

**Денисенко Владимир Викторович**

**ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕЙ В ПОТОКАХ  
НОРМАЛЬНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЫ**

Специальность 01.02.05 - Механика жидкости, газа и плазмы

**Автореферат**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва - 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки  
Институт автоматизации проектирования Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
Олег Валентинович Трошкин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, Федеральное  
государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр  
им. А. А. Дородницына Российской академии наук, старший научный сотрудник,  
Чарахчян Александр Агасиевич  
кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Институт астрономии Российской академии наук, старший научный  
сотрудник, Кайгородов Павел Вячеславович

Ведущая организация: Национальный исследовательский ядерный университет  
«Московский Инженерно-Физический Институт»

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2015 г. в \_\_\_\_ часов на заседании  
Диссертационного совета Д 002.024.03 при в Федеральном государственном бюджетном  
учреждении науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской  
академии наук по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д .4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 002.024.03

доктор физико-математических наук

Н.В. Змитренко

## I. Общая характеристика работы

Диссертация затрагивает вопросы численного исследования и моделирования возникновения вихрей в невязких течениях.

### I.1. Актуальность темы

Целью диссертационной работы является численное моделирование возникновения устойчивых вихревых структур в некоторых классах гидродинамических течений, относящихся к сдвиговым течениям слабо сжимаемого нормального (характеризующимся аналитическим уравнением состояния) идеального газа (равновесной сплошной среды с уравнением состояния идеального газа).

Исследования относятся в основном к задачам 1) 2D –неустойчивости (двумерной неустойчивости) течения между цилиндрами, 2) 3D –устойчивости (трехмерной устойчивости) вихревого шара или кольца (тороидальном вихря), возникающего из простого протекания с осевой симметрией и 3) аналогичной устойчивости вихря противотока, устанавливаемого в роторе (цилиндре) газоразделительной центрифуги.

Все параметры и газодинамические величины, входящие в уравнения, являются безразмерными. Под вторичным режимом течения понимается картина течения, в которую «трансформируется» начальное стационарное решение системы уравнений, моделирующей поставленную задачу вследствие влияния каких-либо возмущений.

Как известно [1-2], плоскопараллельное течение Куэтта является устойчивым. Поэтому первая задача показывает, как влияет кривизна обтекаемой поверхности на устойчивость соответствующего цилиндрического течения. По результатам исследований, выполненных в диссертационной работе, была получена неустойчивость двумерного течения Куэтта в двумерном цилиндрическом канале. Таким образом, можно сделать вывод о наличии в задаче параметра  $R$  (радиус кривизны канала (безразмерный)), влияющего на устойчивость. При  $R \rightarrow \infty$  течение становится глобально устойчивым. Для исследований данной задачи была разработана модель, численный метод и его реализация проблемно-ориентированным кодом.

Вторая задача связана с проблемой возникновения шаровых вихрей в осевых потоках идеальной жидкости. Шаровые вихри наблюдаются в природе в виде шаровых молний, вихревых колец и т.д. Целью данной работы являлось исследование условий их возникновения. Была разработана модель, численный метод и его реализация проблемно-ориентированным кодом.

Последняя задача, которая была рассмотрена – это задача о возникновении противотока в газоразделительной центрифуге. Эта задача является приложением к предыдущей задаче – задаче 2). История данной задачи восходит еще к середине XX века – она была частью атомного проекта («Tube Alloys»). В 1941 году, как исполнитель данного проекта, Дирак, развивая в отчете («Br-42») [8] идею о «само-расслоении» изотопной газовой смеси (гексафторида урана), раскручиваемой *ротором* (цилиндром) промышленной центрифуги, усматривает существование в разгоняющем (за счет прилипания смеси к стенке ротора) и несущем ее (со скоростью около восьми «махов» у стенки) осевом потоке дополнительной *противоточной циркуляции*, замыкающей рабочий цикл отделения легкой фракции (урана-235) от более тяжелой компоненты (в основном, урана-238). Она и обозначилась впоследствии противоточным вихрем в сжимаемой среде. Целью исследований было получение данного противотока при помощи численных методов и вариаций начальных условий. Аналогично вышерассмотренным задачам, была разработана модель, численный метод и проблемно-ориентированный код.

### I.2. Цели и задачи

Целью работы являлось исследование различных режимов гидродинамических течений невязкой нормальной среды (вторичных течений) методами прямого численного моделирования.

Были поставлены три задачи фундаментального характера – исследование двумерного течения Куэтта в цилиндрическом канале, исследование механизмов возникновения тороидального и шарового вихря в осесимметричном протекании невязкой нормальной среды в цилиндрическом канале и исследование причин генерации противоточного вихря в газоразделительной центрифуге. Для каждой из задач была разработана своя математическая модель, численный метод и проблемно-ориентированный код.

Все поставленные задачи были решены и тщательно исследованы, определены характерные величины, влияющие на характер данных течений.

### **I.3. Научная новизна**

Научная новизна заключается в следующем:

1. Проведено исследование режимов двумерного течения Куэтта в цилиндрическом канале (промоделировано возникновение вихрей). Обнаружено наличие вторичного режима течения, возникающего вследствие внесения в течение возмущений радиальной компоненты скорости (возмущений начальных данных). Вторичный режим течения характеризуется наличием крупных вихрей с размерами порядка величины ширины канала.

2. Определены параметры, влияющие на характер течения Куэтта. Обнаружена длинноволновая неустойчивость и независимость амплитуды вносимого возмущения на режим течения.

3. Получен тороидальный и шаровой вихрь, возникающие вследствие возмущения осесимметричного протекания идеальной нормальной среды в цилиндрическом канале. Потеря устойчивости возникала из-за влияния возмущений угловой скорости (закручивающие возмущения).

4. Выполнено исследование режимов течения газоразделительной центрифуги. Составлена модель, численный метод и проблемно-ориентированный программный код.

5. Исследовано влияние различных типов возмущений на течение в центрифуге. Показано, что задача имеет несколько параметров различного типа – механические и тепловые, микропараметры (параметры, определяемые свойствами газа – теплопроводностью, вязкостью и т.д.) и макропараметры (скоростью течения и т.д.). Промоделировано возникновение противоточного вихря возмущением граничных условий (механических и тепловых).

### **I.4. Методология и методы исследования**

Задачи, поставленные в работе, решаются при помощи методов численного моделирования гидродинамических задач, математической физики и др.

Достоверность результатов обосновывается достоверностью построенного численного алгоритма решения, прошедшего успешную валидацию.

### **I.5. Теоретическая и практическая значимость**

В работе представлены следующие новые научные результаты:

- предложены модели, позволяющие исследовать причины возникновения вихрей в невязких течениях нормальной среды;
- предложена модель, позволяющая исследовать причины возникновения вихрей в течениях вязкой, теплопроводной, двухкомпонентной нормальной среды;
- предложены численные методы решения вышеописанных задач;
- проведено множество численных экспериментов по изучению причин возникновения вихрей в эволюции вышеописанных течений.

