

На правах рукописи

Истомина Мария Александровна

**Численное моделирование гидродинамических  
структур с помощью квазигазодинамического  
алгоритма и создание нового вычислительного  
ядра в открытом программном комплексе  
OpenFOAM**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико–математических наук

**Москва — 2018**

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении  
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

**Научный руководитель:** доктор физико–математических наук,  
профессор **Татьяна Геннадьевна Елизарова**

**Официальные оппоненты:** доктор физико–математических наук, заместитель директора  
по научной работе ФГБУН Институт автоматизации  
проектирования РАН **Александр Владимирович Бабаков**

доктор физико–математических наук, ведущий научный  
сотрудник, ФЛ ФГУП ЦАГИ «Московский комплекс ЦАГИ»  
**Александр Евгеньевич Усачов**

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО Санкт–Петербургский государственный  
университет

Защита диссертации состоится «12» апреля 2018 года в « » час. « » мин.  
на заседании совета Д002.024.03 при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по  
адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной  
математики им. М.В. Келдыша РАН и на сайте [www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru).

Автореферат разослан « » февраля 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат физико–математических наук

М.А. Корнилина

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы** диссертационной работы заключается в том, что многие модели, предназначенные для решения научных и прикладных задач, основаны на использовании уравнений газовой динамики. К таким задачам относятся, в частности, задачи математического моделирования летательных аппаратов при до- и сверхзвуковых скоростях полета, задачи экологии, включая задачи описания течений в акваториях морей и океанов, задачи, связанные с исследованиями астрофизических газовых объектов и многие другие, перечень которых огромен.

К настоящему времени разработаны классы численных алгоритмов решения уравнений газовой динамики в форме уравнений Навье–Стокса как для сжимаемых, так и для несжимаемых течений. Ряд используемых методов оформлен в виде коммерческих программных комплексов и пакетов открытого типа, доступных широкому кругу квалифицированных пользователей. При этом в настоящее время повышенное внимание уделяется возможностям параллельной реализации газодинамических алгоритмов на современных высокопроизводительных комплексах. Широкое использование численных алгоритмов решения уравнений газовой динамики свидетельствует об актуальности и постоянной необходимости их дальнейшего совершенствования.

Более 30 лет назад были разработаны численные алгоритмы решения уравнений газовой динамики, основанные на использовании предварительного осреднения, или сглаживания газодинамических величин по малому пространственно–временному интервалу. Уравнения, полученные для описания поведения таких сглаженных величин, были названы квазигазодинамическими (КГД) или регуляризованными уравнениями газовой динамики. Описание построения КГД уравнений в рамках кинетической теории, их исследования и применения в расчетах приведены в монографии Б.Н. Четверушкина, а также в монографиях Т.Г. Елизаровой и Ю.В. Шеретова. Важными свойствами численных алгоритмов, основанных на КГД уравнениях, являются простота и эффективность их реализации на высокопроизводительных вычислительных системах.

Успешное развитие и применение численного метода связано не только с его разработкой, но и с реализацией в виде программного обеспечения. Одним из путей повышения качества такой реализации, снижения затрат времени на ее выполнение, упрощения процесса обнаружения и устранения ошибок, а также поддержки совершенствования кода является использование открытого программного обеспечения. Примерами таких открытых библиотек программ для решения задач газо- и гидродинамики являются OpenFOAM, SU2, Nektar++ и др. В частности, OpenFOAM — это современная развивающаяся технология, используемая многими тысячами пользователей по всему миру.

Она поддерживается большими корпорациями, ей посвящены специальные конференции, в том числе регулярные встречи рабочих групп и тренинги.

Актуальность темы диссертационной работы состоит в дальнейшем развитии численных алгоритмов, основанных на КГД уравнениях, для решения задач гидро- и газодинамики, а также в обобщении КГД алгоритма на широкий круг прикладных и инженерных задач путем включения этого алгоритма в качестве нового вычислительного ядра в открытый программный комплекс OpenFOAM.

Результаты, представленные в диссертационной работе, получены в ходе выполнения работ по тематике ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и по проектам РФФИ, в которых автор принимал участие в качестве исполнителя (гранты № 13-01-00703, № 15-01-03654, № 16-01-00048, № 18-01-00587) и программ Президиума РАН № 133 и № 26.

**Цели и задачи** диссертационной работы состоят в расширении возможностей КГД подхода для численного моделирования течений газа в сложных практически важных случаях. Среди важных научных и практических задач отметим проблему формирования так называемых волн-убийц. Такими волнами называют спонтанно образующиеся и исчезающие волны в больших морских акваториях, высота которых в несколько раз превышает среднюю высоту окружающих их волн. Природа таких волн не ясна, экспериментальное изучение их очень ограничено, в то же время появление таких волн регулярно фиксируется датчиками, и приносимые ими разрушения нефтяных платформ хорошо известны. Другой целью и задачей работы было подтверждение гипотезы о возможности формирования рукавов плотности в дисках и галактиках на основе чисто гидродинамического механизма без участия эффектов нагрева и самогравитации в газе. Целью и задачей работы было также включение разработанного ранее в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН оригинального численного алгоритма решения задач газовой динамики в открытый программный комплекс OpenFOAM, что позволило существенно расширить область его применения для широкого круга пользователей как в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, так и во всем мире.

**Теоретическая значимость** работы обусловлена следующими аспектами: построение новой теоретической модели для описания эффекта формирования уединенной волны в аэрогидроканале и построение соответствующего аналитического решения; построение квазигазодинамических уравнений в полярной системе координат совместно с методом их численного решения, а также вывод нового аналитического решения, описывающего стационарные равновесные конфигурации газа в баротропном случае.

**Практической значимостью** обладают все основные результаты диссертационной работы. Результаты численного моделирования уединенной

волны в кольцевом аэрогидроканале вносят существенный вклад в теорию образования волн-убийц. Результаты численного моделирования формирования спирально-вихревых структур в аккреционных газовых дисках дают вклад в понимание возможности образования рукавов плотности в рамках чисто гидродинамического приближения. Создание нового вычислительного ядра QGDFoam в открытом программном комплексе OpenFOAM расширяет возможности применения КГД алгоритма и позволяет пользователям, знакомым с КГД алгоритмом, решать свои задачи в рамках этого пакета. В частности, КГД алгоритм теперь может быть применен для решения задач в произвольной геометрии с помощью произвольных сеток и мощных современных суперкомпьютеров.

