

Ишанов Сергей Александрович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена в Российском государственном университете им. И. Канта

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор *Холодов Александр Сергеевич*

доктор физико-математических наук,  
профессор *Колесник Анатолий Григорьевич*

доктор физико-математических наук,  
профессор *Михайлов Александр Петрович*

Ведущая организация: *Институт солнечно-земной физики СО РАН*  
г. Иркутск

Защита состоится \_\_\_\_\_ 2011 года в \_\_\_\_\_ часов на заседании  
Диссертационного совета Д 002.024.03 при Институте прикладной математики  
им. М.В.Келдыша РАН по адресу: Москва, 125047, Миусская пл, 4, корп. «А»

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.  
Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 2011 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 002.024.03  
доктор физико-математических наук

*Змитренко Н.В.*

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Для дальнейшего развития и эксплуатации космической техники, для разработки и использования современных средств связи, исследования и анализа процессов взаимодействия между различными компонентами околоземной космической плазмы требуется создание математических моделей ионосферы и магнитосферы.

Модели этой среды необходимы для решения многих важных прикладных задач: проблем солнечно-земных связей, метеорологии, экологии, прогнозирования состояния верхней атмосферы, практические задачи обеспечения надежности и безопасности функционирования космической техники, радиосвязи, радионавигации.

Необходимо отметить, что исследование околоземной среды в условиях искусственного воздействия на нее имеют, помимо научного, большое прикладное значение.

В качестве таких техногенных воздействий рассматриваются возмущения типа мощной солнечной вспышки (радиоволны) в том числе приземные и высотные ядерные взрывы, засорение среды мелкодисперсными частицами и искусственными облаками, воздействие на космическую плазму релятивистскими пучками заряженных частиц, нагрев плазмы высокочастотным электромагнитным полем, выбросы химических веществ космическими аппаратами. На ионосферных высотах при выбросах таких химически активных газов, как  $H_2O, H_2, CO_2$ , могут создаваться области пониженной электронной концентрации (так называемые "ионосферные дыры"), изменяется интенсивность свечения ионосферы, генерируются высокоскоростные плазменные потоки вдоль геомагнитных силовых трубок и образуются крупномасштабные плазменные неоднородности.

Одним из последствий образования зон пониженной электронной концентрации является нарушение естественного канала распространения КВ-радиоволн, состояние которого во многом определяет качество функционирования широкого класса радиоэлектронных систем.

В связи с этим представляются актуальными задачи проектирования натуральных экспериментов на основе предварительного проведения вычислительных экспериментов с использованием математических моделей среды, учитывающих различные типы антропогенных воздействий.

Современные требования, предъявляемые к исследованию ионосферы, предполагают применение сложных численных моделей позволяющих рассчитывать изменения во времени глобальных распределений ионосферных параметров в широком диапазоне гелиогеомагнитных условий. Математические модели околоземной космической плазмы обычно основаны на уравнениях квазигидродинамики (уравнение непрерывности, движения и теплового баланса) максвелловских частиц, дополненных необходимым набором начальных и граничных условий.

Математическое моделирование околоземного космического пространства (ионосфера, плазмосфера, магнитосфера) обладает своей спецификой, поскольку во многом определяется энергетикой и концентрацией присутствующих в нём электронов и ионов. Ионосферная плазма считается низкотемпературной с максвелловским распределением электронов и ионов со средней энергией

$$kT_i \simeq kT_e \simeq 0,03 \div 0,4\text{эВ}$$

и концентрацией  $n_{e,i} \simeq 10^2 \div 10^6 \text{см}^{-3}$ . В областях замкнутых силовых линий геомагнитного поля существенную роль в динамике ионосферной плазмы играет плазмосфера ( $kT_i \simeq kT_e \simeq 0,5 \div 1\text{эВ}$ ,  $n_{e,i} \simeq 10^3 \text{см}^{-3}$ ), с которой ионосфера обменивается потоками частиц и энергии. Теоретическое исследование системы ионосфера-плазмосфера сильно затруднено следующими обстоятельствами:

а) сильное изменение физических характеристик околоземной анизотропной плазмы по пространственным переменным;

б) распределение плазмы существенно неоднородно (в обычном пространстве и в пространстве скоростей), вследствие чего в ионосфере плазма является столкновительной, в нижней части плазмосферы ( $L=2-3$ ) – слабостолкновительной, в остальной части плазмосферы, а также во внешних областях магнитосферы плазма является бесстолкновительной;

в) нелинейностью описываемых процессов;

г) сложностью химического состава среды и его изменчивостью по высоте;

д) большими пространственно - временными масштабами рассматриваемых явлений.

В связи с этим задача моделирования среды, построение самосогласованных математических моделей, описывающих ионосферно-магнитосферные взаимодействия, требует для своего решения разработки новых и адаптации уже имеющихся оптимальных численных методов и алгоритмов, учета обширного цикла ионосферных процессов и использования высокопроизводительных вычислительных ресурсов.

Таким образом, работа актуальна в связи с потребностью исследования процессов в околоземной космической плазме в приложении к проблемам науки и решению многих прикладных задач.

### **Цель и задачи исследования**

Главной целью работы является разработка математических моделей, учитывающих сложный комплекс геофизических факторов, ориентированных на исследование процессов в ионосферной плазме.

Для выполнения поставленной цели сформулированы основные задачи исследования:

1. Построение базисных физико-математических моделей ионосферы и плазмосферы, ориентированных на достаточно точное и оперативное описание реальных вариаций параметров ионосферы для широкого спектра гелиогеофизических условий.

2. Разработка новых методов и модификация известных численных методов, учитывающих специфику моделируемых физических процессов и удовлетворяющих необходимым требованиям аппроксимации, устойчивости и экономичности.

3. Сравнительный анализ различных гидродинамических приближений для описания ионосферно-магнитосферной плазмы.

4. Развитие теории ионосферно-плазмосферных взаимодействий в случае слабых и сильных техногенных возмущений на основе разработанных математических моделей.

### **Методы исследования**

Методы работы основаны на построении разностных схем для дифференциальных уравнений модели в частных производных, построении методов решения полученных разностных уравнений, их адаптацию к конкретным прикладным задачам, разработку соответствующих программных средств. Для исследования физико-химических процессов в плазменной среде применяется метод вычислительного эксперимента.

### Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы заключается в разработке основных инструментальных средств обеспечения вычислительного эксперимента, учитывающих особенности вычислительного характера, встречающиеся при моделировании околоземной космической плазмы на основе квазигидродинамических моделей. Наиболее важными определяющими научную новизну, результатами работы является следующее:

1. Впервые была разработана нестационарная гидродинамическая модель системы ионосфера-плазмосфера, учитывающая до восьми сортов положительных ионов ( $H^+$ ,  $O^+$ ,  $O_2^+$ ,  $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $H_2O^+$ ,  $H_3O^+$ ,  $OH^+$ ), метастабильные  $O_2(^1\Delta_g)$ ,  $O(^1D)$ ,  $N(^2D)$  и малые компоненты, что позволяет корректно описывать околоземную плазму в интервале высот от нижней границы F-области до нескольких радиусов Земли в различных геофизических ситуациях.
2. Разработаны вычислительные алгоритмы, позволяющие корректно рассчитывать процессы в геомагнитной силовой трубке.
3. Проведен анализ основных подходов (диффузионный, гидродинамический) к описанию ионосферно-плазмосферной плазмы на основе разработанной нестационарной, многокомпонентной модели, рассчитываемой вдоль геомагнитных силовых линий.
4. Разработаны одномерные модели ионосферы в шаровом слое, охватывающие область высот 50-1000 км. На их основе были исследованы процессы ионосферных возмущений, происходящих за счет изменений в составе заряженных и нейтральных компонент, термосферных ветров и протоносферно-ионосферных потоков плазмы.
5. Разработана нестационарная многомерная математическая модель F-области ионосферы с учетом увеличения ионосферной плазмы термосферным ветром, смешанных производных в уравнениях диффузии, описывающая динамику заряженных и нейтральных частиц.
6. Впервые посредством численного моделирования было показано, что эффекты воздействия на ионосферу антропогенных выбросов водорода и его соединений могут проявляться на временах порядка суток. При этом следует учитывать процессы перераспределения плазмы вдоль всей геомагнитной силовой трубки и динамику нейтрального водорода. Исследованы эффекты разнесенных по времени в пространстве антропогенных воздействий. Впервые количественно оценены характерные особенности ионосферно-плазмосферного обмена в таких условиях.
7. Проведено численное исследование влияния динамического возмущения плазмосферы на поведение плазмы в геомагнитной силовой трубке. Установлено, что динамические

возмущения на начальной стадии приводят как к понижению электронной концентрации, так и к охлаждению плазмы (адиабатическое расширение) на высотах плазмосферы. Показаны основные закономерности процесса релаксации плазмосферы, проанализированы пространственно-временные распределения концентраций и скоростей заряженных частиц.

