

*На правах рукописи*

Маштаков Ярослав Владимирович

**Использование прямого метода Ляпунова в задачах управления  
ориентацией космических аппаратов**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019 год

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук"

Научный руководитель: Ткачев Степан Сергеевич,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент,  
старший научный сотрудник  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты: Лемак Степан Степанович,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор кафедры прикладной  
механики и управления МГУ

Никонов Василий Иванович  
кандидат физ.-мат. наук,  
младший научный сотрудник  
ВЦ им. А.А. Дородницына РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное  
бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский  
авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)»

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2019 г. в \_\_\_\_\_ час. на заседании  
Диссертационного совета Д 002.024.01, созданного на базе ФГУ «ФИЦ  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН», по адресу:  
125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института  
прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН <http://keldysh.ru/>.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физ.-мат. наук

А.Е. Бондарев

## **Общая характеристика работы**

### **Актуальность тематики исследования**

В настоящее время при помощи космических аппаратов решается огромное количество задач. В их число входят как исключительно научные, например, по изучению гравитационного и магнитного полей Земли, так и прикладные: дистанционное зондирование Земли, обеспечение связи, телевидение.

Если на заре освоения космического пространства для выполнения каких-либо сложных задач было необходимо запускать достаточно громоздкие аппараты весом в несколько сотен и даже тысяч килограммов, то современное развитие технологий позволяет для тех же целей использовать уже малые аппараты, весом в несколько десятков килограммов, что на порядки снижает стоимость их запуска. Помимо миниатюризации, новые технологии также обеспечили и существенное снижение стоимости комплектующих для спутников, что сделало космическое пространство гораздо доступнее: теперь позволить себе запуск аппарата на орбиту могут даже университеты и небольшие команды разработчиков. В то же время, малый размер таких аппаратов накладывает ограничения на объем и массу как полезной нагрузки, так и служебных систем. Все это приводит к необходимости создания новых подходов к построению и реализации их углового движения.

Довольно часто для выполнения научной или прикладной миссии необходимо реализовывать заданное угловое движение космического аппарата. Для этого могут использоваться различные алгоритмы, например представляющие большой практический интерес ляпуновское управление, скользящее управление и многие другие. Как правило, все эти алгоритмы требуют знания модели внешних моментов сил и параметров космического аппарата для точной реализации требуемого для выполнения миссии (опорного) углового движения. В то же время, реализовать точную модель движения на борту не представляется возможным, а значит, не все внешние возмущения могут быть учтены, что будет приводить к ошибкам ориентации. Важным оказывается знание величины этих ошибок (желательно, в виде конечных соотношений), так как оно показывает, справляется ли система ориентации с предъявляемыми к ней требованиями.

Задача отслеживания опорного углового движения может также осложняться дополнительными ограничениями, накладываемыми на

возможную ориентацию космического аппарата, что становится особенно важным при выполнении маневра разворота спутника на большой угол. Такие ограничения могут быть вызваны наличием высокочувствительных оптических датчиков, которые запрещено направлять на яркие объекты. Существует несколько подходов к ее решению, однако они либо требуют больших вычислительных затрат (что делает их непригодными для реализации на борту), либо могут порождать дополнительные положения равновесия, что негативно сказывается на времени переориентации аппарата.

Помимо алгоритмов управления ориентацией особенности малых аппаратов должны быть учтены и при построении самих опорных угловых движений. Например, на малые аппараты дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) не могут быть установлены большие телескопы, а значит, для сохранения приемлемого разрешения получаемых изображений должны использоваться узкоугольные камеры. При этом использование стандартных режимов съемки, когда ось телескопа направлена в надир, или проводится маршрутная съемка вдоль некоторой прямой, существенно снижает возможности аппарата по проведению наблюдений объектов интереса на поверхности Земли. Эта проблема может быть решена, например, при помощи запуска большого количества аппаратов на орбиту, как было сделано американской компанией Planet Labs (на данный момент их спутниковая группировка насчитывает более сотни малых аппаратов формата 3U CubeSat, которые позволяют получать изображение всей поверхности Земли с периодичностью в одни сутки и разрешением около 5 м/пиксель). Еще одним возможным подходом является проведение сложной маршрутной съемки, когда отслеживаются не только прямые линии на поверхности Земли, но и более сложные кривые. Это, однако, требует новых подходов к построению опорного углового движения. В доступных источниках, за редким исключением, не удается найти методов построения таких угловых движений.

Как правило, для точной реализации требуемого опорного движения на малых аппаратах используются маховики. При парировании внешних моментов сил они накапливают избыточный кинетический момент, который необходимо сбрасывать, то есть производить так называемую разгрузку маховиков. И если на низких орбитах для этих целей могут применяться магнитные катушки, которые используют только электроэнергию, то на высоких орбитах единственным вариантом остаются реактивные двигатели. Но они расходуют рабочее тело, что существенным образом сказывается на времени жизни

аппарата и/или на массе возможной полезной нагрузки. Если, по крайней мере, на некоторых этапах выполнения миссии в выборе ориентации есть некоторая свобода (например, при подзарядке аккумуляторных батарей, когда единственным ограничением является малый угол между нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце), то ее можно использовать для того, чтобы моменты внешних сил не способствовали накоплению избыточного кинетического момента, или даже приводили к его сбросу. Хорошим примером здесь может послужить использование гравитационного момента для разгрузки избыточного кинетического момента на орбитальных станциях SkyLab и МКС, что показывает принципиальную возможность использования внешних моментов.