Исследование течений на предмет причин возникновения вихрей имеет огромный интерес не только в теоретическом, но также и в практическом смысле. Натурные эксперименты, несмотря на свою огромную ценность, не дают достаточно информации по

этому вопросу. К тому же они очень сложны и дороги. Например, в натурном эксперименте очень сложно узнать, по отношению к какого рода возмущениям проявляется смена режима течения (переход в вихревой режим течения). Здесь на помощь приходят методы численного моделирования. Необходимо лишь грамотно поставить задачу и разработать соответствующую модель. В этом случае мы можем без особого труда исследовать влияние различных параметров задачи на течение. Поэтому, весьма важными являются модели и программные модули, дающие возможность исследовать течения по многим параметрам, получать и исследовать вторичные течения (вихревые течения).

Разработанные модели и программные средства могут быть использованы в астрофизике для исследования аккреционных дисков и других подобных астрофизических объектов. Для решения таких задач можно использовать код, моделирующий двумерное течение между цилиндрами. Аккреционный диск представляет из себя структуру, возникающую в результате падения среды, обладающей вращательным моментом, на массивное центральное тело. Таким образом, данное образование имеет вид сплошной среды, вращающейся вокруг гравитирующего центра. Разработанный код моделирует данную задачу в гидродинамическом приближении и может быть использован для исследований.

Программный модуль, моделирующий протекание в трубе может быть использован для исследования причин возникновения шаровых вихрей и исследования течений в трубах. Шаровые вихри являются устойчивыми образованиями и их природа исследована не полностью (в частности – причина их возникновения). Разработанный вычислительный модуль позволит ответить на некоторые вопросы теории шаровых вихрей. Также, данный модуль позволит изучить режимы осесимметричных течений в трубах. Результаты исследований могут быть использованы в промышленности в области транспортировки гидрогазодинамических продуктов по трубам.

Программный модуль, моделирующий течение в газовой центрифуге может быть использован в атомной промышленности при оптимизации режимов функционирования газоразделительных центрифуг.

Все вычислительные алгоритмы реализованы в виде программных модулей, представляющих из себя консольные приложения. Данные приложения без особого труда могут быть доработаны до приложений с поддержкой GUI (Graphic User Interface). Реализация алгоритмов выполнена на языках программирования Fortran и C++ преимущественно методами структурного программирования.

Личный вклад автора состоит в разработке математических моделей исследуемых задач, численных методов и алгоритмов их решения, а также в создании программных средств, позволяющих производить исследования поставленных задач. Все оригинальные результаты расчетов по исследованию режимов течений, представленные в работе и в статьях, получены и проанализированы лично автором.

## **I.6. Апробация работы.**

Основные положения работы докладывались и обсуждались на семинарах и конференциях:

- Joint Russia-Japan Symposium “Numerical Experiment in Hydrodynamical Instability and Turbulence with High-Performance Computing”, November 11-13, 2009, Moscow.
- 50-я юбилейная конференция МФТИ, ноябрь, 2007, Долгопрудный.
- 12th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (IWPCTM12), Moscow, Russia, July 12–17, 2010.
- 3rd International Conference on Turbulent Mixing and Beyond, August 22 — 28, 2011, Trieste, Italy.

## **I.7. Положения, выносимые на защиту.**

1. С использованием методов численного моделирования обнаружено наличие вторичного течения по отношению к двумерному течению Куэтта между цилиндрами.
  2. С использованием методов численного моделирования обнаружено наличие вихревого режима в осесимметричном протекании невязкой среды.
  3. Вторичным течением, по отношению к осесимметричному протеканию, является тороидальный вихрь.
  4. Составлена и исследована модель течения в газоразделительной центрифуге.
  5. Обнаружен и промоделирован вторичный режим течения в газоразделительной центрифуге. Вторичное течение имеет вид течения тороидального вихря.
- Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы (202 наименования). Общий объем диссертационной работы составляет 124 страницы.

## II. Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, описывается текущее состояние исследований в данной области, научная новизна работы и ее практическая и теоретическая значимости.

**В первой главе** приведена математическая постановка и математические модели исследуемых невязких задач. Рассмотрим вначале постановку двумерной задачи о течении между цилиндрами.

*Постановка задачи.* В качестве основного течения, исследованием которого мы займемся, выберем течение (профиль скорости) Куэтта (двумерное) между двумя коаксиальными цилиндрами. Нас будет интересовать влияние физических параметров задачи на характер течения. В качестве модельных уравнений течения выберем уравнения Эйлера, записанные в полярной системе координат. Мы не будем интересоваться тем, как влияет вязкость на течение. В большинстве случаев, влияние вязкости сводится к диссипации энергии вносимых возмущений [3]. Запишем систему модельных уравнений, использовавшихся в расчетах:

1. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru\rho) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v\rho) = 0 \quad (1)$$

Здесь  $u, v$  -  $r$  и  $\varphi$  - компоненты скорости соответственно.

2. Уравнения для двух компонент плотности импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\rho u^2 + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho uv) = \frac{p}{r} \quad - r \text{ компонента,} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v^2 + p) = 0 \quad - \varphi \text{ компонента,} \quad (3)$$

3. Уравнение для удельной полной энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru(\rho E + p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v(\rho E + p)) = 0 \quad (4)$$

4. Уравнение состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (5)$$

Где  $t$  - время,  $\rho$  - плотность,  $E = e + \frac{v^2}{2}$  - удельная полная энергия и  $e$  - удельная внутренняя энергия,  $\gamma$  - показатель адиабаты моделируемой среды.

*Граничные условия.* На стенках цилиндрического зазора имеют вид условий непротекания:  $u|_{r=R_1} = u|_{r=R_2} = 0$ , где  $R_1, R_2$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

*Начальные условия.* За начальные условия бралось течение Куэтта

$$v = \frac{\Omega}{R_2^2 - R_1^2} (R_2 r - \frac{R_2 R_1^2}{r}) \text{ при условии неподвижности внутреннего цилиндра и вращения}$$

внешнего с угловой скоростью  $\Omega$  (в численной модели цилиндры не вращаются, т.к. задача невязкая и считается, что среда уже «раскручена» и предоставлена сама себе, т.е. нет внешних источников энергии (рассматривается замкнутая система), что предоставляет чистоту эксперимента для исследования влияния различных факторов на течение). Здесь  $R_1$  – радиус внутреннего цилиндра,  $R_2$  – внешнего.

