На правах рукописи

НУРАЛИЕВА Анна Борисовна

О ДИНАМИКЕ ТРОСА КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА

01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012 год

Работа выполнена в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Садов Юрий Андреевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Самсонов Виталий Александрович, главный научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова
	доктор физико-математических наук, профессор Косенко Иван Иванович, заведующий кафедрой технической механики Российского государственного университета туризма и сервиса
Ведущая организация:	Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Защита диссертации состоится " ___" октября 2012 г. в ______ час. на заседании диссертационного совета Д 002.024.01 при Институте прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН.

Автореферат разослан " ___ " июня 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Т.А. Полилова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Около 50 лет назад был запущен первый спутник – произошел прорыв человека в космос. С тех пор в космосе побывали множество аппаратов, они изучали ближний и дальний космос, были созданы глобальные системы связи и мониторинга земли, сотни человек были на космических орбитах, 12 человек побывали на Луне. Сейчас сложно представить жизнь без космических технологий. Однако, есть серьезные препятствия, из-за которых космическая деятельность развивается не так быстро, как ожидалось в начале космической эры. По прогнозам ведущих специалистов середины 60-х годов стоимость доставки килограмма груза на низкую орбиту должна была снизиться до 100 $, хотя на самом деле до сих пор она держится на уровне 10 000 $/кг. Это связано, в том числе, и со спецификой космического транспорта, и с растущим влиянием деятельности человека на околоземную среду. Космическое пространство, за исключением тонкого по космическим меркам атмосферного слоя Земли – безопорная среда. Движение там возможно только за счет выбрасывания рабочего вещества, которым до настоящего времени являются продукты сгорания ракетного топлива. Поэтому при подъеме на орбиту КА (космический аппарат) должен поднимать вместе с собой запас этого рабочего вещества и/или топлива, расходуя на это большую часть топлива. При подъеме тела на геостационар начальная масса ракеты почти в 100 раз превышает массу выводимого на орбиту груза. Большая часть начальной массы – топливо, продукты сгорания которого выбрасываются в атмосферу и загрязняют ее. Остальная часть теряемой при запуске массы – элементы конструкции, часть из которых возвращается на Землю, а часть – переходит на промежуточные орбиты, увеличивая засоренность «космическим мусором». Эти недостатки ракетного способа транспортировки груза неизбежны, т.к. главный показатель эффективности этого способа – скорость истечения рабочего вещества – для ракет на химическом топливе сейчас близок к предельному. Поэтому важно искать альтернативные ракетному способы доставки полезного груза в космос.

Один из таких способов, очень простой принципиально – придание поднимаемому грузу энергии и кинетического момента орбитального движения за счет вращения Земли. То есть протянуть трос от Земли за геостационар и доставлять грузы по нему, при этом у тела, отпущенного с троса, уже будет начальная скорость. Натянутость конструкции обеспечивается действием гравитационно-центробежных сил. Это концепция космического лифта. Несмотря на то, что идея не очень нова и, по мнению многих специалистов, не имеет непреодолимых препятствий для реализации, ее проработка продвигается медленно. За первое десятилетие нашего века нет существенного продвижения ни в исходной концепции конструкции КЛ (2000 г.), многие недостатки которой сейчас видны, ни в исследовании динамики. Поэтому данная работа, в которой предлагается развитие современной концепции КЛ и подробное исследование его динамики, представляется актуальной.

Научная новизна. Практически все содержание работы является новым и по постановкам задач (из-за относительной новизны изучаемых объектов), и по основным используемым математическим моделям, и по полученным результатам, и по некоторым из разработанных методик.

Корректность и достоверность полученных результатов и выводов подтверждается согласованностью результатов, полученных с использованием разных математических моделей (там, где их можно сравнить), результатов расчетов с разными вариантами вычислительной схемы (равномерная сетка, неравномерная сетка), совпадением с найденными аналитически данными в тех случаях, когда это возможно, и разумным соответствием их результатам немногочисленных имеющихся работ по этой теме.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты работы могут быть использованы при дальнейших конструкторских разработках такой системы, для выбора ее параметров, оценки ее работоспособности и эффективности. Результаты работы дают основу для понимания динамики КЛ. Некоторые методики и алгоритмы могут быть использованы для исследования не только космического лифта, но и меньших по размеру тросовых систем. Предполагается дальнейшее развитие этой работы в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Основные результаты работы:

- Разработана концепция нагруженного КЛ, обладающего по сравнению с распространенной концепцией Эдвардса б*о*льшими возможностями и повышенной надежностью.

