

На правах рукописи

Крутиков Сергей Леонидович

**Базовые инерционные параметры и их
применение в задачах управления
манипуляционными роботами**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре «Робототехнические системы» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,
профессор Зенкевич Станислав Леонидович.*

Официальные оппоненты: *Павловский Владимир Евгеньевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
Лесков Алексей Григорьевич,
доктор технических наук, профессор,
директор Дмитровского филиала
МГТУ им. Н.Э. Баумана.*

Ведущая организация: *Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН.*

Защита состоится «_____» _____ 2013 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.024.01 при *Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*, расположенном по адресу: 125047, Москва, *Миусская пл., 4.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.*

Автореферат разослан «_____» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

Полилова Т. А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Знание уравнений движения исполнительных механизмов роботов-манипуляторов (*манипуляционных механизмов*¹) необходимо для применения современных моментных способов управления и моделирования их движений. Эти уравнения полностью определяются кинематической схемой механизма, его геометрическими и масс-инерционными параметрами. Однако описание динамики с помощью классических инерционных параметров² оказывается неоднозначным: одному и тому же уравнению движения соответствует бесконечное количество наборов значений таких параметров. Это вносит неопределенность в процедуру параметрической идентификации уравнений движения, а также приводит к появлению избыточных вычислительных операций при решении прямой и обратной задач динамики.

Для разрешения неоднозначности вводится множество т.н. *базовых инерционных параметров*, представляющее собой наименьший набор параметров, определяющий уравнения движения и соответствующий им взаимнооднозначно при неизменных кинематических параметрах. Отдельной задачей оказывается поиск связи такого множества параметров с классическими инерционными параметрами. В настоящее время существуют численные³ и аналитические⁴ методы решения этой задачи. Однако первые принципиально являются

¹ Здесь и далее под манипуляционным механизмом понимается совокупность абсолютно твердых тел, связанных кинематическими парами пятого класса и образующих разомкнутую кинематическую цепь, основание которой неподвижно.

² Имеются в виду масса, координаты центра масс, осевые и центробежные моменты инерции

³ Gautier, M. Identification of the minimum inertial parameters of robots / M. Gautier, W. Khalil // Proceedings of IEEE Conf. on Robotics and Automation. – 1989. – P. 1529-1534.

Mayeda, H. Base parameters of manipulator dynamic models / H. Mayeda, K. Yoshida, K. Osuka // IEEE Trans. on Robotics and Automation. – 1990. – Vol. 6. – № 3. – P. 312-320.

⁴ Gautier, M. Numerical calculation of the base inertial parameters of robots / M. Gautier, W. Khalil // Proceedings of IEEE Conf. on Robotics and Automation. – 1989. – P. 1529-1534.

приближенными, причем невозможно определить, в каких случаях результат совпадает с истинным, а в каких — нет. Вторые же дают точное решение, но только для манипуляторов с параллельными или перпендикулярными осями соседних сочленений. Другой важной задачей является запись уравнений движения в терминах базовых инерционных параметров.

Цель работы состоит в формализации понятия базовых инерционных параметров, удобной для создания метода их поиска, позволяющего получить аналитическое решение для манипуляторов с произвольно ориентированными осями сочленений, разработке такого метода поиска, а также разработке способов формирования уравнений движения и идентификационной модели манипуляционного механизма в терминах базовых инерционных параметров.

Методы исследования. В работе используются методы линейной алгебры, теоретической механики, математического моделирования.

Научная новизна работы заключается в следующем:

Предложена интерпретация полной энергии, лагранжиана и левой части уравнений движения манипуляционного механизма как векторов линейного пространства функций. Показано, что базовые инерционные параметры могут быть определены как коэффициенты разложения этих векторов по базису некоторой конечной системы векторов⁵ пространства функций. Введены множества базовых параметров отдельно для полной энергии, лагранжиана и уравнений движения, доказаны необходимые и достаточные условия их равенства. Доказана теорема, указывающая способ конструирования конечномерного линейного пространства, включающего коэффициенты влияния на лагранжиан. Предложен новый метод поиска базовых параметров, основанный на определении координат упомянутых коэффициентов влияния в базисе

Sheu, S.-Y. Basis sets for manipulator inertial parameters / S.-Y. Sheu, M.W. Walker // Proceedings of IEEE Conf. on Robotics and Automation. – 1989. – P. 1517-1522.

⁵ Далее мы будем называть их *коэффициентами влияния*

этого пространства. Получены рекуррентные соотношения для вычисления координат коэффициентов влияния, и разработан рекурсивный алгоритм реализации предложенного метода. Выведены уравнения движения манипуляционного механизма в терминах базовых инерционных параметров в форме рекуррентных соотношений.

Теоретическая и практическая значимость.