*Возмущение.* Исследование течения производилось методом возмущения начальных данных. Возмущение имело вид:  $\delta u(r, \varphi) = a(r) \sin(n\varphi)$  - возмущение  $r$  – компоненты скорости, где  $n$  - частота возмущения,

$$a(r) = \begin{cases} \alpha(\frac{\Delta R}{2} - r), & R_{cp} > r \geq R_{cp} - \frac{\delta}{2} \\ \alpha(r - \frac{\Delta R}{2}), & R_{cp} + \frac{\delta}{2} \geq r \geq R_{cp} \end{cases} \text{ - амплитуда. Здесь } \delta, \alpha \text{ – ширина слоя возмущений}$$

(несколько расчетных ячеек) и коэффициент пропорциональности в линейной зависимости  $a = a(r)$ .

Ниже описана постановка задачи о протекании в цилиндрическом канале.

*Постановка задачи.* В качестве модели для данной задачи выберем течение между цилиндрами вдоль оси. Направим ось цилиндров вдоль координаты  $x$ . В такой постановке удобно ввести цилиндрическую систему координат  $(r, x, \varphi)$ . Будем считать,

что гидродинамические параметры течения не зависят от угла  $\varphi$ , т.е. оператор  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$ . В

качестве уравнений модели возьмем уравнения невязкой сжимаемой среды с уравнением состояния идеального газа, записанные в цилиндрической системе координат:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^r \\ \rho u^x \\ \rho u^\varphi \\ \rho(e + \frac{V^2}{2}) \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u^r \\ \rho(u^r)^2 + p \\ \rho u^r u^x \\ \rho u^r u^\varphi \\ \rho u^r (e + \frac{V^2}{2}) + p u^r \end{pmatrix}_r + \begin{pmatrix} \rho u^x \\ \rho u^r u^x \\ \rho(u^x)^2 + p \\ \rho u^\varphi u^x \\ \rho u^x (e + \frac{V^2}{2}) + p u^x \end{pmatrix}_x + \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho u^r \\ -\rho(u^\varphi)^2 + \rho(u^r)^2 \\ \rho u^r u^x \\ 2\rho u^r u^\varphi \\ \rho u^r (e + \frac{V^2}{2}) + p u^r \end{pmatrix} = 0, \quad p = \sigma \rho e, \quad \sigma = \gamma - 1$$

Благодаря данной постановке, в силу симметричности течения по углу  $\varphi$  для численного решения уравнений (6), записанных в потоковой форме, несмотря на трехмерность задачи, требуется двумерная расчетная область.

*Начальные условия.* В качестве основного течения (начальных условий) бралось течение вдоль оси  $x$ . Всего было исследовано два вида течений:

1. С убывающей к внешнему цилиндру величиной скорости

$$u^x = \begin{cases} 1, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{1}{R_3 - R_2}(R_3 - r), & R_2 < r \leq R_3 \\ 0, & R_3 < r \leq R_4 \end{cases}$$

2. С увеличивающейся к внешнему цилиндру величиной скорости

$$u^x = \begin{cases} 0, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{1}{R_3 - R_2}(r - R_2), & R_2 < r \leq R_3 \\ 1, & R_3 < r \leq R_4 \end{cases}$$

Где  $R_1 = 0.1$  – радиус внутренней стенки канала (стенка введена из-за наличия в расчетной схеме множителя  $\frac{1}{r}$ , обусловленного наличием источника пропорционального  $\frac{1}{r}$ ),  $R_2 = R_1 + 0.3(R_4 - R_1)$ ,  $R_3 = R_4 - 0.3(R_4 - R_1)$ . Здесь  $R_4 = 0.5$  – радиус внешней стенки канала. Радиальная компонента скорости  $u^r = 0$ .

*Возмущение.* Возмущение представляло из себя «закрутку» основного течения:

$$u^\varphi = \begin{cases} \Omega_{\max}(r - R_4), & R_4 \geq r \geq \frac{R_1 + R_4}{2} \\ -\Omega_{\max}(r - R_1), & \frac{R_1 + R_4}{2} > r \geq R_1 \end{cases},$$

где  $\Omega_{\max} = 0.1$ .

*Граничные условия.* Граничные условия имеют вид условий непротекания на стенках канала и периодические условия на торцах расчетной области:

$$u^r \Big|_{r=R_1} = 0, \quad u^r \Big|_{r=R_4} = 0, \quad U \Big|_{x=0} = U \Big|_{x=H}. \quad \text{Где } H \text{ – длина канала, } U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^r \\ \rho u^x \\ \rho u^\varphi \\ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

**Вторая глава** диссертации посвящена описанию современных методов численного моделирования.

Для численного решения систем (1)-(6) используется метод конечного объема. Конечно-объемный метод делает уравнения дискретными, разделяя расчетную область на некоторое число произвольных многогранников. Поверхностный интеграл, возникающий в уравнениях (1)-(6), аппроксимируется суммой потоков, пересекающих грани контрольного объема. Точность решения по пространству зависит от метода вычисления данных потоков.

Для вычисления конвективных потоков используется приближенное решение задачи о распаде разрыва - метод Роу [4]. Данный метод замечателен тем, что в отличие от точного решения задачи о распаде разрыва, несет меньшую вычислительную нагрузку [5].

Вычислительные схемы обеих задач обладают вторым порядком точности по пространству и вторым порядком точности по времени. Вторым порядком точности по времени достигается применением схемы Рунге-Кутты второго порядка.

Все задачи решались на структурированных сетках.

В **третьей главе** представлены результаты решения поставленных задач и рассмотрена постановка и решение задачи о возникновении противотока в газоразделительной центрифуге.

*Двумерная задача Куэтта.* Данная задача имеет несколько параметров, о влиянии которых на характер течения было бы интересно узнать. Во-первых - это угловая скорость вращения внешнего цилиндра  $\Omega$ , которая характеризует градиент угловой скорости течения. Затем можно выделить радиус двумерного канала  $R$ , ширину зазора канала  $\Delta R$ , частоту и амплитуду возмущения  $n, a$ . Также, необходимо ввести "меру",

характеризующую течение (данная мера позволит отличить основной режим течения от вторичного). Для этого была сконструирована следующая комбинация под названием

"энергия пульсаций":  $E_t = \frac{1}{E_0} \int ((u')^2 + (v')^2) dV$ , здесь  $E_0$  - кинетическая энергия течения в

начальный момент времени,  $u', v'$  - пульсации радиальной и угловой компоненты скорости соответственно. Пульсации вычислялись следующим образом: проводилось усреднение

обеих компонент по углу, по формуле  $\langle f(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi$ , где  $\langle f \rangle$  - среднее

значение функции. Далее вычислялись пульсации согласно выражению:

$f'(r, \varphi) = \langle f(r) \rangle - f(r, \varphi)$ , где  $f(r, \varphi)$  - значение функции в данной точке.

В целом, результаты исследования течения можно представить следующим образом. Будем наблюдать за эволюцией завихренности течения, показанной на рисунке 1. Как видно из данного рисунка, вначале образуется максимум завихренности в области, куда было внесено возмущение - образуется кольцо завихренности. Затем это кольцо начинает делиться и образуются несколько вихрей. Данные вихри, взаимодействуя между собой, образуют несколько вихрей порядка ширины зазора между цилиндрами - сформированное вторичное течение.