### **Теоретическая и практическая ценность**

В теоретическом аспекте построенные согласованные модели ионосферно-плазмосферных взаимодействий позволяет проводить более адекватное математическое описание среды, учитывать внешние возмущение естественного и антропогенного характера, что важно для развития представлений о физике околоземной плазмы. С помощью разработанных моделей можно определить предельно-допустимые нагрузки на среду при техногенных воздействиях.

В работе исследованы фундаментальные вопросы динамики переноса плазмы и энергии в плазмосфере и ионосфере Земли в различных геофизических условиях.

Созданные математические модели может служить основой задания среды для задач распространения радиоволн, а также базой для проведения вычислительных экспериментов.

Настоящая модель может быть использована также для целей оптимального планирования дорогостоящих экспериментальных исследований и для совершенствования прогноза состояния ионосферы.

### **Основные публикации**

По теме диссертации опубликовано 63 работы, включая 15 статей в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования научных результатов докторских диссертаций. Основное содержание диссертации отражено в публикациях [1-44].

**Достоверность результатов** обеспечивается физически обоснованной постановкой задачи, правомерностью принятых допущений при разработке математической модели, проверкой поведения рассмотренного решения при сгущении узлов разностной сетки, сравнительным анализом различных разностных схем, оценкой степени адекватности результатов численных экспериментов на основе сравнения с экспериментальными данными и с результатами, полученными другими авторами.

### **Апробация результатов диссертации**

Материалы диссертации докладывались на Всесоюзной школе-семинаре молодых ученых и специалистов «Математическое моделирование в естествознании и технологии» (г.Светлогорск,1989), на 10-м Международном семинаре по математическому моделированию ионосферы (г.Казань, 1990), на 18-й - 28-й ежегодных научных конференциях профессорско-преподавательского состава Калининградского государственного университета, Международном математическом семинаре (Калининград, 2002), Международном симпозиуме «Авроральные явления и солнечно-земные связи» (Москва, 2003), Международной конференции «Избранные вопросы современной математики» (Калининград, 2005), Шестом Всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2005), геофизических семинарах «Физика авроральных явлений» (Апатиты, 2004, 2006), Международной конференции «Проблемы геокосмоса» (Санкт-Петербург, 2006), Третьей

международной конференции «Вычислительные методы в прикладной математике: СМАМ-3» (Минск, 2007), конференции Воронежской зимней школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2009), Третьей Международной научно-технической конференции «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем» (Пенза, 2009), Первой международной конференции «Компьютерные науки и технологии» (Белгород, 2009), Третьей Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (Воронеж, 2009), Международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009), Воронежской весенней математической школе «Понтягинские чтения XXI» (Воронеж, 2010), Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 2010), семинарах Института прикладной геофизики имени академика Федорова Е.К., Института математического моделирования РАН, Института динамики геосфер РАН.

### **Реализация и внедрение результатов работы**

Основные результаты исследований использованы при выполнении НИР по научным программам АН СССР и Минвуза РСФСР «Автоматизированные системы научных исследований и обучения» (1981-1985гг.), Гособразования СССР «Математическое моделирование в научных и технических системах» (1989-1991гг.), по решениям ВПК и Минвуза РСФСР, по программе АН СССР «Радиоволны» по теме «Глобус КГУ 91-92», по программе «Университеты России», НТП «Математическое моделирование в научных и технических системах», проект ММ 7.12, (1992-1996гг.), гранту РФФИ N95-01-01123а (1995-1997гг.), гранту РФФИ №98-01-0222 (1998-2000), гранту РФФИ №01-01-00718 (2001-2003), гранту РФФИ №04-01-00830 (2004-2007), гранту РФФИ №08-01-00431 (2008-2011).

Разработанные модели с учетом процессов в силовой трубке в различных модификациях и результаты вычислительных экспериментов внедрены и используются в Институте динамики геосфер РАН(г.Москва), Спецсектор (комплекс компьютерных программ по математическому моделированию режимов с обострением в ионосферной плазме), Институте прикладной геофизики им. академика Федорова Е.К.(г. Москва).

Отдельные результаты включены в спецкурсы по математическому моделированию и физике плазмы.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

*Во введении* формулируется точка зрения автора на актуальные проблемы исследования ионосферы и плазмосферы, указывается на необходимость изучения этих геофизических объектов как единой среды – околоземной плазмы – и обращается особое внимание на роль антропогенных воздействий в процессах, формирующих эту среду. Анализируются трудности, связанные с теоретическим исследованием системы ионосфера-плазмосфера. Здесь также сформулированы цели работы, её научная новизна и

практическая ценность, кратко изложены содержание и структура диссертационной работы. Перечислены основные защищаемые положения, приведены сведения об апробации работы и публикациях по теме диссертации.

**В первой главе** рассмотрены принципы и основные методы построения математических моделей ионосферы Земли в квазигидродинамическом приближении. Современные теоретические модели процессов в околоземной космической плазме (ионосфера, плазмосфера, магнитосфера) строятся на основе двух физических приближений кинетическом и гидродинамическом. В первом случае считается, что ионосферная плазма достаточно разрежена, чтобы считать столкновение частиц бинарным, а внешние поля изменяются медленно по сравнению со временем взаимодействия частиц при столкновениях, что позволяет описывать ионосферную плазму системой кинетических уравнений Больцмана-Власова. Полный кинетический подход был рассмотрен в работах *Гершмана Б.Н.* «Динамика ионосферной плазмы», *Ивановского А.И., Репнева А.И., Швидковского Е.Т.* «Кинетическая теория верхней атмосферы», в которых исследования проводятся на основе кинетической теории многокомпонентных смесей многоатомных газов, исходя из системы обобщенных интегродифференциальных уравнений Больцмана для функций распределения частиц каждого сорта, с правыми частями, содержащими интегралы столкновений и интегралы реакций, дополненной уравнениями переноса радиации и уравнениями поля. Для решения системы кинетических уравнений с выбранным комплексом химических реакций применен метод 13-моментного приближения Грэда. Обладая значительным преимуществом в полноте физического описания ионосферных процессов, такой подход в то же время превышает на порядок по трудоемкости своей численной реализации второй, гидродинамический подход.

С точки зрения макроскопических свойств верхнюю атмосферу можно рассматривать как континуальную среду и для ее адекватного описания воспользоваться уравнениями многокомпонентной квазигидродинамики, учитывая, что погрешности отхода от кинетического приближения значительно меньше погрешности экспериментальных измерений ионосферных параметров, которые в свою очередь являются реперными данными для калибровки математических моделей ионосферы.

Условия гидродинамического описания плазмы

$$\lambda \ll L, \tau \leq t_0,$$

где  $L$ ,  $t_0$ , соответственно характерные пространственные и временные масштабы задачи, длина  $\lambda$  и время  $\tau$  свободного пробега частиц.

Для ионосферной плазмы эти условия выполняются, что означает, что частицы локализованы в объемах с линейными масштабами  $\sim \lambda$ , в которых за времена  $\sim \tau$  устанавливается локальное максвелловское распределение по скоростям.

При моделировании процессов, происходящих в ионосфере и магнитосфере Земли, ставится задача вычисления распределения макроскопических параметров среды: концентраций и скоростей плазменных компонент, их температур, потоков частиц и тепловой энергии. Исследуется характер изменения этих величин с высотой для различных гелиогеофизических условий. Основой для такого исследования служат уравнения непрерывности, движения и энергии. При заданных внешних силах, источниках энергии и частиц эти уравнения квазигидродинамики описывают пространственно-временные распределения искомых величин

и позволяют рассматривать при таком подходе ионосферу и плазмосферу как единую динамическую систему с общей энергетикой.

В связи с этим в первой главе рассматриваются основные характеристики ионосферной плазмы, условия применимости гидродинамических уравнений переноса в случае близости распределения частиц по скорости к максвелловскому и записываются полная гидродинамическая система уравнений непрерывности, движения и теплового баланса для нейтральных и заряженных компонент ионосферной плазмы в векторном виде, дополненная кинетическим уравнением для сверхтепловых электронов и уравнениями электродинамики. Подчеркивается, что ввиду сложности (в смысле затрат машинного времени) совместного решения систем уравнений ионосферной динамики для заряженных и нейтральных частиц параметры последних задаются на основе хорошо апробированных эмпирических моделей, типа Jacchia, MSIS, NRLMSISE-00 и т.д. Кроме этого рассмотрен вопрос задания основных входных (управляющих параметров) в систему модельных уравнений, таких как потоки солнечного излучения, сечений ионизации и поглощения, константы химических реакций, потоки энергичных частиц из магнитосферы, начальные и граничные условия для системы уравнений.

Далее обозначаются системы координат (СК), используемые в ионосферном моделировании: локальная декартова СК, сферическая географическая СК, сферическая геомагнитная СК, дипольная СК и приводятся формулы перехода из одной системы координат в другую.

