На правах рукописи

Булатов Олег Витальевич

Численное моделирование течений в приближении мелкой воды на основе регуляризованных уравнений

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва - 2014

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова".

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Елизарова Татьяна Геннадьевна

Официальные оппоненты:
Шеретов Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор Тверского государственного университета.

Чурбанов Александр Георгиевич, кандидат физико-математических наук, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук (ИБРАЭ РАН).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится " ___" ________________ 2014 г. в ______ час. на заседании Диссертационного совета *Д 002.024.03*, созданного на базе *Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (ИПМ РАН)* по адресу: *125047, Москва, Миусская пл., 4*.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИПМ РАН*.

Автореферат разослан " ___ " _______________ 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета *Д 002.024.03*,
доктор физико-математических наук Змитренко Н.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Движение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле сил тяжести может быть описано в приближении мелкой воды. Уравнения мелкой воды (МВ) представляют собой упрощенную модель полных уравнений Навье-Стокса, описывающих пространственные нестационарные течения вязкого сжимаемого газа. Математическая модель мелкой воды широко используется для решения задач, представляющих как академический, так и практический интерес. К последним относится моделирование течений в относительно неглубоких водоемах, реках, водохранилищах, течений вблизи побережья морей и океанов, расчет волн цунами и сброса вод вблизи гидроэлектростанций, гидравлических течений в водозаборниках, технических сужениях и лотках, распространения волн прорыва при разрушении гидротехнических сооружений, а также множество других задач, непосредственно связанных с проблемами экологии.

Приближение мелкой воды применяется к атмосферным течениям и используются для задач прогноза погоды. Уравнения мелкой воды используется при численном моделировании крупномасштабных атмосферных и океанических течений, где существенны ускорения Кориолиса и его широтные вариации. Если жидкость расслаивается по причине разной солености или температуры, то полученный в результате слоистый поток по своей структуре похож на течение мелкой воды.

В последние десятилетия был разработан целый ряд численных алгоритмов для моделирования задач в приближении мелкой воды. Среди способов дискретного расчета уравнений мелкой воды получили наибольшее распространения три численных метода. К ним относятся метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод конечного объема. Основным преимуществом метода конечного объема является его понятная физическая интерпретация, локальное и глобальное сохранение массы жидкости, а также простота, с которой метод конечного объема расширяется и обобщается для неструктурированных сеток.

Трудности при численном моделировании задач в приближении мелкой воды с разрывным профилем дна вызваны возникновением сложной конфигурации разрывов в решении, обусловленных как нелинейностью самих уравнений, так и разрывным профилем подстилающей поверхности. В ряде работ были предложены способы преодоления этих проблем путем выделения линии разрыва, связанной с положением границы уступа или ступеньки дна и модификации системы уравнений МВ. Использование такого подхода делает численный алгоритм более точным, но лишает его однородности. Последнее не всегда удобно при расчетах практических задач. Таким образом, построение удобного однородного численного алгоритма для решения задач с разрывами дна представляется актуальным.

При численном моделировании течений жидкости со свободной поверхностью часто возникаю ситуации, когда высота уровня жидкости становится малой, то есть возникают так называемые зоны сухого дна. Например, такие ситуации возникают при расчетах течений рек, затоплении и осушении низменностей, набегании волн на береговую линию, расчет прибрежных волн цунами и в других случаях. Трудности в численном моделировании течения жидкости с областями сухого дна связаны с появлением движущейся границы, разделяющей сухую область и область, занятую жидкостью. До сих пор остается актуальным построение численного алгоритма, который был бы нечувствительным к скачкам скорости вблизи границы с сухим дном и достаточно точно мог бы определять положение границы с сухой областью.

В связи с перечисленными выше задачами усовершенствование и разработки новых эффективных алгоритмов для математического моделирования течений в приближении МВ является актуальной.

Исследования, вошедшие в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 10-01-00136, 13-01-00703а. Научная работа автора также стала победителем в конкурсе работ талантливых студентов, аспирантов и молодых ученых МГУ имени М.В.Ломоносова, учрежденный О.В. Дерипаска 2012 г.

Цели и задачи диссертационной работы. Основной задачей являлось получение регуляризованных уравнений мелкой воды, которые были бы родственны квазигазодинамическим уравнениям. Зная, что численные методы на основе квагазодинамических уравнений хорошо показали себя при решении уравнений Навье-Стокса, цель научной работы состояла в построении аналогичного численного метода для уравнений мелкой воды.