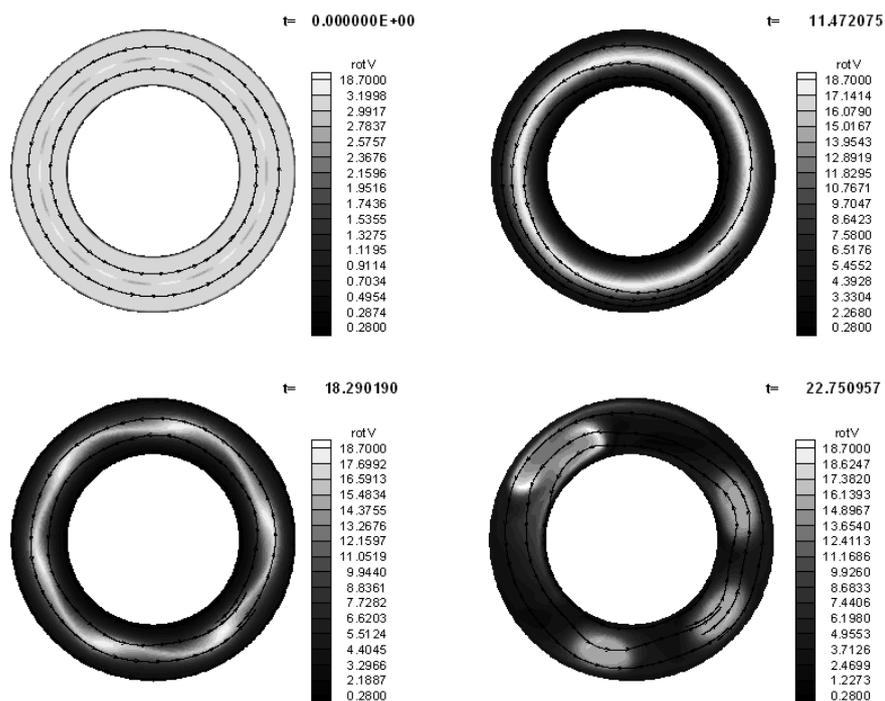


Рис. 1 Развитие вторичного режима течения в двумерной задаче Куэтта, представлены распределения завихренности в зависимости от времени.

На рисунке 2 показан график зависимости энергии пульсаций  $E_t$  от времени. Из данного графика видно, что наступает такой момент времени  $t'$ , когда резко увеличивается  $E_t$ . Причем, в этот момент времени происходит рождение вихрей. Таким образом, величиной  $t'$  можно характеризовать рассматриваемое течение. При больших  $t'$  ( $t' \rightarrow \infty$ ), течение имеет только один режим – свой первичный, заданный изначально (течение устойчиво). Здесь за  $E_t^{\max}$  обозначена энергия пульсаций вторичного течения.

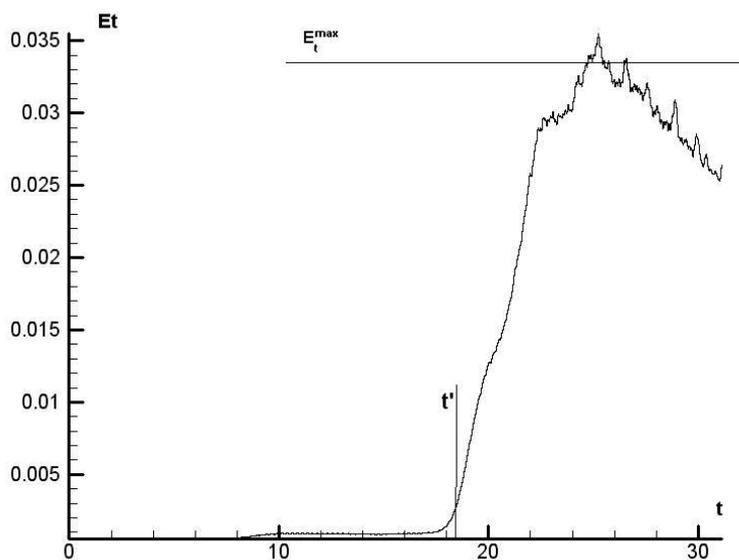


Рис. 2 Зависимость энергии пульсаций  $E_t$  от времени.

Уменьшение  $E_t$  во вторичном режиме течения связано с численной диссипацией вычислительной схемы. Влияние схемы на характер течения показано на рис. 3. Из

данного рисунка прослеживается тенденция к увеличению  $E_t^{\max}$  с ростом размерности сетки и скорости уменьшения величины  $E_t$  во вторичном режиме течения. Также, происходит увеличение  $t'$  с ростом размерности сетки.

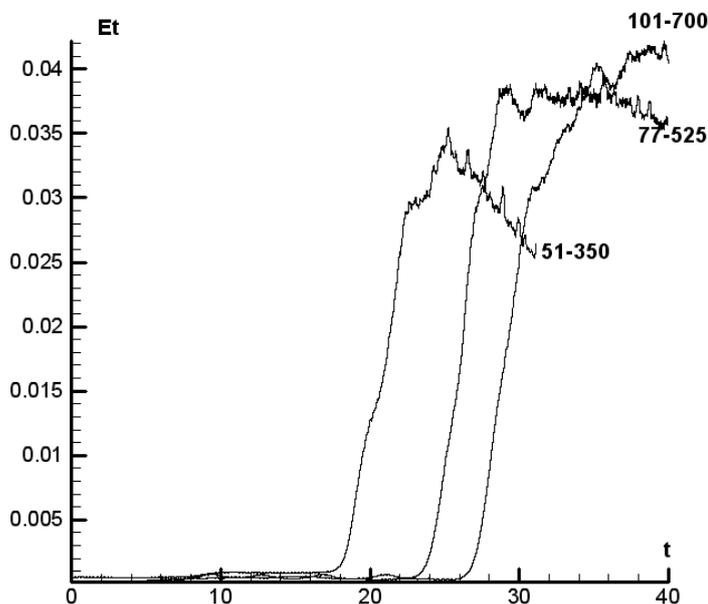


Рис. 3 Зависимость  $E_t(t)$  от размерности вычислительной сетки.

Приступим к рассмотрению влияния параметров задачи на характер течения. На рисунке 4 приведена зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от угловой скорости вращения внешнего цилиндра  $\Omega$ . Как видно из данных графиков, с увеличением  $\Omega$  течение быстрее переходит во вторичный режим (становится более неустойчивым), т.к. уменьшается  $t'$  и увеличивается  $E_t^{\max}$ .

На рисунке 5 показана зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от частоты внесенного возмущения  $n$ . Из данного рисунка можно заключить, что течение обладает свойством длинноволновой неустойчивости – чем больше длина волны (и соответственно меньше  $n$ ), тем быстрее переходит во вторичный режим (становится более неустойчивым).

