

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

На правах рукописи

Орлов Степан Геннадьевич

**Математические модели, алгоритмы
и программный комплекс для расчёта
динамики систем твёрдых деформируемых тел
с многочисленными контактными
взаимодействиями**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. т. н., проф.

Шабров Николай Николаевич

Санкт-Петербург – 2018

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Математические модели бесступенчатой трансмиссии	21
1.1. Конструкция бесступенчатой трансмиссии	21
1.2. Подход к описанию динамики	24
1.3. Оценочные формулы	27
1.3.1. Сжимающие силы, обеспечивающие передачу крутящего момента	27
1.3.2. Критическая сжимающая сила для пина	29
1.3.3. Влияние сжимающей силы на изгибную жёсткость пина .	30
1.3.4. Частоты, обусловленные дискретной структурой цепи . .	37
1.4. Модели малой размерности	38
1.4.1. Равновесие: модель с одной степенью свободы	39
1.4.2. Динамика: 4 степени свободы	41
1.4.3. Динамика: $6 + 2n$ степеней свободы	46
1.4.4. Модель с $6 + 2n + 8$ степенями свободы	49
1.5. Модели, учитывающие дискретную структуру цепи	52
1.5.1. Модели цепи	53
1.5.1.1. Две простейшие модели цепи с плоскостью сим- метрии	54
1.5.1.2. Учёт изгиба пинов в рамках модели с плоско- стью симметрии	65
1.5.1.3. Модели без плоскости симметрии	83
1.5.2. Модели валов, шайб и упругих опор	128
1.5.2.1. Жёсткие валы с шайбами	128
1.5.2.2. Модель упругого вала	132
1.5.2.3. Модель шайбы	142

1.5.2.4.	Модель опоры вала	148
1.5.2.5.	Модель опоры шайбы	151
1.5.3.	Модели контактного взаимодействия пина с шайбой . . .	157
1.5.3.1.	Описание сил трения при контактном взаимодействии	157
1.5.3.2.	Ударное взаимодействие пинов с шайбами . . .	164
1.5.3.3.	Контактное взаимодействие по Герцу	168
1.5.3.4.	Уточнённая кинематика контакта	179
1.6.	Системы стабилизации угловых скоростей	191
1.6.1.	Постановка задачи управления	191
1.6.2.	Сглаженные угловые скорости	193
1.6.3.	Система стабилизации передаточного числа	194
1.6.4.	Система стабилизации угловой скорости ведомого вала .	197
1.7.	Примеры расчётов	200
1.8.	Сопоставление численных и экспериментальных данных	227
1.8.1.	КПД трансмиссии	228
1.8.2.	Акустика трансмиссии	231
1.9.	Выводы к первой главе	235

Глава 2.	Применение численных методов к решению задачи динамики	237
2.1.	Введение	237
2.1.1.	Система ОДУ динамики	237
2.1.2.	Описание дискретного состояния	238
2.2.	Варианты модели и параметры режима	240
2.3.	Собственные числа матрицы Якоби системы ОДУ	240
2.4.	Классические явные методы Рунге – Кутты	245
2.5.	Линейно неявные методы типа Розенброка	255
2.6.	Метод трапеций	263

2.6.1.	Решение систем алгебраических уравнений методами ньютоновского типа	264
2.6.2.	Численные эксперименты с методом трапеций	268
2.7.	Стабилизированный явный метод	272
2.8.	Выводы ко второй главе	281

Глава 3.	Программный комплекс для расчёта динамики гетерогенных систем	283
3.1.	Состав комплекса и обзор его возможностей	284
3.2.	Технологические аспекты	291
3.3.	Компоненты общей инфраструктуры	292
3.3.1.	Модель составного объекта	292
3.3.1.1.	Составные объекты, компоненты и интерфейсы	292
3.3.1.2.	Время жизни объекта, умные указатели и интерфейсные преобразования	295
3.3.1.3.	Фабрика экземпляров и конфигурация комплекса	296
3.3.1.4.	Глобально доступный пул объектов	299
3.3.2.	Синхронные сообщения	300
3.3.3.	Данные документа как дерево свойств	301
3.3.4.	Постоянное хранение	302
3.3.5.	Другие компоненты инфраструктуры	303
3.3.6.	Сравнение с другими системами	304
3.4.	Некоторые модули оснастки интерфейса командной строки	305
3.4.1.	Конфигурационная оснастка	306
3.4.2.	Интроспективный генератор пользовательской документации	307
3.5.	Проблемно-ориентированные компоненты	313
3.6.	Выводы к третьей главе	317

Глава 4. Игровая площадка для разработчика численных методов решения ОДУ	318
4.1. Введение	318
4.2. Общая инфраструктура	321
4.3. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений	327
4.4. Решатели ОДУ	331
4.5. Выводы к четвёртой главе	336
Заключение	338
Список литературы	341

Введение

Актуальность темы исследования. Основным объектом исследования в данной работе является бесступенчатая трансмиссия, состоящая из большого числа твёрдых деформируемых тел, находящихся в условиях многочисленных контактных взаимодействий друг с другом.

Бесступенчатые трансмиссии (вариаторы) широко применяются в автомобильной промышленности благодаря ряду их преимуществ перед традиционными трансмиссиями с фиксированным набором передаточных чисел. В конструкциях автомобильных вариаторов используется цепь или металлический ремень, опирающийся на конические или тороидальные контактные поверхности шкивов ведущего и ведомого валов. Передача крутящего момента в таких вариаторах происходит за счёт сил трения между телами, составляющими цепь или металлический ремень, и шайбами шкивов.

Автопромышленные компании постоянно совершенствуют конструкции вариаторов [1—5], увеличивая передаваемый крутящий момент и КПД, повышая надёжность, поэтому представляет большой интерес предсказательное моделирование динамики вариатора. Оно позволяет существенно сократить время разработки серийного изделия и оптимизировать его характеристики, не прибегая к созданию большого числа экспериментальных образцов. При моделировании основной интерес представляют следующие аспекты:

- динамика изменения передаточного числа при воздействии внешних (в том числе, управляющих) факторов (глобальная динамика);
- напряжённо-деформированное состояние отдельных элементов трансмиссии, определяющее их ресурс;
- зависимость КПД трансмиссии от режима её работы и параметров конструкции;

- акустический шум, производимый трансмиссией, в диапазоне до 5 КГц.

Лишь в первом из этих случаев иногда удаётся обойтись относительно простыми моделями. Как правило, получение результатов моделирования, согласующихся с реальностью, требует разработки сложных детализированных моделей.

Отметим, что детальное моделирование динамики бесступенчатой трансмиссии с использованием коммерческих систем инженерного анализа общего назначения (ANSYS, ABAQUS и др.) не представляется возможным. Попытки их использования приводили к громоздким моделям, вообще не позволяющим получить адекватный результат.