По способу влияния на ионосферу внешних областей околоземного космического пространства из всего имеющегося многообразия математических моделей ионосферы можно выделить следующие два типа: модели в шаровом слое с граничными условиями, задаваемыми на нижней и верхней сферических поверхностях и модели распределения ионосферной плазмы вдоль геомагнитных силовых трубок, которые в свою очередь движутся вдоль траекторий конвекции со скоростью электромагнитного дрейфа.

Наибольшие трудности при построении глобальной модели связаны прежде всего с необходимостью учета многомерности (трёхмерности), самосогласованности и нелинейности уравнений. Многомерность модели представляет проблему как с точки зрения построения экономичных численных методов, так и обработки большого объема информации, возникающего ввиду значительных пространственных и временных характерных масштабов рассматриваемых явлений, обуславливающих большое число узлов дискретизации областей определения решения (разностных сеток). Под самосогласованностью подразумевается учет многокомпонентности среды и необходимость совместного решения уравнений, описывающих динамику различных заряженных и нейтральных компонент ионосферной плазмы. Из-за невозможности совместного решения уравнений в больших системах, их последовательное (раздельное) решение вместе с нелинейностью уравнений, приводит к сложным схемам итерационных процедур и дополнительным вычислительными затратам. В связи с этим исторически первыми появились одномерные математические модели в шаровом слое для которых было характерным описание поведения ионосферных параметров на основе уравнений диффузии и теплопроводности частично ионизованной многокомпонентной плазмы в относительно плотном слое нейтральной атмосферы (100 - 1500 км). При этом нижние граничные условия задавались при условии пренебрежения вклада процессов переноса. В этом случае уравнения непрерывности переходят в обыкновенные

дифференциальные уравнения фотохимической кинетики или фотохимического равновесия на каком либо нижнем высотном уровне. На верхнем граничном уровне (верхней сферической поверхности) при этом возникает серьезная проблема задания значений концентраций и температур или потоков частиц и тепла.

Уравнения модели силовой трубки интегрируются вдоль силовых линий геомагнитного поля, что исключает необходимость экспериментального задания верхних граничных условий по потокам заряженных частиц и их тепловой энергии на границе «ионосфера-плазмосфера».

Кроме классификации математических моделей по геометрическим признакам в первой главе дается их разделение по физическим приближениям по степени полноты учета членов

$div(n_\alpha \vec{v}_\alpha)$  и  $\frac{d}{dt}(n_\alpha \vec{v}_\alpha)$  в уравнениях непрерывности и движения, где  $n_\alpha, \vec{v}_\alpha$  – концентрация

и вектор скорости частиц сорта  $\alpha$  соответственно. Пренебрежение обоих членов приводит к системам обыкновенных дифференциальных уравнений фотохимической кинетики. Без учета

полной производной по времени  $\frac{d}{dt}(n_\alpha \vec{v}_\alpha)$  уравнения непрерывности и движения

преобразуются к уравнению диффузии частиц сорта  $\alpha$ , уравнению параболического типа. В полной постановке получается система уравнений многокомпонентной газовой динамики. Проводится краткий обзор одномерных математических моделей ионосферной плазмы в шаровом слое и моделей геомагнитной силовой трубки.

Далее обсуждается проблема построения многомерных математических моделей в шаровом слое и их преимущество перед моделями конвектирующих геомагнитных силовых трубок. Рассматриваются вопросы задания начальных и граничных условий, организации вычислительного процесса с учетом нелинейности, связанности уравнений модели и необходимостью проведения итераций по нелинейности и связанности. Приведены оценки вычислительных затрат на численную реализацию математических моделей ионосферы различного уровня сложности и показано, что задача моделирования ионосферы относится к группе сложных задач и требует при обычной последовательности реализации процесса вычислений (без распараллеливания) применения высокопроизводительных вычислительных систем.

В конце первой главы приводятся оценки точности математического моделирования, которая определяется погрешностями физических приближений, входных данных и численных алгоритмов. делается вывод, что погрешности численных алгоритмов не превышают 10% от всех остальных погрешностей.

Результаты исследований первой главы представлены в следующих публикациях [1-4, 6, 13, 19, 21, 26, 40, 43].

**Во второй главе** диссертации рассмотрены две типичные для ионосферного моделирования одномерные математические модели в шаровом слое.

Модель нижней ионосферы является нестационарной одномерной моделью с учетом молекулярной диффузии и турбулентного перемешивания. Она предназначена для самосогласованного расчета высотно-временных распределений концентраций следующих компонент:

$$O, O_2, O_3, O(^1D), O(^1S), O_2(^1\Delta_g), O_2(^1\Sigma_g), H, H_2, OH, H_2O, H_2O_2, \\ NO, NO_2, N(^4S), N(^2D), CO, CO_2, O^+, O_2^+, NO^+, N_2^+, N^+, N_e, O_2^-, Y^-, Y^+$$

где  $[Y^+]$  и  $[Y^-]$  – суммарные концентрации положительных и отрицательных (исключая  $[O_2^-]$ ) ионов-связок соответственно.

Модель нижней ионосферы применима для средних широт, области высот 50-250 км, различных сезонов и времен суток. Входные данные модели соответствуют средней геомагнитной активности и средней солнечной активности по потоку ультрафиолетового излучения.

На основе этой модели с помощью вычислительного эксперимента показана необходимость учета окиси азота в фотохимических процессах области  $E$  и основная роль  $[NO]$  в  $D$ -области.

Вторая модель  $F2Z$ , уравнения которой записаны в системе координат, связанной с местной вертикалью (осью  $z$ ), предназначена для расчета высотных распределений следующих основных параметров  $F2$ -области ионосферы: концентраций электронов, ионов  $N^+$ ,  $O_2^+$ ,  $NO^+$ ,  $O^+$ ,  $H^+$  малых нейтральных составляющих  $N(^4S)$ ,  $N(^2D)$  и  $NO$ ; температур электронов и ионов; зональной и меридиональной составляющих скорости нейтрального ветра.

На основе модели  $F2Z$  впервые были исследованы процессы ионосферных возмущений происходящих за счет изменений в составе нейтральной атмосферы, нейтральных ветров, потоков плазмы между ионосферой и протоносферой, электрических полей. Некоторые результаты моделирования возмущенных состояний, полученные с использованием модели  $F2Z$ , представлены в шестой главе.

С вычислительной точки зрения основной характерной особенностью квазилинейных уравнений диффузии заряженных частиц, составляющих основу моделей в шаровом слое, является присутствие в них первых производных дивергентного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( k(t, z, u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\beta(t, z, u)u) + \alpha u = f,$$

здесь  $k$  – коэффициент диффузии, выражение для коэффициента конвективного переноса  $\beta$  учитывает влияние силы тяжести, градиенты температур и концентраций, скорости молекулярной диффузии других компонент и нейтрального ветра и т. д.,  $\alpha u$  и  $f$  – члены потерь и рождения частиц,  $z$  – координата по местной вертикали,  $u$  – концентрация,  $t$  – время.

Наличие члена  $\frac{\partial}{\partial z}(\beta u)$  нарушает условие монотонности обычно применяемых разностных схем. В связи с этим во второй главе рассмотрены способы преодоления трудностей, связанных с несамосопряженностью разностных операторов. В частности используется преобразование исходного уравнения диффузии к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{q} \frac{\partial(qu)}{\partial z} \right) + \alpha u = f,$$

для которой интегро-интерполяционным методом строятся консервативные, второго порядка аппроксимации разностные схемы с диагональным преобладанием по столбцам у матрицы

системы разностных уравнений. Для этого случая построен модифицированный вариант метода прогонки. Проведен сравнительный анализ различных вариантов метода прогонки: обыкновенной, матричной, немонотонной, потоковой. Сделан вывод о преимуществе потоковой прогонки для преобразованных уравнений диффузии с введенным множителем  $q$ .

Рассмотрены вопросы задания начальных и граничных условий в математических моделях диффузионного типа. Указаны способы разностной аппроксимации краевых условий общего вида

$$\gamma \left[ k \frac{\partial u}{\partial z} + \beta u \right] \Big|_{z=z_N} = -\Theta u_N + \mu(t)$$

со вторым порядком и построен алгоритм прогонки в случае связанных краевых условий, удовлетворяющих дополнительным условиям, например, интегрального типа. Рассмотрены случаи задания интегрального содержания концентраций, интегральных потерь, использование известных точек экстремума на высотных профилях концентраций.

Для тестирования численных алгоритмов получено аналитическое решение стационарного уравнения диффузии наиболее общего вида с учетом переменной шкалы высот  $H = \frac{kT_\alpha}{m_\alpha g}$ ,

где  $T_\alpha$ ,  $m_\alpha$  – температура и масса частиц сорта  $\alpha$ ,  $g$  – гравитационное ускорение,  $k$  – постоянная Больцмана. Отбор оптимальных численных алгоритмов проводился также путем их сравнительного анализа.