- Проведен обзор упрощенных моделей, известные ранее дополнены. Упрощенные модели использованы для получения базовых характеристик движения.

- Создана оригинальная математическая модель для изучения поперечных колебаний нерастяжимого троса переменной линейной плотности в неоднородном силовом поле. Модель включает эволюционную часть и уравнение для вычисления натяжения без использования механического уравнения состояния напряженной нити. Непрерывная модель и более простые динамические модели дают похожие результаты там, где их можно сравнить. Создан программный комплекс, позволяющий исследовать динамику троса КЛ на большом интервале времени.

- Из многочисленных расчетов выделено несколько характерных движений троса. Ограниченные по углу: близкие к одномодовым, близкие к собственным формам линеризованной задачи, колебания со сверхмедленным изменением амплитуды, распространение поперечной волны. Движения, приводящие к падению троса: постепенная раскачка, раскачка незакрепленного конца, необычная «спиральная» неустойчивость в окрестности закрепленного конца (для нее найдено автомодельное решение приближенной задачи).

- Построена математическая модель продольных колебаний длинного переменного в сечении растяжимого троса в переменном по координате внешнем поле. Проведены численные расчеты, найдена скорость распространения продольных волн.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. 51 Научная конференция МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Долгопрудный, М.О., ноябрь 2008 г.
2. VI Международный аэрокосмический конгресс, IAC'09. Москва, август 2009г.
3. XXXIV Академические чтения по космонавтике. Секция прикладной небесной механики и управления движением. Москва, январь 2010 г.
4. XLV Научные чтения памяти К.Э.Циолковского. Секция 3 “К.Э. Циолковский и механика космического полета”. Калуга, сентябрь 2010 г. (2 доклада)
5. XXXV Академические чтения по космонавтике. Секция прикладной небесной механики и управления движением. Москва, январь 2011 г.
6. Научный семинар сектора №4 отдела №5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под руководством проф. М.Ю. Овчинникова. Апрель 2011 г.
7. Научный семинар кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством проф. В.В. Сазонова. Май 2011 г.
8. V Международная конференция “Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания”. Обнинск, май 2011 г.

9. Научный семинар “Динамика относительного движения” кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого и проф. Ю.Ф. Голубева. Сентябрь 2011 г.
10. Научный семинар Института механики МГУ под руководством проф. В.А. Самсонова. Октябрь 2011 г.
11. Научный семинар “Математические проблемы технической механики” кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством проф. С.Я. Степанова и проф. А.А. Бурова. Ноябрь 2011 г.
12. 54 Научная конференция МФТИ. Секция динамики и управления движением космических аппаратов. Долгопрудный, М.О., ноябрь 2011 г.
13. Научный семинар им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого и проф. А.В. Карапетяна, декабрь 2011 г.
14. XXXVI Академические чтения по космонавтике. Секция проектирования и конструкции летательных аппаратов, секция прикладной небесной механики и управления движением. Москва, январь 2012 г. (2 доклада)
15. Научный семинар отдела №5 ИПМ им. Келдыша РАН под руководством проф. Ю.Ф. Голубева. Февраль 2012.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Личный вклад соискателя. Большинство результатов получено соискателем лично. Также использованы результаты некоторых студентов, их участие отмечено в диссертации.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, перечня основных результатов работы, заключения и списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации – 103 стр.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В 1-й главе в разделе 1.1 дан обзор начального этапа развития идеи космического лифта от исходной мысли Циолковского об орбитальной башне до концепции Эдвардса, которая является общепринятой в наше время. Выделена основная проблема создания конструкции – требование огромной прочности материала, недостижимой до недавнего времени. В разделе 1.2 кратко рассказано о единственном пока материале, потенциально пригодном для троса КЛ – углеродных нанотрубках, открытых в конце XX века.