На рисунке 6 приведена зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от ширины зазора двумерного цилиндрического канала  $\Delta R$ . Здесь прослеживается наличие минимума в зависимости  $t'(\Delta R)$  и максимума в зависимости  $E_t^{\max}(\Delta R)$ . Данный экстремум можно объяснить тем, что чем больше  $\Delta R$ , тем меньше градиент скорости течения – переход во вторичный режим происходит дольше. С другой стороны, при малой величине  $\Delta R$  стенки канала мешают рождению вихрей. С другой стороны, как известно [1-2], двумерное течение Куэтта между двумя плоскостями является абсолютно устойчивым, что удовлетворяет малости  $\Delta R$ . Под малостью следует понимать, что  $\Delta R \ll R$ , где  $R$  - радиус канала.

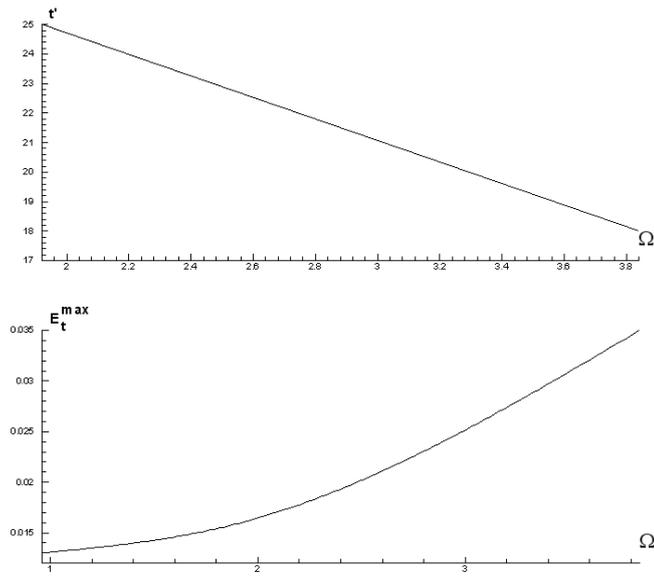


Рис. 4 Зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от угловой скорости вращения внешнего цилиндра  $\Omega$ .

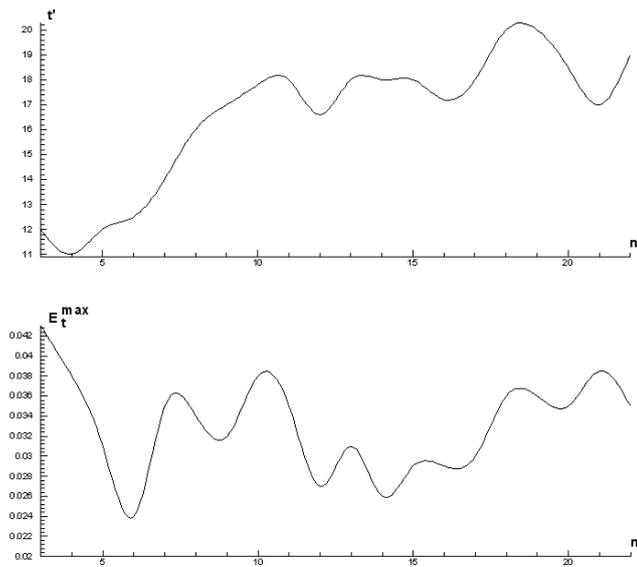


Рис. 5 Зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от частоты внесенного возмущения  $n$ .

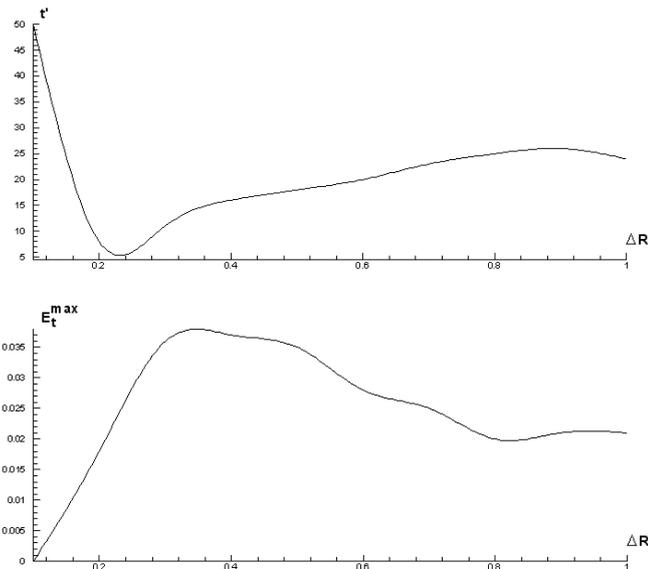


Рис. 6 Зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от ширины зазора двумерного цилиндрического канала  $\Delta R$ .

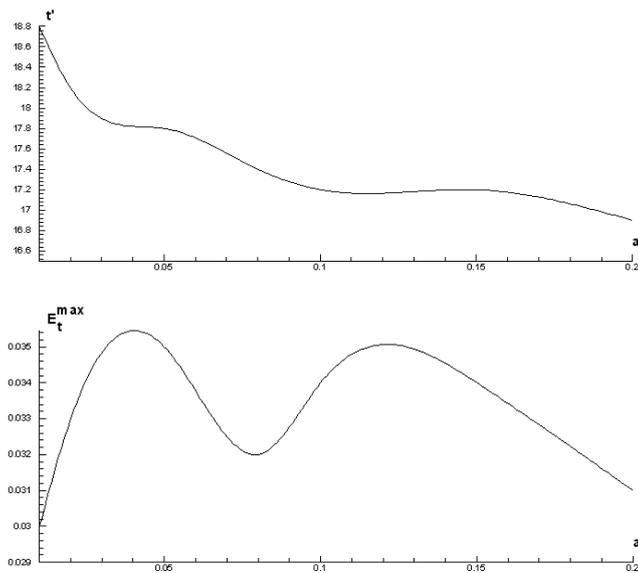


Рис. 7 Зависимость времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от амплитуды внесенного возмущения  $a$ .

На рисунке 7 показаны зависимости времени перехода во вторичный режим течения  $t'$  и энергии пульсаций вторичного течения  $E_t^{\max}$  от амплитуды внесенного возмущения  $a$ . Из данных зависимостей видно, что характер течения практически не зависит от амплитуды возмущения.

При некотором значении параметров задачи наблюдается так называемая «слабая неустойчивость», характеризуемая вторичным течением, показанным на рис. 8.