**Научная новизна.** Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Новыми являются математическая модель описания процесса формирования уединенной волны в аэрогидроканале и результаты прямого численного моделирования процесса формирования такой волны под воздействием ветровой нагрузки. Новой является математическая модель эволюции аккреционного диска, записанная в баротропном приближении с использованием оригинальных начальных распределений. Новый численный алгоритм, построенный для этой задачи, впервые позволил получить ее численное решение с использованием возможностей персонального компьютера за весьма малое время. Кроме того, впервые в рамках чисто гидродинамического подхода удалось получить эффект раздвоения рукавов плотности газа во вращающемся диске.

Новым является создание вычислительного ядра QGDFoam в открытом программном комплексе OpenFOAM, а также сравнение вычислительного ядра QGDFoam и встроенного решателя rhoCentralFoam на примере характерных одномерных задач газовой динамики.

**Достоверность результатов** подтверждается их сопоставлением с аналитическим исследованием и экспериментальными данными. В частности, достоверность численных результатов показана при сопоставлении расчетов задач о распаде разрывов, выполненных в рамках КГД алгоритма при его включении в открытый программный комплекс OpenFOAM, с аналитическими решениями этих задач и с помощью решения этих же задач на основе численных алгоритмов, включенных ранее в этот комплекс программ. Для всех рассмотренных примеров приведены невязки решения.

В диссертационной работе КГД алгоритм применялся для решения задач, использующих систему уравнений газовой динамики для идеального политропного газа, систему уравнений в приближении мелкой воды, систему уравнений мелкой воды в полярных координатах и систему уравнений газовой динамики в баротропном приближении в полярной системе координат.

### Апробация результатов:

1. Конференция молодых ученых «Ломоносов–2013» Е.В. Юшков, М.А. Истомина Уединенные волны в кольцевых штормовых бассейнах, Россия, Москва, физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013 г.
2. XXV IUPAP Conference on Computational Physics T.G. Elizarova and M.A. Istomina Regularized shallow–water equations as a model for a solitary wave generation, Russia, Moscow, August 20–24, 2013.
3. 2nd ECCOMAS Young Investigators Conference T.G. Elizarova and M.A. Istomina Quasi–gas dynamic algorithm for the magnetohydrodynamic shallow water equations, France, Bordeaux, September 02–06, 2013.
4. 4–ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» М.А. Истомина, Е.В. Юшков Периодическое разрывное решение системы уравнений мелкой воды для одиночного ветрового солитона в кольцевом канале, Россия, Москва, ИПМех РАН, 26–29 ноября, 2013 г.
5. Международная конференция молодых ученых «Современные проблемы прикладной математики и информатики» Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат, Россия, Дубна, 25–29 августа, 2014 г.
6. XVI Всероссийская конференция–школа молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования» Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Квазигазодинамический алгоритм для расчета течений в полярной системе координат, Россия, Абрау–Дюрсо, 14–19 сентября, 2015 г.
7. Ломоносовские чтения — 2017 Секция «Прикладная математика и математическое моделирование» Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, В.С. Полякова, А.В. Иванов Регуляризованные уравнения гидродинамики как основа для численных алгоритмов, Россия, Москва, физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 26 апреля, 2017 г.
8. OpenFOAM Workshop T.G. Elizarova, M.A. Istomina, E.V. Smirnova, M.V. Kraposhin Development of Solver for Modeling Compressible Flows Using Regularised Gas Dynamic Equations, UK, Exeter, 24–27 July, 2017.
9. Открытая конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова М.В. Крапошин, Д.В. Рязанов, Е.В. Смирнова, Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина Development of OpenFOAM solver for compressible viscous flows simulation using quasi–gas dynamic equations, Москва, Президиум РАН, 30 ноября–1 декабря, 2017 г.
10. Семинар ИПМ им. М.В. Келдыша РАН под руководством член.–корр. В.Ф. Тишкина и д.ф.–м.н. А.А. Кулешова «Численное моделирование гидродинамических структур с помощью квазигазодинамического алгоритма и создание нового вычислительного ядра в открытом программном комплексе OpenFOAM», 9 ноября, 2017 г.

Результаты, представленные в диссертационной работе, опубликованы в 7 печатных работах. 6 работ опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК.

**Личный вклад** автора состоит в разработке математических моделей для задач о течении в аэрогидроканале и аккреционном диске, разработке и отладке соответствующих численных алгоритмов и программ, анализе, интерпретации и оформлении результатов расчетов. Кроме того, автор непосредственно участвовал в написании ядра программного комплекса OpenFOAM, его верификации на примере одномерных тестов и проведении сопоставления полученных результатов с имеющимися данными. Вклад соискателя состоит также в оформлении презентаций и текстов печатных статей по результатам выполненных работ, а также рукописи диссертации.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация изложена на 147 страницах, включает 33 рисунка и 4 таблицы. Материал работы включает в себя введение, 4 главы, заключение, приложение и список литературы из 86 позиций.

**Введение** описывает диссертационную работу по следующим параметрам: актуальность темы, цели и задачи, методы исследования, степень разработанности темы диссертации, структура диссертационной работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту, достоверность результатов, апробация результатов, публикации и благодарности.

**Первая глава** содержит систему уравнений газовой динамики в векторном виде с общими уравнениями состояния и КГД систему уравнений газовой динамики для идеального политропного газа. Приведен вывод КГД системы уравнений мелкой воды (МВ). Приведен расчет тестовой задачи о варианте гидравлического скачка, показывающий эффективность КГД уравнений МВ. Приведен вывод КГД системы уравнений МВ в полярной системе координат. Полученная система протестирована на одномерных примерах.