### **Цель работы и решаемые задачи**

Основной целью является разработка методов построения опорных движений космических аппаратов и исследование особенностей их реализации при помощи алгоритмов на основе прямого метода Ляпунова. Для этого были поставлены и решены следующие задачи.

- Оценка точности ориентации, которую обеспечивает стандартное ляпуновское управление, в зависимости от величины внешних неучтенных возмущений и параметров управления.
- Разработка алгоритмов одноосной стабилизации аппарата при наличии ограничений на возможную ориентацию.
- Исследование относительного движения при применении разработанного алгоритма одноосной стабилизации.
- Построение опорного углового движения для отслеживания заданных маршрутов на поверхности Земли.
- Оценка качества получаемых изображений (согласно введенному критерию) в зависимости от ошибок ориентации и стабилизации аппарата.
- Получение ограничений на снимаемые траектории в зависимости от величины возможных управляющих моментов.
- Построение опорного углового движения спутника в режиме солнечной ориентации, при реализации которого обеспечивается разгрузка избыточного кинетического момента накопленного маховиками.

## **Научная новизна работы**

Получены конечные соотношения, связывающие точность ориентации при использовании стандартного ляпуновского управления с величиной внешних возмущений, не учитываемых в контуре управления.

Разработан алгоритм переориентации аппарата при наличии ограничений на его возможную ориентацию. При этом рассмотрена проблема появления дополнительных положений равновесия (как устойчивых, так и неустойчивых), и предложена методика ее решения.

Разработан алгоритм синтеза опорного углового движения спутника ДЗЗ, позволяющий отслеживать произвольные достаточно гладкие траектории на поверхности Земли. Получены конечные соотношения, связывающие качество снимаемого изображения с ошибками ориентации и стабилизации аппарата.

Разработана методика построения опорного углового движения спутника, находящегося в режиме солнечной стабилизации, обеспечивающего разгрузку избыточного кинетического момента маховиков при помощи внешних моментов.

## **Практическая значимость**

Полученные в ходе выполнения диссертационной работы результаты позволяют.

- На предварительных этапах проектирования аппарата подобрать параметры системы ориентации, соответствующие требованиям полезной нагрузки без необходимости проведения массовых численных расчетов.
- Осуществлять разворот космического аппарата при наличии ограничений на его возможную ориентацию, не решая при этом на борту вычислительно сложных оптимизационных задач с ограничениями.
- Расширить возможности малых спутников ДЗЗ, позволяя снимать сложные маршруты на поверхности Земли за один пролет.
- Увеличить время активного существования аппаратов на высоких орбитах путем снижения требуемого запаса рабочего тела для разгрузки маховиков.

## **Используемые методы исследования**

Для решения поставленных задач используются методы теоретической механики, теории устойчивости, численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и асимптотические методы.

## **Апробация результатов работы**

Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- International Astronautical Congress (г. Аделаида, Австралия, 2017 г.; г. Бремен, Германия, 2018 г.).
- IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems, (г. Москва, 2017 г.).
- IAA Symposium “Small satellites for Earth observation”, (г. Берлин, Германия, 2015 г.).
- IAA Conference on University Satellite Missions & CubeSat Workshop, (г. Рим, Италия, 2016, 2017 гг.).
- Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (г. Москва, 2016, 2017, 2018 гг.).
- Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов (г. Самара, 2014 г.).
- Ежегодная научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов, ЦУП (г. Королев, 2017 г.).

Результаты работы также обсуждались на следующих научных семинарах:

- Семинар им. В.А. Егорова (МГУ, г. Москва, 2017, 2018 гг.).
- Семинар кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» МАИ (г. Москва, 2018 г.).
- Семинар кафедры теоретической механики МФТИ (г. Долгопрудный, 2018 г.).
- Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению (МГУ, г. Москва, 2018 г.).
- Семинар отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, 2018 г.)
- Объединенный семинар отделов №5 и №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, 2018 г.).

## **Публикации**

Основные положения и результаты диссертации были опубликованы в 8 изданиях [1–8], включенных в перечень рекомендованных ВАК РФ, из которых

5 индексируются в базах данных Scopus и/или Web of Science, 3 – препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

### **Личный вклад автора**

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач и результаты исследований обсуждались с соавторами.

Диссертационная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 14.607.21.0144, уникальный идентификатор ПНИЭР – RFMEFI60716X0144).

Результаты работы использованы при выполнении грантов РФФИ (№№ 12-01-33045, 13-01-00665, 15-31-20058, 16-01-00634, 16-01-00739) и РФФИ (№№ 14-11-00621, 17-71-20117).



## Содержание работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, списка литературы и приложения.

**Во введении** обосновывается актуальность и практическая значимость работы, а также проводится обзор существующих подходов к решению поставленных задач.