Предложенная автором формализация понятия базовых инерционных параметров позволила создать метод их поиска, который, в отличие от существующих методов, предоставляет аналитическое решение для манипуляционных механизмов с произвольно ориентированными осями сочленений. Кроме того, созданный метод допускает обобщение на случай механизмов с древовидной кинематической схемой, а также кинематическими парами произвольного класса. Разработанный рекурсивный алгоритм реализации этого метода обеспечивает быстрое действие, сравнимое с существующими численными методами поиска базовых параметров, причем, в отличие от последних, получаемое решение является точным, а не приближенным. Доказанные условия равенства трех различных вариантов базовых инерционных параметров дают возможность применять интегральную форму теоремы об изменении полной энергии для их идентификации. Преимущество такого подхода состоит в отсутствии необходимости измерения или оценки обобщенных ускорений, а также в меньшем количестве вычислений. Наконец, полученная форма уравнений движения позволяет исключить избыточные арифметические операции при расчете обратной задачи динамики.

Обоснованность и достоверность предложенного подхода к определению понятия базовых параметров, а также построенных на его основе методов, вытекает из получения с их помощью известных результатов.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались на научно-техническом семинаре кафедры «Роботы и робото-

технические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2009 г.; на XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в 2011 г; на специальном семинаре «Динамика относительного движения» кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в декабре 2010 г. и в феврале 2013 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них три статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК [1–3], одна статья в сборнике трудов конференций и одна в тезисах докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы из 40 наименований и 2 приложений. Основная часть работы составляет 145 страниц машинописного текста, включая 3 таблицы и 10 рисунков.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** описано применение классических инерционных параметров в основных задачах механики манипуляционных роботов, используемых для управления ими: это обратная задача динамики (ОЗД), необходимая в расчетах моментов приводов сочленений, а также, требующаяся в ряде случаев, идентификация параметров уравнений движения.

В первом разделе главы изложены основные сведения об однородных координатах и преобразованиях и их применении для кинематического описания манипуляционного механизма. Второй раздел главы посвящен полу-

чению уравнений движения с помощью однородных координат. Поскольку связи наложенные на манипуляционный механизм являются стационарными, удерживающими, голономными и идеальными, справедливы уравнения Лагранжа второго рода, которые имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^T,$$

где \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ — векторы обобщенных координат и скоростей, L — лагранжиан, а \mathbf{Q} — обобщенные силы от непотенциальных силовых факторов. Кинетическая энергия рассматриваемой механической системы K является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей, коэффициенты которой могут быть вычислены следующим образом

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_k^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_i} \mathbf{H}_k \right), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Здесь n — число звеньев манипулятора, \mathbf{T}_k — матрица однородного преобразования, определяющего переход от абсолютной системы координат манипулятора к системе координат k -го звена, а \mathbf{H}_k — матрица инерции k -го звена, заданная в собственной системе координат. На манипуляционный механизм действует сила тяжести, являющаяся потенциальной, а также силы и моменты приводов сочленений, не являющиеся таковыми. Потенциальная энергия весов звеньев может быть записана следующим образом

$$P = -(\mathbf{g}^T \ 0) \sum_{k=1}^n \mathbf{T}_k \mathbf{H}_k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, заданный в абсолютной системе координат манипулятора. Подставив в уравнения Лагранжа получим известные уравнения движения манипуляционного механизма

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{c}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

используя которые можно решить ОЗД.

В третьем разделе главы рассмотрена процедура идентификации параметров уравнений движения. Таковыми мы считаем масс-инерционные параметры, полагая геометрические размеры известными. Идентификация основана на свойстве линейности уравнений движения относительно масс-инерционных параметров. Действительно, частные производные кинетической и потенциальной энергии по l -му инерционному параметру k -го звена имеют вид

$$\frac{\partial K}{\partial p_k^l} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_k^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_i} \text{DH}_l \right) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} = -(\mathbf{g}^T \mathbf{0}) \mathbf{T}_k \text{DH}_l \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad (1b)$$

где DH_l — постоянные матрицы. Поэтому лагранжиан можно представить в виде следующей линейной формы

$$L = \mathbf{w}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{p}, \quad (2)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{10n}$ — вектор, составленный из всех масс-инерционных параметров манипулятора, а $\mathbf{w}_L = \partial L / \partial \mathbf{p}$. Далее если некоторая не обязательно скалярная функция линейно зависит от ряда параметров, то ее частные производные по этим параметрам будем называть *коэффициентами влияния* соответствующего параметра на эту функцию. Подставляя (2) в уравнения Лагранжа, получим

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{p} = \mathbf{Q}. \quad (3)$$

Идентификация представляет собой процедуру экспериментальной оценки параметров по данным о движении робота. Поэтому для ее проведения необходимо измерить в ряде временных отсчетов значения обобщенных координат, скоростей и ускорений, а также моменты, развиваемые приводами сочленений манипулятора. Обозначив выражение в круглых скобках как $W_{em}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ можно составить следующую систему линейных алгебраических уравнений

относительно оценки $\hat{\mathbf{p}}$ вектора масс-инерционных параметров:

$$W_{em}(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i), \ddot{\mathbf{q}}(t_i)) \hat{\mathbf{p}} = \tau(t_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad m > 10. \quad (4)$$