Новый численный алгоритм должен быть достаточно универсальным и однородным для моделирования течений с неизвестными заранее особенностями, такими как гидравлические скачки и волны разрежения. Также алгоритм должен допускать возможность расчета течений с подвижными областями сухого дна. Кроме этого новый алгоритм должен легко адаптироваться к сложным неструктурированным расчетным сеткам, которые требуются для описания течений в сложных пространственных областях, таких как в задачах затопления в поймах и руслах рек. Алгоритм обязан предоставлять возможность расчета течений в зонах со сложной формой подстилающей поверхности, включая ступеньки и уступы дна. Также в алгоритме должна быть предусмотрена возможность распраллеливания на большое число процессоров для ускорения счета.

Данная диссертационная работа посвящена созданию, программной реализации и верификации нового численного алгоритма решения уравнений МВ, удовлетворяющего перечисленным свойствам.

Научная новизна. Разработан новый оригинальный численный алгоритм для решения задач гидродинамики в приближении мелкой воды, основанный на сглаживании исходных уравнений по некоторому интервалу времени. В работе приведены примеры расчетов, сравнение численных результатов с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными. Численные алгоритмы на основе регуляризованных уравнений мелкой воды реализованы в виде комплекса программ.

Практическая значимость. Получены регуляризованные уравнения мелкой воды. Показана их связь с газодинамическими и гидродинамическими системами уравнений. Разработан численный алгоритм для решения задач гидродинамики в приближении мелкой воды на основе регуляризованных уравнений. Аналитически решены некоторые частные случаи задачи Римана над подстилающей поверхностью в виде ступеньки и уступа. Показано, что численное решение монотонно сходится к автомодельному решению данной задачи при сгущении пространственной сетки. Разработан алгоритм решения регуляризованных уравнений на неструктурированных сетках. На основе построенных уравнений разработан эффективный и недорогой с точки зрения вычислительных затрат программный комплекс для решения широкого круга задач, имеющих практические приложения. В частности, это задачи моделирования цунами, течения в водозаборниках, технических сужениях и лотках, задачи о распространении волн прорыва и приливных бор в реках.

Положения, выносимые на защиту:

1) Построены регуляризованные уравнения мелкой воды. На их основе созданы численные алгоритмы для решения задач гидродинамики в этом приближении. Для построенных алгоритмов выполняется условие покоящейся жидкости.

2) Построены аналитические и численные решения для серии задач Римана над подстилающей поверхностью в виде ступеньки и уступа дна. Показано, что при сгущении пространственной сетки численное решение сходится к аналитическому.

3) Создано расширение построенного алгоритма для расчета задач на регулярных и неструктурированных пространственных сетках. В алгоритмах предусмотрена возможность формирования нестационарных зон сухого дна.

4) Предложенные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ, на основе которых проведено численное моделирование задачи о набегании цунами на берег сложной формы и задачи о распространении волны прорыва при разрушении шлюза. Постановка задач и полученные результаты соответствуют данным эксперимента.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

- Численные методы в динамике жидкости (ICFD 2010), Университет Рединга, Великобритания, 12–15 апреля, 2010;
- 9-ая международная конференция по городскому сейсмостойкому строительству (9CUEE) и 4-ая азиатская конференция по сейсмостойким строениям (4ACEE), Токийский технологический институт, Токио, Япония, 6–8 марта, 2012;
- XIX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012», МГУ им. М.В.Ломонсова, Москва, 9–13 апреля, 2012;

- 6-ая европейская конференция по численным методам в прикладной науке и технике (ECCOMAS 2012), Венский университет, Австрия, 10–14 сентября, 2012;
- XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых 12учёных «Ломоносов-2013», МГУ им. М.В.Ломонсова, Москва, 8–12 апреля, 2013;
- Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях», Российский государственный гидрометеорологический университет, Санкт-Петербург, 25–28 июня, 2013;
- Суперкомпьютерные технологии математического моделирования (SCTEMM 2013), Якутск, 8–11 июля, 2013.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 4 статьи в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК, [1–4], 1 публикация в других научных изданиях [5].