**Первая глава** посвящена исследованию стандартных алгоритмов управления ориентацией на основе прямого метода Ляпунова. Необходимо реализовать требуемое (опорное) угловое движение аппарата, которое задается в виде

$$\mathbf{B}(t), \boldsymbol{\omega}_{ref}(t),$$

где  $\mathbf{B}(t)$  – матрица направляющих косинусов, описывающая опорное движение, то есть переход из инерциальной системы координат (СК) в опорную СК,  $\boldsymbol{\omega}_{ref}(t)$  – опорная угловая скорость. Задачей управления является совмещение связанной с аппаратом СК и опорной СК.

Уравнения углового движения аппарата записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{ext}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{D}, \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{abs}$  – абсолютная угловая скорость спутника,  $\mathbf{J}$  – его тензор инерции,  $\mathbf{M}_{ctrl}, \mathbf{M}_{ext}$  – управляющий и внешний моменты сил соответственно,  $\mathbf{D}$  – матрица перехода из инерциальной СК в связанную СК.

Рассматриваются два алгоритма, для построения которых используются кандидат-функции Ляпунова на основе матриц направляющих косинусов

$$V_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_a(3 - \text{Tr}(\mathbf{A})), \quad k_a = const > 0 \quad (1)$$

и на основе кватернионов

$$V_q = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_q(1 - q_0), \quad k_q > 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{Q} = (q_0, \mathbf{q})^T$  и  $\mathbf{A}$  – кватернион и матрица, описывающая переход из опорной СК в связанную СК,  $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}$ . Дифференцируя эти функции с

учетом уравнений движения, а также требуя их невозрастания, можно получить закон управления, соответствующий функции (1),

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - 4k_a q_0 \mathbf{q},$$

и закон управления, соответствующий функции (2),

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_q \mathbf{q}.$$

Оба этих закона управления имеют схожую структуру и отличаются только одним слагаемым. Более того, в малой окрестности опорного движения, когда  $q_0 \approx 1 - \theta^2 / 8$ , они совпадают с точностью до замены  $k_q = 4k_a$ .

Для дальнейшего анализа записываются уравнения относительного движения, в которых содержатся неучтенные в законе управления внешние возмущения. Рассматриваемые алгоритмы в случае отсутствия возмущений обеспечивают асимптотическую устойчивость требуемого движения, а при наличии достаточно малых возмущений движение будет проходить в малой окрестности требуемого движения. Линеаризация уравнений относительного движения приводит к соотношению

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + k_{\omega}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + 2k_a \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_{dist},$$

где  $\mathbf{M}_{dist}$  – возмущающий момент. Переход от времени к безразмерному параметру

$$\tau = t \sqrt{\frac{M_0}{J_0}},$$

где  $M_0$  – максимальный управляющий момент, который может обеспечить система управления,  $J_0$  – максимальный момент инерции, с учетом малости возмущений по сравнению с величиной управления, позволяет свести систему уравнений к системе с малым параметром

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}'' + K_{\omega}\boldsymbol{\alpha}' + 2K_a \boldsymbol{\alpha} = \varepsilon \mathbf{M}, \quad \varepsilon = \frac{M_{max}}{M_0} \ll 1, \quad |\mathbf{M}| \leq 1.$$

Ее решение ищется в виде разложения по степеням малого параметра, что позволяет найти ошибку ориентации с точностью до величин второго порядка малости в виде

$$|\delta\alpha_i| \leq \begin{cases} \frac{1}{2k_a} M_{max}, & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} \geq 0 \\ \frac{1}{2k_a} M_{max} \operatorname{cth} \left( \frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \right), & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} < 0 \end{cases},$$

$$|\delta\omega_i| \leq \begin{cases} \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \left( \frac{k_\omega + \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}{k_\omega - \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}} \right)^{-\frac{k_\omega}{2\sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}}, & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} \geq 0 \\ \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \exp \left( -\frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \arccos \left( \frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii}}} \right) \right) \times \\ \times \left( 1 + \operatorname{cth} \left( \frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \right) \right), & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} < 0 \end{cases}$$

Результаты первой главы опубликованы в [2,4].

**Во второй главе** диссертации рассматривается задача переориентации аппарата при наличии ограничений на его возможную ориентацию. Для этого, во-первых, требуется решить задачу одноосной стабилизации в общем случае, когда требуется реализовать заданный закон движения оси аппарата  $\mathbf{n}$ . При этом предполагается, что закон изменения этой оси задан в виде достаточно гладкой функции  $\mathbf{n}_{ref}(t)$ , которая записана в проекциях на оси инерциальной СК. Помимо этого, требуется также отслеживать заданную угловую скорость  $\Omega$  вокруг оси  $\mathbf{n}_{ref}$ , что приводит к выражению для опорной угловой скорости в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{ref} = \mathbf{n}_{ref} \times \dot{\mathbf{n}}_{ref} + \Omega \mathbf{n}_{ref}.$$

Для решения этой задачи также используется прямой метод Ляпунова, при этом кандидат-функция Ляпунова записывается в виде

$$V_c = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_c [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{D} \mathbf{n}_{ref})],$$

где  $\mathbf{D}$  – матрица перехода из инерциальной СК в связанную. Находя производную  $\dot{V}_c$  в силу уравнений движения и требуя ее неположительности, можно получить закон управления в виде

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_c(\mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}) \times \mathbf{n}.$$