Решая эту переопределенную линейную систему с помощью метода наименьших квадратов, получим оценки искомых параметров. Однако такая *динамическая* идентификационная модель имеет существенный недостаток — требуются значения обобщенных ускорений. Манипуляционные роботы, как правило, всегда оснащаются датчиками положения и скорости в сочленениях, и почти никогда датчиками ускорений. Поэтому при использовании подобной модели приходится прибегать к численному дифференцированию зашумленных сигналов измерений обобщенных скоростей, что приводит к появлению дополнительных ошибок. В связи с этим, предпочтительнее использовать т.н. *энергетическую* идентификационную модель, основанную на теореме об изменении полной энергии H манипуляционного механизма в интегральной форме:

$$H(\mathbf{q}(t_2), \dot{\mathbf{q}}(t_2)) - H(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{q}}^T \tau dt.$$

С учетом (1) полную энергию можно представить в виде линейной формы $H = \mathbf{w}_H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{p}$, где $\mathbf{w}_H = \partial H / \partial \mathbf{p}$. Пусть были проведены те же самые измерения, что и для динамической модели, за исключением обобщенных ускорений. Тогда, имеет место следующая система линейных уравнений:

$$(\mathbf{w}_H(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i)) - \mathbf{w}_H(\mathbf{q}(t_{i-1}), \dot{\mathbf{q}}(t_{i-1}))) \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\mathbf{q}}^T \tau dt, \quad i = \overline{2, m}, \quad m > 10n. \quad (5)$$

Однако, у систем (4) и (5) не существует единственного решения вследствие дефекта ранга их основных матриц. Последнее связано с линейной зависимостью столбцов матрицы W_{em} и компонент вектора-строки \mathbf{w}_H соответственно

и справедливо для любого манипуляционного механизма. Из (3) также видно, что помимо проблемы идентифицируемости, это приводит к появлению избыточных вычислительных операций при решении ОЗД. Таким образом, недостатком классических инерционных параметров с точки зрения задач управления роботом-манипулятором является принципиальная неидентифицируемость и избыточность.

Для устранения указанных проблем вводят специальный набор масс-инерционных параметров, называемый *базовыми инерционными параметрами*. **Вторая глава** посвящена вопросам, связанным с формализацией этого понятия, а также исследованию некоторых свойств базовых параметров. Один из существующих способов формализации состоит в том, что всевозможные масс-инерционные параметры образуют линейное пространство, а базовые параметры являются его базисом. В другом способе базовые параметры интерпретируются с точки зрения их приложения к решению проблемы идентифицируемости и определяются из условия инвариантности идентификационной модели как координаты вектора ее правой части в базисе пространства, задаваемого столбцами основной матрицы соответствующей линейной системы. Предложенный в данной работе подход является обобщением второго способа и рассмотрен в первом разделе главы. Из (1) видно, что коэффициенты влияния на лагранжиан имеют вид $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + b(\mathbf{q})$. Такие функции образуют подпространство в пространстве всех функций, определенных на некотором параллелепипеде пространства состояний манипуляционного механизма. Тогда (2) является разложением вектора этого подпространства по векторам некоторой конечной системы векторов этого же подпространства. Очевидно, что сказанное справедливо также для полной энергии и левой части уравнений движения манипулятора. Отметим, что в последнем случае имеется ввиду подпространство векторов-функций вида $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ пространства всех векторов-функций, определенных на некотором параллелепипеде

пространства обобщенных координат, скоростей и ускорений. Пусть компоненты векторов-строк $\tilde{\mathbf{w}}_L$ и $\tilde{\mathbf{w}}_H$ и столбцы матрицы \tilde{W}_{em} образуют базисы систем векторов \mathbf{w}_L , \mathbf{w}_H и W_{em} соответственно. Тогда

$$L = \tilde{\mathbf{w}}_L \tilde{\mathbf{p}}_L, \quad (6a)$$

$$H = \tilde{\mathbf{w}}_H \tilde{\mathbf{p}}_H, \quad (6b)$$

$$\mathbf{Q} = \tilde{W}_{em} \tilde{\mathbf{p}}_{em}. \quad (6c)$$

где $\tilde{\mathbf{p}}_L$, $\tilde{\mathbf{p}}_H$ и $\tilde{\mathbf{p}}_{em}$ — векторы-столбцы, составленные из коэффициентов базисного разложения. В силу свойств базисного разложения именно эти коэффициенты являются базовыми инерционными параметрами. Поскольку в общем случае коэффициенты разложений (6) различны требуется введение базовых параметров отдельно для лагранжиана $\tilde{\mathbf{p}}_L$, полной энергии $\tilde{\mathbf{p}}_H$ и уравнений движения $\tilde{\mathbf{p}}_{em}$. Связь между базовыми и классическими инерционными параметрами может быть найдена следующим образом. Пусть Y_L , Y_H и Y_{em} матрицы координат коэффициентов влияния в соответствующих базисах, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_L &= \tilde{\mathbf{w}}_L Y_L, \\ \mathbf{w}_H &= \tilde{\mathbf{w}}_H Y_H, \\ W_{em} &= \tilde{W}_{em} Y_{em}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда, исходя из условий инвариантности лагранжиана, энергии и левой части уравнений движения, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_L &= Y_L \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{p}}_H &= Y_H \mathbf{p}, \\ \tilde{\mathbf{p}}_{em} &= Y_{em} \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Во втором разделе главы доказаны необходимые и достаточные условия равенства множеств различных базовых параметров, сформулированные в виде следующих теорем