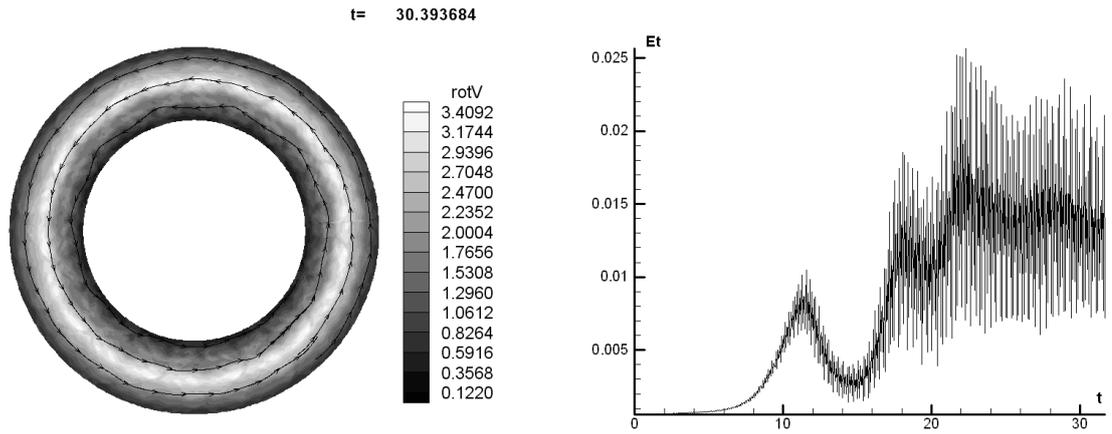


Рис. 8 Вторичное течение, возникающее при «слабой неустойчивости», слева показана картина течения, справа – зависимость  $E_t(t)$ .

Рассмотрим теперь результаты исследования второй задачи – осесимметричного протекания вязкой нормальной среды в цилиндрическом канале.

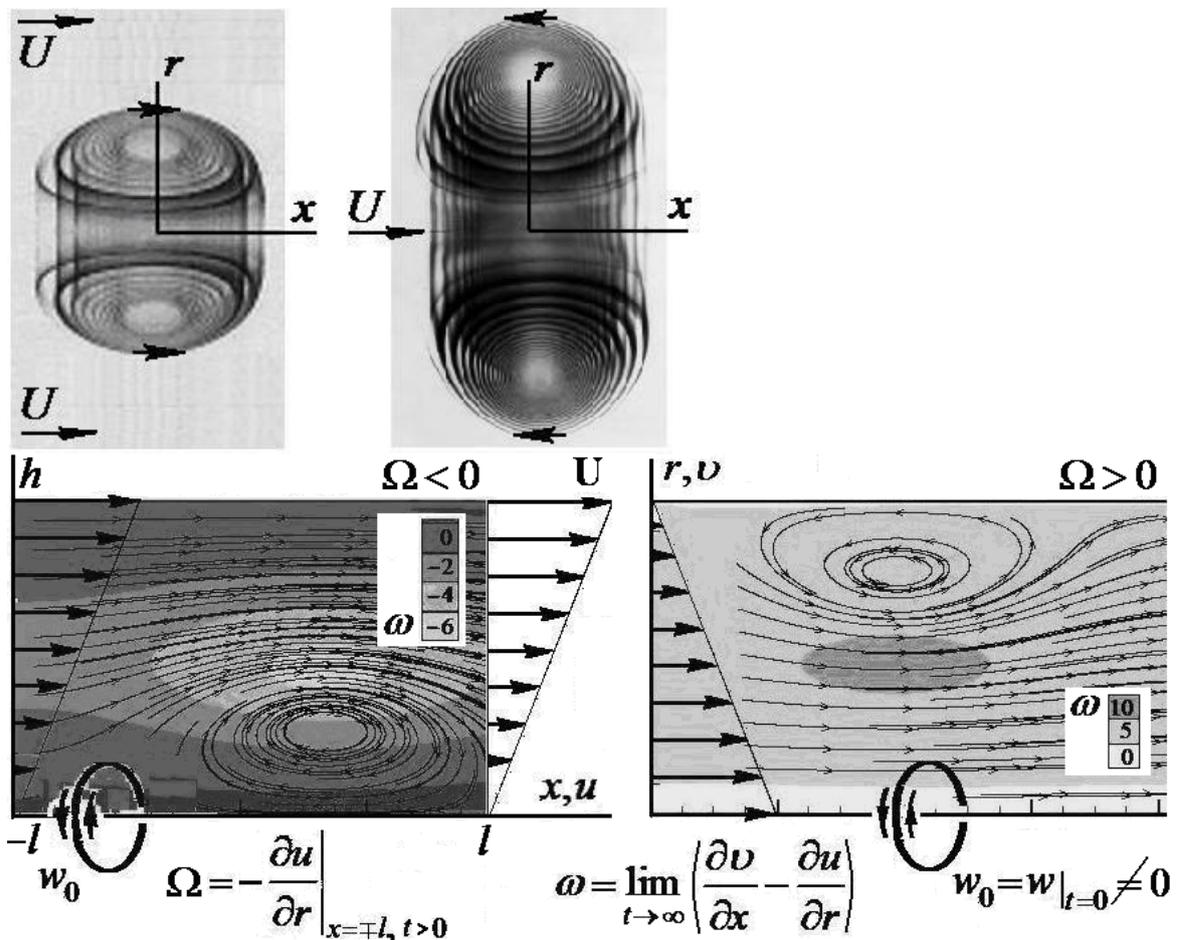


Рис. 9 В верхней части – моделируемые вихри, в нижней – вызванное начальной закруткой – азимутальной скоростью  $w_0$  (закруткой) произвольного знака ( $\mp w_0 > 0$ ) – установление шарового или кольцевого вихря, с предельной завихренностью  $\omega$

того же знака, что и завихренность  $\Omega < 0$  (или  $\Omega > 0$ , соответственно) невозмущенного осесимметричного потока  $U$ , поддерживаемая на концах цилиндрической трубы.

На рисунке 9 представлена картина вторичного течения, возникающая в результате возмущения закруткой основного течения - протекания с отрицательным (справа) и положительным (слева) градиентом скорости. Вторичный режим течения представляет из себя тороидальный вихрь, расположенный у стенки канала – в случае возмущения течения с отрицательным градиентом скорости. Если таким же образом возмутить течение с положительным градиентом скорости, то картина вторичного течения будет представлять из себя шаровой вихрь.

Результаты данного исследования проливают свет на возможные причины возникновения тороидальных вихрей как вторичного течения, возникающего в результате перехода во вторичный режим (неустойчивости) осесимметричного сдвигового протекания. Течения в виде тороидальных вихрей (вихревых колец) распространены в природе и являются весьма устойчивыми. Вихревые кольца можно наблюдать при наличии источника завихренности в потоке, подробно данный вопрос был изучен в [6]. Тороидальный вихрь наблюдается в виде вторичного течения также и в неустойчивости Рэлея-Бенара.

Таким образом, полученный в данной работе результат является совершенно новым видом возникновения тороидального вихря.

Последней задачей, которую мы рассмотрим, является задача о получении противотока в газоразделительной центрифуге. Данная задача примыкает к предыдущей – задаче о шаровом и тороидальном вихрях. Под противотоком здесь понимается возвратное течение – тороидальный вихрь, причины возникновения которого мы и должны выяснить.