Моделированию динамики бесступенчатой трансмиссии посвящён ряд работ, в частности, выполненных под руководством проф. Ф. Пфайффера, начиная с [6]. Часть из них [7–9] предлагает модели, в которых цепь или металлический ремень считаются состоящими из отдельных элементов, соответствующих элементам реальной конструкции. В работах [10–13] предложены некоторые упрощённые модели, в том числе, с использованием метода Ритца при описании деформируемых тел. В одних работах рассматриваются «двумерные» модели, в которых цепь или металлический ремень совершает плоское движение [7; 9; 14], в других [15–17] — пространственное (хотя такое деление несколько условно). В одних работах элементы трансмиссии считаются абсолютно твёрдыми телами [7; 17], в других — упругими [10; 13]. Моделированию конструкции с металлическим ремнём посвящено заметно больше работ, чем с цепью, и в них часто в той или иной форме производится гомогенизация ремня (отметим в этой связи ещё работу [18]). Настоящая же работа посвящена в основном конструкции с цепью, звенья которой состоят из множества пластинок, охватывающих двойные соединительные оси.

Работа [19] близка к данной работе тем, что в обеих рассмотрено множество одних и тех же факторов: деформации элементов цепи, использование теории Герца при описании контактных взаимодействий, ряд других. Однако

в [19] они рассмотрены по отдельности, в том смысле, что динамическая модель всей системы учитывает лишь часть из них. Например, влияние изгиба соединительных осей цепи на распределение сил натяжения в пластинках цепи рассмотрено лишь в статике.

В нашей стране моделированию бесступенчатой трансмиссии была посвящена работа [20]. Она также перекликается с настоящей работой по охвату рассмотренных факторов, однако предложенная там динамическая модель вариатора (плоское движение цепи, три степени свободы на звено) значительно проще моделей, предложенных в данной работе.

Несмотря на значительное число работ по моделированию динамики вариатора, представляется, что предлагаемые там модели не учитывают всех факторов, существенных для предсказательного моделирования напряжённо-деформированного состояния отдельных элементов конструкции. Сосредоточившись на уточнённом моделировании выбранных факторов, авторы не рассматривают другие — например, учтя податливость шайб, считают соединительные оси звеньев цепи абсолютно твёрдыми, что представляется недопустимым, если представляет интерес напряжённо-деформированное состояние элементов цепи. Автору не удалось найти публикации, описывающие динамические пространственные модели вариатора с цепью, в которых были бы одновременно учтены деформации элементов цепи, упругость при контактных взаимодействиях, уточнённая кинематика контакта (существенно влияющая на распределение напряжений в элементах цепи), податливость валов, упругие опоры валов и др. Это обуславливает актуальность разработки значительно более детализированных моделей, чем созданные до сих пор. В диссертации такие модели предложены.

Расчёты по детализированным моделям вариатора классическими методами численного интегрирования требуют значительных вычислительных затрат в связи с возрастающей жёсткостью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Авторы некоторых работ [13] мотивируют отказ от более детальных моделей именно этим обстоятельством, хотя иногда [17], напротив,

встречаются попытки сократить время расчётов за счёт использования параллельных технологий, а не упрощения модели. Ясно, что для ускорения расчётов динамики по детализированным математическим моделям необходимо сочетать правильный выбор метода численного интегрирования и использование параллельных технологий.

Практическое использование предлагаемых в данной работе моделей невозможно без специализированного проблемно-ориентированного программного обеспечения, что обуславливает актуальность его разработки.

Цели и задачи диссертационной работы. Основная цель работы — создание специализированного прикладного программного комплекса для предсказательного моделирования динамики бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью. При этом, помимо глобальной динамики, интерес представляют напряжённо-деформированное состояние отдельных элементов трансмиссии, в частности, пластинок и соединительных осей цепи; зависимость КПД трансмиссии от режима её работы и параметров конструкции; акустический шум, производимый трансмиссией, в диапазоне до 5 КГц. Конечными пользователями программного комплекса являются инженеры, занимающиеся конструированием бесступенчатой трансмиссии и оптимизацией её параметров. Возможность практического использования программного комплекса подразумевает не слишком большое время типового расчёта на современном персональном компьютере.

Для достижения этой цели были решены следующие задачи.

1. Сделаны оценки, оправдывающие решения, принятые при дальнейшей разработке физических и математических моделей. В частности, к ним относятся оценка влияния сжимающей силы на изгибающую жёсткость стержня; оценка перекоса цепи в вариаторе с коническими шайбами; оценка обусловленного этим перекосом изгибающего момента в пластинке цепи; оценка осевых сил трения между половинками соединительных осей цепи;

- оценка частот, обусловленных дискретной структурой движущейся цепи.
2. Разработана модель вариатора с одной степенью свободы, позволяющая судить об устойчивости положения равновесия в зависимости от геометрических параметров шкивов.
 3. Разработаны малоразмерные модели вариатора для расчёта глобальной динамики, в которых цепь считается однородной лентой. Благодаря малому числу степеней свободы (4 в первой, $6 + 2n$, $1 \leq n < 10$, во второй) эти модели не требуют больших вычислительных затрат для расчёта динамики и могут быть использованы для расчётов в реальном времени. Вторая модель позволяет найти распределение сил трения по дугам контакта благодаря учёту сжимаемости цепи в поперечном направлении.
 4. Разработаны динамические модели цепи, учитывающие её дискретную структуру. Сложность и размерность моделей постепенно увеличивается в связи с учётом новых факторов в каждой следующей модели. Простейшая модель предполагает наличие плоскости симметрии и имеет две степени свободы на звено; более сложные модели учитывают осевую инерцию соединительных осей; изгиб соединительных осей; фактическое отсутствие плоскости симметрии; изгиб и кручение пластинок цепи; ограниченность изгибающего момента в пластинках; наличие двух обкатывающихся друг по другу половинок в каждой соединительной оси.
 5. Разработаны модели валов, шайб шкивов, упругих опор валов, имеющие разную сложность. В простейшей модели валы и опоры считаются жёсткими; в наиболее сложной модели рассматривается растяжение, изгиб и кручение вала на нелинейных изотропных опорах, упругое соединение вала с шайбой, которая считается абсолютно твёрдым телом.
 6. Разработаны модели контактного взаимодействия соединительных осей цепи с шайбами шкивов при наличии трения, близкого к кулонову. Рас-

смотрены два направления: ударное взаимодействие и упругое взаимодействие в соответствии с контактной теорией Герца. В последнем случае рассмотрена как простейшая модель с фиксированным положением точки контакта на соединительной оси, так и более сложная модель, позволяющая определить положение точки контакта с учётом формы двояковыпуклых контактных поверхностей и деформаций элементов конструкции. Обоснована важность моделей с уточнённой кинематикой контакта.