Впервые в практике ионосферного моделирования получена количественная оценка роли силы инерции (полной производной  $m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt}$ , где  $m_\alpha$  – масса,  $\vec{v}_\alpha$  – вектор скорости частиц сорта  $\alpha$ ) на основе модели F2Z путем решения полной гидродинамической системы уравнений непрерывности и движения гиперболического типа, записанной в каноническом виде для римановых инвариантов

$$\frac{d\vec{y}}{dt} + L \frac{d\vec{y}}{dt} + M\vec{y} = \vec{F},$$

где  $L$ ,  $M$  – матрицы,  $\vec{y} = (r, s)^T$ ,  $r = \frac{1}{2} \left( w_\alpha + \frac{n_\alpha}{a} \right)$ ,  $s = \frac{1}{2} \left( w_\alpha - \frac{n_\alpha}{a} \right)$ ,  $a = \frac{n_\alpha}{c}$ ,

$c_\alpha = \sqrt{\frac{k}{m_\alpha} \left( T_\alpha + \frac{n_\alpha}{N_e} T_e \right)}$  – местная скорость звука,  $n_\alpha$  – концентрация,  $m_\alpha$ ,  $T_\alpha$  – масса и температура частиц сорта  $\alpha$ ,  $T_e$  – электронная температура,  $w_\alpha$  – вертикальная скорость частиц. Указано на необходимость корректного задания граничных условий для инвариантов, характеристики которых уходят с данной границы. Рассмотрены случаи дозвукового и сверхзвукового истечения плазмы через верхнюю границу шарового слоя. Показана возможность применимости для численного решения гиперболических систем классической численной схемы бегущего счета и метода характеристик при выполнении необходимых ограничений на число Куранта.

Результаты исследований второй главы представлены в следующих публикациях [2, 6, 14, 18, 24, 25, 34, 40].

В *третьей главе* приведен краткий обзор результатов экспериментальных и теоретических исследований ионосферно-магнитосферной плазмы в естественных условиях и в условиях техногенных воздействий. В этой главе представлена математическая модель плазменных процессов в геомагнитных силовых трубках. В ионосфере и плазмосфере использована дипольная модель геомагнитного поля  $B$ . Модуль магнитного поля

$$B = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \Theta},$$

где  $M$  – момент геомагнитного диполя,  $r$  – радиус-вектор,  $\Theta$  – коширота, отсчитываемая от северного геомагнитного полюса. Силовая линия магнитного поля описывается уравнением

$$r = LR_E \sin^2 \Theta,$$

где  $R_E$  – радиус Земли,  $L$  – параметр Мак-Илвайна.

Замкнутая модель системы ионосфера-плазмосфера построена в предположении о замагниченности плазмы, хорошо выполняющимся на высотах  $h > 200$  км и возможностью в связи с этим расщепить движение плазмы на перенос ее вдоль геомагнитных силовых линий и поперечный электрический дрейф вместе с силовыми линиями.

Рассмотрение задачи моделирования ионосферы и плазмосферы как единого целого, позволяет, как это уже отмечалось, освободиться от трудностей, связанных с выбросом верхних граничных условий для электронно-ионного газа.

Граничные условия задаются на концах силовых трубок в их основаниях, где можно использовать для их задания уравнения фотохимической кинетики без учета членов вертикального переноса. Следует отметить, что модели геомагнитных силовых трубок имеют известные недостатки при их использовании в построении глобальных моделей ионосферы, связанные со сложностью расчета траекторий конвекции. В *третьей главе* также описана система уравнений квазигидродинамики, являющейся основой построенной модели ионосферно-плазмосферных взаимодействий. Система уравнений включает записанные в проекции на силовую линию магнитного поля нестационарные уравнения непрерывности, движения и теплового баланса заряженных частиц

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial (An_i v_i)}{\partial s} + \alpha_i n_i = Q_i, \quad (1)$$

$$n_i m_i \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial s} \right] + \frac{\partial p_i}{\partial s} = -n_i m_i g \sin I + n_i \sum_{j=1}^5 S_{ij} (v_j - v_i) + n_i R_i (v_{nx} \cos I - v_i) - \frac{n_i}{N_e} \frac{\partial p_e}{\partial s}, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} k n_i \left( \frac{\partial T_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial s} \right) + \frac{p_i}{A} \frac{\partial (A v_i)}{\partial s} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( A \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial s} \right) = P_{ie} + P_{in} + P_{ij}, \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} k N_e \left( \frac{\partial T_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial T_e}{\partial s} \right) + \frac{p_e}{A} \frac{\partial (A u_e)}{\partial s} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( A \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial s} \right) = P_g + P_{ei} - P_{en} \cdot \quad (4)$$

Здесь индекс  $n$  относится к нейтральным частицам, индекс  $e$  – к электронам;  $n_i, m_i, v_i, T_i$  – концентрация, масса, скорость, температура ионов  $i$ -го сорта ( $i=1 \Rightarrow O^+, i=2 \Rightarrow H^+, i=3 \Rightarrow O_2^+, i=4 \Rightarrow NO^+, i=5 \Rightarrow N_2^+$ ),  $u_e$  – скорость электронов;  $s$  – координата вдоль геомагнитной силовой линии, положительная в направлении от северного полюса к южному;  $A$  – расходимость силовых линий магнитного поля;  $I$  – магнитное склонение,  $g$  – ускорение силы тяжести;  $v_{nx}$  – меридиональный компонент скорости нейтрального ветра;  $Q_i, \alpha_i$  – скорость образования и вероятность потерь  $i$ -го иона;  $N_e$  – электронная концентрация;  $p_i$  – давление ионного газа, состоящего из частиц  $i$ -го сорта;  $p_e$  – давление электронного газа;  $T_e$  – электронная температура;  $\lambda_e, \lambda_i$  – соответственно коэффициенты теплопроводности электронного и ионного газов;  $k$  – постоянная Больцмана;  $R_i$  – коэффициент силы трения между ионами  $i$ -го сорта и нейтральными частицами;  $S_{ij}$  – коэффициенты силы трения между ионами  $i$ -го и  $j$ -го сортов;  $P_g$  – скорость нагрева тепловых электронов сверхтепловыми фотоэлектронами;  $P_{ei}$  – скорость теплообмена электронов с ионами;  $P_{ie}$  – скорость теплообмена  $i$ -го иона с электронами;  $P_{ij}$  – скорость теплообмена  $i$ -го иона с ионами  $j$ -го сорта;  $P_{en}$  – скорость охлаждения электронов на нейтральных частицах;  $P_{in}$  – скорость теплообмена  $i$ -го иона с нейтралами. Уравнения (1-4) дополняются уравнениями фотохимического равновесия «тяжелых» ионов  $O_2^+, NO^+$  и  $N_2^+$ , уравнениями непрерывности для  $H_2O, H, N(^2D), O(^1D)$ , уравнениями движения нейтрального газа, эмпирической моделью нейтральной атмосферы и кинетическим уравнением для сверхтепловых электронов.

Изложен алгоритм пространственной дискретизации расчетной области.

Также в третьей главе диссертации описаны алгоритмы вычисления функций ионизации, градиентов давления нейтральной компоненты, сил трения между различными заряженными составляющими и нейтральными компонентами. Представлена, используемая в модели, схема фотохимических реакций. Приведены формулы для коэффициентов теплопроводности и скоростей нагрева и охлаждения электронов и ионов. Рассмотрен алгоритм вычисления скорости нагрева тепловых электронов сверхтепловыми фотоэлектронами, основанный на решении кинетических уравнений для СТ-электронов.

Основное внимание в третьей главе уделяется вопросу о надежности и точности используемых численных алгоритмов среди которых ключевыми являются методы решения уравнений непрерывности, движения и теплового баланса для заряженных компонент плазмы. С математической точки зрения эти уравнения являются уравнениями параболического или гиперболического типа, дополненные необходимыми начальными и граничными условиями. Отсутствие точных аналитических решений, большое число уравнений модели, нелинейность и сложный вид коэффициентов уравнений не позволяло использовать классические методы анализа устойчивости и точности алгоритмов, поэтому качественный и количественный анализ различных современных методов газовой динамики проводится путем сравнения результатов решения распространенных модельных задач.

Специфические особенности модельных уравнений такие как нелинейность, многосвязность, сильные изменения коэффициентов уравнений по пространственной координате, большие пространственно-временные характерные масштабы, наличие сложных фотохимических процессов и ряд других не позволяют непосредственно применить хорошо известные в практике численные алгоритмы.

В связи с этим во третьей главе предложены способы модификации ряда численных алгоритмов, проведен поиск наиболее оптимальных из них, а также анализ точности и устойчивости.

Для решения уравнений диффузии заряженных компонент без учета инерционных членов разработан алгоритм встречной по полушариям потоковой прогонки, что позволило учесть сильные изменения коэффициентов диффузии и конвективного переноса вдоль силовой линии.