Теорема 1. Векторы базовых инерционных параметров лагранжиана $\tilde{\mathbf{p}}_L$ и полной энергии $\tilde{\mathbf{p}}_H$ манипуляционного механизма равны тогда и только тогда, когда выполнено следующее соотношение между их коэффициентами влияния

$$\tilde{\mathbf{w}}_H = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{w}}_L.$$

Теорема 2. Векторы базовых инерционных параметров лагранжиана $\tilde{\mathbf{p}}_L$ и уравнений движения $\tilde{\mathbf{p}}_{em}$ манипуляционного механизма равны тогда и только тогда, когда выполнено следующее соотношение между их коэффициентами влияния

$$\tilde{W}_{em} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}_L}{\partial \mathbf{q}}.$$

Третий раздел главы посвящен отысканию конечномерного линейного пространства, которое бы гарантированно включало все коэффициенты влияния на лагранжиан. Способ конструирования такого пространства указан в следующей теореме

Теорема 3 (о базисном множестве) Все компоненты вектора-строки \mathbf{w}_L принадлежат конечномерному линейному пространству \mathbb{F}_L , которое может быть представлено в виде тензорного произведения пространств

$$\mathbb{F}_L = \mathbb{Y}_0 \otimes \mathbb{Y}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{Y}_n,$$

где n — количество звеньев манипулятора, а $\mathbb{Y}_k = \text{span} \{y_k^{l_k}, l_k \in N_k\}$, $k = \overline{0, n}$, причем

$$1. N_0 = \{0, n(n+1)/2\},$$

$$y_0^{\mathcal{J}(i,j)} = \begin{cases} 1(\dot{\mathbf{q}}) & i = j = 0; \\ \dot{q}_i^2/2 & i = j > 0; \\ \dot{q}_i \dot{q}_j & i \neq j. \end{cases}$$

Здесь $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq i$, а отображение \mathcal{J} определяется формулой $\mathcal{J}(i, j) = \max(i, j)(\max(i, j) - 1)/2 + \min(i, j)$. Это отображение становится взаимнооднозначным, если определить обратное отображение $(i, j) = \mathcal{J}^{-1}(l_0)$ с помощью соотношений $i = \lceil (\sqrt{1 + 8l_0} - 1)/2 \rceil$ и $j = l_0 - i(i - 1)/2$.

2. при $k = \overline{1, n}$

- в случае вращательного сочленения $N_k = \{\overline{1, 5}\}$,

$$y_k^{l_k} = \begin{cases} 1(q_k) & l_k = 1; \\ \cos q_k & l_k = 2; \\ \sin q_k & l_k = 3; \\ \cos(2q_k) & l_k = 4; \\ \sin(2q_k) & l_k = 5; \end{cases}$$

- в случае поступательного сочленения $N_k = \{\overline{1, 3}\}$,

$$y_k^{l_k} = \begin{cases} 1(q_k) & l_k = 1; \\ q_k & l_k = 2; \\ q_k^2 & l_k = 3. \end{cases}$$

Под функциями вида $1(x)$ понимается функция равная единице на всей области определения своего аргумента. Размерность пространства \mathbb{F}_L равна $(1 + (n^2 + n)/2) 5^\nu 3^{n-\nu}$, где ν — количество вращательных сочленений.

Из этой теоремы имеется несколько следствий, используемых в приложениях:

- Каждому базисному вектору пространства \mathbb{F}_L можно взаимнооднозначно сопоставить индекс $l_0 l_1 \dots l_n$, причем каждое из чисел l_k , $k = \overline{0, n}$, определяет номер базисного вектора в пространстве \mathbb{Y}_k .

- Если пространства \mathbb{F}_L^n и \mathbb{F}_L^{n+1} соответствуют манипуляционным механизмам с n и $n + 1$ звеном, то $\mathbb{F}_L^n \subset \mathbb{F}_L^{n+1}$.
- Коэффициенты влияния на полную энергию принадлежат пространству \mathbb{F}_L , причем их координаты $h_i^{l_0 \dots l_n}$ связаны с координатами соответствующих коэффициентов влияния на лагранжиан $c_i^{l_0 \dots l_n}$ следующими соотношениями:

$$h_i^{l_0 \dots l_n} = \begin{cases} c_i^{l_0 \dots l_n}, & l_0 > 0; \\ -c_i^{l_0 \dots l_n}, & l_0 = 0. \end{cases}$$

- Для базисных векторов пространства \mathbb{F}_L^n справедливы рекуррентные соотношения

$$b^{l_0 \dots l_k l_{k+1} 1 \dots 1} = b^{l_0 \dots l_k 1 1 \dots 1} y_k^{l_{k+1}}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad b^{l_0 1 \dots 1} = y_0^{l_0}. \quad (9)$$

Третья глава посвящена задаче поиска связи базовых и классических инерционных параметров. В первом разделе главы представлен обзор существующих методов решения этой задачи. Их можно разделить на две группы: численные и аналитические. Аналитические методы основаны на сравнении выражений полной энергии или уравнений движения манипуляционного механизма для случая n и $(n + 1)$ звеньев и позволяют составить рекуррентные соотношения для группировки классических масс-инерционных параметров в базовые. Однако это удается сделать только в случае механизмов с параллельными или перпендикулярными осями соседних сочленений. Основным достоинством аналитических методов является получение точного решения в виде формул. В численных методах используется процедура, похожая на ту, которая применяется в идентификации параметров. Сначала генерируется некоторая случайная последовательность пар значений обобщенных координат и скоростей. Затем на этой последовательности вычисляются значения полной энергии манипулятора, и составляется матрица-регрессор аналогично