Схема газоразделительной центрифуги показана на рисунке 10.

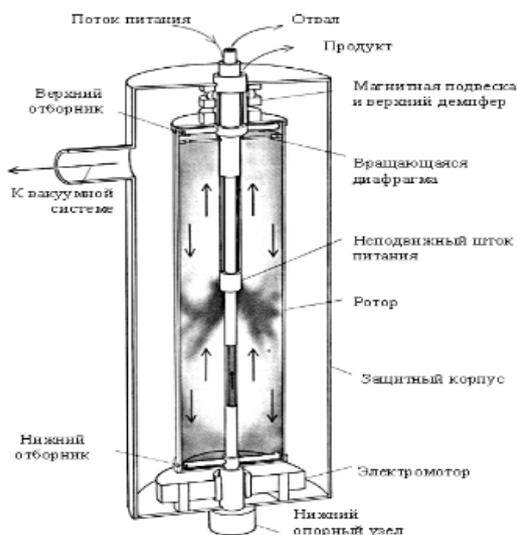


Рис. 10 Схема противоточной газовой центрифуги.

Фактически, центрифуга представляет собой цилиндр, заполненный газом и вращающийся с огромной скоростью.

В постановке задачи рассматривается вязкий, теплопроводный, двухкомпонентный, нормальный газ. Уравнения рассматриваемой модели имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho c \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w w + p \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho E w + p w \\ \rho c w \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{zz} \\ \tau^{zr} \\ \tau^{z\theta} \\ A^z \\ B^z \end{bmatrix}_z + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho w u \\ \rho u u + p \\ \rho u v \\ \rho E u + p u \\ \rho c u \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{zr} \\ \tau^{rr} \\ \tau^{r\theta} \\ A^r \\ B^r \end{bmatrix}_r + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho w u \\ \rho u^2 - \rho v^2 \\ 2\rho w v \\ \rho E u + p u \\ \rho c u \end{bmatrix} - \frac{\mu}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau^{zr} \\ \tau^{rr} - \tau^{\theta\theta} \\ 2\tau^{r\theta} \\ A^r \\ B^r \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$E = e + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad \left( e = \frac{T}{c_v} \right), \quad \tau^{zz} = \frac{2}{3} \left( 2w_z - u_r - \frac{u}{r} \right), \quad \tau^{rr} = \frac{2}{3} \left( 2u_r - w_z - \frac{u}{r} \right), \quad \tau^{z\theta} = v_z, \quad (7)$$

$$\tau^{\theta\theta} = \frac{2}{3} \left( \frac{2u}{r} - w_z - u_r \right), \quad \tau^{r\theta} = v_r - \frac{v}{r}, \quad \tau^{zr} = u_z + w_r, \quad A^{z,r} = \tau^{zz,zr} w + \tau^{zr,rr} u + \tau^{z\theta,r\theta} v + \frac{1}{\text{Pr}} h_{z,r},$$

$$h = e + \frac{p}{\rho}, \quad e = c_v T, \quad B^{z,r} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Sn}} \left( c_{z,r} + c(1-c) \frac{\Delta M}{M} \frac{1}{p} p_{z,r} \right), \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_c} = 1, \quad \frac{1}{M} = \frac{1-c}{M_1} + \frac{c}{M},$$

$$\Delta M = M_1 - M > 0.$$

Постановка задачи такова, что течение считается симметричным (нет зависимости от угла  $\varphi$ ), т.е.  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$ . Рассматривалось несколько типов течений и их возмущений.

Для численного решения уравнений (7) также используется конечно-объемный метод. Для аппроксимации векторов потоков и матриц Якоби векторов потоков на гранях ячеек применяется TVD схема второго порядка аппроксимации. Схема основана на локальном характеристическом подходе и имеет второй порядок аппроксимации почти везде за исключением точек экстремума локальных характеристических переменных.

1. «Упругое» вращение. Начальные условия имеют вид «упругого» вращения, подробно описанного в [7]. Данное течение, в отличие от твердотельного, имеет градиент аксиальной компоненты скорости. Течение такого типа может возникнуть в центрифуге при ее раскрутке. Данный тип течения был исследован численно. Исследования показали, что переход во вторичный режим происходит почти сразу же после начала расчетов (течение сильно неустойчиво). При этом начальными данными являлся только профиль данного течения без каких-либо вносимых возмущений. Вторичным течением является тороидальный вихрь – т.н. противоток.

2. Механические возмущения твердотельного вращения. В качестве начальных данных рассматривается твердотельное вращение:

$$\rho = \rho(r), \quad e = e_* = c_v T_*, \quad T_* = \text{const} > 0, \quad u = w = 0, \quad v = \Omega r = v_* \bar{r}, \quad (8)$$

$$\bar{r} = r/R, \quad (v_* = \Omega R), \quad \ln \frac{p}{p_*} = \frac{M\Omega^2}{2\mathfrak{R}T_*} (r^2 - R^2) = \frac{\bar{r}^2 - 1}{2\beta}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{v_*^2}{\sigma e_*} = \frac{M\Omega^2 R^2}{\mathfrak{R}T_*}.$$

Здесь символом «\*» обозначены граничные условия на роторе.

Возмущается в данном случае угловая скорость вращающегося газа – на одном из торцов угловая скорость газа уменьшается, на другом увеличивается. В такой постановке также возникает вторичное течение в виде тороидального вихря.

3. Тепловые возмущения твердотельного вращения. Возмущением граничных условий для внутренней энергии вида

$$\left( k_1 (e - e_*) + k_2 \mathbf{n} \cdot \nabla e \right) \Big|_{\partial V} = f; \quad k_{1,2} = \overline{0,1}; \quad k_1 + k_2 = 1 \quad (9)$$

можно также наблюдать смену режима твердотельного течения на режим течения с наличием противотока.

На рисунке 11 показан схематический вид тороидального вихря (слева) и вторичное течение, возникающее в результате кусочно-линейного возмущения граничных

условий для внутренней энергии (температуры) (9) на роторе центрифуги. Вторичным течением в данном случае является два вихря, расположенных вдоль оси вращения ротора центрифуги и вращающихся в противоположные стороны.