Система уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса в виде уравнений баланса массы, импульса и полной энергии в традиционных обозначениях имеет следующий вид

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi} + \rho \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\hat{\Pi} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + Q, \quad (3)$$

где  $\rho(\mathbf{x}, t)$  – плотность,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  – скорость,  $p(\mathbf{x}, t)$  – давление,  $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$  – тензор вязких напряжений,  $E(\mathbf{x}, t)$  – полная энергия единицы объема,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  – тепловой поток,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  – внешняя массовая сила,  $Q(\mathbf{x}, t)$  – мощность тепловых

источников. Знак  $\otimes$  обозначает прямое векторное произведение, причем при вычислении дивергенции от него дифференцируется первый множитель.

Тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  имеет вид

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} = \mu((\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}\hat{I}\operatorname{div} \mathbf{u}) \quad (4)$$

с коэффициентом динамической вязкости  $\mu = \mu(\rho, T) > 0$ , где  $\hat{\Pi}_{NS}$  – тензор вязких напряжений Навье–Стокса,  $\hat{I}$  – единичный тензор.

Вектор теплового потока  $\mathbf{q}$  задается формулой

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} = -\kappa \nabla T, \quad (5)$$

где  $\kappa = \kappa(\rho, T) > 0$  – коэффициент теплопроводности.

Полная энергия  $E$  вычисляется с использованием величины внутренней энергии  $u_\varepsilon$

$$E = \frac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 + \rho u_\varepsilon. \quad (6)$$

Для идеального политропного газа уравнение состояния и уравнения связи принимают вид

$$p = \rho RT, \quad u_\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (7)$$

$$u_\varepsilon = c_V T, \quad c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}, \quad (8)$$

где показатель адиабаты  $\gamma = c_p/c_V > 1$ .

КГД уравнения с учетом массовой силы и источника тепла для идеального политропного газа были записаны в виде, аналогичном уравнениям Навье–Стокса (1) – (3), дополненных диссипативными слагаемыми с малым коэффициентом  $\tau$  размерности времени в следующем виде

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (9)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \hat{\Pi} + (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}((E + p)\mathbf{j}_m/\rho) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\hat{\Pi} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{F} + Q. \quad (11)$$

При этом поток массы в уравнении неразрывности имеет вид

$$\mathbf{j}_m = \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (12)$$

тензор вязких напряжений  $\hat{\Pi}$  с КГД добавками задается выражением

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_{NS} + \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau(\mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} - (\gamma - 1)Q) \hat{I}, \quad (13)$$



а вектор теплового потока  $\mathbf{q}$  записывается как

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T - \tau \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla u_\varepsilon - \frac{p}{\rho^2} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - Q) \mathbf{u}. \quad (14)$$

В приведенных выше формулах для потока массы, тензора вязких напряжений и теплового потока малые добавки вычисляются с использованием векторов

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} (\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{F}), \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\tau}{\rho} (\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{F}). \quad (15)$$

Уравнения МВ являются упрощением полных уравнений Навье–Стокса, описывающих нестационарное течение вязкого сжимаемого газа. В приближении МВ рассматривается несжимаемая жидкость при постоянной температуре в поле силы тяжести. Приближение МВ используют в случае, когда жидкость представляет собой слой, глубина которого много меньше продольной составляющей, поэтому вертикальной составляющей скорости в слое можно пренебречь. При этом полагают продольные компоненты скорости постоянными вдоль вертикальной оси. Классические уравнения МВ также выводятся из уравнений Эйлера в баротропном приближении для вязкого сжимаемого газа. Поэтому КГД методы, развитые для решения задач в рамках уравнений Эйлера, можно использовать для расчета течений в приближении мелкой воды.

Система уравнений МВ в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  с плоским профилем дна без вязкости Навье–Стокса записывается следующим образом

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h u_\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial (h u_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h u_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{h u_\varphi^2}{r} = h f_r, \quad (17)$$

$$\frac{\partial (h u_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 h u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = h f_\varphi, \quad (18)$$

где  $h(r, \varphi, t)$  – высота жидкости,  $\mathbf{u} = (u_r(r, \varphi, t), u_\varphi(r, \varphi, t))$  – скорость жидкости,  $p = \frac{gh^2}{2}$  – давление жидкости,  $\mathbf{f} = (f_r, f_\varphi)$  – внешняя сила.

В результате регуляризации получается следующая КГД система уравнений МВ в полярной системе координат

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{mr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi})}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(hu_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rj_{mr}u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi}u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\
& = (h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) f_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r\hat{w}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi\hat{w}_r)}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} (gh\tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \operatorname{div}(h\mathbf{u}) - 2h \frac{u_\varphi}{r} \hat{w}_\varphi, \\
& \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2j_{mr}u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_{m\varphi}u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \\
& = (h - \tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})) f_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2hu_r\hat{w}_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi\hat{w}_\varphi)}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{1}{r} g \frac{\partial}{\partial \varphi} (h\tau \operatorname{div}(h\mathbf{u})),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial(hru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial \varphi}, \\
j_{mr} &= h(u_r - w_r), \quad j_{m\varphi} = h(u_\varphi - w_\varphi), \\
w_r &= \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_ru_\varphi)}{\partial \varphi} + gh \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{hu_\varphi^2}{r} - hf_r \right), \\
w_\varphi &= \frac{\tau}{h} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2hu_ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} gh \frac{\partial h}{\partial \varphi} - hf_\varphi \right), \\
\hat{w}_r &= \tau \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r \right), \\
\hat{w}_\varphi &= \tau \left( \frac{1}{r} u_r \frac{\partial(ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g \frac{\partial h}{\partial \varphi} - f_\varphi \right).
\end{aligned}$$

Построенная система КГД уравнений МВ в полярной системе координат может быть обобщена для случая течения политропного газа, рассматриваемого в баротропном приближении. Для этого следует сделать формальную замену переменных  $h$  и  $p = \frac{gh^2}{2}$  системы уравнений МВ на  $\rho$  и  $p = k\rho^\gamma$ .

КГД подход позволяет применять классический вариант метода конечного объема с аппроксимацией всех потоковых слагаемых с помощью центральных разностей по пространству в сочетании с явной аппроксимацией по времени. Все газодинамические величины относятся к расчетным узлам сетки, а потоки вычисляются на границах ячеек в полуцелых узлах. При этом  $\tau$ -слагаемые

обеспечивают условную устойчивость построенной разностной схемы.