Личный вклад автора. Личный вклад соискателя состоит в непосредственном построении сглаженных уравнений гидродинамики, разработке соответствующего численного алгоритма, создании на его основе комплекса программ и его верификации. Кроме того соискатель проводил анализ и интерпретацию численных результатов, оформление рукописи диссертации и основных публикаций по выполненной работе.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и приложений. Общий объем диссертации 157 страницы, включая 90 рисунков и 3 таблицы. Библиография включает 85 наименований на 9 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы научной работы, сформулированы цели диссертационной работы, перечислены полученные в диссертации новые результаты, их практическая ценность и положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

В первой главе выписаны уравнения МВ, предложены два способа построения регуляризованных уравнений мелкой воды и показана их прямая связь с КГД уравнениями. Первый способ является более общим и применим к течениям с произвольным числом Фруда. Второй способ удобен для расчета течений с малыми скоростями. Численный метод строится для более универсального первого варианта регуляризованных уравнений (параграф 1.4). Алгоритм явный, используется метод конечных объемов, потоковые величины аппроксимируются центральными разностями Устойчивость численного алгоритма обеспечивают дополнительные τ -слагаемыми. Шаг по времени и пространственный шаг связаны условием Кураната.

Важным свойством алгоритмов для численного моделирования течений в приближении МВ является выполнение условий покоящейся жидкости для течений над сложной формой подстилающей поверхности. Последнее означает, что в изначально покоящейся жидкости не должны возникать возмущения, обусловленные неровностями дна. В англоязычной литературе численный алгоритм, обладающий этим свойством, называют "well-balanced scheme". В построенном автором алгоритме выполняется условие покоящейся жидкости, то есть этот алгоритм относится к классу "well-balanced scheme".

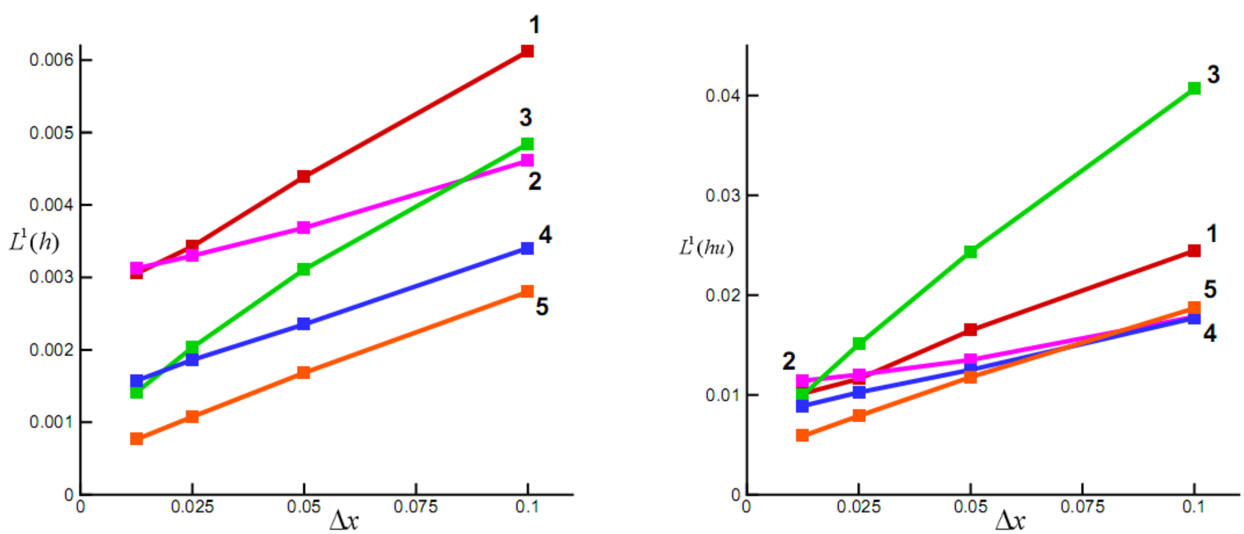

Рис. 1. Зависимость норм $L^1(h)$ и $L^1(hu)$ от шага сетки Δx для пяти вариантов задачи Римана со ступенькой. Цифрами на графиках обозначены номера соответствующих тестов.

В параграфе 1.5 описанный выше алгоритм тестируется на задаче Римана о распаде разрыва. Для уравнений МВ данные задачи носят название задач о разрушении плотины. В первой части параграфа построены аналитические решения для задачи Римана для уравнений МВ, далее приведено сравнение численного решения в рамках РУМВ с аналитическим, показана сходимость по сетке и влияние параметра регуляризации τ на устойчивость и точность численного решения. В параграфах 1.6 и 1.7 алгоритм тестируется на двух известных задачах о течении жидкости над неровным дном.