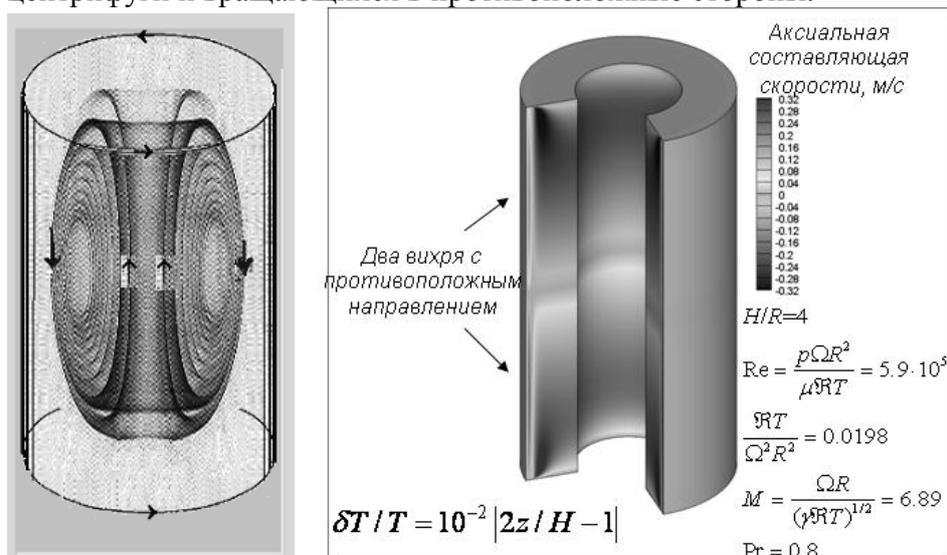


Рис. 11 Схематическое представление тороидального вихря, возникающего в газовой центрифуге (слева) и вторичное течение, возникающее в результате кусочно-линейного возмущения граничных условий внутренней энергии на роторе (справа).

### Заключение

1. В диссертационной работе выполнено исследование режимов двумерного течения невязкой, нормальной среды (равновесной сплошной среды с нормальным уравнением состояния) между двумя цилиндрами (течение Куэтта). Обнаружен и промоделирован переход во вторичное течение (неустойчивость), проявляющийся в возникновении течения с наличием крупных вихрей.
2. Исследовано влияние параметров задачи на характер двумерного течения. Характер течения (степень устойчивости) определяется специально введенным параметром – энергией пульсаций  $E_t$ . Обнаружена длинноволновая неустойчивость – возмущения с большей длиной волны быстрее приводят ко вторичному режиму. Амплитуда возмущений практически не влияет на характер течения. Ширина цилиндрического канала  $\Delta R$  оказывает двойное влияние на течение. При увеличении  $\Delta R$  уменьшается градиент скорости течения, что стабилизирует течение. С другой стороны, малая величина  $\Delta R$  мешает возникновению крупных вихрей.
3. Промоделировано и исследовано трехмерное течение невязкой, нормальной среды в цилиндрическом канале в осесимметричной постановке. В результате исследований было обнаружено и промоделировано вторичное течение – тороидальный или шаровой вихрь.
4. Вид вторичного течения – тороидальный или шаровой вихрь зависит от скорости протекания в смысле убывания или ее возрастания от оси к периферии. Убывание скорости к периферии приводит ко вторичному течению в виде тороидального вихря, возрастание – шарового.
5. Разработана и исследована модель газоразделительной центрифуги. Показано, что противоточный вихрь, который разделяет изотопы урана является вторичным течением по отношению к основному – твердотельному или упругому [7].

6. Возмущения, посредством которых происходит смена режима течения в центрифуге, делятся на механические и тепловые. Механические возмущения представляют собой возмущение угловой скорости вращения среды на торцах центрифуги. Тепловые возмущения вносятся посредством возмущения граничных условий для внутренней энергии на роторе центрифуги.

Результаты, полученные с использованием данных моделей и разработанных на их основе кодов, позволяют считать модель и код надежными инструментами для численного моделирования в реальных исследовательских задачах, связанных с исследованием режимов течений вязких и некоторых видов (осесимметричных течений) вязких сред.

### Библиография

1. Case K.M. Stability of inviscid plane Couette flow // *Phys. Fluids*. 1960. V. 3, N 2. P. 143-148.
2. Трошкин О.В. Диссипативный волчок на слабо компактной алгебре Ли и устойчивость основных течений в плоском канале // *Доклады академии наук*. 2012. Т. 442. № 2. С. 184–189.
3. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2003.
4. Roe P.L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *J. Computational Physics*, 43 (1981), pp. 357-372.
5. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с. – ISBN 5-9221-0194-3.
6. Трошкин О.В. О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // *УМН*, Т. 43:4, № 262, С. 129–158, 1988.
7. Трошкин О.В. О нагревании газа кручением // *ЖВМ и МФ*. 2010. Т. 50. № 6. С. 1–10.
8. Dirac P.A.M. The motion in a self-fractionating centrifuge: DTA Rept M.S.D.I., May 1942; declassified in 1946 as Report BDDA 7 (Report Br-42), London: HMSO, P. 1 – 7 // *Collected Works of P.A.M. Dirac 1924–1948*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. Article 1942:3. P. 1063–1074. Перевод: Дирак П.А.М. Движение в центрифуге с самофракционированием // *Собр. научн. тр. М.: Физматлит, 2005. Т. 4. С. 538–545.*

### Публикации по теме диссертации

1. Белоцерковский О.М., Денисенко В.В., Конюхов А.В., Опарин А.М., Трошкин О.В., Четкин В.М. Численное исследование устойчивости течения Тейлора между двумя цилиндрами в двумерном случае. // *ЖВМ и МФ*. – 2009. – Т. 49. - № 4. – С. 754–768.
2. Белоцерковский О.М., Бетелин В.Б., Борисевич В.Д., Денисенко В.В., Ериклинцев И.В., Козлов С.А., Опарин А.М., Конюхов А.В., Трошкин О.В. К теории противотока во вращающемся вязком теплопроводном газе // *ЖВМ и МФ*.–2011.– Т.51. – № 2.–С.222–236.
3. Vladimir Denisenko and Elena Oparina, Numerical study of instability between two cylinders in the case of 2D flow, 2013 *Phys. Scr.* 2013 014048. doi:10.1088/0031-8949/2013/T155/014048.
4. Белоцерковский О.М., Белоцерковская М.С., Денисенко В.В., Ериклинцев И.В., Козлов С.А., Опарина Е.И., Трошкин О.В., Фортова С.В. Об установлении спутного вихря в потоке идеальной среды// *ЖВМ и МФ*.–2014.– Т.54. – № 1.–С.164–169.
5. Денисенко В.В., Исследование устойчивости течения между двумя цилиндрами в двумерном случае, Труды 50 конференции МФТИ, Долгопрудный, ноябрь, 2007.

6. Vladimir Denisenko, Numerical study of instability between two cylinders in case of 2D flow, Joint Russia-Japan Symposium “Numerical Experiment in Hydrodynamical Instability and Turbulence with High-Performance Computing”, November 11-13, 2009, Moscow.
7. Vladimir Denisenko, Numerical study of instability between two cylinders in case of 2D flow, proceedings of the 12th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing (IWPCTM12), Moscow, Russia, July 12–17, 2010.
8. V.V. Denisenko, Numerical study of instability between two cylinders in case of 2D flow, *3rd International Conference on Turbulent Mixing and Beyond*, August 22 — 28, 2011, Trieste, Italy.