При решении уравнений диффузии для нейтральных примесных компонент предложена оригинальная замена переменной, позволяющая получить достаточные условия устойчивости метода прогонки при наличии в уравнениях первой производной дивергентного вида.

Для решения системы уравнений непрерывности и движения гиперболического типа разработана неявная схема INR с монотонизаторами и адаптирована кинетическая схема KIN, показывающая свою эффективность в решении геофизических задач.

Все системы разностных уравнений сведены к системам с ленточными матрицами и решались методом скалярной или векторной прогонки. Рассмотрены также способы организации итерационных процессов по нелинейности и связанности уравнений и систем уравнений. Проведены исследования чувствительности решений на сгущение разностной сетки по пространственной и временной координате.

Уравнения непрерывности и движения ионосферной плазмы в системе координат, связанной с геомагнитной силовой трубкой, могут быть записаны в терминах концентрации  $n_\alpha$ , потока  $n_\alpha u_\alpha$ :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + L_\alpha n_\alpha = Q_\alpha, \quad (5)$$

$$\frac{\partial n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^2}{\partial s} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} = F_\alpha \quad (6)$$

где  $n_\alpha, u_\alpha, p_\alpha$  – концентрация, скорость и давление ионов сорта  $\alpha$ ;  $L_\alpha$  – скорость рекомбинации;  $Q_\alpha$  – функция источников ионов сорта  $\alpha$ ,  $F_\alpha$  – коэффициент, обусловленные внешними силами – силой тяжести, силой Лоренца, силами трения с ионами другого сорта и нейтральными частицами.

Метод суммарной аппроксимации позволяет разбить систему (5, 6) на последовательно решаемые систему уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^2}{\partial s} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} &= 0 \end{aligned}$$

и уравнения кинетики

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + L_\alpha n_\alpha &= Q_\alpha \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \beta_\alpha u_\alpha &= F_\alpha \end{aligned}$$

В работе особо выделен, как наиболее оптимальный для расчета разрывных решений, алгоритм KIN основанный на кинетически согласованных разностных схемах (к.с.р.с.),

рассмотренных, например, в работах *Елизаровой Т.Г., Четверушкина Б.Н. и Абалакина И.В.* Физическое предположение, заложенное в основу их получения, состоит в том, что функция распределения постоянна на ячейке расчетной сетки и равна максвелловской функции распределения. При таком подходе для уравнений непрерывности и движения ионов, записанных в потоковой форме, появляются диссипативные члены (выполняющие роль искусственных вязкостей), возникающие за счет представления функции распределения в виде двух «полумакселловских» распределений. При использовании алгоритма KIN уравнения непрерывности и движения в дипольной системе координат принимают вид:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha}{\partial s} = \frac{\tilde{h}}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{c_\alpha} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^2}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A}{c_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} \right) \right],$$

$$\frac{\partial n_\alpha u_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^2}{\partial s} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} = \tilde{h} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{c_\alpha} \frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^3}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{A c_\alpha} \frac{\partial 3 A p_\alpha u_\alpha}{\partial s} \right) \right],$$

где  $\tilde{h}$  – величина, пропорциональная шагу разностей сетки,  $c_\alpha$  – скорость звука частиц сорта  $\alpha$ .

Для этой системы записывается явная разностная схема с симметричной аппроксимацией пространственных производных

$$n_i = \hat{n}_i + \frac{\tau}{A_i} \left\{ \frac{\tilde{V}_{i-1} - \tilde{V}_{i+1}}{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}} + \kappa \left[ \frac{A_{i+1/2}(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_i) + \tilde{w}_{i+1} - \tilde{w}_i}{\tilde{c}_{i+1/2} h_{i+1/2}} + \frac{A_{i-1/2}(\tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_i) + \tilde{w}_{i-1} - \tilde{w}_i}{\tilde{c}_{i-1/2} h_{i-1/2}} \right] \right\},$$

$$U_i = \hat{U}_i + \frac{\tau}{A_i} \left\{ \frac{\tilde{w}_{i-1} - \tilde{w}_{i+1} + A_i(\tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_{i+1})}{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}} + \chi \left[ \frac{\tilde{X}_{i+1} - \tilde{X}_i + \frac{A_i}{A_{i+1/2}}(\tilde{Z}_{i+1} - \tilde{Z}_i)}{\tilde{c}_{i+1/2} h_{i+1/2}} + \frac{\tilde{X}_{i-1} - \tilde{X}_i + \frac{A_i}{A_{i-1/2}}(\tilde{Z}_{i-1} - \tilde{Z}_i)}{\tilde{c}_{i-1/2} h_{i-1/2}} \right] \right\},$$

$i = 2, \dots, N-1$ .

Здесь  $U_i = n_i u_i$ ,  $V_i = A_i n_i u_i$ ,  $w_i = A_i n_i u_i^2$ ,  $X_i = A_i n_i u_i^3$ ,  $Z_i = 3 A_i p_i u_i$ ;  $\chi$  – числовой множитель, который выбирается равным 0, 1.

Система решается методом итераций, величины  $\tilde{\xi}_i$  определяются как  $\frac{1}{2}(\xi_i + \tilde{\xi}_i)$ , а на первой итерации берутся с предыдущего слоя. Расчеты показывают, что для сходимости достаточно 3-4 итераций.

В результате вычислительных экспериментов при решении первой модельной задачи расчета суточных вариаций ионосферных параметров для невозмущенной среднеширотной силовой трубки было показано, что при относительно небольших скоростях движения плазмы и отсутствии разрывов в профилях ионосферных параметров, все рассмотренные алгоритмы дают близкие решения и могут быть с большей или меньшей степенью эффективности использованы для решения такого класса задач.

При решении второй модельной задачи геомагнитной силовой трубки наилучшим образом показал себя алгоритм KIN, основанный на явной консервативной разностной схеме, способный адекватно описывать сверхзвуковые разрывные течения ионов.

Алгоритм KIN допускает использование редкой пространственной сетки, что типично для моделирования процессов в системе ионосфера-плазмосфера.

Результаты исследований третьей главы представлены в следующих публикациях [2, 11 18, 20, 21, 28, 38, 40, 41].

**В четвертой главе** рассмотрены проблемы математического моделирования ионосферы с учетом ее трехмерной неоднородности, высотных, долготных и широтных вариаций ионосферных параметров. Учет таких вариаций приводит к необходимости решения систем трехмерных уравнений, а чаще систем двухмерных параболического или гиперболического типов, что во много раз увеличивает объем вычислительных затрат. На первый взгляд наиболее экономичным в этом смысле является подход с применением математических моделей конвектирующих геомагнитных силовых трубок с возможностью естественного физического расщепления многомерной задачи на процессы переноса вдоль трубки и движения самой трубки по траекториям конвекции. В четвертой главе анализируются основные принципиальные недостатки такого подхода, связанные с несовпадением географических и геомагнитных полюсов, сложной геометрией самих трубок и траекторией их конвекции, упрощенным дипольным представлением магнитного поля, нарушением принципа вмороженности плазмы в геомагнитное поле при сильных возмущениях.

Делается вывод о необходимости учета трехмерной неоднородности ионосферы и решения многомерных систем уравнений в эйлеровых переменных. С учетом вышесказанного, в данной главе рассматривается нестационарная многомерная математическая модель  $F$  области с учетом несовпадения географического и геомагнитного полюсов, смешанных производных по пространственным переменным в уравнениях непрерывности для ионов, увлечений ионосферной плазмы термосферным ветром. Основное внимание обращено на качество разностных схем, которые использовались при численном интегрировании исходной системы моделирующих уравнений, на выбор эффективного метода решения систем девятиточечных разностных уравнений, которые возникают при аппроксимации уравнений параболического типа с учетом смешанных производных по пространственным переменным.

Математическая модель записана в сферической географической системе координат в диффузионном приближении, описывает динамику заряженных и нейтральных частиц в трёхмерно - неоднородной ионосфере при произвольном отношении частот столкновений электронов и ионов к их гирочастотам.

Исходная система уравнений модели  $F$ - области ионосферы состоит из трехмерных уравнений диффузии для ионов  $O^+$  и  $H^+$  и уравнений для горизонтальных компонент нейтрального ветра (вертикальная компонента считается малой). Для ионов  $O_2^+, N_2^+$  и  $NO^+$  предполагается отсутствие членов переноса, а для ионов  $O^+$  и  $H^+$  в уравнениях диффузии сохранены смешанные производные по пространственным переменным. Температуры электронов и ионов задаются эмпирически или рассчитываются в одномерном (по координате  $r$ ) приближении, а коширота  $\Theta$  и долгота  $\lambda$  выступают в роли параметров.