В последнем и наиболее объемном параграфе 1.8 изучается задача Римана, описывающая распад разрыва над подстилающей поверхностью в виде ступеньки и уступа дна. Этот тип задач значительно более сложен, чем задача о распаде разрыва над гладкой поверхностью. Решение любой задачи Римана можно представить в виде волн расширения, ударных волн и стационарных разрывов. При наличии ступеньки или уступа возникает дополнительный стационарный разрыв, который располагается над границей уступа или ступеньки. Есть целый ряд работ, которые посвящены аналитическому решению задачи Римана над ступенькой. Но полностью аналитически такая задача не решена, в отличии от известной задачи Римана для плоского дна. В данном параграфе 1.8 построены аналитические решения для пяти вариантов задачи. Показана сходимость численных решений РУМВ к аналитическим при сгущении пространственной сетки.

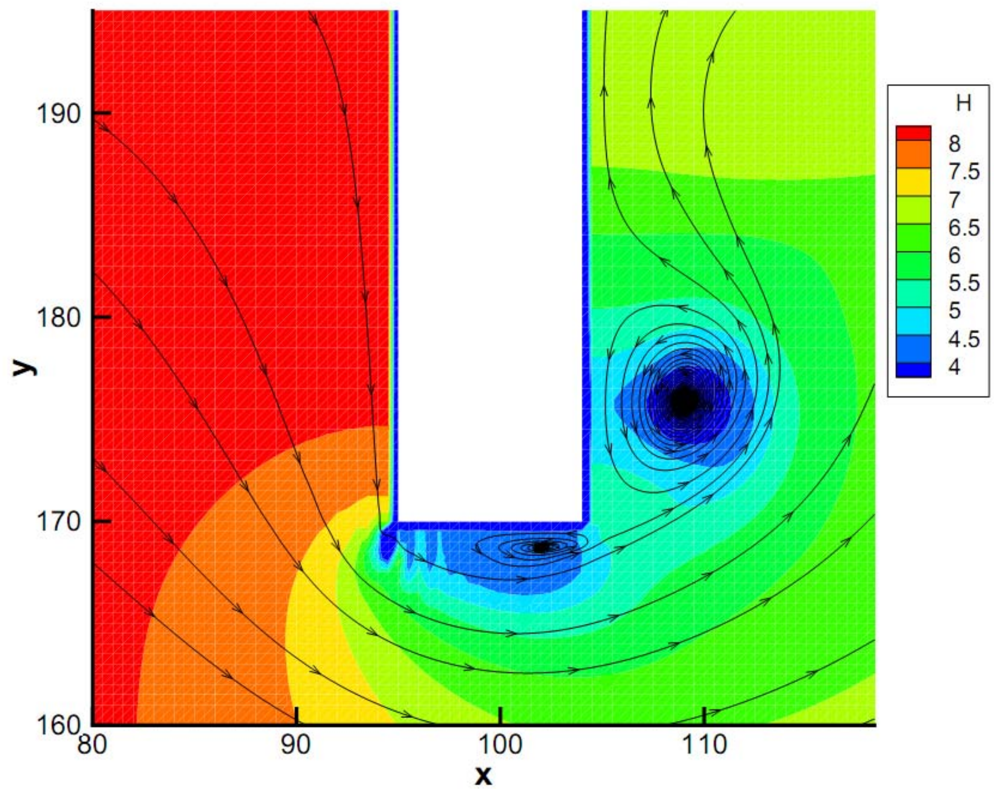

Рис. 2. Разрушении несимметричной плотины, фрагмент. Особенности течения для шага сетки $\Delta x = \Delta y = 0.5$м

Во второй главе выполнено расширение численного алгоритма для моделирования течений, в которых возможно появление зон с нулевым уровнем жидкости - так называемых зон сухого дна. Условие сухого дно первоначально построено для покоящейся жидкости (параграф 2.1).

В параграфе 2.3 алгоритм определения границы сухого дна используется для расчета движущейся границы жидкости на примере распада одномерного разрыва (задача разрушения плотины), где изначально справа расположена зона с сухим дном. Оценки точности численного решения выполнены путем его сравнения с полученным автором точным решением задачи. В параграфах 2.4 и 2.5 рассмотрен класс одномерных задач с постоянным наклоном дна, которые моделируют профиль береговой зоны. Задача из параграфа 2.4 состоит в моделировании многократного набегания и сбегания волны с наклонного берега. Одно из аналитических решений автор сопоставляет с численными расчетами.