Во 2-й главе в разделе 2.1 подробно описывается опубликованная в 2000 году концепция Эдвардса минимальной конструкции космического лифта. Ее основа – тонкая лента из сверхпрочного материала на основе нанотрубок, по которой перемещается транспортная кабина. Конструкция относительно проста по исполнению, но имеет существенные слабые стороны. В частности, ограниченные транспортные возможности из-за одностороннего движения, недостаточная надежность. Разбираются ее достоинства и недостатки. В разделе 2.2 предлагается альтернативная концепция нагруженного секционированного лифта, более надежная и обладающая б*о*льшими возможностями, в том числе с ее помощью можно организовать двустороннее движение.

В главе 3 – статика КЛ – приводятся частично уже известные данные о требованиях к прочности троса, о распределении натяжения в нем, о профилировании троса и вообще о статических характеристиках конструкции, систематизированы имеющиеся об этом сведения. В разделе 3.1 показано, что трос постоянного сечения выдвигает неподъемные требования к прочности материала. В разделе 3.2 изложена концепция равнонапряженного троса (троса, сечение которого меняется так, что напряжение вдоль троса остается постоянным). Такой трос гораздо легче и, следовательно, выдвигает более реальные требования к материалу. В разделе 3.3 изложена мало известная концепция равнонапряженного нагруженного троса. В этом случае площадь сечения троса в точке

$$S(s) = \left(S(0) + \frac{\rho_a}{\rho_V}\right)\exp\left[\frac{k\rho_V}{\tau_b}(U(R_E + s\ ) - U(R_E))\right] - \frac{\rho_a}{\rho_V}\quad ,$$

где s – координата точки на тросе, S – площадь сечения в точке, τ_b – разрывное напряжение материала, ρ_V – объемная плотность материала, ρ_a – постоянная линейная плотность дополнительной нагрузки, $U(R_E + s\ )$ – потенциал гравитационно-центробежных сил на расстоянии $R_E + s$ от центра Земли.

Заметим, что на зависимость полной линейной плотности $\rho = \rho_V S + \rho_a$ от координаты дополнительная нагрузка ρ_a не влияет

$$\rho(s) = \rho(0)exp\left[\frac{k}{l_b g}\left(U(R_E + s) - U(0)\right)\right]$$

Равнонапряженный трос достигает максимальной ширины на высоте геостационара.

В разделе 3.4 рассмотрена конечная масса, т.е. балансировочная масса на верхнем конце троса. Показано, когда она может обращаться в ноль. В разделе 3.5 рассмотрена полная масса лифта. Показано, что полная масса с увеличением длины троса убывает из-за того, что с увеличением длины конечная масса убывает быстрее, чем возрастает масса троса. Примерно до 80 000 км полная масса убывает быстро, потом медленнее. Поэтому оптимальным представляется лифт длиной около 60 000 – 100 000 км.

Остальные главы посвящены исследованию динамики несущего троса космического лифта, как основной и уникальной по своим характеристикам части его конструкции.

В главе 4 рассматриваются упрощенные модели динамики, начиная с простейшей – материальная точка на невесомом стержне (раздел 4.1). Такая модель использовалась в одной из первых в нашей стране работ по динамике космического лифта В.В. Белецкого [1]. Здесь она несколько расширена по сравнению с [1], т.к. рассматриваются колебания не только в плоскости экватора, но и в меридиональной плоскости. Уравнения движения выведены, как уравнения Лагранжа 2-го рода. В окрестности вертикального положения равновесия эти уравнения линеаризуются и движения в меридиональной и экваториальной плоскостях разделяются. Частоты меридиональных и экваториальных колебаний связаны простой формулой

$$\omega_M^2 = \omega_E^2 + \omega_{eq}^2$$

где ω_{eq}, ω_M – частоты экваториальных и меридиональных колебаний, ω_E – частота вращения Земли вокруг своей оси. Получены периоды этих колебаний. Периоды колебаний в плоскости экватора в зависимости от длины троса составляют несколько суток, а в меридиональной плоскости – меньше суток.

