективность этих методов подтверждена их многолетним эффективным использованием в различных проектах полетов реальных космических аппаратов, как у нас в стране, так и за рубежом.
- 4) Геометрическая интерпретация получаемых решений позволяет выполнить их экспресс-анализ, и с помощью графического диалога найти решение, удовлетворяющее дополнительным ограничениям. Эта возможность чрезвычайно важна при возникновении нештатной ситуации, когда необходимо оперативно выбрать новую схему маневрирования.
- 5) Разработанный универсальный метод решения задачи встречи при значительном первоначальном отклонении ДВУ, обеспечивает нахождение компромисса между экономией энергетических затрат и сокращением времени перелета, ведущего к увеличению энергетических затрат. Данный метод предназначен для расчета параметров маневров формирования спутниковых систем, может быть использован при возвращении космического мусора с низких орбит, а также при решении задачи обслуживания.
- 6) Численно-аналитический метод определения параметров маневров относительного поддержания заданной конфигурации спутниковой системы позволяет уменьшить число маневров и обеспечить равномерное распределение энергетических затрат между спутниками системы.

Список литературы

1. Гобец, Долл (Gobetz F.W., Doll J.R.), Обзор импульсных траекторий, Ракетная техника и космонавтика, 1969, т.7, № 5, с. 3-46.
2. Ивашкин В.В., Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет, М., Наука, 1975, 392 с.
3. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Ярошевский В.А., Маневрирование космических аппаратов, М., Машиностроение, 1970, 232 с.
4. Егоров В.А., Пространственная задача достижения луны, М., Наука, 1965, 224с.
5. Соловьёв Ц.В., Тарасов Е.В., Прогнозирование межпланетных полетов, М., Машиностроение, 1973, 400 с.
6. Лоуден Д.Ф. (Lawden D.F.), Оптимальные траектории для космической навигации, М., Мир, 1966, 152 с.
7. Marec J.-P., Optimal Space Trajectories, Studies in Astronautics; V. 1. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam-Oxford-New York, 1979. 329 p.
8. Ильин В.А., Кузмак Г.Е., Оптимальные перелеты космических аппаратов, М., Наука, 1976, 744 с.
9. Решетнев М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.А., Малышев В.А., Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах, М., Машиностроение, 1988, 336с.
10. Li C G, Xiao Y L. Optimization methods of multi-impulse CW rendezvous. Journal of Astronautics, 2006; 27(2): 172-176. [in Chinese]
11. Luo Y Z, Tang G J, Li H Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm. Aerospace Science and Technology 2006; 10(6): 534-540.
12. L. Yazhong, Z. Jin, T. Guojin, Survey of Orbital Dynamics and Control of Space Rendezvous, (2013), doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cja.2013.07.042>.
13. Прассинг (Prussing J.E.), Оптимальная четырехимпульсная встреча в фиксированный момент времени в окрестности круговой орбиты, Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7. № 5, с. 163-172.

- 14.Прассинг (Prussing J.E.), Оптимальные двух- и трехимпульсные встречи в окрестности круговой орбиты при фиксированном времени перехода, Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 7, с. 46-56.
- 15.Jones Jeremy B., Optimal Rendezvous in the Neighborhood of a Circular Orbit, Journal of the Astronautical Sciences, 1976, v. XXIV, № 1, pp.55-90.
- 16.Fehse W., Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft, Cambridge Univ. Press, London, 2003, pp.12-13, 441-449.
- 17.Shuttle Press Kit: STS-92 [on line press kit], <http://www.shuttlepresskit.com/STS-92/>, [retrieved 25 Mar.2007].
- 18.Булынин Ю.Л., Баллистическое обеспечение управления орбитальным движением геостационарных КА на различных этапах эксплуатации, 13 Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», тезисы докладов, Крым, Евпатория, 29 июня-06 июля 2008, с. 73-74.
- 19.Рылов Ю.П., Управление космическим аппаратом, входящим в спутниковую систему при помощи электроракетных двигателей, Космические исследования, 1985,- Т. 23, №. 5. - С. 691.
- 20.Marek J.-P., Contribution a L'Etude des Rendezvous Multi-Impulsionnels, Optimaux,-de Duree Moyenne, Entre Orbits Quasi-Circulaires, Proches, non Coplanaires, 2nd International Colloquium on Methods of Optimization, Novosibirsk, USSR, 1968.
- 21.Бажинов И.К., Ястребов В.Д., Навигация в совместном полете космических кораблей «Союз» и «Аполлон», М., Наука, 1978, 224 с.
- 22.Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют – 6» - «Союз» - «Прогресс», под редакцией Петрова Б.Н., Бажинова И.К. М.: Наука, 1985.
- 23.Баранов А.А., Алгоритм расчета параметров четырех-импульсных переходов между близкими околокруговыми орбитам, Космические исследования, 1986, т.24, № 3, с. 400-403.