**Вторая глава** содержит результаты прямого численного моделирования задачи гидродинамики о формировании уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале. Постановка задачи ориентирована на эксперимент. Сравнение полученного численного решения незатухающей уединенной волны с данными эксперимента показывает соответствие между процессом формирования такой волны в эксперименте и численном расчете. Построен аналитический вариант решения в виде уединенной волны, который хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

В качестве математической модели используется одномерная система уравнений МВ с учетом силы ветра и силы трения жидкости о стенки и дно канала с плоским профилем дна

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = hf - \mu u|u|, \quad (20)$$

где высота несжимаемой жидкости и ее скорость характеризуются неизвестными функциями  $h(x, t)$  и  $u(x, t)$ ,  $p = \frac{gh^2}{2}$  – давление жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести, параметр  $f$  задает ветровую силу, действующую на поверхность, а параметр  $\mu$  – трение жидкости о стенки и дно канала – силу сопротивления.

Для численного решения задачи (19) – (20) используется КГД система уравнений МВ

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(j_mu)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \left( h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) f - \mu u|u| + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (22)$$

где

$$j_m = h(u - w),$$

$$w = \frac{\tau}{h} \left( \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} - hf \right),$$

$$\Pi_{xx} = \tau u h \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - f \right) + \tau g h \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Для построения численного решения вводится равномерная сетка по ко-

ординате  $x$  с шагом  $h_x$ , координатами узлов  $x_i$ , а также сетка по времени с шагом  $\Delta t$ . Для решения системы уравнений (21)–(22) используется явная по времени схема с центральными разностями.

Параметр регуляризации  $\tau$  определяется как

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{|u| + \sqrt{gh}}. \quad (23)$$

Числовой коэффициент  $0 < \alpha < 1$  для  $\tau$  выбирается из условий точности и устойчивости.

Значения  $f$  и  $\mu$  рассматриваются как параметры задачи. Задача рассматривается в области  $0 \leq x \leq L$ ,  $L = 6$  м. Начальные условия для высоты жидкости выбираются в виде импульса шириной в шаг сетки  $h_x$ ,  $h(x, 0) = 0.2$ . В начальный момент времени жидкость неподвижна  $u(x, 0) = 0$ . На границе ставятся периодические условия.

Для численного исследования данной задачи была выполнена большая серия расчетов. Пределы варьирования величин параметров задачи  $f$ ,  $\mu$ , сеточных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и шага пространственной сетки  $h_x$  приведены в Таблице 1.

$f$	$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$h_x$
0 – 100	0.01 – 100	0.1 – 0.3	0.05 – 0.1	0.025, 0.01, 0.005

Таблица 1. Диапазоны варьирования параметров задачи  $f$ ,  $\mu$ , сеточных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и шага пространственной сетки  $h_x$

При поиске численного решения изначально рассматривалось несколько вариантов формул для силы трения о дно и стенки аэрогидроканала.

На Рис. 1 приведен вариант образования уединенной волны, соответствующий эксперименту в аэрогидроканале.

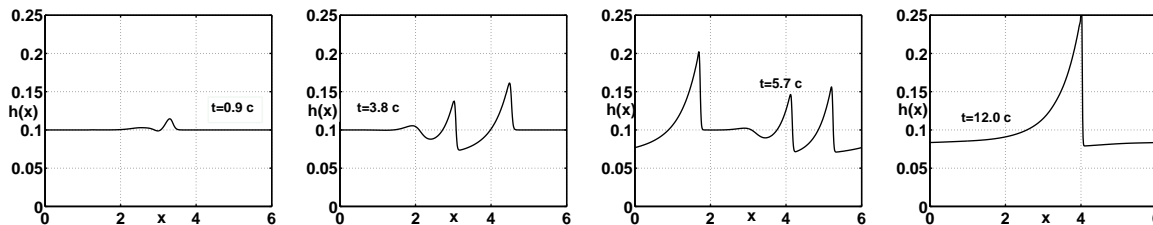


Рис. 1. Высота  $h(x)$  при  $t = 0.9, 3.8, 5.7, 12$  с.

На Рис. 2 представлена сходимость по сетке.

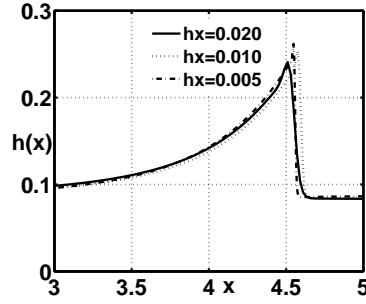


Рис. 2. Влияние сетки. Форма уединенной волны  $h(x)$  в установившемся режиме при  $f = 10.0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  для  $h_x = 0.025$ ,  $0.010$  и  $0.005$

**Третья глава** содержит результаты численного моделирования формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках в рамках баротропного приближения уравнений газовой динамики в полярной системе координат. Для численного моделирования была построена КГД система баротропных уравнений газовой динамики в полярной системе координат. В результате численного моделирования показана возможность чисто гидродинамической природы формирования и эволюции спирально-вихревых структур. При внесении малых возмущений в начальные условия в нестационарной задаче формируются рукава плотности с раздвоением и перераспределением углового момента.

Аксиально симметричные решения построены для стационарных уравнений газовой динамики с учетом силы гравитации в  $(r, \varphi, z)$ -геометрии

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\rho u_\varphi^2}{r} = -\frac{\rho r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (24)$$

записанных в предположении, что  $\rho = \rho(r, z)$ ,  $u_\varphi = u_\varphi(r)$  и  $u_r = u_z = 0$ . Построенные точные решения этих стационарных уравнений представлены на Рис. 3 и 4. Эти решения используются в качестве начальных условий задачи.