В разделе 4.2 рассмотрена модель с весомым прямым тросом переменной линейной плотности, в плоскости экватора. Уравнение движения выводится из уравнений моментов и имеет вид

$$\ddot{\beta} = \frac{M(\beta)}{J}$$

где J – момент инерции прямолинейной системы,

$J = \int_0^L \rho(s) s^2 ds + M_{\text{К}} L^2$,

$M(\beta)$ – момент внешних гравитационно-центробежных сил,

$M(\beta) = \int_0^L \rho(s)\, sin\, \alpha \left(\frac{\mu}{d(s,\beta)^2} - \omega_E{}^2 d(s,\beta)\right) s ds + M_{\text{К}} \left(\frac{\mu}{d_{\text{К}}^2} - \omega_E^2 d_{\text{К}}\right) L \sin \alpha_{\text{К}}$,

где β – угол отклонения троса от вертикали, $d(s,\beta)$ – расстояние от центра Земли до точки с координатой s на тросе, $\rho(s)$ – линейная плотность троса в рассматриваемой точке, α – угол между тросом и прямой, соединяющей центр Земли и точку на тросе, $\alpha_{\text{К}}$ – он же для концевой массы, $M_{\text{К}}$ – масса на конце троса, $d_{\text{К}}$ – расстояние от конца троса до центра Земли.

Уравнение движение интегрируется численно по времени, и на каждом шагу выполняется интегрирование по длине троса для определения $M(\beta)$. По сравнению с предыдущей моделью периоды изменяются мало, критические углы (углы отклонения, при превышении которых трос не возвращается в равновесное вертикальное положение) изменяются заметно. В этой модели рассматривалось также влияние Луны для простой модели движения Луны (равномерное вращение в плоскости экватора). Для этого в момент внешних сил был добавлен переменный по времени момент приливных сил Луны. Показано, что влияние Луны относительно мало и несколько больше для случая короткого лифта (длина которого немного превышает расстояние до геостационара), т.к. его основная масса расположена у геостационара, где равнодействующая гравитационной и центробежной сил мала.

Следующая модель – двухзвенная – рассмотрена в разделе 4.2. Трос моделируется двумя массами, соединенными между собой и с Землей невесомыми стержнями, движение происходит в плоскости экватора. Одна масса расположена на геостационаре и соответствует тросу, другая – конечной массе. Это первое приближение к гибкому тросу. В линеаризованной модели движение является суперпозицией двух мод – синфазной и противофазной. Проанализированы частоты колебаний нулевой (маятниковой) и первой моды (изгибной). Нулевой моде соответствует синфазная форма колебаний, первой – противофазная. Найдены частоты этих колебаний. Частота маятниковой моды соответствует результатам более простых моделей и составляет больше трех суток, частота первой моды – меньше суток. Поэтому проявлений внутренних резонансов не наблюдается. Некоторые свойства нелинейных колебаний изучены с помощью отображения Пуанкаре. Показано, что в фазовом пространстве существует большая область, где орбиты отображения Пуанкаре регулярны и соответствуют системе, близкой к интегрируемой. Сильная хаотизация начинается только при больших, физически нереализуемых отклонениях.

В главе 5 изучается движение троса как непрерывной нерастяжимой весомой нити с грузом на конце. Нить переменного сечения в переменном по координате силовом поле. Описывается построение математической модели. Выводятся модели для пространственного движения (в разделе 5.1) и для движения в плоскости экватора (в разделе 5.2). Уравнения движения для трехмерного движения выглядят так:

$$\dot{u} = 2\omega_E v + {\omega_E}^2 x - \frac{\mu_E}{r^3} x + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s}\left(T(s,t)\frac{\partial x}{\partial s}\right) \qquad \dot{x} = u$$

$$\dot{v} = -2\omega_E u + {\omega_E}^2 y - \frac{\mu_E}{r^3} y + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s}\left(T(s,t)\frac{\partial y}{\partial s}\right) \qquad \dot{y} = v$$

$$\dot{w} = -\frac{\mu_E}{r^3} z + \frac{1}{\rho(s)} \frac{\partial}{\partial s}\left(T(s,t)\frac{\partial z}{\partial s}\right) \qquad \dot{z} = w$$

где точкой обозначены производные по времени, x, y, z – координаты точки s на тросе, u, v, w – скорости. Ось x направлена по радиусу Земли, проходящему через точку закрепления троса, ось z – на северный полюс, ось y дополняет систему координат до правой, то есть направлена на восток. r – расстояние от центра Земли до точки s на тросе, T – натяжение в точке. Краевые условия для уравнения такие: нижняя точка неподвижна, движение верхней точки совпадает с движением концевой массы. Уравнения движения в плоскости экватора выглядят так же, но последние уравнения (по оси z) отсутствуют.