- Baranov A.A. Algorithm for Calculating the Parameters of Four-Impulse Transitions between Close Almost-circular Orbits // *Cosmic Research*. – 1986. – V. 24. – № 3. – pp. 324-327.
24. Гаврилов В.П., Обухов Е.В., Задача коррекции с ограничением на число импульсов, *Космические исследования*, 1980, т.18, № 2, с. 163-172.
25. Лидов М.Л., Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений и алгоритмы их решения, *Космические исследования*, 1971, т.9, № 5, с. 687-706.
26. Лидов М.Л., Тесленко Н.М., Оптимизация решения некоторых задач управления полетом космических аппаратов методом спуска по параметру, В сборнике, *Математическое обеспечение космических экспериментов*, М., Наука, 1978, с. 112-141.
27. Гаврилов А.В., Поиск глобального минимума функционала при решении задачи линейного маневра КА, РК техника, научно - технический сборник, серия IX, вып.1, 1995.
28. Колегов Г.А., Избранные разделы космической баллистики искусственных спутников Земли, ЦНИИмаш, 2007, 270 с.
29. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е., Определение и коррекция движения, М., Наука, 1980, 360 с.
30. Лайон, Хенделсмен, (Lion P.M., Handelsman M.), Базис-вектор для импульсных траекторий с заданным временем перелёта, *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, т.6, № 1, с. 153-160.
31. Ежевски, Розендаал (Jezewski D.J., Rozendaal H.L.), Эффективный метод расчета оптимальных N -импульсных траекторий полёта в космическом пространстве, *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, т.6, № 11, с. 138-145.
32. Gross L.R., and Prussing J.E., Optimal Multiple-Impulse Direct Ascent Fixed-Time Rendezvous, *AIAA Journal*, vol.12, No. 7, 1974, pp. 885-889.

33. Prussing J.E., and Chiu J.H., "Optimal Multiple-Impulse Fixed-Time Rendezvous Between Circular Orbits", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 9, No.1, January- February, 1986, pp.17-22.
34. Hughes S.P., Mailhe L.M., and Guzman J.J., "A Comparison of Trajectory Optimization Methods for the Impulsive Minimum Fuel Rendezvous Problem", *Advances in the Astronautical Sciences*, vol. 113, 2003, pp. 85-104.
35. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г., *Основы механики космического полета, Учебное пособие*, М., Наука, 1990, 448 с.
36. Бэттин Р., *Наведение в космосе*, М., Машиностроение, 1966, 447 с.
37. Бэттин Р., *Новый подход к задаче Ламберта*, *Ракетная техника и космонавтика*, 1977, т.15, № 5, с. 122-129.
38. Ермилов Ю.А., Иванова Е.Е., *Пантюшин С.В.*, *Управление сближением космических аппаратов*, М., Наука, 1977, 448 с.
39. Кубасов В.И., Дашков А.А., *Межпланетные полёты*. М., Машиностроение, 1979, 242 с.
40. Эскобал П., *Методы определения орбит*, М., Мир, 1970, 472 с.
41. Херрик С., *Астродинамика*, М., Мир, 1976, 359с.
42. Prussing J.E., "A Class of Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions", *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 48, No. 2, 2000, pp. 31-148.
43. Shen H.J., and Tsiotras P., "Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 26, No.1, January- February, 2003, pp. 50-61.
44. Han C., and Xie H.W., "Study on the Multi-Revolution Lambert Transfer Algorithm for Rendezvous", *Chinese Space Science and Technology*, vol. 24, No. 5, 2004, pp.9-13.
45. Pitkin E.T., "A General Solution of the Lambert Problem", *Journal of the Astronautical Sciences*, 1968, vol. XV, № 5, pp. 270-271.

46. Kriz J.A., A Uniform Solution of the Lambert Problem, *Celestial Mechanics*, 1976, v. 14, pp.509-513.
47. Суханов А.А., Универсальное решение задачи Ламберта, *Космические исследования*, 1988, т. 26, № 4, с. 483-491.
48. Ya-Zhong Luo, Guo-Jin Tang, Yong-Jun Lei, and Hai-Yang Li, Optimization of Multiple-Impulse, Multiple-Revolution, Rendezvous-Phasing Maneuvers, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No.4, July-August, 2007, pp.946-952.
49. Мельников Е.К., Стратегия маневрирования пилотируемой международной космической станции, *Космонавтика и ракетостроение*, 2004, вып. 4(37), с. 176-186.
50. Мельников Е.К., Строительство международной космической станции (планирование и реальное состояние), ЦНИИМАШ, Королев, 2009, с. 176.
51. Колегов Г.А., Мельников Е.К., Долгосрочное планирование маневров формирования рабочих орбит космических комплексов, М., *Известия АН СССР, сер. техн. кибернетика*, 1990, № 3, с. 158-165.
52. Luo Y Z, Tang G J, Li H Y. Optimization of multi-impulse minimum-time rendezvous using a hybrid genetic algorithm. *Aerospace Science and Technology* 2006; 10(6): 534-540
53. Luo Y Z, Tang G J, Lei Y J, et al. Optimization of multiple-impulse multiple-revolution rendezvous phasing maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2007; 30(4): 946-952.
54. Luo Y Z, Zhang J, Li H Y, et al. Interactive optimization approach for optimal impulsive rendezvous using primer vector and evolutionary algorithms. *Acta Astronautica* 2010; 67(3-4): 396-405.
55. Luo Y Z, Li H Y, Tang G J. Hybrid approach to optimize a rendezvous phasing strategy. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2007; 30(2):185-191.
56. Zhang J, Wang X, Ma X B, et al. Spacecraft long-duration phasing maneuver optimization using hybrid approach. *Acta Astronautica* 2012; 72: 132-142.