7. Разработаны системы стабилизации угловых скоростей, используемые для достижения расчётных параметров режима работы трансмиссии в численных экспериментах.
8. Создана архитектура программных компонентов, облегчающих конструирование методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их поведения с целью оценки быстродействия и дальнейшей оптимизации. Она представляет собой фреймворк с открытым исходным кодом, в котором, кроме архитектуры интерфейсов, реализован ряд методов численного интегрирования задачи Коши и ряд методов для решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
9. С использованием созданного фреймворка исследована возможность применения различных методов численного интегрирования для решения задач динамики вариатора. Определены классы методов, использование которых представляется перспективным.
10. Создана инфраструктура программных компонентов, предназначенная для создания масштабируемых проблемно-ориентированных программных комплексов. Она состоит из множества модулей и облегчает решение как задач общего характера (таких, как сериализация дерева свойств или подготовка документации конечного пользователя, или создание сценариев),

так и более специфичных: двумерная и трёхмерная визуализация сцен, расчёт динамики, расчёт частот и форм колебаний, общие алгоритмы обработки численного решения, выполнение многовариантных расчётов, подготовка отчётов.

11. На базе созданной инфраструктуры компонентов создан программный комплекс, являющийся полноценным программным продуктом, в котором реализованы созданные модели элементов трансмиссии, методы численного интегрирования, а также все средства, необходимые для комфортной работы инженера по численному моделированию вариатора — подготовки исходных данных, в том числе для многовариантных расчётов, запуска расчётов, анализа численного решения в отдельно взятом расчёте, подготовки сводных отчётов по результатам многовариантных расчётов.

Научная новизна.

1. Предложена модель вариатора с одной степенью свободы, позволяющая судить об устойчивости положения равновесия. Несмотря на свою простоту, модель является новой.
2. Предложены детализированные динамические модели бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью. Наиболее сложные из них описывают пространственное движение всех элементов конструкции, причём все тела, за исключением шайб шкивов, считаются упругими.
3. Предложена методика описания локального контактного взаимодействия на основе теории Герца. Она позволяет уточнить положение точки контакта тел с двояковыпуклыми контактными поверхностями, что может оказаться важным в приложениях. При некоторых дополнительных предположениях это не требует решения нелинейных алгебраических уравнений.

4. Разработан фреймворк с открытым исходным кодом, позволяющий относительно легко программировать новые схемы численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и исследовать их поведение в конкретных задачах.
5. Разработана модульная инфраструктура компонентов, позволяющая небольшим командам разработчиков быстро создавать проблемно-ориентированные программные комплексы, ориентированные в первую очередь (но не обязательно) на задачи динамики.

Теоретическая значимость. В работе демонстрируется подход к моделированию механических систем, основанный на последовательном применении аппарата аналитической механики, что, безусловно, не является новой идеей. Для использования этого аппарата необходимо в первую очередь аккуратное описание кинематики несвободных систем. Описание кинематики твёрдых деформируемых тел в значительной степени облегчается и формализуется при использовании прямого тензорного исчисления, в частности — тензора поворота. Среди работ по математическому моделированию бесступенчатой трансмиссии автору не удалось найти ни одной, в которой бы последовательно применялись аналитическая механика и тензорное исчисление. Это разочаровывает и подталкивает к мысли позиционировать данную работу как теоретически значимую в области методологии построения математических моделей механических систем. Не претендуя на новизну самой этой методологии, лишь подчеркнём, что данная работа её иллюстрирует.

Наиболее важный теоретический результат работы — математические модели бесступенчатой трансмиссии. Теоретическая значимость заключается как в возможности их непосредственного использования для предсказательного моделирования, так и в ряде нетривиальных идей, использованных при их создании и применимых в других случаях.

Также теоретически значимым может быть описание локального контакт-

ного взаимодействия двояковыпуклых поверхностей, позволяющее рассматривать упругое герцевское взаимодействие, считая контактные поверхности недеформируемыми.

Практическая значимость работы состоит в первую очередь в том, что созданные модели и комплекс программ позволяют осуществлять расчёт динамики бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью, — для этого они фактически используются на предприятии, занимающемся разработкой и производством таких трансмиссий.

Другие практически значимые результаты связаны с разработанным программным обеспечением. Программный комплекс для расчёта динамики вариатора представляет собой не монолит, но модульную архитектуру компонентов, значительная часть которой предоставляет развитую инфраструктуру, на которой могут базироваться другие проблемно-ориентированные комплексы.

Разработанный фреймворк для программирования и исследования методов численного интегрирования может быть использован непосредственно по назначению любой заинтересованной стороной; его исходный код опубликован в открытом доступе.

Методология и методы исследования. Математические модели разработаны с использованием аппарата аналитической механики, в частности — уравнений Лагранжа II рода, так как рассматриваемые системы голономны. Для описания кинематики несвободной системы, состоящей из твёрдых деформируемых тел, зачастую используется язык прямого тензорного исчисления.

При описании упругого контактного взаимодействия использована контактная теория Герца.

Численные эксперименты проведены с использованием известных методов численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом потребовалась их адаптация для систем с дискретным состоянием, изменяющимся при наступлении событий. Системы нелинейных алгебраических уравнений, возникающих на шаге неявных методов численного

интегрирования, решались различными модификациями методов ньютоновского типа. Системы линейных алгебраических уравнений решались прямым методом (LU-разложение для несимметричных матриц и разложение Холецкого для симметричных), так как размеры матриц относительно невелики (тысячи строк и столбцов), и они разрежены.

Достоверность полученных результатов определяется

- наличием оценок, обосновывающих принятие тех или иных решений при моделировании;
- корректным формальным выводом кинематических соотношений;
- корректным использованием аппарата лагранжевой механики;
- контролем ошибки численного решения;
- сопоставлением численных данных с экспериментальными;
- многолетним опытом использования программного комплекса на предприятии, занимающемся разработкой и производством бесступенчатых трансмиссий.

Положения, выносимые на защиту:

1. Создано множество физических и математических моделей вариатора различной сложности и степени детализации, позволяющих судить об устойчивости положения равновесия, предсказывать глобальную динамику, детали напряжённо-деформированного состояния элементов цепи, КПД, акустический шум.
2. Предложен практический способ описания кинематики локального контактного взаимодействия двояковыпуклых поверхностей.
3. По результатам исследования выбраны методы численного интегрирования задачи Коши для уравнений динамики бесступенчатой трансмиссии,

дающие непосредственный выигрыш в быстродействии или обладающие потенциальной возможностью достичь его, в частности, за счёт параллелизации алгоритмов.

4. Создана инфраструктура программных компонентов, предназначенная для создания масштабируемых проблемно-ориентированных программных комплексов. На её основе создан программный комплекс для расчёта динамики бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью.
5. Разработан фреймворк для конструирования методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их поведения.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях:

- 6th Nonlinear dynamics conference (EUROMECH), 30 июня – 4 июля 2008, Санкт-Петербург, Россия
- 13-я Международная научно-техническая конференция «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования», 5–9 сентября 2009, Харьков, Украина
- Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ), 2007, 2008, 2009, 2010
- Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность. 21–26 сентября 2009, Новороссийск, Россия
- International conference on automation, control, and information technology (АСИТ-ICT), 15–18 июня, 2010, Новосибирск, Россия
- 3rd International conference on vibro-impact-systems and systems with non-smooth interactions (ICOVIS), July 22–26, 2013, Leinsweiler, Germany

- 29th Congress of the international council of the aeronautical sciences (ICAS) 7–12 сентября 2014, Санкт-Петербург, Россия
- The first international conference on advances and trends in software engineering (SOFTENG), April 19–24, 2015, Barcelona, Spain
- 27th European modeling and simulation symposium (EMSS), 21–23 сентября 2015, Bergamo, Italy
- Russian supercomputing days 2015, 2016, 2017, 2018, Москва, Россия
- Supercomputing in scientific and industrial problems. German-Russian conference 2016, 2017
- IV Международная научная конференция: конвергенция цифровых и физических миров: технологические, экономические и социальные вызовы, 16–18 мая 2018, Санкт-Петербург, Россия

Публикации. Основные результаты, полученные в диссертации, отражены в 28 опубликованных печатных работах, из них 13 статей [21–33] в изданиях, индексируемых системой Scopus, и журналах из перечня ВАК, 8 статей [34–41] в сборниках трудов конференций, 4 тезисов докладов [42–45], 3 прочих [46–48].