Основное внимание уделяется проблеме численного решения трехмерных уравнений диффузии ионов, записанных в наиболее общей дивергентной форме в сферической системе координат. В операторной форме это уравнение имеет вид:

$$PN = \frac{\partial N}{\partial t} - LN - F = 0,$$

где  $L$  – дифференциальный оператор по пространственным переменным ( $r$  – радиус вектор,  $\Theta$  – коширота,  $\lambda$  – долгота,  $F = -LN + Q$  ( $L \geq 0$ ,  $Q \geq 0$ ), определяет потери и рождения

частиц каждого сорта. Оператор  $L = \sum_1^3 L_\beta$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial r} \left( P_{rr} \frac{\partial}{\partial r} + P_r \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( P_{r\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( P_{\Theta r} \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( P_{\Theta\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} + P_\Theta \right) + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( P_{\Theta\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( P_{\lambda\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right),$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( P_{\lambda\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + P_\lambda \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( P_{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( P_{r\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right),$$

$$P_{rr} > 0, \quad P_{\Theta\Theta} > 0, \quad P_{\lambda\lambda} > 0$$

Для трехмерного уравнения диффузии рассматривается постановка смешанной задачи (с начальными и кривыми условиями) и строятся аддитивные разностные схемы, обладающие суммарной аппроксимацией. Каждый шаг дискретизации по времени  $\tau = t_{j+1} - t_j$  разбивается на  $m$  частей ( $m = 3$ ) узлами  $t_{j+\beta/m} = t_j + \frac{\beta\tau}{m}$ ,  $\beta = \overline{(1, m-1)}$  и трёхмерному уравнению диффузии ставится в соответствие цепочка двухмерных уравнений.

$$\frac{1}{m} \frac{\partial N_{(\beta)}}{\partial t} = L_\beta N_{(\beta)} + F_\beta, \quad \beta = \overline{(1, m)}$$

$$t \in \Delta_\beta = \left( t_{j+(\beta-1)/m} < t \leq t_j + \frac{\beta}{m} \right)$$

Принципиальным моментом является невозможность дальнейшего перехода к цепочке одномерных уравнений по пространственным координатам из-за наличия смешанных производных.

Каждое двухмерное уравнение аппроксимируется на полуинтервале  $t_{j+(\beta-1)/m} < t \leq t_{j+\beta/m}$  некоторой двухслойной неявной разностной схемой на разностной сетке  $\omega_h$  шагами  $h_r, h_\Theta, h_\lambda$ .

В результате получается в общем случае двухмерный эллиптический оператор на девятиточечном шаблоне по каждой переменной  $r, \theta, \lambda$ :

$$A_{ik} u_{i-1, k-1} + B_{ik} u_{i, k-1} + L_{ik} u_{i+1, k-1} + K_{ik} u_{i-1, k} -$$

$$- C_{ik} u_{ik} + E_{ik} u_{i+1, k} + D_{ik} u_{i-1, k+1} + V_{ik} u_{i, k+1} +$$

$$+ Y_{ik} u_{i+1, k+1} + F_{ik} = 0, \quad i = \overline{(1, N_i)}, \quad k = \overline{(1, N_k)}$$

Показывается, что структура операторов  $L_{\beta}$  такова, что разностные операторы можно записать на семиточечном шаблоне и проводится путем вычислительного эксперимента на тестовых задачах выбор наилучшего шаблона. Проводится анализ свойств разностных операторов на семиточечных шаблонах, показывается нарушение условий монотонности (диагонального преобладания по строкам)

$$C_{ik} \geq B_{ik} + L_{ik} + D_{ik} + V_{ik} + K_{ik} + E_{ik}$$

для обычно применяемых разностных схем и предлагается переход к схемам с диагональным преобладанием по столбцам в матрице системы разностных уравнений.

После анализа различных итерационных методов решения разностных уравнений, минимальных невязок, наискорейшего спуска, верхней релаксации, попеременно - треугольного, модифицированного попеременно - треугольного (МПТМ) для решения двухмерных разностных уравнений был выбран итерационный метод предложенный *Четверушкиным Б.Н.*, который вошел в литературу под названием " $\alpha$ - $\beta$ " итерационного метода. Этот метод не требует знания априорной информации о границах спектра разностного оператора, малочувствителен к сильным изменениям коэффициентов разностной схемы, что характерно для рассматриваемых уравнений диффузии ионов, обладает высокой скоростью сходимости по сравнению с остальными методами, не требующими вычисления границ спектра.

С учетом особенностей уравнений диффузии были разработаны два новых варианта " $\alpha$ - $\beta$ " итерационного метода: вариант с диагональным преобладанием по столбцам у матрицы системы разностных уравнений и циклический " $\alpha$ - $\beta$ " итерационный метод в случае задач с периодическими краевыми условиями (периодическими условиями по долготе). Проведено тестирование метода " $\alpha$ - $\beta$ " итераций на контрольных примерах (задачах) и на задачах реального моделирования геофизических ситуаций, показавших его работоспособность и эффективность в задачах моделирования ионосферной плазмы в диффузионной постановке.

Разработанные в четвертой главе вычислительные алгоритмы для решения уравнений диффузии с учетом смешанных производных позволили оценить их роль в динамике многомерных ионосферных процессов и сделать вывод о их существенном влиянии на поведение ионосферных параметров, особенно для возмущенных условий.

Результаты исследований четвертой главы представлены в следующих публикациях [12, 14, 39, 40, 43].

**В пятой главе** на основе численного моделирования проведено сопоставление диффузионного приближения и полного гидродинамического описания. Показано, что, в целом, двухионное диффузионное приближение приводит к заниженной концентрации заряженных частиц вдоль всей силовой трубки, начиная с главного ионосферного максимума. Различия между гидродинамическим описанием и диффузионным приближением в моделировании плазмосферы еще более заметны и проявляются как в концентрациях ионов, так и в их скоростях.

**В пятой главе** приведены основные результаты вычислительных экспериментов по исследованию влияния техногенных возмущений на ионосферную плазму.

В большинстве работ, посвященных этой проблеме, ограничивались лишь анализом процессов непосредственно в области F2-ионосферы, что соответствует представлению о локальном воздействии в сравнительно малых масштабах. В настоящее время известно, что антропогенное воздействие может сопровождаться квазирегулярным поступлением воды и других компонентов ускоряющих рекомбинацию ионосферной плазмы в верхнюю атмосферу в очень широких масштабах. На основе математической модели плазменных процессов в геомагнитной силовой трубке рассмотрена динамика ионосферной «дыры», образуемой при антропогенном поступлении водорода и его соединений. В результате численного моделирования было показано, что эффекты воздействия на ионосферу плазмогасящих соединений могут проявляться на временах порядка суток, если учитывать процессы перераспределения плазмы вдоль всей силовой трубки и динамику нейтрального водорода.

Рассмотрена эволюция "ионосферной дыры", образуемой при антропогенном поступлении воды, выявлена роль ионосферно-плазмозферного обмена в этих ситуациях, установлено наличие вторичной "ионосферной дыры" в заходный период при учете образующегося нейтрального водорода, приведены временные оценки переходного периода.

Дальнейшее развитие этот подход получил в плане изучения процессов модификации магнитосопряженных областей ионосферы при различных условиях техногенных выбросов. Полученные результаты позволяют определить тесную взаимосвязь между «ионосферными дырами», образованными антропогенными воздействиями в сопряженных полушариях.

Показано, что динамика ионосферно-плазмозферного взаимодействия при техногенных возмущениях сопряженных ионосфер проявляется в заметном увеличении плазменной температуры, существенных изменениях ионных потоков из магнитосопряженных областей и структуры F области.

В пятой главе также приведены результаты математического моделирования поведения системы ионосфера-плазмозфера при условии возмущения плотности и температуры плазмы в силовой трубке. Показано, что возмущение плазмы распространяется вдоль геомагнитной силовой линии от места локализации как в сопряженное полушарие, так и вниз на ионосферные высоты. Приведены характерные времена переноса плазмы между сопряженными полушариями, показано, что динамические эффекты приводят как к понижению концентрации электронов, так и к охлаждению плазмы (адиабатическое расширение). Результаты вычислительных экспериментов показывают, что локализованное плазмозферное возмущение описанного типа и дальнейшее перераспределение заряженных частиц в силовой трубке вызывают в конечном итоге весьма заметные изменения  $N_m F2$ , которые проявляются прежде всего в неосвященной ионосфере, то есть в ночное время и в зимний период.

В отличие от слабых возмущений сильные возмущения приводят к крупномасштабным изменениям температуры и плотности атмосферы в три раза и более, концентраций возбужденных и малых нейтральных составляющих на несколько порядков, скоростей ионизации до семи порядков. В результате таких воздействий в атмосфере образуются области повышенной ионизации с электронной концентрацией на порядки отличающиеся от фоновых значений, причем высокие концентрации заряженных частиц могут сохраняться достаточно долго. Примерами сильных возмущений могут служить высотные и приземные

ядерные взрывы (ЯВ) и, эквивалентные им по энергетике вторжения в атмосферу крупных метеорных тел.