57. Платонов А.К., Казакова Р.К., Система проектирования орбит в прикладных задачах небесной механики, препринт Института прикладной математики АН СССР, 1976, №106, 39 с.
58. Захаров Ю.А., Проектирование межорбитальных космических аппаратов, М., Машиностроение, 1984, 175 с.
59. Можаяев Г.В., К проблеме оптимизации орбит спутниковых систем, предназначенных для непрерывного обзора поверхности земли, Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, М., 1968, с. 215.
60. Можаяев Г.В., Задача о непрерывном обзоре земли и кинематически правильные спутниковые системы I, II, Космические исследования, 1972, т. 10, № 6, с. 833-843; 1973, т. 11, № 1. с. 59-68.
61. Walker J.G., Some circular orbit patterns providing continuous whole earth coverage, Journal of British Interplanetary Society, 1971, Vol. 24, №. 11, pp. 369-384.
62. Бырков Б.П., Разумный Ю.Н., Решение задачи сплошного многократного покрытия земли полосой обзора ИСЗ, Исследование Земли из космоса, 1992, №. 1, с. 62-68.
63. Разумный Ю.Н., К оптимизации проектно-баллистических параметров систем периодического обзора, Исследование Земли из космоса, 1993, №. 1, с. 48.
64. Ulybyshev Y., Near-Polar Satellite Constellations for Continuous Global Coverage, Journal of Spacecraft and Rockets, 1999, vol. 36, No. 1, pp. 92-99.
65. Улыбышев Ю.П., Проектирование спутниковых систем непрерывного обзора на эллиптических орбитах типа «Молнии», Космические исследования, 2008, т.46, № 2, с. 135-147.
66. Lansard E., Frayssinhes E., Palmade J.-L., Global design of satellite constellations a multi-criteria performance comparison of classical walker pattern and new design patterns, Acta Astronautica, 1998, vol. 42, No. 9, pp. 555-564.

67. Саульский В.К., Многоспутниковые системы с линейной структурой и их применение для непрерывного обзора Земли, *Космические исследования*, 2005, т. 43, № 1, с. 36-53.
68. Гаврилов В.П., Заславский Г.С., Обухов Е.В., Скопцов А.П., Алгоритм решения некоторых задач двухимпульсной коррекции, препринт Института прикладной математики АН СССР, 1975, №125, 34 с.
69. Баранов А.А., Гундобин И.О., Иванов Д.М., Капралов М.А., Терехова Е.О., Управление орбитальным движением КА в программе пилотируемых полетов, Труды XVI Научных чтений по космонавтике, Секция «Прикладная небесная механика и управление движением» (Москва, 3-6 февраля 1992 г.), М., ИИЕТ РАН, 1992, с. 26-27.
70. D'Amario L.A. & al., Mars Orbit Rendez-vous Strategy for the Mars 2003/2005 Sample Return Mission, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper AAS 99-306, pp. 1-19, 16-19 August 1999, Girwood, Alaska.
71. Ocampo C., Guinn J., Breeden J., Rendezvous options and dynamics for the Mars sample return mission, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper AAS 01-415, pp. 1-20, 2001.
72. Zhang J, Luo Y Z, Tang G J. Hybrid planning for LEO long-duration multi-spacecraft rendezvous mission. *Science China Technological Sciences* 2012; 55(1): 233-243.
73. Chao C.C., Schmitt D.L., Eliminating GPS stationkeeping maneuvers by changing the orbital altitude, *Journal of the Astronautical Sciences*, 1991, vol. 39, №. 2, p. 141.
74. Можаяев Г.В., Решение некоторых задач оптимизации процессов гибкой коррекции движения спутниковых систем I, II, *Космические исследования*, 2001, т. 39, №5, с. 518-530; №6, с. 634-647.
75. Муртазин Р.Ф., Алгоритм управления движением космических аппаратов в низкоорбитальных спутниковых системах связи, *Известия РАН, Теория и системы управления*, 1998, № 2, с. 173-182.