основной матрице системы (5). Наконец, с помощью сингулярного или QR-разложения определяется базис пространства, задаваемого столбцами матрицы-регрессора. Базовые параметры в этом случае находятся согласно второму способу, упомянутому выше. Основное достоинство такого подхода — применимость к любому механизму. Однако численные методы принципиально являются приближенными, поскольку ранг матрицы-регрессора может дополнительно снизиться из-за неудачно сгенерированной последовательности. При этом нет способа выяснить когда полученное решение совпадает с истинным, а когда — нет. Кроме того, такие методы требуют предварительно получить формулы для расчета коэффициентов влияния на полную энергию.

Во втором разделе предложен новый метод поиска базовых параметров — метод проекций. В предыдущей главе было установлено, что при выполнении условий теорем 1 и 2 базовые параметры энергии, лагранжиана и уравнений движения — суть одно и то же. Поэтому достаточно найти базовые параметры лагранжиана, для чего предлагается следующая процедура: поиск матрицы координат Z коэффициентов влияния на лагранжиан в конечномерном пространстве, задаваемом теоремой 3, определение базисных столбцов этой матрицы с помощью приведения ее к ступенчатому виду, составление из этих столбцов матрицы координат \tilde{Z} базисных коэффициентов влияния. Далее, если \mathbf{b} — вектор-строка, составленная из всех базисных векторов $b^{l_0 \dots l_n}$, то из (7) следует, что

$$\mathbf{b}Z = \mathbf{b}\tilde{Z}Y. \quad (10)$$

Поскольку компоненты \mathbf{b} линейно независимы имеем $Z = \tilde{Z}Y$. Это равенство можно интерпретировать как совокупность неоднородных систем линейных алгебраических уравнений относительно столбцов матрицы Y . Очевидно, что основная матрица этих систем \tilde{Z} имеет максимальный ранг, поэтому неизвестные определяются единственным образом по формуле $Y = \tilde{Z}^+Z$, где опера-

ция «⁺» означает псевдообращение в смысле Мура-Пенроуза. Также в данном разделе рассмотрены примеры нахождения методом проекций базовых параметров простейших механизмов, основные результаты опубликованы в работе [1].

Третий раздел посвящен выводу рекуррентных соотношений для вычисления проекций. Из теоремы 3 следует, что коэффициент влияния l -го инерционного параметра k -го звена на лагранжиан может быть записан в виде

$$\frac{\partial L}{\partial p_k^l} = \sum_{l_0=0}^{r_0} \sum_{l_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{r_n} c_{10(k-1)+l}^{l_0 \dots l_n} b^{l_0 \dots l_n}, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, 10},$$

где $r_i = \dim \mathbb{Y}_i$, $i = \overline{0, n}$, а $c_{10(k-1)+l}^{l_0 \dots l_n}$ — проекция этого коэффициента влияния на соответствующий базисный вектор. В процессе доказательства этой теоремы было установлено, что отличны от нуля только проекции, соответствующие индексам вида $l_0 \dots l_k 1 \dots 1$. Их можно вычислить следующим образом

$$c_{10(k-1)+l}^{l_0 \dots l_k 1 \dots 1} = \begin{cases} (\mathbf{g}^T \ 0) \tilde{\mathbf{T}}_k^{l_1 \dots l_k} \mathbf{D}\mathbf{H}_l (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, & l_0 = 0, \\ \text{tr} \left(\hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k} \mathbf{D}\mathbf{H}_l \right), & l_0 > 0. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{T}}_k^{l_1 \dots l_k}$ и $\hat{\mathbf{U}}_{kl_0}^{l_1 \dots l_k}$ — числовые матрицы 4×4 , для которых имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_k^{l_1 \dots l_k} &= \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{l_1 \dots l_{k-1}} \tilde{\mathbf{A}}_k^{l_k}, \\ \hat{\mathbf{U}}_{k\mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_k} &= \begin{cases} \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left(\hat{\mathbf{U}}_{k-1, \mathcal{J}(i,j)}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & i = \overline{1, k-1}, \quad j = \overline{1, i}; \\ \mathcal{A}_{k01}^{\sigma_k l_k} \left(\hat{\mathbf{A}}_{k-1, jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & i = k, \quad j = \overline{1, k-1}; \\ \mathcal{A}_{k11}^{\sigma_k l_k} \left(\hat{\mathbf{A}}_{k-1, 0k}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & i = j = k; \end{cases} \\ \hat{\mathbf{A}}_{k,j,k+1}^{l_1 \dots l_k} &= \begin{cases} \mathcal{A}_{k00}^{\sigma_k l_k} \left(\hat{\mathbf{A}}_{k-1, jk}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = \overline{0, k-1}; \\ \mathcal{A}_{k10}^{\sigma_k l_k} \left(\hat{\mathbf{A}}_{k-1, 0k}^{l_1 \dots l_{k-1}} \right), & j = k; \end{cases} \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{A}}_k^{l_k}$ — постоянные матрицы 4×4 , зависящие от геометрических параметров манипулятора, σ_k — булевы переменные, равные 0, если k -е сочленение