Рассмотрены результаты математического моделирования релаксационных процессов с учетом возбужденных и малых нейтральных составляющих при сильных возмущениях типа ЯВ, симитированных соответствующим заданием начальных условий. Под возмущением ионосферы при поглощении рентгеновского излучения ЯВ понимается здесь отклонение состава ионосферы от квазиравновесного (фонового), которое может значительно превышать фон ( $n_j / n_{j\text{фон}} \gg 1$ ). На начальном малом временном интервале  $\tau_b$  (время действия фотоэлектронов и вторичных электронов) создается сильно неравновесная область в ионосфере, релаксация которой к квазифоновому состоянию определяется в основном фотохимическими превращениями без учета процессов переноса, которые подключаются на более поздних временах развития релаксационных процессов.

В расчетах учтены реакции с участием "быстрых" электронов с энергиями 1 эВ, записанные

в общем виде  $M + e_{\delta}^{-} \xrightarrow{k} M^* + e$ .

Предполагая максвелловское распределение "быстрых" электронов, можно определить коэффициенты скоростей для реакций этого типа

$$k = \frac{1}{T_e^{3/2}} \sqrt{\frac{8}{m\pi}} \int_0^{\infty} \epsilon \sigma(\epsilon) e^{-\epsilon/T_e} d\epsilon$$

где  $\epsilon$  – энергия фотоэлектрона;  $m$  – его масса,  $\sigma(\epsilon)$  – сечение возбуждения.

В рамках этой модели проведен ряд вычислительных экспериментов и показаны основные закономерности в динамике переноса и химической кинетике заряженных и метастабильных частиц при возмущенных условиях и роль малых составляющих в кинетике микропроцессов ионосферной плазмы и их существенный вклад в аэрономические процессы.

Результаты исследований пятой главы представлены в следующих публикациях [1-5, 8-9, 11, 15, 16-21, 23, 27-30, 32, 37-38, 44].

**В шестой главе** представлены некоторые результаты вычислительных экспериментов, проведенные на основе одномерных и многомерных моделей в шаровом слое и на основе математических моделей геомагнитных силовых трубок. Основная ориентация вычислительных экспериментов была направлена на проверку и эффективность использования разработанных в диссертации численных алгоритмов и технологии проведения вычислительного эксперимента. Наиболее подходящими для этого являются реальные, надежно экспериментально зафиксированные геофизические ситуации в случае слабых и сильных возмущений. В связи с этим подробно анализируются экспериментально измеренные значения ионосферных параметров и их соответствие результатам вычислительного эксперимента. Калибровка математических моделей для дальнейшего их использования целях прогноза поведения ионосферы и проектирования натуральных экспериментов предполагает исследование реакции математической модели на вариации входных параметров. Наиболее существенными входными параметрами в одномерных и многомерных моделях в шаровом слое являются верхние граничные условия. В связи с этим в пункте 1.5 первой главы представлены исследования влияния верхних граничных условий

для концентраций основных ионов  $O^+$  и  $H^+$  электронной температуры на моделируемые ионосферные параметры, привязанные к достаточно надежным измерениям на спутнике "Аллуэт-1" и данным некогерентного рассеяния обсерватории Миллстоун-Хилл (США). Эти исследования позволили количественно установить меру чувствительности ионосферных параметров к варьированию входных данных, а именно к потокам частиц и тепла через верхнюю границу.

В шестой главе приведены результаты вычислительных экспериментов в нижней ионосфере.

В этой главе показано использование математических моделей ионосферы для исследования распространения электромагнитных волн.

В этой главе представлена постановка задачи и расчет высотно-временного поведения колебательно-возбужденного молекулярного азота  $N_2^{(v)}$  для каждого уровня  $v = 1 \dots 10$ , с учетом молекулярной диффузии и химической кинетики. Расчеты проводились для умеренных и возмущенных условий.

Показано существенное влияние  $N_2^{(v)}$  на рекомбинацию ионосферной плазмы для возмущенных условий.

Дальнейшие исследования шестой главы посвящены в основном изучению возмущений в ионосферной плазме, созданных различными источниками антропогенных воздействий.

Результаты исследований шестой главы представлены в следующих публикациях [17, 9, 10, 13, 25, 26, 31, 33-36, 41, 42].

**В Заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

### **Основные положения выносимые на защиту**

1. Построена и апробирована нестационарная гидродинамическая замкнутая модель системы ионосфера-плазмосфера, включающая уравнения непрерывности, движения и теплового баланса заряженных компонент; уравнения движения нейтрального газа; уравнения диффузии для малых нейтральных составляющих.

Различные версии модели способны учитывать до восьми сортов положительных ионов ( $H^+$ ,  $O^+$ ,  $O_2^+$ ,  $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $H_2O^+$ ,  $H_3O^+$ ,  $OH^+$ ), метастабильные ( $O_2(^1\Delta_g)$ ,  $O(^1D)$ ,  $N(^2D)$ ) и малые компоненты.

Представленная модель ионосферно-плазмосферных взаимодействий на основе модульного принципа реализована в виде программного комплекса и может быть использована для решения различных геофизических задач.

2. В диссертационной работе представлены численные методы решения уравнений описывающих многокомпонентную ионосферную плазму. Проведена адаптация известных численных методов решения нестационарных уравнений теплопроводности, диффузии, непрерывности и движения заряженных и нейтральных частиц.

Контрольные расчеты в традиционных задачах ионосферного моделирования показали, что все представленные вычислительные алгоритмы могут быть успешно использованы при моделировании поведения в естественных условиях системы ионосфера – плазмосфера.

3. Получены и исследованы результаты вычислительных экспериментов на базе модели ионосферы и плазмосферы и выяснены особенности ионосферно-плазмосферных взаимодействий в задачах переноса заряженных частиц и их энергии.

В результате сравнения полученных численных решений с результатами физических экспериментов показана корректность модельного описания системы ионосфера-плазмосфера.

Впервые модель ионосферы и плазмосферы использована для сравнительного анализа основных подходов (диффузионный, гидродинамический) к исследованию динамики околоземной плазмы.

4. Разработаны наиболее полные по учету физических факторов одномерные модели ионосферы и нижней термосферы в шаровом слое, охватывающие область высот 50-1000 км. На их основе были исследованы процессы ионосферных возмущений, происходящих за счет изменений в составе нейтральных и заряженных компонент, нейтральных ветров, потоков плазмы между ионосферой и плазмосферой.

5. Разработана нестационарная многомерная математическая модель F- области ионосферы с учетом несовпадения географического и геомагнитного полюсов, увлечения ионосферной плазмы термосферным ветром, смешанных производных в уравнениях диффузии, описывающая динамику заряженных и нейтральных частиц в трехмерно-неоднородной ионосфере при произвольном отношении частот столкновений электронов и ионов к их гирочастотам.

6. На основе разработанных моделей впервые получены геофизические результаты как для спокойных, так и для возмущенных условий: определены количественные характеристики эволюции ионосферных "дыр" при антропогенном поступлении плазмогасящих соединений, исследована реакция поведения замкнутой системы ионосфера-плазмосфера на локализованные динамические возмущения плазмосферы, рассчитаны процессы релаксации малых и возбужденных нейтральных составляющих при сильных возмущениях типа высотных ядерных взрывов.

Проведены вычислительные эксперименты по исследованию фундаментальной особенности слабоионизованной плазмы как наличие долгоживущих метастабильных компонент, что имеет первостепенное значение для построения моделей ионосферы, ставящих своей целью прогноз поведения околоземной плазменной среды.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Власов М.Н., Ишанов С.А., Медведев В.В., Латышев К.С.* Модель динамики «ионосферной «дыры» с учетом процессов в силовой трубке. // *Космические исследования.* 1990. 28. №2. С. 248 – 254 .
2. *Власов М.Н., Григорьев С.А., Ишанов С.А., Латышев К.С.* Сравнительный анализ различных гидродинамических приближений для описания ионосферно-магнитосферной плазмы // *Космические исследования.* 1991. 29. №3. С. 404 – 413.
3. *Власов М.Н., Ишанов С.А., Медведев В.В.* Моделирование эффектов антропогенных воздействий в сопряженных областях ионосферы и плазмосферы // *Космические исследования.* 1994. 32. №1. С. 154 -158.