Внедрение результатов работы. Разработанный программный комплекс для расчёта бесступенчатых трансмиссий на протяжении многих лет используется компанией LuK и является стандартным инструментом инженера-расчётчика; опыт его использования и взаимодействие с пользователями определяют направление дальнейшего развития моделей бесступенчатых трансмиссий, поиск путей сокращения вычислительных затрат при расчётах и функциональность программного комплекса. Компания LuK, входящая в группу компаний Schaffler, производит бесступенчатые трансмиссии с пластинчатой цепью и является поставщиком таких трансмиссий для компаний Audi (multitronic), Subaru

(Lineartronic) и др.; согласно пресс-релизу, LuK производит 6000 экземпляров цепи ежедневно.

Инфраструктура программных компонентов, рассмотренная в третьей главе, использована при создании ряда других программных комплексов. В частности, на один из них получено свидетельство о регистрации [49].

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены автором самостоятельно или при его непосредственном участии. Направление развития моделей бесступенчатых трансмиссий определялась по результатам использования компанией LuK ранее созданных моделей с участием пользователей программного комплекса. Модели созданы автором лично, при этом были получены консультации от проф. Ю. Г. Исполова по вопросам механики деформируемого твёрдого тела и механики контактного взаимодействия, от проф. Н. Н. Шаброва по вопросам организации вычислительных процедур. Лично автором проделаны все приведённые расчёты динамики бесступенчатой трансмиссии, исследованы методы численного интегрирования, создано не менее 90% исходного кода программного комплекса для расчёта динамики трансмиссий и весь исходный код фреймворка для построения и исследования численных методов. В публикациях, выполненных в соавторстве, автору принадлежит ведущая роль в разделах, отражающих выносимые на защиту положения диссертационного исследования. Соавторам принадлежит вклад в другие разделы совместных публикаций, не связанные напрямую с выносимыми на защиту положениями.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 353 страниц текста, включая 132 рисунка. Библиография включает 110 наименований на 13 страницах.

Первая глава посвящена математическим моделям бесступенчатой трансмиссии с пластинчатой цепью. В п. 1.1 описана конструкция трансмиссии. В п. 1.2 кратко изложен общий подход, применяемый далее к моделированию ди-

намики. В п. 1.3 приведены различные оценочные формулы, оправдывающие некоторые решения, принятые при создании математических моделей. В п. 1.4 рассмотрены модели с малым числом степеней свободы (единицы — десятки), описывающие равновесие и глобальную динамику бесступенчатой трансмиссии. В п. 1.5 рассмотрена эволюция моделей различной степени сложности, учитывающих дискретную структуру цепи. Число степеней свободы в них сотни — тысячи. В п. 1.6 описаны системы стабилизации угловых скоростей, предназначенные для численного моделирования стационарных и некоторых переходных режимов. В п. 1.7 приведены примеры расчётов динамики трансмиссии. В п. 1.8 проведено сравнение результатов численных экспериментов с результатами измерений в натурных испытаниях.

Во второй главе исследуются методы численного интегрирования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений динамики бесступенчатой трансмиссии. Цель исследования состоит в выборе численных методов, позволяющих существенно сократить вычислительные затраты при расчётах. В п. 2.1 сформулирован класс решаемых задач (системы с дискретным состоянием). В п. 2.2 описаны модели и режимы, для которых проводятся рассматриваемые в этой главе численные эксперименты. В п. 2.3 обсуждается матрица Якоби правой части системы уравнений и делается вывод об умеренной жёсткости вычислительной задачи. В п. 2.4 рассмотрены численные эксперименты с классическими явными методами Рунге – Кутты; описана их общая методика; в п. 2.5 рассмотрены некоторые линейно неявные W -методы (типа метода Розенброка); в п. 2.6 — метод трапеций с различными реализациями численного метода решения систем нелинейных уравнений на шаге; в п. 2.7 — стабилизированный явный метод DUMKA3. По результатам исследования сделан вывод о преимуществах стабилизированных явных методах для данного класса задач, а также о перспективности полностью неявных методов при их распараллеливании.

В третьей главе описан программный комплекс для расчёта динамики бес-

ступенчатых трансмиссий. В п. 3.1 дан обзор возможностей комплекса и описан его состав. В п. 3.2 кратко упомянуты аспекты, повлиявшие на выбор технологий разработки программного обеспечения. В п. 3.3 рассмотрена общая инфраструктура компонентов, лежащих в основе программного комплекса и обеспечивающая решение ряда общих задач. В п. 3.4 рассмотрена задача конфигурирования программного комплекса, а также, в качестве иллюстрации преимуществ при использовании предложенной общей инфраструктуры, описан интроспективный генератор пользовательской документации. В п. 3.5 рассмотрены различные проблемно-ориентированные компоненты, часть из которых реализует модели элементов трансмиссии, описанные в гл. 1, в виде программного кода.

В четвёртой главе предложен фреймворк с открытым исходным кодом, предназначенный для создания методов численного интегрирования и исследования их поведения в конкретных задачах. В п. 4.1 обоснована необходимость его создания. В п. 4.2 описаны компоненты общей инфраструктуры фреймворка; в п. 4.3 — архитектура решателей систем нелинейных алгебраических уравнений методами ньютоновского типа; в п. 4.4 — решатели задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, рассмотрены особенности при описании уравнений движения механических систем с дискретным состоянием.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Глава 1

Математические модели бесступенчатой трансмиссии

1.1. Конструкция бесступенчатой трансмиссии

Бесступенчатые трансмиссии (или *вариаторы*) используются в автомобильной промышленности на протяжении последних десятилетий. В английском языке принято использовать для этих устройств термин *continuously variable transmission* (CVT), т. е. трансмиссия с непрерывно изменяющимся передаточным числом. Одна из конструкций вариатора — с пластинчатой цепью — изображена на рис. 1.1. Именно для неё разрабатывались рассматриваемые в данной