поступательное, и 1 — если вращательное, $\mathcal{A}_{ifs}^{\sigma l}$ — линейный оператор, действующий в пространстве матриц 4×4 . Действие этого оператора на некоторую матрицу B определяется с помощью параметров $i = \overline{1, n}$, $f, s, \sigma \in \{0, 1\}$ и $l = \overline{1, 3 + 2\sigma}$ по следующим правилам

$$\mathcal{A}_{ifs}^{1l}(B) = \begin{cases} \left(D_f \tilde{A}_i^1 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^1 \right) + \left(D_f \tilde{A}_i^3 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^3 \right), & l = 1; \\ \left(D_f \tilde{A}_i^1 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^2 \right) + \left(D_f \tilde{A}_i^2 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^1 \right), & l = 2; \\ \left(D_f \tilde{A}_i^1 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^3 \right) + \left(D_f \tilde{A}_i^3 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^1 \right), & l = 3; \\ \left(D_f \tilde{A}_i^2 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^2 \right) - \left(D_f \tilde{A}_i^3 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^3 \right), & l = 4; \\ \left(D_f \tilde{A}_i^2 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^3 \right) + \left(D_f \tilde{A}_i^3 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^2 \right), & l = 5; \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{ifs}^{0l}(B) = \begin{cases} \left(D_f \tilde{A}_i^1 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^1 \right), & l = 1; \\ \left(D_f \tilde{A}_i^1 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^2 \right) + \left(D_f \tilde{A}_i^2 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^1 \right), & l = 2; \\ \left(D_f \tilde{A}_i^2 \right)^T B \left(D_s \tilde{A}_i^2 \right), & l = 3. \end{cases}$$

Здесь $D_0 = E$, $D_1 = D_{rot}\sigma + D_{tr}(1 - \sigma)$, а D_{rot} и D_{tr} — постоянные матрицы. Для инициализации итерационного процесса следует положить $\tilde{T}_0 = E$ и $\hat{A}_{001} = E$.

Четвертый раздел главы посвящен реализации метода проекций на вычислительной машине. Для этого разработан рекурсивный алгоритм, в основе которого лежат соотношения, полученные в предыдущем разделе, а также метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду с частичным выбором ведущего элемента. Предложенный алгоритм был реализован в виде программы на языке C++, тестирование которой на примере робота PUMA 560 показало соответствие полученных базовых инерционных параметров известным результатам. Время работы программы составило менее 300 мс, что сравнимо с быстродействием численных методов. Однако, с увеличением числа звеньев время работы существенно возрастает: например, в случае 10-звенного плос-

кого механизма оно составляет около 3,5 минут. Поэтому в данном разделе также предложены способы повышения быстродействия алгоритма путем реализации отдельных его частей оптимизированными по времени выполнения, в том числе и с использованием параллельных вычислений. Основные результаты третьего и четвертого разделов опубликованы в работе [2].

Четвертая глава посвящена применению базовых инерционных параметров в задачах управления манипуляционными роботами. В первом разделе главы выведены рекуррентные соотношения, позволяющие записать уравнения движения манипулятора в терминах базовых параметров. Воспользовавшись соотношением (6с), учитывая теорему 2 и равенство (10), получим

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}.$$

Выражение в круглых скобках есть результат действия на вектор-строку \mathbf{b} линейного дифференциального оператора \mathcal{L} . Пусть вектор-столбец $\mathbf{B}^{l_0 \dots l_k}$ есть результат применения этого оператора к компоненте $b^{l_0 \dots l_k 1 \dots 1}$ вектора-строки \mathbf{b} . Тогда уравнения движения примут вид

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q},$$

где \mathbf{B} — матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{B}^{l_0 \dots l_k}$. Рассмотрев действие оператора \mathcal{L} на равенство (9) после некоторых преобразований получим следующие рекуррентные соотношения

$$\mathbf{B}^{l_0 \dots l_{k+1}} = \mathbf{B}^{l_0 \dots l_k} y_{k+1}^{l_{k+1}} + \mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k} h_{k+1}^{l_{k+1}}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Скалярные коэффициенты $h_k^{l_k}$ определяются следующими правилами:

- в случае вращательного сочленения

$$h_k^{l_k} = \begin{cases} 0, & l_k = 1; \\ -y_k^3, & l_k = 2; \\ y_k^2, & l_k = 3; \\ -2y_k^5, & l_k = 4; \\ 2y_k^4 - 1, & l_k = 5; \end{cases}$$

- в случае поступательного сочленения

$$h_k^{l_k} = \begin{cases} 0, & l_k = 1; \\ y_k^1, & l_k = 2; \\ 2y_k^2, & l_k = 3. \end{cases}$$