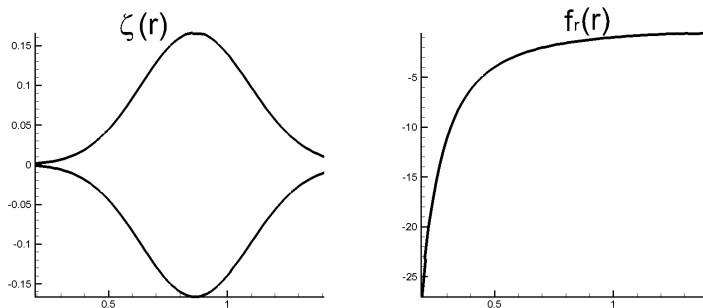


Рис. 3. Границы вещества  $\pm\zeta(r)$ , массовая сила  $f_r(r)$

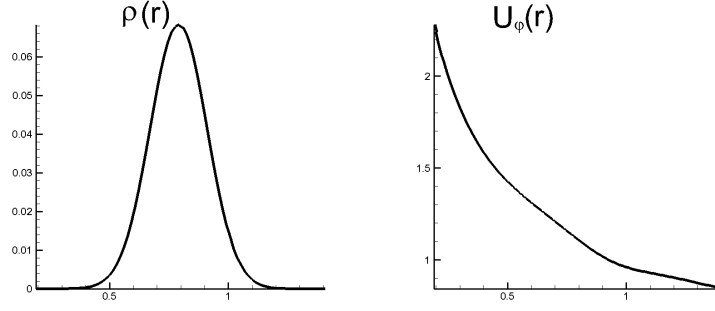


Рис. 4. Стационарные распределения плотности  $\rho(r)$  и скорости  $u_\varphi(r)$  при  $\gamma = 5/3$

Параметр регуляризации задается в виде

$$\tau = \alpha \frac{\sqrt{\Delta S}}{c_s + \sqrt{u_r^2 + u_\varphi^2}}, \quad (25)$$

где  $0 < \alpha < 0.5$  — числовой параметр, подбираемый из соображений устойчивости и точности расчета,  $c_s = \sqrt{\gamma p / \rho}$  — скорость звука, а  $\Delta S = r \Delta r \Delta \varphi$  оценивает площадь ячейки пространственной сетки.

Задача решается в безразмерных переменных. Расчетная область — это кольцо с границами по радиусу  $r_1 = 0.2$  и  $r_2 = 1.4$ .

Форма исходного газового облака задается с помощью функции

$$\zeta(r) = \pm a r e^{-b(r-r_0)^2}$$

с параметрами  $a = 0.2$ ,  $b = 9.0$ ,  $r_0 = 0.8$ .

Начальное распределение плотности берется согласно соответствующим формулам для  $\gamma > 1$  и  $\gamma = 1$ .

Начальное распределение скорости — это  $u_r = 0$  и

$$u_\varphi(r, \varphi) = u_\varphi(r) (1 + A e^{-b(r-r_0)^2} \sin(N_0 \varphi)), \quad (26)$$

являющееся возмущенной функцией  $u_\varphi$ . Возмущение сглажено по  $r$ . Параметр  $A > 0$  — амплитуда, а  $N_0$  — число периодов возмущения на  $[0, 2\pi]$ . Массовая сила  $f_r$  представлена на Рис. 3,  $f_\varphi = 0$ .

Ставятся «мягкие» граничные условия сноса для искомым функций  $\rho$ ,  $u_r$  и  $u_\varphi$ . Для их задания используются фиктивные узлы по радиусу. По углу ставятся условия  $2\pi$ -периодичности тех же функций.

Результаты численного моделирования представлены на Рис. 5.

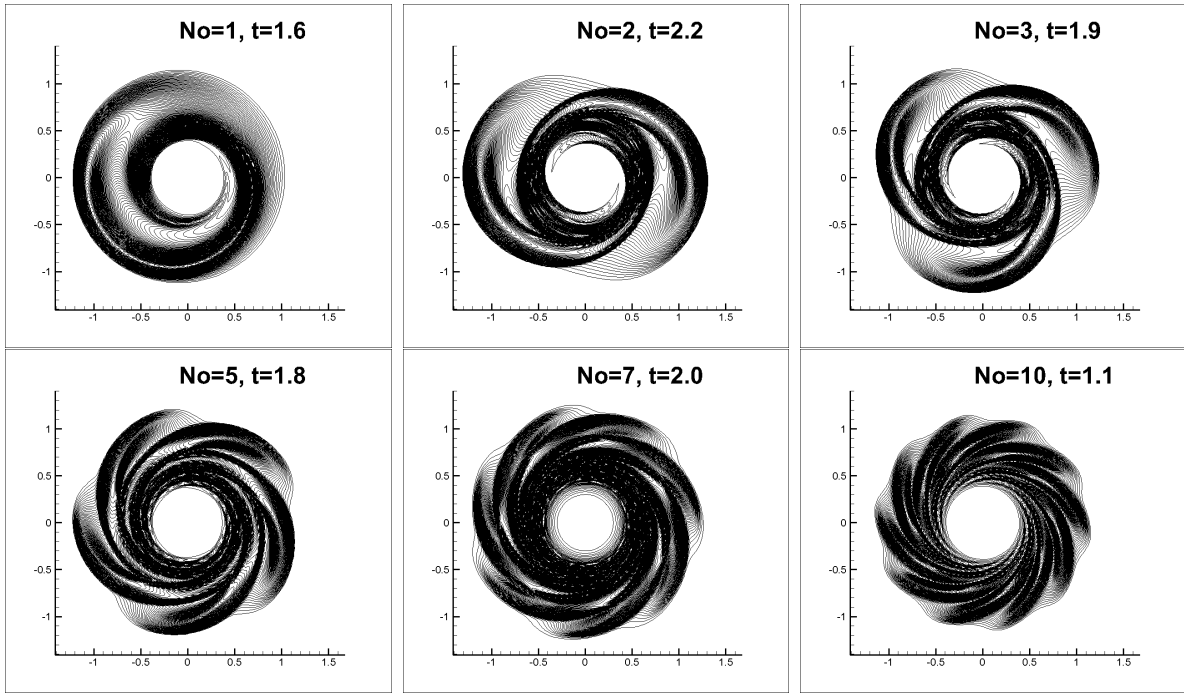


Рис. 5. Распределения  $\rho$  для различных  $N_0$  при указанных  $t$

**Четвертая глава** посвящена включению КГД алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM на примере одномерного решателя QGDFoam. OpenFOAM — открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред, в которой используется метод конечного объема. Пакет OpenFOAM предназначен для вычисления операций со скалярными, векторными и тензорными полями. Преимуществами OpenFOAM являются ориентированность на пользователя, разделение таких понятий, как геометрия, расчетная область, дискретизация основных уравнений и визуализация результатов. Исходные и дальнейшие 3D-версии решателя QGDFoam находятся в открытом доступе на <http://github.com/unicfdlab/QGDSolver/>.