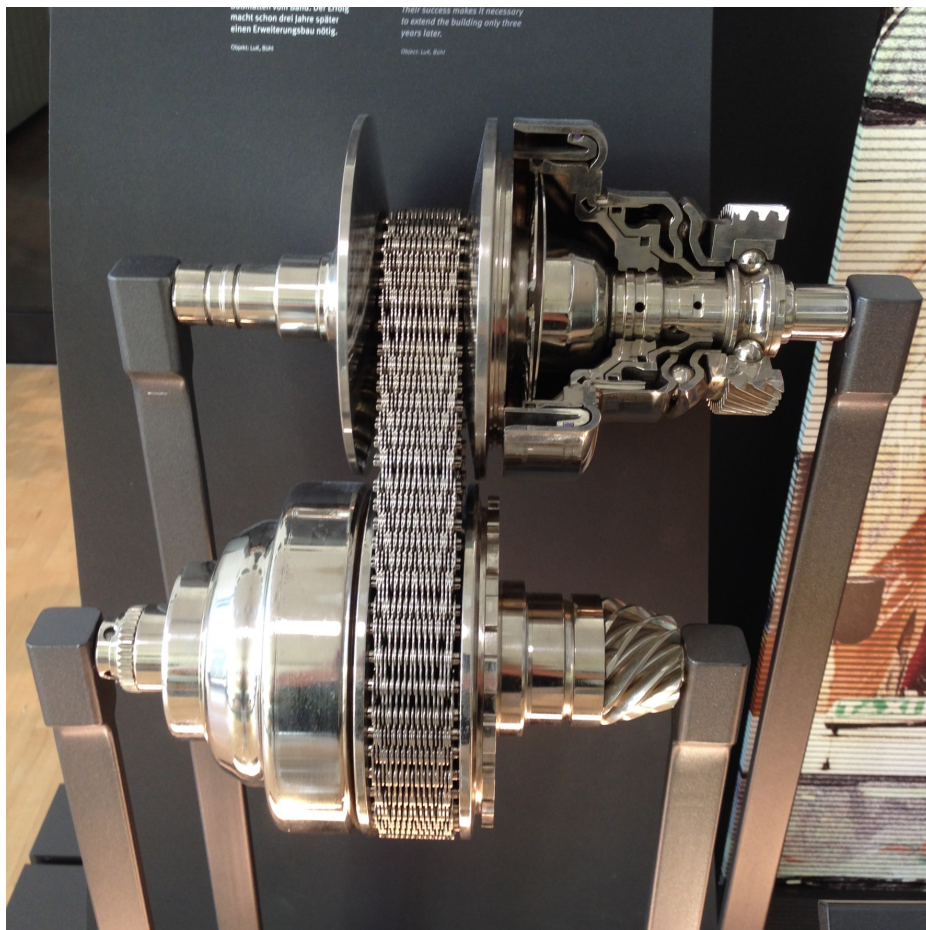


Рис. 1.1. Бесступенчатая трансмиссия

работе модели.

Вариатор состоит из следующих частей.

- Два вала на упругих опорах. Один из валов соединён через зубчатую передачу с коленчатым валом двигателя; от считается ведущим. Второй вал (ведомый) передаёт крутящий момент на дифференциал, связанный с колёсами автомобиля.
- На каждом валу находится пара шайб, образующих шкив. Одна из шайб жёстко связана с валом: фактически вал вместе с этой шайбой представляют собой единую деталь. Вторая шайба может двигаться вдоль оси вала. Её осевое положение контролируется гидравлической системой (гидравлические камеры в разрезе хорошо видны на рис. 1.1 сверху справа). Поверхности шайб, обращённые друг к другу, имеют форму, близкую к конической (в некоторых конструкциях поверхность шайбы коническая, тогда как в других конструкциях она тороидальная).
- Оба вала охвачены *цепью* (в конструкциях *Chain CVT*) или *металлическим ремнём* (в конструкциях *Metal V-belt CVT*).¹ Цепь или металлический ремень находится в контакте с внутренними поверхностями шайб. При этом часть цепи или ремня, находящаяся в контакте с шайбами, принимает форму, близкую к окружности. Радиус этой окружности называется *радиусом контакта*.

На подвижные шайбы действуют осевые силы, обеспечивающие сжатие цепи или ремня в поперечном направлении и натяжение в продольном. Изменение соотношения сжимающих сил приводит к изменению расстояний между шайбами и изменению вследствие этого радиусов контакта. Это, в свою очередь, приводит к изменению передаточного числа. Крутящий момент передаётся благодаря силам трения в контакте между шайбами и элементами цепи или ремня.

¹ Хотя в данной работе основное внимание уделено конструкции с цепью, модели малой размерности, рассмотренные в разд. 1.4, могут быть использованы и для конструкции с металлическим ремнём.

Осевая сила, сжимающая шайбы, должны быть достаточно велика для обеспечения возможности передачи заданного крутящего момента (см. разд. 1.3).

Схема расположения подвижных и неподвижных шайб в вариаторе представлена на рис. 1.2. На ведущем и ведомом валах подвижные шайбы расположены с разных сторон — в противном случае был бы неизбежен значительный перекося цепи при изменении передаточного числа.

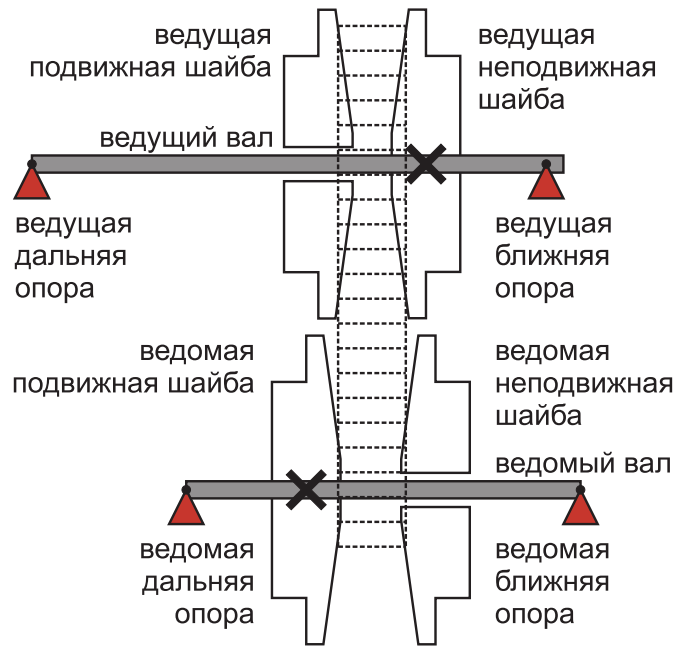


Рис. 1.2. Схема расположения шайб в вариаторе

В настоящей работе подробное устройство конструкций с металлическим ремнём не рассматривается, поэтому перейдём к описанию конструкции цепи. Цепь состоит из пластинок и двойных соединительных осей (рис. 1.3). Соединительные оси цепи в дальнейшем именуется *пинами* (от англ. *rocker pin*); их торцы находятся в контакте с внутренними поверхностями шайб. Каждая половинка пина охвачена набором пластинок. Геометрические формы пластинки и сечения пина таковы, что фактически отсутствует возможность независимого поворота пластинки и охваченной ею половинки пина вокруг оси, параллельной оси вала. Соседние звенья цепи, однако, могут поворачиваться друг относительно друга вокруг этой же оси. Поворот возможен благодаря тому, что половинки пина обкатываются друг по другу.