Используется не встречавшийся нам ранее для задач динамики тросовых систем метод вычисления натяжения. Так как трос нерастяжимый, невозможно использовать механические уравнения состояния напряженной нити типа закона Гука. Натяжение получается из согласования условия нерастяжимости троса и динамических уравнений. Для трехмерного случая выражение для натяжения имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho(s)}T'(s,t)\right)-\frac{1}{\rho(s)}T(s,t)((x'')^2+(y'')^2+(z'')^2)$$
$$=-v'^2-u'^2-w'^2-2\omega_E(v'x'-u'y')+\omega_E{}^2\left(z'^2-1\right)$$
$$+\frac{\mu_E}{r(s,t)^3}\left(1-3\left(r'(s,t)\right)^2\right)$$

(штрихом обозначены производные по s)

для двумерного случая оно выглядит красивее:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho(s)}T'(s,t)\right)-\frac{1}{\rho(s)}T(s,t)\kappa(s,t)^2+\left(\omega_E+\omega(s,t)\right)^2=\frac{\mu_E}{r^3}\left(1-3\left(r'(s,t)\right)^2\right)$$

где κ – кривизна троса в точке, ω – угловая скорость элемента троса в точке s.

И в трехмерном, и в двумерном случае, это линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. К нему из физических соображений выводятся краевые условия.

для начальной точки приравнивается нулю продольная компонента скорости и ускорения точек троса, близких к точке закрепления, откуда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_0=\rho(0)\left(\frac{\mu_E}{R_E{}^2}-\omega_E^2R_E\right)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)_0$$

на верхнем (свободном) конце краевое условие выводится из требования совпадения продольной компоненты ускорений концевой массы и верхней точки троса

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{\text{К}}=-\frac{\rho(L)}{M_{\text{К}}}T_{\text{К}}$$

Для вычисления натяжения нужно решать краевую задачу для этого уравнения. Разностная аппроксимация и вычислительные алгоритмы описаны в разделе 5.3. Вычисления строятся на основе метода прямых: численно интегрируются эволюционные уравнения, и на каждом шаге по времени численно решается краевая задача для определения натяжения. Можно повысить точность и устойчивость вычислений, если перейти от переменной T (натяжение) к переменной $Q = {}^{T}/_{\rho}$ (натяжение, деленное на линейную плотность в точке), т.к. некоторые производные, которые при старой переменной T считались численно, вычисляются аналитически.

В разделе 5.4 описана программная система. Она позволяет интегрировать уравнения движения КЛ на большом интервале времени, задавать широкий набор характеристик движения и статических параметров, выдает зависимости одних параметров движения от других параметров и от времени, может вычислять ряд дополнительных величин: напряжение в каждой точке троса, полную энергию конструкции, разложение в ряд Фурье отклонений точек троса от вертикали. В общем, представляет собой довольно удобный и гибкий инструмент изучения динамики КЛ. Описаны способы коррекции результатов и контроля точности вычислений.

С помощью программ, описанных выше, были проведены численные эксперименты. В разделе 5.5 описаны результаты вычислений для 3-х-мерной системы. В этом случае было проведено относительно меньше расчетов, были рассчитаны отдельные (показательные) случаи движения. Найденные при этом периоды экваториальных и меридиональных колебаний оказались близкими к таким периодам в простых моделях.

Колебания в плоскости экватора для той же непрерывной модели описаны в разделе 5.6. Они более наглядны и изучены более подробно.

Рассмотрены колебания, происходящие в ограниченной по углу области, в частности, колебания, близкие к одномодовым. Описаны отдельные показательные результаты, в частности, распространение узкой волны, периодическое изменение напряжения при колебаниях, близких к маятниковым. Обнаружены такие интересные эффекты, как медленное (с периодом порядка 2-х месяцев) изменение амплитуды, смена режимов при свободных колебаниях троса (колебания с относительно большим периодом и большой амплитудой неожиданно сменяются более высокочастотными колебаниями меньшей амплитуды). Некоторые из таких эффектов трудно объяснить. Для медленного изменения амплитуды возникло предположение, что энергия переходит в более высокочастотные колебания. Однако на графиках зависимости от времени амплитуд разложения в ряд Фурье отклонений точек троса от вертикали не видно перекачки энергии в более высокие моды колебания. Для смены режима можно отметить, что похожие эффекты наблюдаются в системах с конечным числом степеней свободы при переходе через резонансную область.

При ограниченных по амплитуде движениях не наблюдалось значительных (более 30%) изменений напряжения троса.