76. Lefebvre L., Lamy A., Brousse P., Vincent M., Foliard J., Dufour F., Lasserre E. and Bernussou J., Relative Station Keeping Optimization for Starsys Constellation, Proceedings of the XII International Symposium on Space Flight Dynamics, Germany, Darmstadt, June 1997.
77. Dufour F., Lasserre E., Bernussou J., Optimization and simulation of the station keeping of an homogeneous satellite constellation, 2nd World Automation Congress (WAC'96), Montpellier, France, 1996, pp.169-174.
78. Ulybyshev Y., Long-Term Formation Keeping of Satellite Constellation Using Linear-Quadratic Controller, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1998, vol. 21, №. 1, pp.109-115.
79. Labourdette P., Carbonne D., Goester J.F., ATV Phasing and Post-Escape”, European workshop on space mission analysis, ESOC, December 10-12, 2007.
80. Labourdette P., Carbonne D., Julien E., Chemama F., Kudo G. and Laurent S., Maneuver Plans for the First ATV Mission, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Preprint AAS 09-172, pp. 17
81. Суслов Г.К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.
82. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, М., Наука, 1965, 540 с.
83. Edelbaum T.N., Minimum Impulse Transfer in the Vicinity of a Circular Orbit, Journal of the Astronautical Sciences, 1967, v. XIV, № 2, pp. 66-73.
84. Кузмак Г.Е., Линеаризованная теория оптимальных многоимпульсных плоских перелетов, Космические исследования, 1965, т.3, № 1, с. 1.
85. Бушуев Е.И., Красовский А.А., О геометрическом решении задачи импульсного перехода между близкими почти круговыми орбитами, Космические исследования, 1969, т. 7, № 4, с. 485-489.
86. Ивашкин В.В. “Некоторые импульсные перелеты” // Энциклопедия «Машиностроение», Том IV-22, “Ракетно-космическая техника”. Книга 1, Глава 2.3, п.2.3.6, с.125-141. (ISBN 978-5-94275-589-8). М.: Машиностроение, 2012

87. Баранов А.А. “Перелеты между околокруговыми орбитами” // Энциклопедия «Машиностроение», Том IV-22, “Ракетно-космическая техника”. Книга 1, Глава 2.3, п.2.3.7, с.141-51. (ISBN 978-5-94275-589-8). М.: Машиностроение, 2012
88. Баранов А.А., Численно-аналитическое определение параметров маневров многовитковой встречи КА на близких околокруговых некомпланарных орбитах, Космические исследования, 2008, т.46, № 5, с. 430-439.
89. Муртазин Р.Ф., Баллистическое обеспечение быстрых схем сближения космического корабля с орбитальной станцией// Космические исследования. – 2012. – Т. 50. – № 4. – С.142-149.
90. Баранов А.А., О геометрическом решении задачи импульсного многовиткового перехода между близкими околокруговыми компланарными орбитами, препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1985, №64, 27 с.
91. Баранов А.А., О геометрическом решении задачи встречи на близких почти круговых компланарных орбитах, Космические исследования, 1989, т.27, № 6, с. 808-816.
- Baranov A.A., Geometric Solution of the Problem of a Rendezvous in Close Nearly Circular Coplanar Orbits // Cosmic Research. –1989. – V. 27. – № 6. – pp. 689-697.
92. Баранов А.А., Терехова Е.О., Оптимальная четырехимпульсная встреча на компланарных почти круговых орбитах, Космические исследования, 1995, т.33, № 4, с. 420-425.
- Baranov A.A., Terekhova E.O. Optimal Four-Impulse Rendezvous in Coplanar Near-Circular Orbits // Cosmic Research. – 1995. – V. 33. – No. 4. – pp. 382-387
93. Баранов А.А., Терехова Е.О., Оптимальная по базис-вектору четырехимпульсная встреча в окрестности круговой орбиты, препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1993, № 7, 24 с.

- 94.Ивашкин В.В., Райкунов Г.Г., Многоимпульсные траектории встречи двух космических аппаратов на круговой орбите, *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 3, с. 33-46.
- 95.Ивашкин В.В., Райкунов Г.Г., Оптимизация двухимпульсного маневра встречи двух аппаратов на круговой орбите при наличии ограничений, *Космические исследования*, 1991, т. 29, № 3, с. 352-374.
- 96.Баранов А.А., Ролдугин Д.С., Шестиимпульсные маневры встречи КА на околокруговых некомпланарных орбитах, *Космические исследования*, 2012, т. 50, № 6, с. 472-479.
- Baranov A.A., Roldugin D.S. Six-Impulse Maneuvers for Rendezvous of Spacecraft in Near-Circular Noncoplanar Orbits // *Cosmic Research*. – 2012. –V. 50. – No. 6. – pp. 441-448
- 97.Баранов А.А., Ролдугин Д.С., Определение параметров оптимальных шестиимпульсных и производных пятиимпульсных маневров встречи КА на околокруговых некомпланарных орбитах, препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, № 57, 26 с.
- 98.Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование, М., Мир, 1975, 534 с.
- 99.Баранов А.А., Алгоритм расчета параметров многовитковых маневров дальнего наведения, *Космические исследования*, 1990, т.28, № 1, с. 69-76.
- Baranov A.A. An Algorithm for Calculating Parameters of Multi-Orbit Maneuvers in Remote Guidance // *Cosmic Research*. – 1990. – V. 28. – № 1. – pp. 61-67.
100. Баранов А.А., Оптимальная встреча на близких квазикруговых некомпланарных орбитах, Труды VI Научных чтений по космонавтике (Москва, 11-15 января 1982 г.), М., ИИЕТ АН СССР, 1983, с.172-179.
101. Баранов А.А., Методика расчета параметров маневров встречи КА с орбитальной станцией, препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2008, №6, 32 с.