В дальнейшем рассматривается задача переориентации аппарата при наличии запрещенных зон, которые задаются в виде неподвижных в инерциальном пространстве конусов (рис. 1). Для решения этой задачи кандидат-функция Ляпунова модифицируется:

$$V_r = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_r [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref})] (1 + F), \quad k_r > 0$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}$ ,  $F = \sum_{i=1}^N f_i$ ,

$$f_i(\lambda_i) = \begin{cases} H_i, & \lambda_i < 0, \\ H_i(-3\lambda_i^2 + 2\lambda_i^3 + 1), & 0 \leq \lambda_i \leq 1, \\ 0, & 1 > \lambda_i, \end{cases}$$

$$\lambda_i = \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{D}\mathbf{h}_i) - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}.$$

Здесь  $\mathbf{h}_i$  – ось запрещенного конуса,  $\alpha_i$  – угол его полураствора,  $\beta_i$  – граница зоны влияния (то есть области, на которой запретная зона оказывает влияние на стандартное одноосное управление). Функции  $f_i$  равны нулю вдали от запрещенных зон, и принимают большое значение внутри них, а также являются непрерывно дифференцируемыми. Учитывая, что закон управления подбирается таким образом, чтобы функция Ляпунова  $V_r$  не возрастала во время движения, ось не сможет попасть в запрещенную зону. Эта методика схожа с построением потенциального барьера на границе запрещенной зоны.

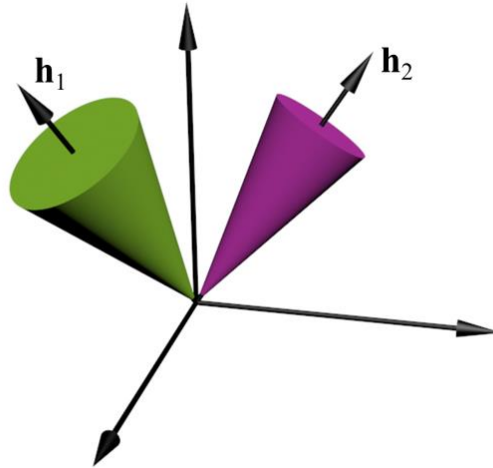


Рис. 1. Запретные зоны

Выражения для управления получаются из условия неположительности производной функции  $V_r$  в силу уравнений движения, и записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl} = & -\mathbf{M}_{ext} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - k_r (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} - \\ & - k_r F (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} - k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^N \frac{f'_i}{\beta_i - \alpha_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}}, \\ f'_i = & \begin{cases} H_i (6\lambda_i^2 - 6\lambda_i), & 0 \leq \lambda_i \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Оказывается, что полученное управление помимо требуемого асимптотически устойчивого положения равновесия может также порождать и дополнительные положения равновесия. В случае, когда запретные области и их области влияния не пересекаются, эти положения равновесия будут седловыми точками. Несмотря на их неустойчивость, существуют начальные данные, соответствующие движению вдоль устойчивого многообразия, то есть не удастся привести ориентацию к заданной (рис. 2). Помимо этого, в случае пересечения запретных областей могут порождаться дополнительные асимптотически устойчивые положения равновесия (рис. 3).

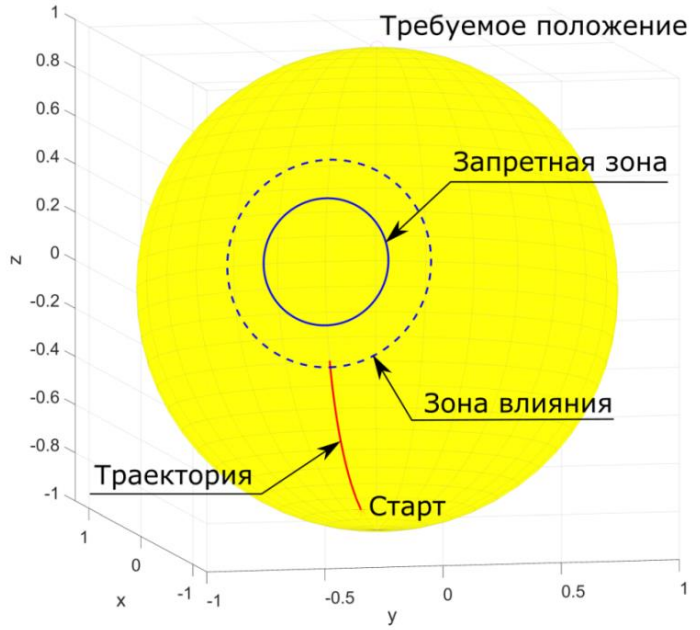
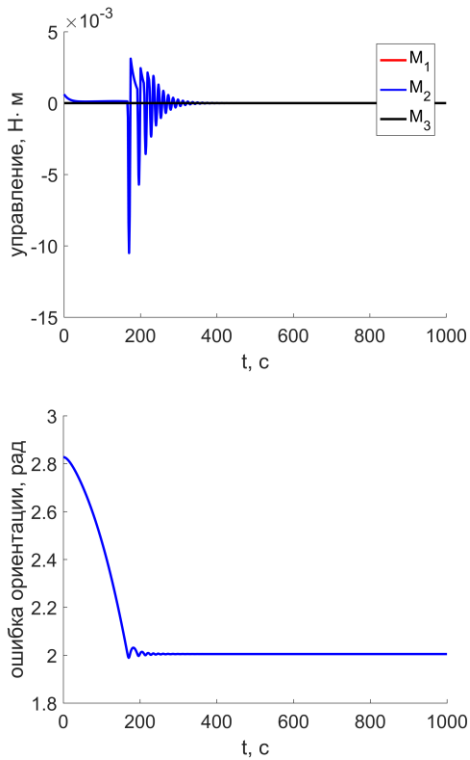