В основе OpenFOAM лежит метод конечного объема. Интегрирование по объему сводится к вычислению потоков через грани

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}.$$

Значение каждой величины в центре ячейки есть среднее этой величины по ячейке

$$\langle a \rangle = \frac{1}{V} \int_V a dV,$$

где  $V$  — объем ячейки. Индекс  $f$  указывает на значение величины на грани

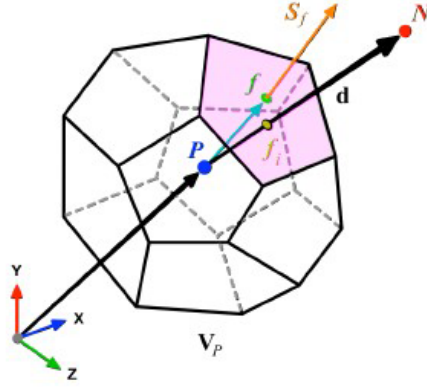


Рис. 6. Контрольный объем в OpenFOAM

конечного объема,  $\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}_f$  – нормаль к грани, умноженная на ее площадь (Рис. 6). В OpenFOAM для одномерного решателя QGDFoam использовался стандартный трехточечный шаблон по каждому направлению.

Для включения в программный комплекс OpenFOAM исходная КГД система уравнений была переписана в следующем потоковом виде

$$\rho^t = \rho^0 - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^0(\rho^0), \quad (27)$$

$$F_f^0(\rho^0) = \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f ((\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_f + (\nabla p)_f) \cdot \mathbf{S}_f,$$

$$(\rho \mathbf{u})^t = (\rho \mathbf{u})^0 - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^0((\rho \mathbf{u})^0), \quad (28)$$

$$F_f^0((\rho \mathbf{u})^0) = F_f^0((\rho)^0) \mathbf{u}_f + p_f \mathbf{S}_f - \hat{\Pi}_f^{QGD} \cdot \mathbf{S}_f,$$

$$\hat{\Pi}_f^{QGD} = \tau_f \mathbf{u}_f \otimes (\rho_f \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \otimes \mathbf{u})_f + (\nabla p)_f) +$$

$$+ \tau_f \hat{I} (\mathbf{u}_f \cdot (\nabla p)_f + \gamma_f p_f (\nabla \cdot \mathbf{u})_f) + \mu_f ((\nabla \otimes \mathbf{u})_f + (\nabla \otimes \mathbf{u})_f^T) - \frac{2}{3} \hat{I} (\nabla \cdot \mathbf{u})_f,$$

$$(\rho E)^t = (\rho E)^0 - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^0((\rho E)^0), \quad (29)$$

$$F_f^0((\rho E)^0) = F_f^0(\rho^0) H_f - \hat{\Pi}_f^{QGD} \cdot \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f \mathbf{u}_f \rho_f (\mathbf{u}_f \cdot (\nabla u_\varepsilon)_f) +$$

$$+ p_f \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \frac{1}{\rho})_f \cdot \mathbf{S}_f.$$

Рассматриваются задачи Римана о распаде разрывов. Диссипативные ко-



эффиценты выписываются в виде

$$\tau = \alpha \frac{h_x}{c_s}, \mu = p \tau Sc, \kappa = \frac{p \tau Sc}{Pr} \quad (30)$$

и рассматриваются как коэффициенты искусственной диссипации, где  $c_s$  – скорость звука,  $Sc$  – число Шмидта,  $Pr$  – число Прандтля.

Начальные данные к задачам о распаде разрывов приведены в Таблице 2. Значения газодинамических величин слева от разрыва обозначены индексом L, справа – индексом R. Моменты времени, для которых построены графики, указаны в Таблице 2 как  $t_{fin}$ . Задачи решаются на интервале  $(-0.5, 0.5)$ . Разрыв расположен в точке  $x = 0$ . Для сравнения на всех рисунках, соответствующих задачам из Таблицы 2, приведены автомодельные решения.

Граничные условия соответствуют начальным условиям на границе области. Во всех тестах  $\gamma = 1.4$ , кроме теста 3, где  $\gamma = 5/3$ .

Было проведено сравнение результатов расчетов характерных тестов с помощью решателей QGDFoam и rhoCentralFoam. Результаты расчетов приведены на Рис. 7 – 10. Все тесты можно посчитать с параметром  $\alpha$ , равным 0.4 и численными коэффициентами  $Sc = Pr = 1$ . Параметры, характеризующие улучшение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam, зафиксированы в описании конкретных тестов. Решатели QGDFoam и rhoCentralFoam используют постоянное число Куранта  $C_0$  и переменный шаг по времени.

В OpenFOAM задачи решаются в размерном виде, которому соответствуют следующие величины:  $L = 1$  м,  $c_V = 1.0 J/(Kg K)$ ,  $R/\mu = 0.4 J/(Kg K)$ , где  $\mu = 20785$  – молекулярная масса. Выражение  $c_p = \frac{\gamma R/\mu}{\gamma - 1} J/(Kg K)$  используется для получения значения  $\gamma$ . Для  $\gamma = 1.4$   $c_p = 1.4 J/(Kg K)$ , для  $\gamma = 5/3$   $c_p = 1.0 J/(Kg K)$ . Далее размерность величин не будет указываться, но все величины считаются размерными – шаги сетки вычисляются в метрах, время – в секундах.