Векторы-столбцы $\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k}$ могут быть вычислены по приведенным ниже формулам

$$\mathbf{Y}_{k+1}^{l_0 \dots l_k} = \begin{cases} b^{\mathcal{J}(k+1,i) \dots l_k} \mathbf{e}_i - b^{l_0 \dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & k+1 \neq i = j \neq 0; \\ b^{l_0 \dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = i = j \neq 0; \\ b^{\mathcal{J}(k+1,i) \dots l_k} \mathbf{e}_j + b^{\mathcal{J}(k+1,j) \dots l_k} \mathbf{e}_i - b^{l_0 \dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & k+1 \neq i \neq j; \\ 2b^{\mathcal{J}(i,i) \dots l_k} \mathbf{e}_j, & k+1 = i \neq j; \\ 2b^{\mathcal{J}(j,j) \dots l_k} \mathbf{e}_i, & k+1 = j \neq i; \\ -b^{l_0 \dots l_k} \mathbf{e}_{k+1}, & i = j = 0. \end{cases}$$

Здесь $(i, j) = \mathcal{J}^{-1}(l_0)$, а $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор, k -я компонента которого равна 1. Для инициализации итерационного процесса следует положить

$$\mathbf{B}^{l_0} = \begin{cases} \ddot{q}_i \mathbf{e}_i, & i = j \neq 0; \\ \ddot{q}_i \mathbf{e}_j + \ddot{q}_j \mathbf{e}_i, & i \neq j; \\ \mathbf{0}, & i = j = 0. \end{cases}$$

В завершение раздела рассмотрен пример получения известных уравнений движения плоского двухзвенного механизма с помощью выведенных соотношений. Основные результаты этого раздела опубликованы в работе [3].

Во втором разделе главы показано применение базовых параметров для идентификации на примере математической модели робота PUMA 560. Для простоты рассматривается движение только трех первых степеней подвижности, т.е. манипулятор считается трехзвенным, а звенья запястья являются составными частями третьего звена. Соответствующая кинематическая схема и геометрические параметры представлены на рис. 1. Для проведения компьютерной симуляции эксперимента была создана модель манипуляционного механизма в пакете SimMechanics, входящем в состав среды Matlab. Эталонные геометрические и масс-инерционные параметры для этой модели были взяты из работы⁶ и пересчитаны относительно используемых здесь систем координат звеньев. Экспериментальные траектории для каждой степени по-

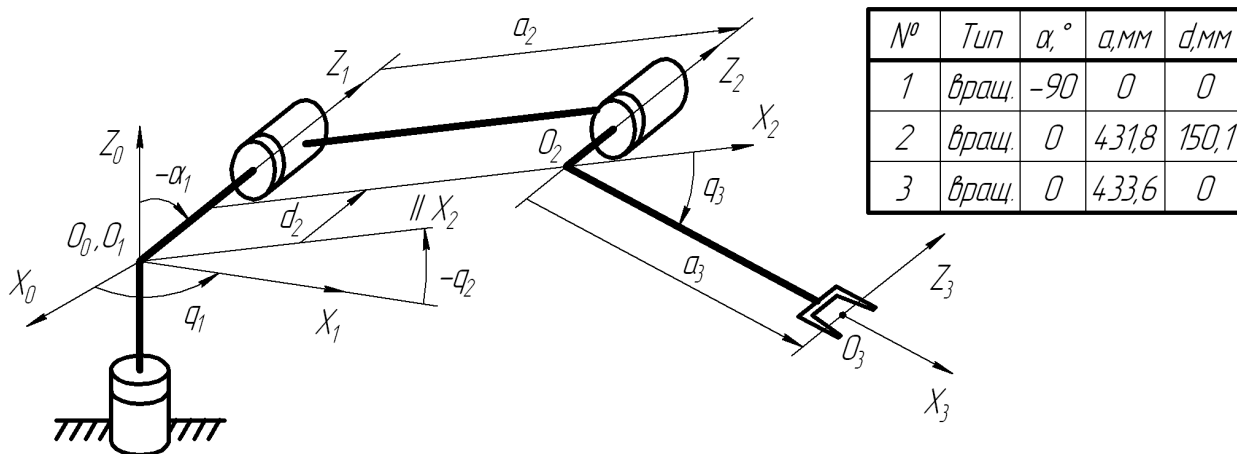


Рис. 1. Кинематическая схема и геометрические параметры трехзвенного манипулятора.

движности были сформированы методом профилей скорости исходя из условий их гладкости и линейной независимости. Начальная конфигурация мани-

⁶ Armstrong, B. The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm / B. Armstrong, O. Khatib, J. Burdick // Proceedings of IEEE Conf. on Robotics and Automation. – 1986. – P. 510-518.

пулятора задается следующим набором обобщенных координат $(-\pi, 0, \pi/2)$. Полученные в результате траектории, а также соответствующие им профили скорости, представлены на рис. 2. С помощью пакета SimMechanics была