Рис. 2. Движение по устойчивому многообразию

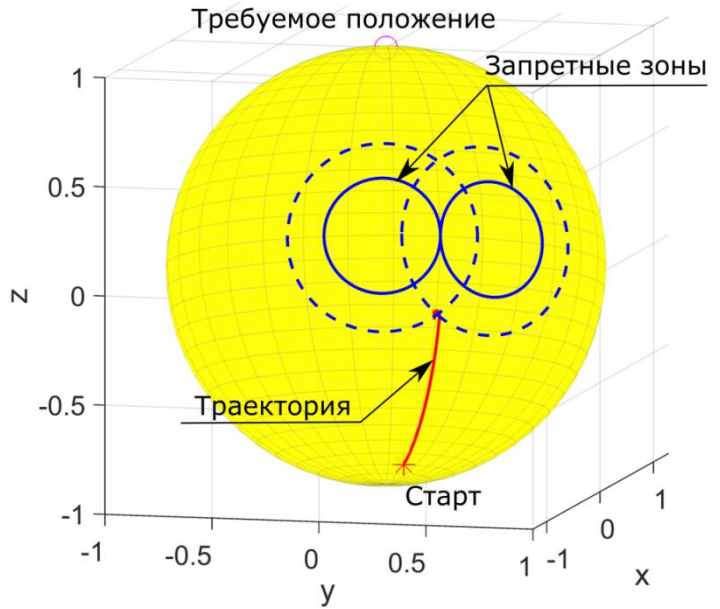
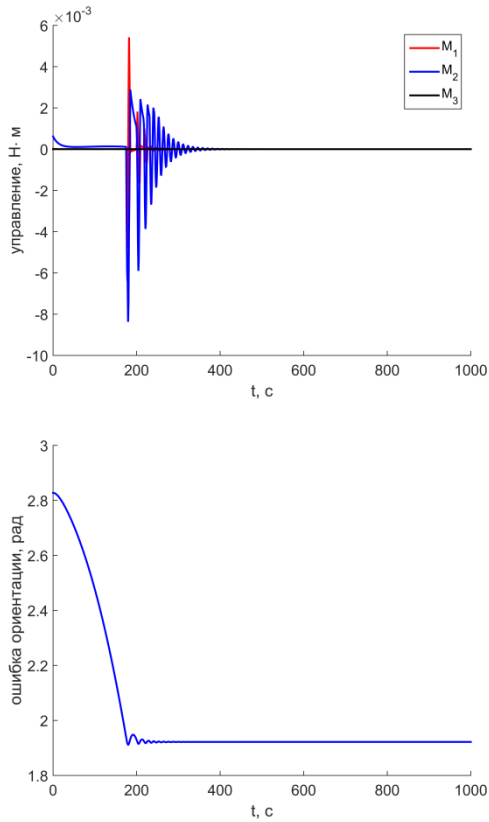