Подробно рассмотрена линеаризованная система. У нее найдены собственные формы и частоты колебаний. При ограничениях на отклонения собственные формы линеаризованной системы, заданные как начальные условия для программы, численно интегрирующей полную систему, дают периодические движения. Приведены рисунки для периодических колебаний первых восьми мод для отклонения порядка 0.001 от длины троса. Выведены уравнения для вариации напряжения в линеаризованной модели. Напряжение при таких движениях меняется мало. Наблюдаются некоторые интересные эффекты. «Зеркальное» отражение напряжения на половине периода для низких мод. Для высоких мод – стабильно более низкое напряжение при близких к амплитудным положениях троса и более высокое при положениях троса близким к прямому, что объясняется тем, что напряжение зависит от скорости, а она больше при более прямом тросе.

$$\sigma(s,t) = \sigma_0 + \delta\sigma(s,t) = \sigma_0 + 2\omega_E \frac{\int_s^L \rho(\xi)\delta v(\xi,t)d\xi + M\delta v(L,t)}{S(s)} \quad ,$$

где $\delta\sigma$ – вариация напряжения, σ_0 – невозмущенное напряжение (одинаковое по всей длине троса), M – конечная масса, δv – вариация скорости, ρ и S – линейная плотность и площадь сечения троса в точке.

То, что этот эффект заметен только при высоких модах движения, объясняется тем, что в этом случае максимальная скорость больше. С одной стороны, это понятно интуитивно (при той же амплитуде частота колебаний для высоких мод выше), с другой – видно из формулы для скорости, которая зависит от собственного числа и, соответственно, растет с номером гармоники.

$$\delta v(s,t) = -A_k Y_k(s)\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t \ ,$$

где A_k – амплитуда k-й собственной моды, $Y_k(s)$ – собственная форма k-й моды, λ_k – собственное число.

Для некоторых собственных форм существуют узкие участки троса, на которых напряжение сохраняется во время всего движения, хотя на других участках троса меняется. Это связано с тем, что для этой формы троса находится некоторое s, при котором $MY_k = -\int_s^L Y_k(s)\,\rho(s)ds$, и поэтому вариация напряжения $\delta\sigma = 0$.

$$\delta\sigma(s,t) = 2\omega_E\dot{\theta}_k(t)A_k\frac{MY_k(L) + \int_s^L \rho(\xi)Y_k(\xi)d\xi}{S(s)}$$

Проследили за изменением во времени кривой напряжения от координаты параллельно с изменением формы троса для одного движения. В начале движения, т.е. при нулевых скоростях и амплитудном положении троса, кривая напряжения от координаты вдоль троса гладкая и монотонная, потом она образует волнообразную кривую, у которой столько экстремумов, сколько у собственной формы троса узлов. Затем амплитуда колебаний напряжения по s увеличивается; при фазе $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $n\epsilon\mathbb{Z}$, т.е. при прямом тросе, она максимальна. К половине периода уменьшается, на половине периода зависимость напряжения от координаты вновь образует монотонную кривую, потом образует снова волнообразную кривую, с тем же количеством экстремумов, но зеркальную, т.е. максимумы и минимумы поменялись местами. Дальше все повторяется периодически.

При увеличении амплитуды колебаний линейность движения нарушается. При отклонении больше 0.002 заметно нарушение линейности, узлы размываются.

Вернемся к системе с отклонениями, далекими от линейных. Рассмотрены также движения, не ограниченные по углу, то есть такие, при которых лифт падает. Обнаружены несколько сценариев падения – известные в динамике нити эффект кнута и постепенная раскачка, а также необычная спиральная неустойчивость, которая возникает при превышении некоторого угла наклона троса к вертикали в начале троса. При этом трос провисает (угол наклона к горизонту становится отрицательным), потом изгибается наподобие спирали, потом образует петлю и падает. Для этого случая построена приближенная модельная задача. Рассматривается начальный участок троса. Пусть линейная плотность постоянна, гравитационно-центробежное поле постоянно по координате, на верхний конец рассматриваемого участка действует следящая сила, которая представляет натяжение со стороны остальной части троса, тогда уравнения движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v$$