4. Власов М.Н., Ишанов С.А., Григорьев С.А. Моделирование эффектов динамических возмущений плотности и температуры ионосферно- магнитосферной плазмы на плазмосферных высотах. // Космические исследования. 1997. 35. №3. С. 248 – 252.
5. Власов М.Н., Григорьев С.А., Ишанов С.А. Влияние динамического воздействия в плазмосфере на суточный ход  $N_mF2$  // Космические исследования. 1997. 35. №4. С. 440 – 441.
6. Медведев В. В., Ишанов С.А., Зенкин В. И. Самосогласованная модель нижней ионосферы // Геомагнетизм и аэрономия. 2002. 42. №6. С. 780 – 789.
7. Медведев В. В., Ишанов С.А., Зенкин В. И. Влияние колебательно-возбужденного азота на рекомбинацию в ионосферной плазме. // Геомагнетизм и аэрономия. 2003. 43. №2. С. 248 – 255.
8. Медведев В. В., Ишанов С.А., Зенкин В. И. Моделирование электронной и ионных температур при антропогенных воздействиях на ионосферу // Космические исследования. 2004. 42. №3. С. 313 – 314.
9. Медведев В. В., Ишанов С.А., Зенкин В. И. Роль горизонтальных составляющих скорости нейтрального ветра при антропогенных воздействиях на ионосферу Земли // Космические исследования. 2005. 43. №1. С. 76 – 80.
10. Ишанов С.А., Медведев В.В., Залеская В.А. Колебательно-и электронно-возбужденный состав верхней атмосферы и ионосферы Земли // Математическое моделирование. 2006. 18. №75. С. 21 – 26.
11. Григорьев С.А., Зинин Л. В., Ишанов С.А.. Нестационарные процессы, возникающие при воздействии на космическую плазму. // Математическое моделирование. 2006. 18. №7. С. 115 – 128.
12. Ишанов С.А., Клевицур С.В., Латышев К.С. Алгоритм  $\alpha$ - $\beta$  итераций в задачах моделирования ионосферной плазмы. // Математическое моделирование. 2009.21. №1. С. 33-45.
13. Ишанов С.А., Медведев В.В., Залеская В.А., Жаркова Ю.С. Математическое моделирование ионосферных процессов в целях распространения радиоволн. // Математическое моделирование. 2008. 20. №4. С. 3–7.
14. Ишанов С. А., Клевицур С.В. Математическое моделирование ионосферы с учетом ее трехмерной неоднородности // Вестник РГУ им. И. Канта. 2010. №4. С. 152-158.
15. Ишанов С.А. Динамические антропогенные возмущения ионосферно-магнитосферной плазмы. // Вестник РГУ им. И. Канта. 2010. №10. С. 33-41.
16. Ишанов С.А., Латышев К.С., Медведев В.В. Моделирование возмущений F2- области ионосферы при антропогенных воздействиях // Модели в природопользовании: Межвузовский сб.науч.тр. Калининград, 1989. 136 с.
17. Власов М.Н., Ишанов С.А., Латышев К.С., Медведев В.В. Оценки возмущений в геомагнитной силовой трубке при наличии избытка воды в верхней атмосфере // Десятый семинар по моделированию ионосферы: Тез. докл. М.: МГК АН СССР, 1990. С.24.
18. Власов М.Н., Григорьев С.А., Ишанов С.А., Латышев К.С. О диффузионном и гидродинамическом приближениях в описании ионосферной плазмы // Десятый семинар по моделированию ионосферы: Тез. докл. М.:МГК АН СССР, 1990. С.24.

19. *Ишанов С.А., Латышев К.С., Медведев В.В.* Математическое моделирование процессов в ионосфере Земли при учете возбужденных и малых нейтральных составляющих для возмущенных условий // Модели в природопользовании: Межвузовский сб. науч. тр. Калининград, 1991. 120 с.
20. *Ишанов С.А., Леванов Е. И., Медведев В. В.* Вычислительный эксперимент расчета параметров ионосферной плазмы при антропогенном воздействии // Материалы Шестого Всероссийского семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань, 2005. С. 122 – 125.
21. *Григорьев С. А., Зинин Л. В., Ишанов С.А.* Математическое моделирование нестационарных процессов в околоземной космической плазме. // Вестник КГУ, Калининград. 2003 г. №3. С. 46–59.
22. *Ишанов С.А., Медведев В.В., Латышев К.С.* Метастабильные компоненты в ионосфере. // Материалы Международного Симпозиума «Авроральные явления и солнечно-земные связи». Москва, 2003 г., С. 111
23. *Ишанов С.А., Медведев В. В., Зинин Л. В.* Математическое моделирование инъекции молекул  $H_2O$  в F2-области ионосферы Земли. Материалы Международного Симпозиума «Авроральные явления и солнечно-земные связи». Москва, 2003 г.С. 445 – 448.
24. *Ишанов С.А., Медведев В. В.* Components excited state in the upper atmosphere. // Physics of auroral Phenomena, Proc. XXVII Annual, p.p.105 – 107, 2004 г.
25. *Ишанов С.А., Медведев В.В., Захаров Л.П., Залеская В.А.* Эффекты возмущения нейтральных ветров. Вестник КГУ. 2005. № 1-2. С. 54-59.
26. *Ишанов С.А., Медведев В. В.* Математическое моделирование метастабильных компонент в ионосфере Земли. // «Инженерно – физический журнал». Национальная Академия наук Беларуси. 2005. Т. 78. С. 26-33.
27. *Ishanov S.A., Medvedev V. V.* Mathematical modeling ionospheric effects of rocket exhaust products into the F2-region Earth's ionosphere // В сб. «Избранные вопросы современной математики». Калининград, КГУ. 2005. С.137.
28. *Ишанов С.А., Леванов Е.И., Медведев В.В., Залеская В.А.* Магнитосферно-ионосферные изменения, вызванные полетами космических аппаратов. // Инженерно-физический журнал. 2006. №6. Т.79. С. 11–15.
29. *Ишанов С.А., Медведев В.В., Залеская В.А.* Математическое моделирование ионосферно-магнитосферных процессов // Материалы Третьей международной конференции «Вычислительные методы в прикладной математике: СМAM-3''». Минск, 2007 г.
30. *Ishanow S.A., Medvedev V.V., Zaleskaya V.A.* Injection of  $H_2O$  molecules into the F-region of the Earth's ionosphere. // Physics of auroral Phenomena. 29<sup>th</sup> Annual Seminar. Apatity, 2006. P. 62.
31. *Ishanow S.A., Medvedev V.V., Tokar V.G.* Possibility of applying the mathematical models to the problems of radiowave propagation. // Physics of auroral Phenomena. 29<sup>th</sup> Annual Seminar. Apatity, 2006. P. 62-63.
32. *Ishanov S.A., Medvedev V. V., Zaleskaya V. A.* The Magnetospheric-Ionospheric Disturbances Caused by Rocket Injection // Physics of auroral Phenomena. 29<sup>th</sup> Annual Seminar. Apatity, 2006. P. 66-69.

33. *Ишанов С.А.* Моделирование процессов в ионосферной плазме при учете метастабильных составляющих для возмущенных условий. // Вестник РГУ им. И. Канта. 2008. №10. С. 24-32.
34. *Захаров Л.П., Ишанов С.А., Медведев В.В.* Ионосферно-магнитосферные потоки. // Вестник РГУ им. И. Канта. 2008. №10. С. 33-37.
35. *Ишанов С.А., Леванов Е.И., Медведев В.В., Залеская В.А.* Использование математических моделей ионосферы для изучения распространения электромагнитных волн. // Инженерно-физический журнал. Национальная Академия наук Беларуси. 2008. Т.81. №6. С. 1198–1202.
36. *Ишанов С.А.* Математическая модель взаимодействия в системе термосфера-ионосфера Земли. // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней школы. Воронеж. 2009. С. 77–78.
37. *Ишанов С.А.* Математическое моделирование ионосферно-плазмосферных взаимодействий при динамических воздействиях. // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы III Международной научной конференции. Часть 1. Воронеж: «Научная книга», 2009. С 174-175.
38. *Ишанов С.А.* Математическое моделирование ионосферно-плазмосферных взаимодействий при антропогенных воздействиях. // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009: Тезисы докладов. С. 338-339.
39. *Ишанов С. А., Клевицур С.В., Латышев К.С. Пялов Д.И.* Многопроцессорная реализация одного итерационного алгоритма для систем с распределенной памятью. // Вестник РГУ им. И. Канта. 2009. №10. С. 64-73.
40. *Латышев К.С., Зинин Л.В., Ишанов С.А.* Математическое моделирование околоземной космической плазмы. Энциклопедия низкотемпературной плазмы, 2008, том VII-1, часть 3, с. 337-349.
41. *Ишанов С.А.* Численное моделирование нестационарных процессов ионосферно-плазмосферных связей с учетом их самосогласованного характера. // Компьютерные науки и технологии. Сборник трудов первой Международной научно-технической конференции. Белгород, 8-10 октября 2009. Часть 1. С. 41-42.
42. *Ишанов С.А.* Математическое моделирование ионосферного распространения коротких радиоволн // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения» - XXI». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010, с. 104-106.
43. *Ишанов С.А., Клевицур С.В.* Метод суммарной аппроксимации для уравнений диффузии со смешанными производными // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения» - XXI». – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010, с. 106-108.
44. *Ишанов С.А.* Математическое моделирование техногенных возмущений плазмосферы Земли // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. трудов Международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2010. С. 157-162.