Рис. 3. Движение при наличии асимптотически устойчивого положения равновесия

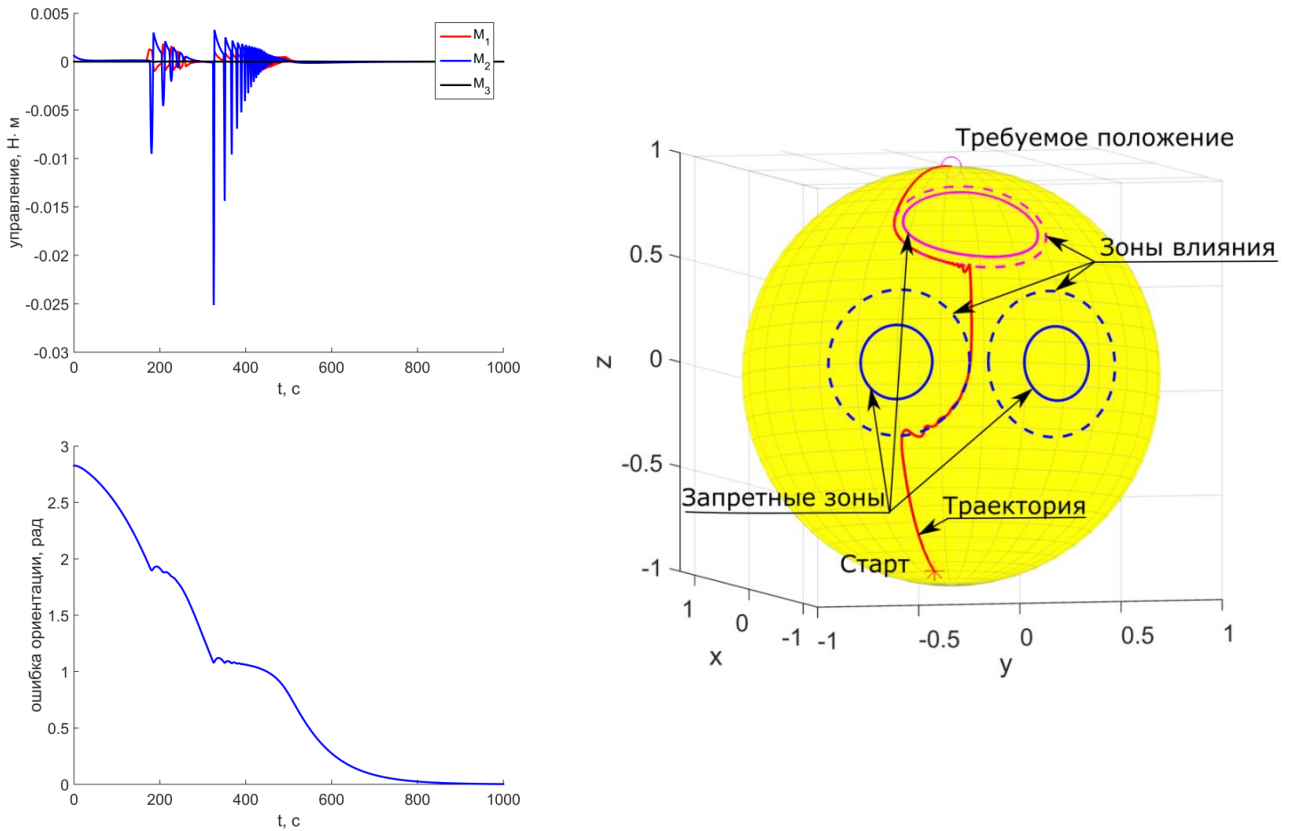


Рис. 4. Общий случай движения с запретными зонами

Для обхода неустойчивых положений равновесия предложено в их малой окрестности вносить дополнительное слагаемое в закон управления

$$\mathbf{M}_{add} = \text{sign}(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})) \mathbf{J} \frac{\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})}{|\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})|} g,$$

$$g = \begin{cases} G(2\mu^3 - 3\mu^2 + 1), & \mu \leq 1, \\ 0, & \mu > 1, \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{d} \geq 0.$$

Здесь  $\mathbf{s}$  – радиус-вектор седловой точки на сфере. В случае, когда  $(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})) = 0$ , полагается, что

$$\mathbf{M}_{add} = \mathbf{J} \frac{\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})}{|\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})|} g.$$

При пересечении запретных областей, когда возникают асимптотически устойчивые положения равновесия, предлагается заменять эти области одной,

которая целиком содержала бы в себе исходные. Для этой цели используется эллипс, определенный на сфере как множество точек

$$\mathbf{P} = \{ \mathbf{x} : \arccos(\mathbf{x}, \mathbf{F}_1) + \arccos(\mathbf{x}, \mathbf{F}_2) = L \}.$$

Здесь  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  – точки на сфере, которые являются «фокусами» эллипса,  $L > \arccos(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  – число, характеризующее размер эллипса. Закон управления тогда записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl} = & -M_{ext} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - k_r [\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}] + \\ & + k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^M \frac{s'_i}{B_i - A_i} \left( \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{DF}_1^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_1^i)^2}} + \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{DF}_2^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_2^i)^2}} \right) - \\ & - k_r [\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}] S, \\ S = \sum_{i=1}^M s_i, s_i = & \begin{cases} H_i, & v_i < 0, \\ H_i (-3v_i^2 + 2v_i^3 + 1), & 0 \leq v_i \leq 1, \\ 0, & 1 > v_i, \end{cases} \\ s'_i = & \begin{cases} 0, & v_i < 0, \\ H_i (-6v_i + 6v_i^2), & 0 \leq v_i \leq 1, \\ 0, & 1 > v_i, \end{cases} \\ v_i = & \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{DF}_1^i) + \arccos(\mathbf{n}, \mathbf{DF}_2^i) - A_i}{B_i - A_i}. \end{aligned}$$

Траектория движения оси  $\mathbf{n}$  по единичной сфере представлена на рис. 4.

Результаты второй главы опубликованы в [7].

**В третьей главе** решается задача построения опорного углового движения аппарата, которое позволяет отслеживать заданные маршруты на поверхности Земли. В качестве чувствительного элемента камеры рассматривается ПЗС-линейка, что накладывает ограничения на скорость бега изображения по ней: вдоль ПЗС-линейки скорость должна быть нулевой, а в ортогональном ей направлении быть заданной. Это позволяет получить выражение для двух из трех компонент угловой скорости аппарата. Для получения условий на третью компоненту угловой скорости используются кинематические соотношения Пуассона. В итоге, задачу построения опорного



углового движения удастся свести к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{p} = \frac{\rho(t, p)V}{f} \frac{1}{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}(t, p), \mathbf{e}_2(t, p))},$$

где  $p$  – параметр траектории,  $\boldsymbol{\tau}$  – касательная к траектории в точке, соответствующей параметру  $p$ ,  $\mathbf{N}$  – матрица перехода из СК, связанной с Землей, в инерциальную СК,  $V$  – требуемая скорость бега изображения,  $f$  – фокальное расстояние линзы,  $\mathbf{e}_2$  определяется из уравнений