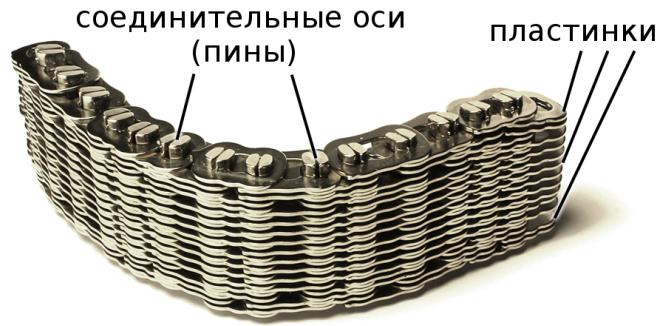


Рис. 1.3. Цепь вариатора

Сложность математического моделирования и численных расчетов динамики бесступенчатой трансмиссии главным образом состоит в большом количестве контактов между частями конструкции — между торцами пинов и шайбами шкивов; между пластинками цепи и боковыми поверхностями пинов; между половинками пинов. Общее число тел в цепи превышает 1000, и между ними происходит контактное взаимодействие. Для правильного предсказания глобальной динамики системы и напряжённо-деформированного состояния этих тел важно учитывать в математической модели их деформации.

1.2. Подход к описанию динамики

Все предлагаемые в настоящей работе математические модели соответствуют голономным системам. Для получения уравнений движения используется классический аппарат Лагранжевой механики [50], вкратце изложенный ниже.

Считается, что механическая система состоит из материальных точек, имеющих в актуальном положении радиус-векторы \mathbf{r}_ν . Индекс ν идентифицирует материальную точку. Если количество точек конечно (и равно N), можно считать, что индекс ν пробегает значения $1, \dots, N$; однако система может быть и распределённой, в этом случае ν — точка в некотором пространстве параметров Ω .

Конфигурация системы задаётся n независимыми обобщёнными координатами q_k , $k = 1, \dots, n$. Радиус-векторы материальных точек в произвольный

момент времени являются их функциями:

$$\mathbf{r}_\nu(q_1, \dots, q_n), \quad \nu = 1, \dots, N, \quad \nu \in \Omega. \quad (1.1)$$

Явная зависимость от времени отсутствует, поскольку фактически рассматриваются лишь стационарные связи. Зависимости (1.1) гарантируют их удовлетворение при произвольных значениях q_k .

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \Omega} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu. \quad (1.2)$$

Здесь m_ν — масса точки, $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ — её скорость (точка сверху означает полную производную по времени). В случае распределённой системы следует понимать под суммированием интегрирование, а под массой — массу элементарного объёма.

Вычисляя скорости $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ в силу (1.1), получим кинетическую энергию в виде квадратичной формы обобщённых скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \sum_{\nu \in \Omega} m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}. \quad (1.3)$$

Введя столбец обобщённых координат $q \equiv [q_1, \dots, q_n]^T$, можно записать это в матричном виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}, \quad A(q) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

(матрица A называется *матрицей инерции*).

Потенциальная энергия системы имеет вид $\Pi(q_1, \dots, q_n, t)$ — допускается зависимость от времени. Ей соответствуют обобщённые силы

$$Q_k^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Кроме потенциальных сил, к точкам системы могут быть приложены силы другой природы, например, диссипативные силы или силы трения. Для диссипативных сил, линейно зависящих от скоростей, вводится диссипативная функция Рэлея вида $R = \frac{1}{2}\dot{q}^T B(q)\dot{q}$, где B — симметричная положительно полуопределённая матрица. Соответствующие диссипативные обобщённые силы имеют вид

$$Q_k^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

Остальные обобщённые силы находятся по выражениям элементарных работ на виртуальных перемещениях: пусть к точкам приложены силы $\tilde{\mathbf{F}}_\nu$. Их элементарная работа на виртуальных перемещениях такая же, как работа соответствующих обобщённых сил \tilde{Q}_k , поэтому

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \tilde{Q}_k \delta q_k = \sum_{\nu \in \Omega} \tilde{\mathbf{F}}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu, \quad \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (1.7)$$

Поскольку система голономна, обобщённые координаты удовлетворяют уравнениям Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^d + \tilde{Q}_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (1.8)$$

с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$. В правой части стоят непотенциальные обобщённые силы. Это система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка; она может быть разрешена относительно вторых производных посредством умножения обеих частей слева на матрицу A^{-1} .

В рассматриваемую систему также могут входить системы стабилизации (см. п. 1.6). Состояние системы стабилизации определяется некоторыми дополнительными переменными; они удовлетворяют некоторым дополнительным ОДУ, которые просто добавляются к системе (1.8). Отметим также, что влияние систем стабилизации на механическую систему определяется некоторыми добавками к силам \tilde{Q}_k .

В рассматриваемых системах может присутствовать дискретное состояние, от которого зависят обобщённые силы и которое может переключаться

при наступлении определённых событий. Изменение дискретного состояния может быть связано, например, с началом или окончанием контакта поверхностей. Подробнее дискретных состояниях сказано в разд. 1.5, а об их учёте в процессе численного расчёта — в гл. 4.

Особо отметим, что при выводе кинематических соотношений (1.1) мы по возможности пользуемся прямой тензорной записью [51—53], поскольку она позволяет представить соотношения в обозримом инвариантном виде. Краткое введение в тензорную алгебру можно найти в приложении I книги А. И. Лурье [54], активно использовавшего этот язык в механике сплошной среды. Также используется описание поворота трёхмерного тела, предложенное П. А. Жилиным [55]: оно во многих случаях позволяет в значительной степени формализовать вывод кинематических соотношений.

1.3. Оценочные формулы

1.3.1. Сжимающие силы, обеспечивающие передачу крутящего момента

Крутящий момент на выходном валу вариатора создаётся силами трения между торцевыми поверхностями пинов и шайбами.

В этом упрощённом оценочном расчете считается, что шайбы и валы не деформируются, шайбы не наклоняются (т. е. возможен поворот лишь вокруг оси вала, орт которой обозначим \mathbf{k}).

Рассмотрим вместо цепи однородную ленту, принимающую на шайбах шкива форму дуги S окружности не зависящего от времени радиуса r (таким образом, часть ленты, находящаяся на шайбах, может двигаться лишь в окружном направлении). Будем считать, что на ленту со стороны шайбы действуют сила нормальной реакции N и сила трения \mathbf{R} . Сила N направлена по нормали \mathbf{n} к поверхности шайбы, а сила \mathbf{R} лежит в касательной плоскости: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = 0$. Более того, сила \mathbf{R} направлена по касательной к ленте при сделанных предположени-

ях: $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_\vartheta$, где \mathbf{e}_ϑ — орт касательной (рис. 1.4).