Шаг по времени вычисляется в соответствии с условием Куранта

$$\Delta t \leq C_0 \frac{h_x}{|\mathbf{u}| + c_s}, \quad (31)$$

где скорость звука вычисляется в OpenFOAM через  $\psi = (RT)^{-1}$  как  $c_s = \sqrt{\gamma/\psi}$ .

Для задач о распаде разрывов в Таблице 3 приведены значения погрешностей величин, посчитанных в норме  $L_1$  как

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_N |a_{\text{exact}} - a_{\text{numerical}}|, \quad (32)$$

где  $a_{\text{exact}}$  – значение газодинамической величины, соответствующей автомобильному решению,  $a_{\text{numerical}}$  – значение газодинамической величины, рассчитанной решателями rhoCentralFoam или QGDFoam. В тестах 1, 3, 3а, 5, 6, 7 в качестве величины  $a$  берется плотность  $\rho$ , в тестах 2 и 4 – внутренняя энергия  $u_\varepsilon$ .

Тест	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$	$t_{fin}$
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.15
3 Нох	1	1	$10^{-6}$	1	-1	$10^{-6}$	1
3а	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.012
4	5.99924	19.5975	460.894	5.99924	-6.19633	46.095	0.035
5	1.4	0	1	1	0	1	2
6	1.4	0.1	1	1	0.1	1	2
7	0.1261192	8.9047029	782.92899	6.591493	2.2654207	3.1544874	0.0039

Таблица 2. Начальные условия для задач Римана

Решатель, № теста	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 3а	Тест 4	Тест 5	Тест 6	Тест 7
rhoCentralFoam	0.0024	0.2726	0.0287	0.6935	1.3929	0.0103	0.0103	0.0532
QGDFoam	0.0065	0.2909	0.0368	0.6849	3.6953	0.0021	0.0116	0.0775

Таблица 3. Погрешности в норме  $L_1$

В качестве последнего теста рассматривается "blast" задача. Для этой задачи нет автомобильного решения. Задача также решается на интервале  $(-0.5, 0.5)$ . В начальный момент задаются разрывы в точках  $x_1 = -0.4$  и  $x_2 = 0.4$ . Во всей расчетной области задаются плотность  $\rho = 1.0$  и скорость  $u = 0.0$ . Начальные значения давления в трех соответствующих областях левой ( $p_l$ , средней  $p_m$  и правой  $p_r$ ) равны  $(p_l, p_m, p_r) = (1000, 0.01, 100)$ . В качестве граничных условий ставятся условия отражения. Расчет ведется до времени  $t_{fin} = 0.038$ . В этой задаче  $\gamma = 1.4$ .

На Рис. 11 приведен расчет плотности для пространственной сетки с шагом  $h_x = 0.0003125$ . Число Куранта в rhoCentralFoam  $C_0 = 0.2$ , у QGDFoam – 0.4. Для QGDFoam  $\alpha = 0.3$  и  $Sc = 0.1$ ,  $Pr = 1.0$ , для rhoCentralFoam использовалась интерполяция Minmod.

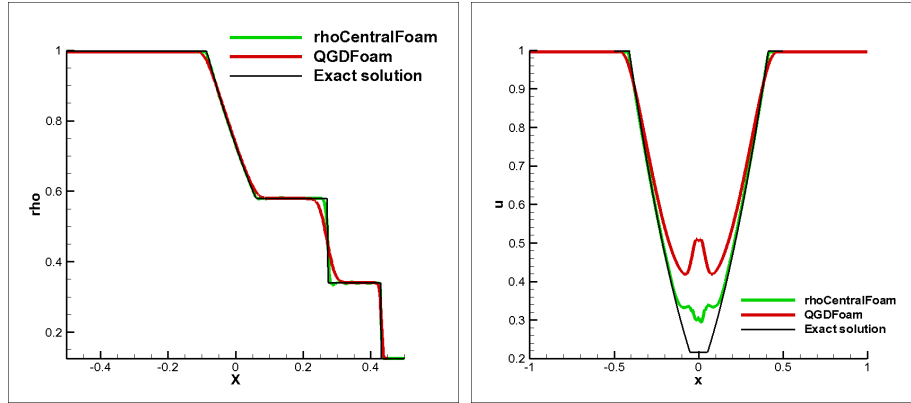


Рис. 7. Тесты 1, 2. Распределение плотности  $\rho$  и внутренней энергии  $u_\varepsilon$