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}_p}{dp}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Помимо этого получены выражения, позволяющие связать качество изображения (ошибку скорости бега изображения по чувствительному элементу и расстояние между снимаемой точкой и той, которая должна быть снята) с ошибками ориентации. В случае съемки достаточно близко к надиру они приобретают упрощенный вид

$$\begin{aligned} |\delta\mathbf{r}_p| &\approx \rho^0 |\delta\boldsymbol{\psi}|, \\ |\delta V_3| &\approx f |\delta\boldsymbol{\psi}| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta\boldsymbol{\omega}| + V |\delta\boldsymbol{\psi}|, \\ |\delta V_2| &\approx f |\delta\boldsymbol{\psi}| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta\boldsymbol{\omega}|. \end{aligned}$$

где  $\delta\boldsymbol{\psi}, \delta\boldsymbol{\omega}$  – ошибки ориентации и стабилизации аппарата,  $\boldsymbol{\omega}^0$  – опорная угловая скорость аппарата,  $\boldsymbol{\Omega}_E$  – угловая скорость вращения Земли.

Учитывая ограниченный ресурс управления, не всякую траекторию удастся отследить. Предполагая, что максимальная угловая скорость аппарата ограничена

$$|\boldsymbol{\omega}_{max}| \approx \sqrt{\frac{M_0}{\max_{i,j} |J_{ii} - J_{jj}|}},$$

получена оценка максимальной кривизны траектории, которая может быть отслежена:

$$\kappa \leq f 3\sqrt{3} \frac{(\boldsymbol{\omega}_{max} - 2\boldsymbol{\Omega}_E)}{8\rho V}.$$

Результаты третьей главы опубликованы в [1,2].

**Четвертая глава** посвящена задаче разгрузки маховиков спутника, находящегося на высокой эллиптической орбите, когда использование магнитных катушек является неэффективным. При этом желательной является разгрузка при помощи лишь внешних моментов (солнечного и гравитационного), так как это позволит существенно увеличить время активной жизни аппарата.

Аппарат оснащен двумя идентичными прямоугольными солнечными панелями, центр каждой из которых задан вектором  $\mathbf{R}_i$ , а нормаль – вектором  $\mathbf{n}_i$ . При этом угол между нормальями предполагается малым. Это позволяет записать солнечный момент в виде

$$\mathbf{M}_s \approx \mathbf{R} \times 2a\mathbf{r}_s + [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b + d),$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2), \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2),$$

$$a = -S \frac{\Phi_0}{c} (1 - \alpha\mu), \quad b = -S \frac{2\Phi_0}{3c} \alpha(1 - \mu), \quad d = -2S \frac{\Phi_0}{c} \alpha\mu.$$

Выражение для гравитационного момента записывается в виде

$$\mathbf{M}_{grav} = 3 \frac{\mu}{r_{sat}^5} \mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{J} \mathbf{r}_{sat},$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли,  $\mathbf{r}_{sat}$  – радиус-вектор аппарата,  $\mathbf{J}$  – его тензор инерции.

Предполагается, что аппарат находится в режиме подзарядки солнечных батарей, когда единственным ограничением на его ориентацию является малое отклонение  $\mathbf{n}$  от направления на Солнце  $\mathbf{r}_s$ , то есть

$$(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \geq \cos \theta_{max}.$$

Это оставляет свободу в выборе его ориентации, которая и может быть использована для выбора опорного движения, приводящего к разгрузке.

В режиме солнечной стабилизации аппарат не вращается, а значит, суммарный кинетический момент всей системы будет сконцентрирован в маховиках. Таким образом, для их разгрузки достаточно обеспечить убывание полного кинетического момента, то есть подобрать такую ориентацию, при которой

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}, \mathbf{K}) &\rightarrow \min, \\(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) &\geq \cos \theta_{max}.\end{aligned}$$

Учитывая то, что аппарат движется по высокой эллиптической орбите, можно выделить два режима движения. При движении вблизи перицентра определяющим будет воздействие гравитационного момента, при движении же вдали от него определяющим будет влияние солнечного момента. Таким образом, задача разбивается на две – минимизация проекций солнечного и гравитационного моментов соответственно.

На первом этапе решается задачи разгрузки при помощи только солнечного момента, то есть

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_s, \mathbf{K}) &\rightarrow \min, \\(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) &\geq \cos \theta_{max}.\end{aligned}$$

Вводя удобные системы координат, выражение для скалярного произведения, с учетом малости выражения  $\mathbf{p} \times 2\mathbf{v}(b+d)$  и угла между нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце, приводится к виду

$$\begin{aligned}f \sin(\varphi + \psi) + \theta(g \sin(\varphi) - h \sin(\psi)) &\rightarrow \min_{\psi, \theta, \varphi}, \\-\theta_{max} &\leq \theta \leq \theta_{max},\end{aligned}$$

где параметры  $f, g, h$  отвечают за текущее значение суммарного кинетического момента и геометрию аппарата,  $\psi, \theta, \varphi$  – углы ориентации. Показано, что эта минимизационная задача может быть сведена к решению кубического уравнения. Помимо этого, при условиях

$$\begin{aligned}\psi &= -\frac{\pi}{2} - \gamma_0, \quad \theta = \theta_{max}, \quad \varphi = (1 - \text{sign}(f))\frac{\pi}{2} + \gamma_0, \\ \sin(\gamma_0) &= \frac{-g \text{sign}(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}}\end{aligned}$$

минимизируемая функция принимает значение  $-|f| - \theta_{max} \sqrt{g^2 + h^2}$ , что отличается от ее нижней оценки не более чем в  $\sqrt{2}$  раз.