102. Соболев И.М., Левитан Ю.Л., Получение точек, равномерно расположенных в многомерном кубе, препринт Института прикладной математики АН СССР, 1976, №40, 17 с.
103. Баранов А.А.(мл), Изменение положения КА в спутниковой системе, Космические исследования, 2008, т.46, № 3, с. 219-224.
Baranov A. Jr. A.A. Change of Spacecraft Position in a Satellite Sistem // Cosmic Research. –2008. – Т. 46. – № 3. – pp. 215-218.
104. Райкунов Г.Г., Баллистическое обеспечение обслуживания системы летательных аппаратов, движущихся по круговой орбите, М., Издательство ОАО «Институт подготовки кадров машиностроения и приборостроения», 2002, 102
105. Назаренко А.И., Скребушевский Б.С., Эволюция и устойчивость спутниковых систем, М., Машиностроение, 1981, 288 с.
106. Баранов А.А., Оптимальные переходы между орбитами, имеющими значительные отклонения долготы восходящего узла, Труды XXV Научных чтений по космонавтике (Москва, 24-26 января 2001 г.), М., Война и мир, 2001, с.113.
107. Баранов А.А., Баранов А.А., Алгоритм расчета параметров маневров формирования спутниковых систем, Космические исследования, 2009, т.47, № 3, с. 256-262.
108. Разумный Ю.Н., Баранов А.А., Разумный В.Ю., Козлов П.Г., Мошнин А.А., Методические принципы баллистического проектирования многоярусных спутниковых систем. Актуальные проблемы Российской космонавтики, Труды XXXVII академических чтений по космонавтике (Москва, 29 января – 1 февраля 2013 г.), М., Комиссия РАН, 2013, с. 140–141.
109. Разумный Ю.Н., Козлов П.Г., Разумный В.Ю. Анализ параметрических зависимостей для круговых и эллиптических орбит, обладающих свойством нодальной синхронности // Научно-технический вестник Поволжья. – №3. – 2015. – С. 196-199

110. Разумный Ю. Н., Козлов П. Г., Некоторые результаты оптимизации многоярусных спутниковых систем периодического обзора. Актуальные проблемы Российской космонавтики, Труды XXXVIII академических чтений по космонавтике (Москва, 28 января – 31 января 2014 г.), М., Комиссия РАН, 2014, с. 111.
111. Улыбышев С.Ю., Комбинированные спутниковые системы непрерывного глобального обзора на экваториальных и полярных круговых орбитах типа, Космические исследования, 2015, т.53, № 4, с. 332-344.
112. Баранов А.А., Баранов А.А., Поддержание заданной конфигурации спутниковой системы, Космические исследования, 2009, т.47, № 1, с. 48-54.
113. Baranov A.A., Golikov A.R., Optimal Maneuvers for Station Keeping for a Given Configuration of the Satellite Constellation. Proceedings of the 14 International Symposium on Space Flight Dynamics, pp. 482-485, 08-12 February 1999, Foz do Iguacu, Brazil
114. Степаньянц В.А., Львов Д.В., Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения. // Математическое моделирование. 2000, т. 12, вып. 6, с. 9-14.
115. Akim E.L., Golikov A.R., Numeric-Analytical Satellite Theory, 8th International Symposium on Space Flight Dynamics, Greenbelt, USA, April 1993, Paper No. AAS 93-315.
116. Akim E.L., Golikov A.R., NA-Theory: The Precise Method for Prediction of the Satellite Motion in the Earth Atmosphere, 9th International Symposium on Space Flight Dynamics, St.Petersburg–Moscow, Russia, May 1994.
117. Голиков А.Р., “Численно-аналитическая теория движения искусственных спутников небесных тел”, препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990, №70, 26 с.
118. Голиков А.Р., “Полуаналитическая теория THEONA & анализ движения констелляций”, 5th International Workshop on Constellations and Formation Flying, Евпатория, Украина, журнал “Труды МАИ”, 2008.