Оказалось, у этой приближенной задачи существует частное автомодельное решение. Если ввести вместо времени и координаты автомодельную переменную $\phi = \frac{s}{t}$, а от переменных x, y перейти к переменным $\bar{T} = \frac{T}{\rho}$ (натяжение, деленное на линейную плотность в точке) и $\beta(\phi) = \left(\alpha'(\phi)\right)^2$ (α – угол между касательной к тросу в точке и вертикалью, штрихом до конца раздела обозначается производная по ϕ), то существуют решения $\bar{T}(\phi), \beta(\phi)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\bar{T}''' = (-3\bar{T}' + 2\phi)\beta$$

$$(\bar{T} - \phi^2)\beta' = 4(\phi - \bar{T}')\beta$$

Эти уравнения имеют частное решение

$$\bar{T} = \frac{1}{3}\phi^2 + \bar{T}_0$$

$$\beta = \frac{C}{(2\phi^2 - 3\bar{T}_0)}$$

$x(\phi)$ и $y(\phi)$ находятся из β интегрированием и сшивкой решений для двух разных диапазонов ϕ. $x(\phi)$ и $y(\phi)$ задают параметрическую зависимость $y(x)$. Это решение качественно похоже на численно полученные формы начального участка троса после возникновения спирали и перед падением, что мы рассматриваем как подтверждение того, что спиральная неустойчивость реальна.

Сравнение результатов исследования поперечных колебаний на разных моделях (в тех областях, где их можно сравнить) показывает, что характерные периоды движений очень похожи.

Последняя, **6-я глава** посвящена продольным колебаниям, тоже в нелинейной непрерывной модели. Построена математическая модель, рассмотрены различные ее конечно-разностные аппроксимации, из них наиболее подходящими оказались метод Кранка-Николсона и Рунге-Кутты 4-го порядка. Рассмотрены некоторые характерные колебания, а также распространение узкого возмущения вдоль троса. Продольные колебания более высокочастотные, чем поперечные, их период порядка часа. Даже в положении равновесия трос лифта растянут из-за действия гравитационно-центробежных сил. Это растяжение можно посчитать численно, и оно близко к линейному. Также это растяжение можно посчитать аналитически для линеаризованной задачи, и в первом приближении оно оказывается линейным.

В **заключении** подчеркнуто, что динамика космического лифта сложна и разнообразна, и нуждается в дальнейшем изучении.

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ СЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ:

1. Нуралиева А.Б. Задачи статики и динамики космического лифта. // Тезисы 51-й научной конференции МФТИ, ноябрь 2008. Секция динамики и управления движением космических аппаратов.
2. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции и динамике равномерно нагруженного космического лифта. // VI Международный аэрокосмический конгресс IAC'09. Тезисы докладов. – Юбилейный М.О.: Хоружевский А.И., 2009, с. 269-270.
3. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б., Ставицкий А.А. Некоторые задачи механики равномерно нагруженного космического лифта. // Актуальные проблемы российской космонавтики. Труды XXXIV академических чтений по космонавтике. Москва, 26-29 января 2010 г. Москва: Комиссия РАН, 2010, с. 133-134.
4. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного космического лифта. // К.Э. Циолковский и современность. Материалы XLV Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: «Эйдос», 2010, с. 169-170.
5. Нуралиева А.Б., Садов Ю.А. О задачах динамики космического лифта. // К.Э. Циолковский и современность. Материалы XLV Научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга: «Эйдос», 2010, с. 167-168.
6. Нуралиева А.Б. О задачах динамики космического лифта // Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXV академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2011 г. Москва: Комиссия РАН, 2011, с. 132–133.
7. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. Автомодельные решения в модельной задаче о колебаниях троса космического лифта. // Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания.

Материалы V международной конференции. Обнинск: ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2011, с. 60.

8. Нуралиева А.Б. О динамике космического лифта. // Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Труды 54-й научной конференции МФТИ, 2011, с 43-44.
9. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного секционированного космического лифта // Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXVI академических чтений по космонавтике. Москва, 2012, с. 44-45.
10. Нуралиева А.Б., Калачев Г.В. О базовой динамике космического лифта. // Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXVI академических чтений по космонавтике. Москва, 2012. http://www.ihst.ru/~akm/36t5.htm
11. Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. О концепции нагруженного секционированного космического лифта. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН №39. Москва, 2011. 24 с.
12. **Садов Ю.А., Нуралиева А.Б. Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта // Математическое моделирование, 2011, том 23, №12, с. 3-19.**