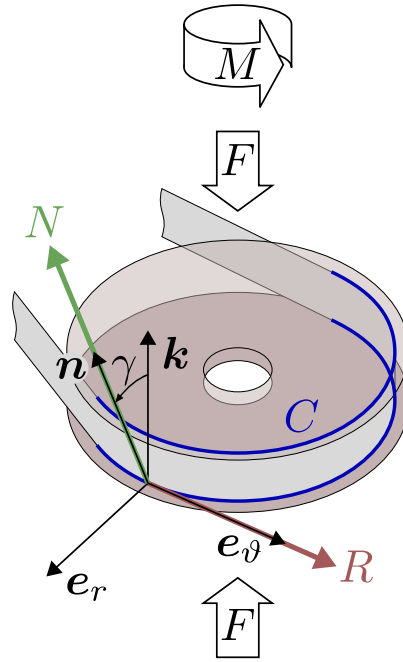


Рис. 1.4. К оценке сжимающей силы, обеспечивающей передачу крутящего момента

В отсутствие осевого движения шайб приложенная сжимающая сила F уравнивается силами нормальной реакции и трения:

$$F = \mathbf{k} \cdot \int_C (N\mathbf{n} + R\mathbf{e}_\vartheta) dl = \mathbf{k} \cdot \int_C N\mathbf{n} dl. \quad (1.9)$$

Вклад сил трения в баланс осевых сил пропадает, так как $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0$. Так как шайба — тело вращения, угол γ между нормалью \mathbf{n} и ортом \mathbf{k} в сделанных предположениях постоянный. Будем также считать, что постоянны N и R . Тогда интеграл в (1.9) вычисляется, и можно найти нормальную реакцию:

$$N = \frac{F}{L_C \cos \gamma}, \quad L_C \equiv \int_C dl. \quad (1.10)$$

Крутящий момент, создаваемый силами трения, вычисляется по формуле

$$M = 2\mathbf{k} \cdot \int_C (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times R\mathbf{e}_\vartheta dl = 2RrL_c \quad (1.11)$$

(здесь \mathbf{r} — положение точки ленты, \mathbf{r}_0 — положение любой точки на валу). Множитель 2 связан с наличием двух шайб на валу.

Сила трения не превышает силу трения скольжения R_* , которую будем считать пропорциональной нормальной реакции и коэффициенту трения f :

$$|R| \leq R_*, \quad R_* = fN. \quad (1.12)$$

Согласно (1.12), (1.11) и (1.10), крутящий момент, создаваемый силами трения, не превышает

$$M \leq 2R_*rL_c = 2fNrL_c = 2\frac{fFr}{\cos \gamma}.$$

Таким образом, для передачи крутящего момента M осевая сила F , которую требуется приложить к подвижной шайбе, должна удовлетворять неравенству

$$F \geq \frac{M \cos \gamma}{2fr}. \quad (1.13)$$

Это оценка снизу, в реальности для передачи момента при отсутствии интенсивного проскальзывания к подвижной шайбе прикладывают несколько большее осевое усилие.

1.3.2. Критическая сжимающая сила для пина

В процессе работы вариатора пины в цепи, находящиеся на шкивах, подвергаются значительным сжимающим нагрузкам со стороны шайб. Поэтому естественно сравнить возникающие сжимающие силы с критической эйлеровой силой, при которой происходит потеря устойчивости. Для шарнирно опертой балки длины l (рис. 1.5) критическая эйлерова сила P_* [56, §155] равна

$$P_* = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI. \quad (1.14)$$

Здесь E — модуль Юнга, I — момент инерции сечения. Принимая $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па (сталь), $I = 6,8 \cdot 10^{-12}$ м⁴ (наименьший из главных моментов инерции типичного пина в рассматриваемых конструкциях), $l = 0,033$ м (типичная длина пина в рассматриваемых конструкциях), получим значение критической силы $P = 12$ кН. В реальной конструкции осевая сила в пинах достигает примерно 2 кН, что составляет 17% от критической силы.

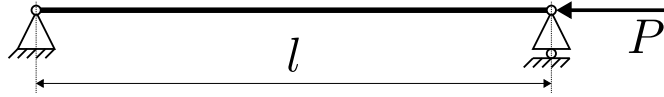


Рис. 1.5. Шарнирно опёртая балка под действием сжимающей силы

1.3.3. Влияние сжимающей силы на изгибную жёсткость пина

Известно, что при наличии сжимающей продольной силы изгибная жесткость балки падает. Оценим влияние сжимающей силы в пине на его изгибную жёсткость на примере задачи с сосредоточенной силой F , приложенной в некоторой точке (рис. 1.6).

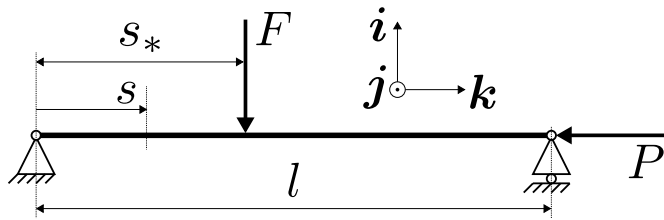


Рис. 1.6. Изгиб предварительно сжатой балки

Уравнение изгиба предварительно сжатой балки можно получить посредством процедуры варьирования нелинейных уравнений теории стержней [57] в окрестности положения равновесия с прямолинейной осью при действии лишь продольной силы. В нелинейной теории стержней считается, что стержень — материальная линия, состоящая из абсолютно твёрдых тел, поэтому внутренние силовые факторы — векторы силы \mathbf{Q} и момента \mathbf{M} . Точки стержня идентифицируются дуговой координатой s ; будем считать, что в отсчётном положении она равна длине участка стержня между соответствующей ей точкой и некоторой фиксированной точкой стержня. Конфигурация стержня определяется радиус-вектором $\mathbf{r}(s)$ и тензором поворота $\underline{\mathbf{P}}(s)$ в каждой точке оси; будем считать, что в отсчётном положении они равны $\mathbf{r}_0(s)$ $\underline{\mathbf{P}}_0(s)$ соответственно (нижний индекс 0 в данном подразделе обозначает величины в отсчётном положении). Штрихом далее обозначается производная по s .