119. Малышев В.В., Федоров А.В., Программный комплекс расчета маневров космического аппарата, Международная космическая конференция – 2001 «Космос без оружия – арена мирного сотрудничества в XXI веке», Тезисы докладов, Москва 11-14 апреля, 2001, с. 45-46.
120. Малышев В.В., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н., Нестеренко О.П., Федоров А.В., Программный комплекс для анализа, синтеза и управления космическими системами, Международная космическая конференция – 2001 «Космос без оружия – арена мирного сотрудничества в XXI веке», Тезисы докладов, Москва 11-14 апреля, 2001, с. 43-45.
121. Ван Лицзе, Баранов А.А. Оптимальное удержание космического аппарата с двигателями малой тяги на солнечно-синхронной орбите // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. машиностроение. – 2015. – №2. – С. 68-83.
122. Голиков А.Р., Баранов А.А., Будянский А.А., Чернов Н.В., Выбор низковысотных орбит захоронения и перевод на них выработавших свой ресурс космических аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Машиностроение", 2015. № 4(103), с. 4-19.
123. Labourdette P. & A. Baranov A., Strategies for on-Orbit Rendezvous Circling Mars, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper AAS 01-392, pp. 1-20, 1-6 August 2001, Quebec, Canada. Advances in Astronautical Sciences 2002; 109: 1351-1368.
124. Labourdette P. & Baranov A., A software for rendezvous between near-circular orbits with large initial ascending node difference, Proceedings of the 17 International Symposium on Space Flight Dynamics, pp. 130-142, 16-20 June 2003, Moscow, RF.
125. Баранов А.А., Каратунов М.О. Методика обеспечения безопасности динамической операции встречи на околокруговых орбитах // Инженерный журнал: наука и инновации, 2017, №7, с. 67.

126. Баранов А.А., Каратунов М.О., Оценка параметров двух связанных маневров, выполненных активным космическим объектом // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2016. – № 2. – С. 142-153.
- Baranov A. A. and Karatunov M. O. Estimation of Parameters of two Coupled Maneuvers Performed by an Active Space Object // Journal of Computer and Systems Sciences International.– 2016.– Vol. 55. –No. 2. – pp. 284–295.
127. Баранов А.А., Каратунов М.О., Разумный Ю.Н., Вихрачев В.О. Геометрический метод оценки околокруговой орбиты после однократной коррекции. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2017. – № 1 стр. 141-149
- A.A. Baranov, V.O. Vikhrachev, M.O. Karatunov, Yu.N. Razumnyi, Estimates of Near-Circular Orbits after a Single Correction: a Geometrical Method. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2017, Vol. 56, No. 1, pp. 137–145.
128. Баранов А.А., Каратунов М.О. Апостериорная оценка одно и двухимпульсных маневров, выполненных двигателями большой и малой тяги// Электронный журнал «Молодежный научно-технический вестник» 2013 г. №3
129. Kamensky S., Tuchin A., Stepanyants V., Alfriend K.T., Algorithm of Automatic Detection and Analysis of non-Evolutionary Changes in Orbital Motion of Geocentric Objects, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper AAS 09-103
130. Боровин Г.К., Захваткин М.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Идентификация маневров, выполняемых двигателями малой тяги космического аппарата. Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. №2 (2). С.8.
131. Баранов А.А., Гришко Д.А. Вопросы минимизации затрат суммарной характеристической скорости, необходимой для обслуживания и восполнения спутниковых систем на некомпланарных круговых орбитах. Наука и образование, №9, 2013. С. 289-312.

132. Баранов А.А., Гришко Д.А. Способы уменьшения энергетических затрат при облете элементов спутниковой группировки // Полёт. 2014. № 8 (8). С. 39-48.
133. Баранов А.А., Гришко Д.А. Баллистические аспекты облета крупногабаритного космического мусора на низких околокруговых орбитах// Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2015. – № 4. – С. 160-171.
Baranov A.A., Grishko D.A. Ballistic Aspects of Large-Size Space Debris Flyby at Low Earth Near-Circular Orbits // Journal of Computer and Systems Sciences International. – No.4. – 2015. – pp. 639-650.
134. Баранов А.А., Гришко Д.А., Медведевских В.В., Лапшин В.В. Решение задачи облёта объектов крупногабаритного космического мусора на солнечно-синхронных орбитах // Космические исследования. – 2016. – т.54. – №3. – С. 242-251.
Baranov A.A., Grishko D.A., V. V. Medvedevskikh, and V. V. Lapshin. Solution of the Flyby Problem for Large Space Debris at Sun-Syn-chronous Orbits // Cosmic Research. – 2016. – V.54. – №3. – pp. 242-250.
135. Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Large-Size Space Debris Flyby at Low Earth Orbits. –Cosmic Research, –2017 –Volume 55, – №5, – pp. 361-370.
136. Баранов А.А., Гришко Д. А., Чернов Н.В., Облет низкоорбитальных объектов крупногабаритного космического мусора с их последовательным уводом на орбиту с уменьшенным временем баллистического существования // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал.–2016.– №4.– С. 48-64.
137. Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Li Jun., Flyby of large-size space debris objects and their transition to the disposal orbits in LEO // Advances in Space Research, 2017, 59, p 3011-3022.