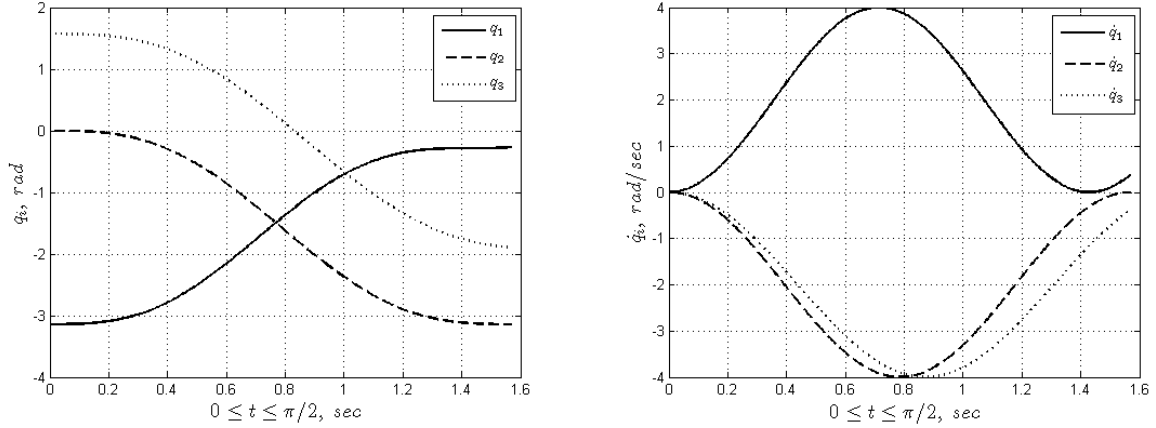


Рис. 2. Обобщенные координаты и скорости на экспериментальной траектории.

решена обратная задача динамики для заданных экспериментальных траекторий. В результате были получены моменты, развиваемые приводами сочленений манипулятора при заданном движении, графики изменения которых приведены на рис. 3. Нетрудно видеть, что энергетическая идентификационная модель в терминах базовых инерционных параметров имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{w}}_H(\mathbf{q}(t_{i+1}), \dot{\mathbf{q}}(t_{i+1})) - \tilde{\mathbf{w}}_H(\mathbf{q}(t_i), \dot{\mathbf{q}}(t_i))) \hat{\mathbf{p}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} dt, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (11)$$

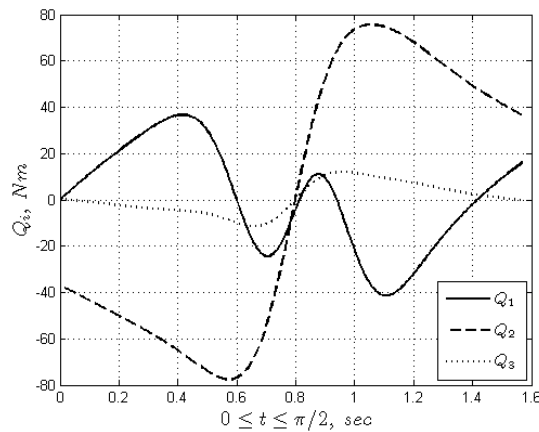


Рис. 3. Моменты в сочленениях на экспериментальной траектории.

Разложение (6b), необходимое для составления этой модели, было сформировано автоматически с помощью специальной компьютерной программы, упомянутой ранее. Затем в среде Matlab были вычислены основная матрица и вектор правой части системы (11). Отметим, что ранг первой действительно оказался максимально возможным. Система линейных уравнений (11) была решена с помощью псевдообращения основной матрицы, что соответствует критерию минимума квадратической ошибки. Сравнение полученных значений базовых параметров с эталонными показывает, что наибольшая относительная погрешность оценки не превышает 1,5%. Это подтверждает адекватность идентификационной модели рассмотренного механизма, полученной с помощью разработанных в диссертации методов. При проведении реального эксперимента в данной модели потребуются учет трения и моментов инерции роторов двигателей. Основные результаты этого раздела опубликованы в работе [4].

В **заклучении** приведены основные результаты, полученные в диссертации.

В **приложениях** представлены исходные тексты программы поиска базовых параметров, реализованной согласно подходу, изложенному в главе 3, а также тексты сценариев среды Matlab, с помощью которых была проведена симуляция эксперимента, описанного в главе 4.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- Предложена математическая интерпретация базовых инерционных параметров как коэффициентов базисного разложения, введены множества базовых параметров полной энергии, лагранжиана и уравнений движения, доказаны необходимые и достаточные условия их равенства;
- Доказана теорема о базисном множестве, с ее помощью создан метод проекций для поиска базовых инерционных параметров, справедливый

для манипуляционных механизмов с произвольно ориентированными осями сочленений;

- Получены рекуррентные соотношения для вычисления проекций, на их основе разработан эффективный по быстродействию алгоритм реализации метода проекций;
- Предложен способ формирования уравнений движения в рекуррентной форме в терминах базовых инерционных параметров.

Список публикаций

1. Крутиков С. Л. Базовые инерционные параметры манипуляционных роботов // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». 2011. Т. 1. С. 28–45.
2. Крутиков С. Л. Рекурсивный метод поиска базовых инерционных параметров манипуляционных механизмов // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». 2012. Т. 1. С. 38–59.
3. Крутиков С. Л. Способ получения уравнений движения роботов-манипуляторов в терминах базовых инерционных параметров // Мехатроника, автоматизация и управление. 2012. Т. 4. С. 50–55.
4. Зенкевич С. Л., Крутиков С. Л. Идентификация параметров уравнений движения манипуляционных роботов // Труды междунар. науч.-технич. конф. «Экстремальная робототехника», Санкт-Петербург, 23–25 ноября 2011. С. 125–129.