Солнечный момент оказывается неэффективным при разгрузке кинетического момента вдоль направления на Солнце. Поэтому в перицентре гравитационный момент используется лишь для разгрузки этой компоненты кинетического момента, то есть

$$\left( \mathbf{r}_s(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s), 3 \frac{\mu}{r_{sat}^5} \mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{J} \mathbf{r}_{sat} \right) \rightarrow \min, \\ (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \geq \cos \theta_{max}.$$

Показано, что введением удобных систем координат и переобозначением переменных эта задача может быть переписана в виде

$$F \sin(\alpha + \beta) + \Theta(G \sin \alpha - H \sin \beta) \rightarrow \min_{\alpha, \beta, \Theta}, \\ -\theta_{max} \leq \Theta \leq \theta_{max},$$

что совпадает с задачей разгрузки при помощи солнечного момента.

Также рассмотрен случай, когда спутник движется по круговой орбите (например, геостационарной), когда гравитационный момент практически не оказывает влияния на его угловое движение. В этом случае эволюция кинетического момента вдоль направления на Солнце описывается в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) = (\mathbf{M}_s, \mathbf{r}_s) + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}_{sun} \times \mathbf{r}_s).$$

Первое слагаемое является величиной второго порядка малости, второе же, при наличии запаса кинетического момента, может быть сделано достаточно большим. Учитывая то, что кинетический момент, лежащий в плоскости, ортогональной направлению на Солнце, может быть эффективно изменен при помощи момента сил солнечного давления, для разгрузки маховиков достаточно обеспечить выполнение условия

$$(\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}_{sun} \times \mathbf{r}_s) = -\lambda \text{sign}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s), \quad \lambda = \text{const} > 0.$$

Таким образом, показана возможность использования внешних моментов для разгрузки маховиков.

Результаты четвертой главы опубликованы в [3,5,6,8].

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования.

## **Основные результаты и выводы**

В настоящей работе рассмотрены подходы к построению алгоритмов управления ориентацией на основе прямого метода Ляпунова, а также предложены алгоритмы синтеза опорного углового движения для двух различных сценариев миссий. Основными результатами, полученными в ходе выполнения диссертационной работы, являются:

- 1) оценки точности стандартных алгоритмов управления ориентации на основе прямого метода Ляпунова в конечном виде. Они могут быть использованы на этапе предварительных расчетов облика аппарата для выбора параметров системы ориентации, соответствующих предъявляемым к ней требованиям;
- 2) алгоритм одноосной стабилизации аппарата, который может использоваться для решения задачи переориентации аппарата при наличии ограничений на возможную ориентацию;
- 3) методика синтеза опорного углового движения спутника дистанционного зондирования, позволяющая отслеживать заданные сложные маршруты на поверхности Земли. Получены оценки влияния точности ориентации и стабилизации на качество снимаемого изображения, что, совместно с оценками точности ляпуновского управления, позволяет, не проводя массивных численных расчетов, подобрать необходимые для выполнения миссии датчики и актюаторы;
- 4) методика синтеза опорного углового движения спутника, находящегося в режиме солнечной стабилизации. Показано, что с использованием только моментов внешних сил, а именно гравитационного и солнечного, удастся разгрузить избыточный кинетический момент, накопленный системой маховиков. Предложенная методика работает как для высоких эллиптических орбит с достаточно низким перицентром, так и для орбит с высоким перицентром, когда единственным внешним моментом, действующим на аппарат, является момент сил солнечного давления.

## Список публикаций по теме диссертации

1. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 20. С. 31.
2. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Влияние возмущений на точность стабилизации спутника ДЗЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. № 18. С. 31.
3. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 78. С. 32.
4. Mashtakov Y.V., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. Study of the disturbances effect on small satellite route tracking accuracy // Acta Astronaut. 2016. Vol. 129. P. 22–31.
5. Mashtakov Y.V., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Usage of solar and gravitational torques for reaction wheels desaturation // Proceedings of the 68th International Astronautical Congress, Adelaide, Australia. 2017. V. 11. P. 6888–6896.
6. Mashtakov Y.V., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Fuelless Means of Reaction Wheels Desaturation // Adv. Astronaut. Sci. 2017. Vol. 161. P. 903–921.
7. Mashtakov Y.V. et al. Lyapunov based attitude control algorithm for slew maneuvers with restrictions // Adv. Astronaut. Sci. 2018. Vol. 163. P. 355–364.
8. Mashtakov Y., Tkachev S., Ovchinnikov M. Use of External Torques for Desaturation of Reaction Wheels // J. Guid. Control. Dyn. 2018. P. 1663–1674.

Подписано в печать \_\_\_\_\_. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Тираж 60 экз. Заказ \_\_\_\_\_.

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4