138. Baranov A.A., Grishko D.A., Mayorova V.I., The features of constellations' formation and replenishment at near circular orbits in non-central gravity fields// *Acta Astronautica*. – Vol. 116. – November–December 2015. – pp. 307–317.
139. Tuchin A.G., Stepanyants V. A., Agapov V.M., Baranov A. A., Identification Of Maneuvers Executed By Low Thrust Engines. Eighth US/Russian Space Surveillance Workshop Space Surveillance Detecting and Tracking Innovation Maui Hawaii April 18 - 23, 2010
140. J.C Liou & N.L. Johnson; Characterization of the cataloged Fengyun-1C fragments and their long-term effect on the LEO environment; *Advances in Space Research*, Vol. 43, 2009, pp. 1407-1415.
141. D.J. Kessler & B.G. Cour-Palais; Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 83, June 1978, pp.2637- 2646.
142. Adam E. White, Hugh G. Lewis. An adaptive strategy for active debris removal. *Advances in Space Research*, Vol. 53, Issue 8, 15 April 2014, pp. 1195–1206.
143. Lewis H.G, White A.E. Synergy of debris mitigation and removal. *Acta Astronautica* Vol. 81, Issue 1, December 2012, pp. 62–68.
144. M. Castronuovo. Active space debris removal — A preliminary mission analysis and design. *Acta Astronautica*, Vol. 69, Issues 9–10, November–December 2011, pp. 848–859
145. M. Emanuelli, A. Ronse, C. Tintori, V.I. Trushlyakov. A space debris removal mission using the orbital stage of launchers. *Динамика систем, механизмов и машин*. 2012. № 2. С. 185-218., Режим доступа: <http://elibrary.ru/download/25972421.pdf> (Дата обращения 23.07.2015).
146. В.И. Трушляков, Е.А. Юткин. Обзор средств стыковки и захвата объектов крупногабаритного космического мусора. *Омский научный вестник*. 2013. № 2 (120). С. 56-61. Режим доступа: <http://elibrary.ru/download/14905068.pdf> (Дата обращения 12.09.2014).

147. NORAD Satellite Catalog. Режим доступа: <http://www.celstrak.com/satcat/search.asp> (Дата обращения 21.11.2013).
148. *Gavrilov A.V.*, Using branch-and-bound method for rendezvous problem solution, Proceedings of the XV International Symposium on Space Flight Dynamics, 16-20 June 2000, Biarritz, France.
149. Hironori Sahara. Evaluation of a satellite constellation for active debris removal. *Acta Astronautica*, Vol. 105, Issue 1, December 2014, pp. 136–144.
150. Rocket space company Ad Astra™, low Earth orbit large debris removal using VASIMR®. Режим доступа: <http://www.adastrarocket.com/aarc/SpaceCleaner>.
151. Chen T, Kampen E. van, Yu H, et al. Optimization of time-open constrained lambert rendezvous using interval analysis. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2013; 36(1): 175–184.
152. Carter T. E., Alvarez S. A., “Quadratic-Based Computation of Four-Impulse Optimal Rendezvous near Circular Orbit”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 23, No.1, January-February, 2000, pp. 109-117.
153. Ya-Zhong Luo, Hai-Yang Li, and Guo-Jin Tang, Hybrid approach to Optimize a Rendezvous-Phasing Strategy, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 30, No.1, January- February, 2007, pp. 185-191.
154. Hughes S P, Mailhe L M, Guzman J J. A comparison of trajectory optimization methods for the impulsive minimum fuel rendezvous problem. *Advances in Astronautical Sciences* 2003; 113: 85-104.
155. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд.М.:, Наука, 1983.
156. Baranov A.A., Baranov A.A., Satellite Constellation Deployment maneuvers, Proceedings of the Fifth International Workshop on Constellations and Formation Flying, 2-4 July 2008, Evpatoria, Krimea.
157. Boutonnet A., Martinot V., Baranov A., Escudier B., Optimal Invariant Spacecraft Formation Deployment with Collision Risk Management, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.42, No.5, September-October 2005, pp. 913-920.