Вторая задача (параграф 2.5) используется для моделирования характерных особенностей набегания одиночной волны цунами на берег с постоянным наклоном. В обоих примерах проведено сравнение точного и численного решений и показана монотонная сходимость численного решения к эталону. В главах 3 и 4 полученный алгоритм для расчета течений с сухим дном обобщается для прямоугольных и неструктурированных сеток.

В третье главе автор проводит обобщение построенного им алгоритма численного решения РУМВ на случай пространственных течений с использованием двумерных прямоугольных сеток в декартовой системе координат. Численный алгоритм для расчета двумерных течений строится по аналогии с алгоритмом расчета одномерных течений. Система РУМВ для двумерного течения аппроксимируется с помощью метода конечного объема, причем все пространственные производные аппкросимируются центральными разностями со вторым порядком точности.

В этом алгоритме учитывается выполнение условия покоящейся жидкости и приводится способ решения задачи для случая появления зон сухого дна. В параграфе 3.3 полученный РУМВ-алгоритм тестируется на известном примере о разрушении несимметричной дамбы. В параграфах 3.4 и 3.5 проводится численное моделирование двух экспериментов, выполненных в лабораторных условиях и моделирующих реальные физические явления.

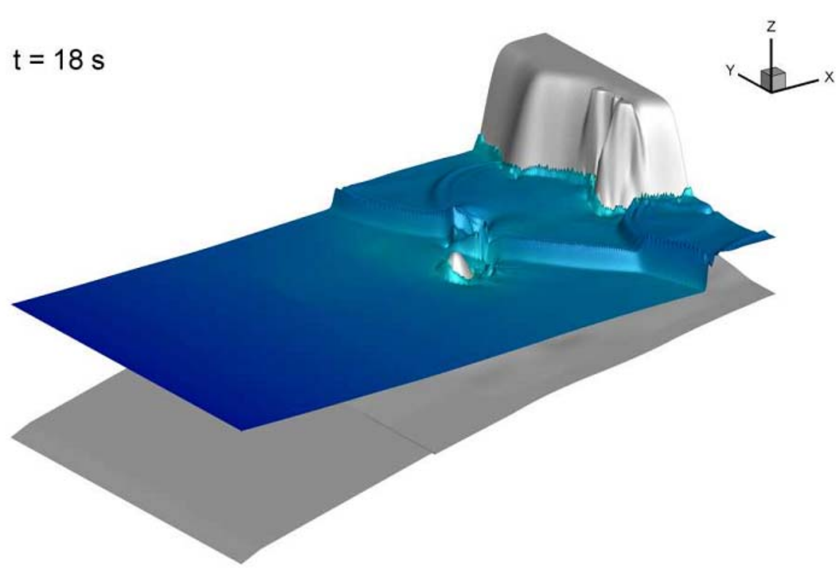

Рис. 3. Задача набегания цунами на берег сложной формы. Трехмерный профиль жидкости и рельеф дна в момент времени t = 18с

В параграфе 3.4 рассмотрена задача о набегании цунами на берег сложной формы. Численные расчеты выполнены в соответствии с данными натурного эксперимента. Для постановки эксперимента строилась модель, в основе которой лежал реальный ландшафт береговой линии в соотношении 1 : 400. В этом эксперименте моделировалось цунами Окушири (яп. Okushiri tsunami), которое произошло в 1993 году в долине Монай (Monai Valley). Его характерной особенностью стало необычно большой размер береговых волн, размер которых на пике составил 31,7 метров. Соответствующий эксперимент был проведены в Научно-исследовательском институте электроэнергетики города Абико, Япония (Research Institute for Electric Power Industry in Abiko, Japan).

В параграфе 3.5 проведено численное моделирование распространения волны прорыва в расширяющемся канале. Данный расчет выполнен в целях верификации алгоритмов для численного моделировании течений, возникающих при разрушении реальных шлюзовых камер и других гидротехнических сооружений, проводимых в вычислительном отделе Центра гидравлических исследований ОАО «НИИЭС» РусГидро. Для оценки точности численного метода использовались данные натурного эксперимента, выполненные в лабораторных условиях, а также численные расчеты задачи методом Годунова I и II порядка точности.