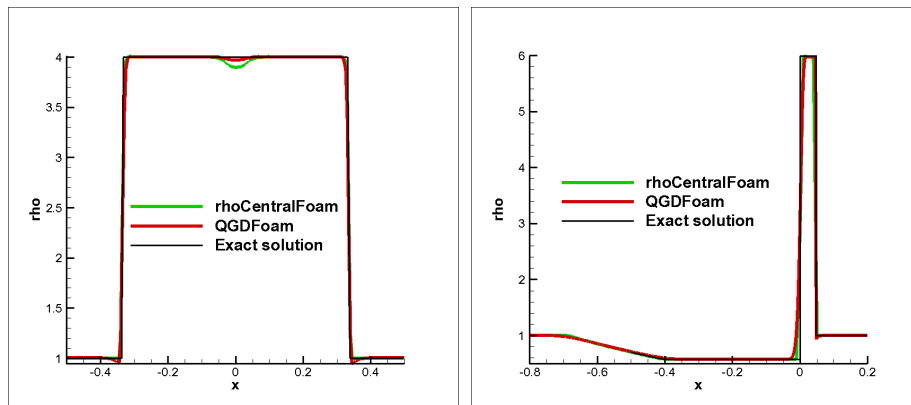


Рис. 8. Тесты 3, 3а. Распределения плотности  $\rho$

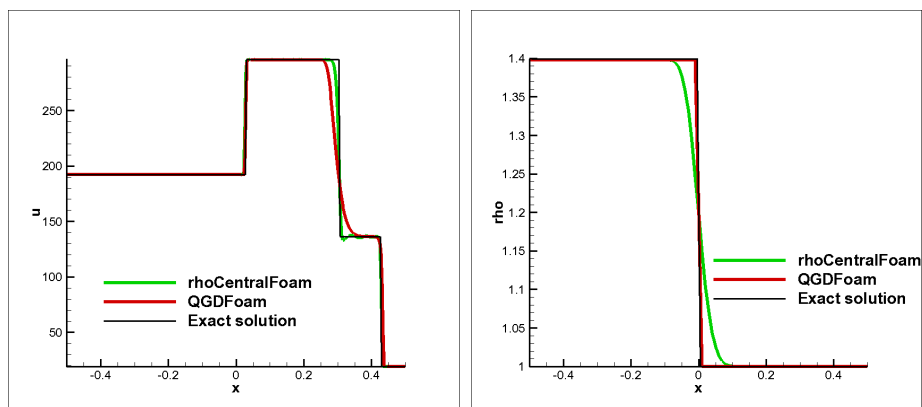
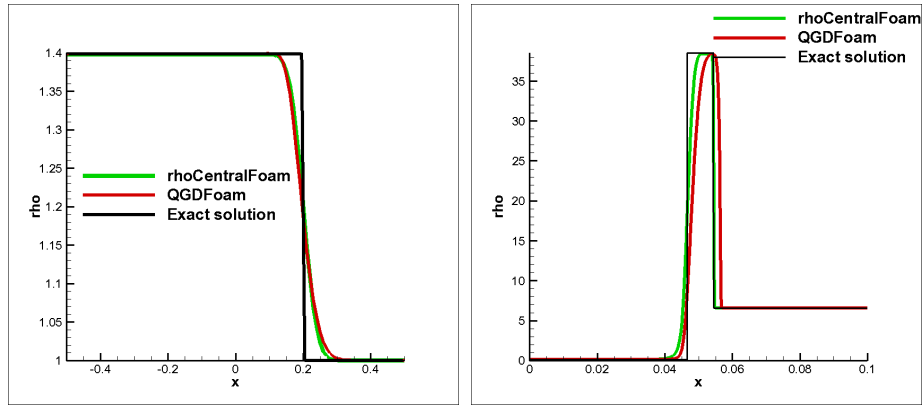
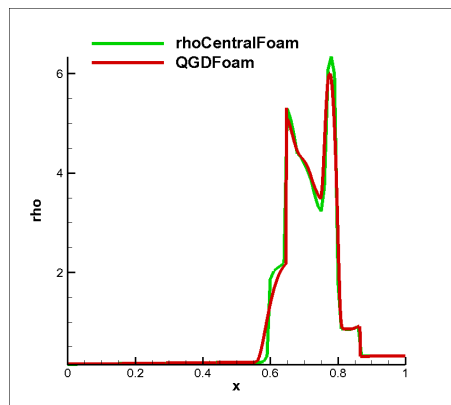


Рис. 9. Тесты 4, 5. Распределение внутренней энергии  $u_\varepsilon$  и плотности  $\rho$

Рис. 10. Тесты 6, 7. Распределения плотности  $\rho$ Рис. 11. Тест 8. Распределение плотности  $\rho$

**Приложение** содержит расширение КГД алгоритма для уравнений МВ с магнитным полем. Приведено построение КГД алгоритма в 1D–случае. КГД алгоритм протестирован на одномерных задачах о распаде сильного и слабого разрывов.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы и дальнейшие перспективы.

### **Основные результаты диссертационной работы:**

**1.** Построена математическая модель, описывающая нелинейный процесс формирования незатухающей уединенной волны в рамках приближения мелкой воды с использованием КГД алгоритма. Впервые на основе КГД алгоритма в численном эксперименте получена уединенная бегущая волна. Анализ задачи показал соответствие между результатами численного моделирования, данными натуральных экспериментов и результатами аналитических исследований задачи об уединенной волне.

**2.** Впервые построена математическая модель спирально–вихревых структур во вращающемся газовом аккреционном диске в рамках баротропных уравнений Эйлера с применением КГД подхода и использованием уточненных начальных условий. Впервые проведено численное моделирование отстающих рукавов повышенной плотности в рамках программы, использующей КГД алгоритм в полярной системе координат. В результате выявлен процесс раздвоения рукавов плотности и перенос углового момента.

**3.** В рамках открытого программного комплекса OpenFOAM создано новое вычислительное ядро на основе КГД алгоритма (QGDFoam), доступное внешним пользователям. Для этого КГД алгоритм переписан в терминах, принятых в указанном программном комплексе и адаптирован к заложенным в нем требованиям. В рамках программного комплекса проведено сравнение решателей QGDFoam и rhoCentralFoam на примере системы одномерных тестов и показано, что QGDFoam позволяет проводить численное моделирование широкого круга прикладных задач.

### **Публикации:**

**1.** Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, Н.К. Шелковников Формирование уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале // Математическое моделирование, 2012 г., т. 24, № 4, с. 107–116.

**2.** Е.В. Юшков, М.А. Истомина Катящиеся волны в кольцевом канале // ЖВМиМФ, 2014 г., т. 54, № 1, с. 123–134.

**3.** Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, М.А. Истомина Гидродинамические аспекты формирования спирально–вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрономический журнал, 2018 г., т. 95, № 1, с. 1–11.

**4.** М.А. Истомина, Т.Г. Елизарова Квазигазодинамический алгоритм для полярной системы координат и пример численного моделирования неустойчивостей в аккреционном диске // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша,

2016, № 92, 25 с.

5. Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, М.А. Истомина О двумерном численном КГД моделировании спирально–вихревых структур в аккреционных газовых дисках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 1, 30 с.

6. Matvey V. Kraposhin, Daniil A. Ryazanov, Elena V. Smirnova, Tatiana G. Elizarova, Maria A. Istomina Development of OpenFOAM solver for compressible viscous flows simulation using quasi–gas dynamic equations // IEEE eXplore, ISBN–13:978–1–5386–1132–6, 2017, pp. 117–124.

7. М.А. Истомина О реализации одномерного квазигазодинамического алгоритма в открытом программном комплексе OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, № 1, 19 с.

8. Ссылка на разработанный решатель QGDFoam в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM:

<https://github.com/unicfdlab/QGDSolver/blob/dev-4.1/QGDFoam>.