158. Егоров В.А., Энеев Т.М., Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б. и др., Траекторно-баллистический анализ полетов к астероидам и кометам космических аппаратов с малой тягой. - В кн.: Интеллектуальные системы автономных аппаратов для космоса и океана. Москва. ИПУ РАН. 1997.
159. Eneev T.M., Akhmetshin R.Z., Efimov G.B., Yegorov V.A. Asteroid and Comet rendezvous missions using low-thrust nuclear propulsion - Space Forum. International Journal of Space Politic, Science, Technology, 2000, N. 5, pp. 279-305.
160. Рыжов С.Ю., И.С.Григорьев, В.А.Егоров, Оптимизация многовитковых межорбитальных перелетов КА, препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2005, №63, 33 с.
161. Ахметшин Р.З., Белоглазов С.С., Белоусова Н.С., Глазков А.И., Гуцин В.В., Егоров В.А., Ефимов Г.Б., Оптимизация перелетов к астероидам и кометам КА с комбинированием двигателей большой и малой тяги. - Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1985, № 144.
162. Pollard J.E., Simplified Analysis of Low-Thrust Orbital maneuvers, Aerospace report, no. TR-2000(8566)-10, SMC-TR-0031, pp.1-39
163. Geffroy S., Epenoy R. Optimal Low-Thrust Transfers with Constraints — Generalization of Averaging Techniques // Acta Astronaut. 1997. Vol. 41, No. 3. P. 133–149.
164. Kluever C.A. Low-Thrust Trajectory Optimization Using Orbital Averaging and Control Parameterization// Spacecraft Trajectory Optimization / ed. Bruce A. Conway. Cambridge University Press, 2010. P. 112–138
165. Ilgen M.R. Hybrid Method for Computing Optimal Low Thrust OTV Trajectories // Adv. Astronaut. Sci. 1994. Vol. 87, No. 2. P. 941–958.
166. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Механика космического полета с малой тягой. М., Наука, 1966, 680с.
167. Лебедев В.Н., Расчет движения космического аппарата с малой тягой, М., Изд. ВЦ АН СССР, 1968, 108 с.

168. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. Проблемы совместного управления траекторным и угловым движением. М.: Машиностроение, 1987. 208 с.
169. Захаров Ю.А., Проектирование межорбитальных космических аппаратов, М., Машиностроение, 1984, 175 с.
170. Konstantinov M.S., Optimization of low thrust transfer between noncoplanar elliptic orbits, Paper IAF-97-A.6.06, Turin, Italy, October 1997.
171. Петухов В.Г., Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами, Космические исследования, 2004, т. 42, №3, с. 260-279.
172. Петухов В.Г., Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения, Космические исследования, 2008, т. 46, №3, с. 224-237
173. Петухов В.Г., Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой, Космические исследования, 2012, т. 50, №3, с. 258-270
174. Улыбышев Ю.П., Соколов А.В., Многовитковые маневры с малой тягой в окрестности геостационарной орбиты, Известия РАН, Теория и системы управления, 1999, т.18, № 2, с. 95-100.
175. Улыбышев Ю.П., Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями, Космические исследования, 2008, т.46, № 2, с. 135-147.
176. Улыбышев Ю.П., Оптимизация межорбитальных перелетов с малой тягой при ограничениях, Космические исследования, 2012, т.50, № 5, с. 403-418.
177. Баранов А.А., Баранов А.А., Маневрирование с помощью ДУ, имеющей постоянную малую тягу, Актуальные проблемы Российской космонавтики, Материалы XXXIV Академических чтений по космонавтике (Москва, 26-29 января, 2010 г.), М., Комиссия РАН, 2010, с. 115–116.

178. Баранов А.А., Прадо А.Ф.Б., Разумный В.Ю., Баранов А.А., Оптимальные переходы с малой тягой между близкими околокруговыми компланарными орбитами, *Космические исследования*, 2011, т. 49, № 3, с. 278-288.
Baranov A.A., de Prado A.F.B., Razumny V.Y., Baranov A.A. Jr. Optimal Low-Thrust Transfers Between Close Near-Circular Coplanar Orbits // *Cosmic Research*. – 2011. – V. 49. – № 3. pp. 269-279.
179. Баранов А.А., Разумный В.Ю., Баранов А.А., Формирование и поддержание орбит МКА с помощью двигателей малой тяги, препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2010, № 52, 32 с.
180. Кузмак Г.Е., Брауде А.З., Приближенное построение оптимальных перелётов в малой окрестности круговой орбиты, *Космические исследования*, 1969, т.7, № 3, с. 323-338.
181. Руководящие принципы Комитета ООН по космосу по предупреждению образования космического мусора. – Резолюция 62-й сессии Генеральной Ассамблеи ООН, A/RES/62/217 от 10.01.2008.
182. IADC Space Debris Mitigation Guidelines[Электронный ресурс] / Inter-agency space debris coordination committee–Режимдоступа: http://www.iadc-online.org/index.cgi?item=docs_pub.
183. ГОСТР 52925-2008. Изделия космической техники. Общие требования к космическим средствам по ограничению техногенного засорения околоземного космического пространства.–Введ. 2009-01-01. – М.: Стандартинформ,2008.
184. *Баранов А.А.* Маневрирование в окрестности круговой орбиты. Издательство «Спутник+». Москва. 2016. 512с.