В четвертой главе диссертации построена разностная аппроксимация регуляризованных уравнений МВ для неструктурированных сеток. Для построения численного алгоритма используется метод конечного объема, аналогичный описанному в Главе 3. Подробно изложен способ эффективной программной реализации численного алгоритма (параграфа 4.2), особенностью которой является подход, в котором для каждого узла сетки вычисляется и сохраняется суммарное значение всех потоков, втекающих в рассматриваемый контрольный объем. В параграфе 4.3 проведена модификации численного алгоритма, обеспечивающая выполнение условия покоящейся жидкости.

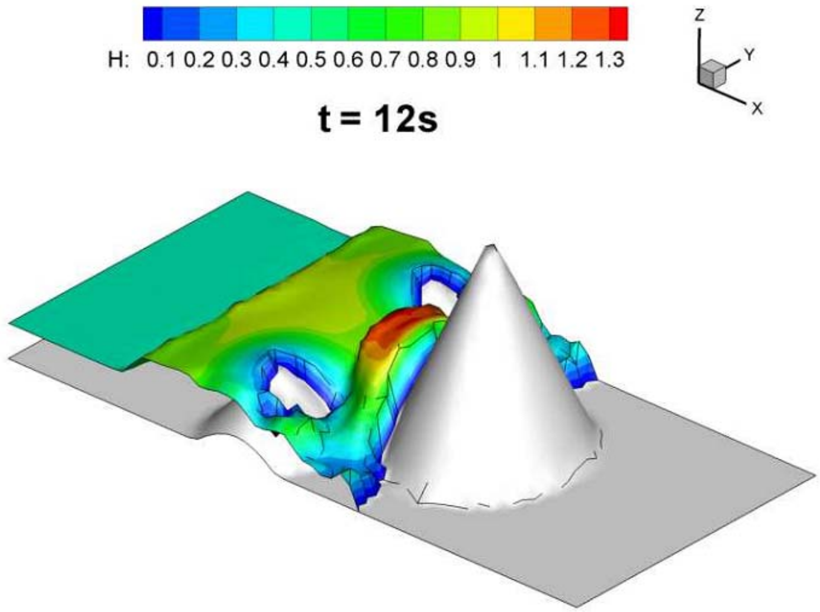

Рис. 4. Задача о разрушении плотины и затоплении поверхности с тремя конусами. Профиль дна и свободная поверхность жидкости в момент времени t = 12с.

В качестве тестовых задач рассмотрено течение, возникающее при распаде цилиндрического столба жидкости (параграф 4.4) и течения, возникающего при разрушении плотины и затоплении поверхности с тремя конусами разных размеров (параграф 4.5).

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Приложения содержат дополнительную информацию о численном алгоритме. Во-первых, рассказывается об альтернативном методе для задач с сухим дном. Приводится пример расчета задача о периодическом набегании волны на берег. Во-вторых, приводится альтернативный вид регуляризованных уравнений мелкой воды, когда мы полагаем, что уровень жидкость не сильно меняется за период усреднения, но успевает измениться скорость. Альтернативный вид регулязированных уравнений мелкой воды связан с квазигидродинамической системой уравнений. После этого обсуждаются преимущества (упрощенная форма уравнений) и недостатки (неустойчивый численный метод) квазигидродинамической системы.

Публикации в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК

1. **Булатов, О. В.** Численное моделирование течений газа на основе квазигидродинамических уравнений / Т.Г. Елизарова, О.В. Булатов // Вестник Московского университета Серия 3. Физика. Астрономия. – 2009. – № 6. – С. 29–33.

2. **Bulatov, O. V.** Regularized shallow water equations and a new method of numerical simulation of the open channel flows / T.G. Elizarova, O.V. Bulatov // Computers & Fluids. – 2011. – No. 46. – P. 206–211.

3. **Булатов, О. В.** Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах / О.В. Булатов, Т.Г. Елизарова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – том 51. № 1. – С. 170–184.

4. **Булатов, О. В.** Аналитические и численные решения уравнений Сен-Венана для некоторых задач о распаде разрыва над уступом и ступенькой дна / О.В. Булатов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – том 54. № 1. – С. 150–164.

Публикации в других научных изданиях

5. **Булатов, О. В.** Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках / Т.Г. Елизарова, О.В. Булатов // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2014. – № 21. – 27 с.