Уравнения баланса сил в стержне имеют вид

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0, \quad (1.15)$$

где \mathbf{q} и \mathbf{m} — распределённые силовая и моментная нагрузки соответственно. В нелинейной теории стержней деформации определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r}' - \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{r}'_0, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Omega} - \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{P}}}' \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T)_{\times}. \quad (1.16)$$

Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ характеризует растяжение и сдвиг, $\boldsymbol{\kappa}$ — кручение и изгиб. Если ввести орт касательной к оси $\mathbf{t} \equiv \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$, можно выделить эти факторы отдельно:

$$\begin{aligned} (\dots)_{\parallel} &\equiv \mathbf{t} \cdot (\dots), & (\dots)_{\perp} &\equiv \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp} \cdot (\dots), & \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp} &\equiv \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{t}\mathbf{t}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \gamma_{\parallel} \mathbf{t} + \boldsymbol{\gamma}_{\perp}, & \boldsymbol{\kappa} &= \kappa_{\parallel} \mathbf{t} + \boldsymbol{\kappa}_{\perp}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

($\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ — единичный тензор второго ранга). Деформации и силовые факторы связаны определяющими соотношениями. В интересующем нас случае рассмотрим упругий стержень с растяжением, но без сдвига. Для этого примем соотношения упругости в виде

$$Q_{\parallel} = b\gamma_{\parallel}, \quad \mathbf{M}_{\perp} = \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\perp}, \quad M_{\parallel} = a_{\parallel} \kappa_{\parallel}. \quad (1.18)$$

Здесь Q_{\parallel} — продольная сила, b — жёсткость на растяжение, \mathbf{M}_{\perp} — изгибающий момент, $\underline{\underline{\mathbf{a}}}_{\perp} = a_{\perp} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp}$ — тензор жёсткости на изгиб (для простоты рассмотрено равножёсткое сечение), M_{\parallel} — крутящий момент, a_{\parallel} — жёсткость на кручение. Жёсткости b , a_{\perp} , a_{\parallel} будем считать постоянными вдоль оси. Для перерезывающей силы Q_{\perp} соотношение упругости не задаётся; отсутствие сдвига выражается связью

$$\boldsymbol{\gamma}_{\perp} = 0. \quad (1.19)$$

Далее рассмотрим прямой стержень с отсчётной конфигурацией $\mathbf{r}_0 = s\mathbf{k}$, $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$ (декартовы орты \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} показаны на рис. 1.5). В отсутствие распределённых нагрузок и при граничных условиях $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{M}(0) = 0$, $\mathbf{r}_{\perp}(l) = 0$, $Q_{\parallel}(l) = -P$, $\mathbf{M}(l) = 0$ решением (неединственным при достаточно большом P) будет

$$\mathbf{r} = s(1 + \varepsilon)\mathbf{k}, \quad \varepsilon \equiv -P/b, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (1.20)$$

в чём нетрудно убедиться, подставляя решение в уравнения (1.16), (1.19), (1.18), (1.15). В этом решении векторы момента \mathbf{M} и перерезывающей силы \mathbf{Q}_\perp равны нулю, а осевая сила $Q_\parallel = -P$.

Следующий шаг — уравнения в вариациях вблизи положения равновесия сжатого стержня. Радиус-векторы, деформации, силовые факторы и нагрузки получают малые добавки, которые обозначим $\delta(\dots)$. Предварительно сделаем следующие замечания, справедливые в рассматриваемом частном случае.

- Операции варьирования и дифференцирования по s переставимы:

$$\delta(x'(s)) = (\delta x(s))'.$$

- Единичный вектор касательной \mathbf{t} подлежит варьированию:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{t} &= \delta \left((\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{-\frac{1}{2}} \mathbf{r}' \right) = -\frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{-\frac{3}{2}} 2\mathbf{r}' \cdot \delta \mathbf{r}' + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{-\frac{1}{2}} \delta \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \delta \mathbf{r}' = \frac{1}{1+\varepsilon} (\delta \mathbf{r}')_\perp. \end{aligned} \quad (1.21)$$

- Поэтому тензор $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp$ также подлежит варьированию:

$$\delta \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp = -\delta(\mathbf{t}\mathbf{t}) = -\frac{1}{1+\varepsilon} (2\mathbf{k}(\delta \mathbf{r}')_\perp)^S \quad (1.22)$$

(верхний индекс S обозначает симметричную часть тензора второго ранга).

- Операции варьирования и проецирования вектора \mathbf{x} на касательную к оси или на плоскость сечения переставимы, если невозмущённое значение \mathbf{x} равно нулю:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_\parallel &\equiv \delta(\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}) = \delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{x} = \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{x} \equiv (\delta \mathbf{x})_\parallel, \\ \delta \mathbf{x}_\perp &\equiv \delta(\underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \mathbf{x}) = \delta \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \mathbf{x} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \delta \mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \delta \mathbf{x} \equiv (\delta \mathbf{x})_\perp. \end{aligned}$$

- Операции дифференцирования по s и проецирования вектора \mathbf{x} на касательную к оси или на плоскость сечения переставимы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_\parallel)' &\equiv (\mathbf{t} \cdot \mathbf{x})' = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}' \equiv (\mathbf{x}')_\parallel, \\ (\mathbf{x}_\perp)' &\equiv (\underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \mathbf{x})' = \underline{\underline{\mathbf{E}}}'_\perp \cdot \mathbf{x} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \mathbf{x}' = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\perp \cdot \mathbf{x}' \equiv (\mathbf{x}')_\perp. \end{aligned}$$

Проварьируем уравнения нелинейной теории стержней вблизи найденного выше положения равновесия. Для уравнений баланса (1.15) имеем

$$\delta \mathbf{Q}' + \delta \mathbf{q} = 0, \quad \delta \mathbf{M}' + \delta \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}' \times \delta \mathbf{Q} + \delta \mathbf{m} = 0.$$

Дифференцируя второе уравнение по s , учитывая значения невозмущённых величин, домножая справа векторно на \mathbf{k} и исключая $\delta \mathbf{Q}'$ при помощи первого уравнения, получим следующее уравнение баланса изгибающего момента:

$$\delta \mathbf{M}'' \times \mathbf{k} + P \delta \mathbf{r}'' - (1 + \varepsilon) \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{m} \times \mathbf{k} = 0. \quad (1.23)$$

Чтобы исключить $\delta \mathbf{M}$, понадобится проварьированное соотношение упругости для него и связь, выражающая отсутствие сдвига. Рассмотрим последнюю подробнее. Согласно (1.16), (1.19), в случае рассматриваемого невозмущённого состояния имеем

$$\gamma_{\perp} = (\mathbf{r}' - \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{k})_{\perp} = 0.$$

Варьируя с учётом (1.22), получим

$$\delta \gamma_{\perp} = \frac{1}{1 + \varepsilon} (\delta \mathbf{r}')_{\perp} - \delta \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (1.24)$$

Вариация тензора поворота связана, как обычно, с вектором малого поворота $\delta \mathbf{o}$:

$$\delta \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta \mathbf{o} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta \mathbf{o} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (1.25)$$

(последнее равенство имеет место, потому что в невозмущённом положении поворот отсутствует, $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$). С другой стороны, из второго и третьего равенств (1.16) с учётом выбранного отсчётного положения ($\underline{\underline{\mathbf{P}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$) следует

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Omega}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}}' = \boldsymbol{\kappa} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}} \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{\underline{\mathbf{P}}}' = \delta \boldsymbol{\kappa} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}} + \boldsymbol{\kappa} \times \delta \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta \boldsymbol{\kappa} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta \boldsymbol{\kappa} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}.$$

Сравнивая это с (1.25), убеждаемся, что $\delta \boldsymbol{\kappa} = \delta \mathbf{o}'$. Подставляя теперь (1.25) в (1.24) и домножая обе части равенства слева векторно на \mathbf{k} , можно исключить $\delta \boldsymbol{\kappa}_{\perp}$:

$$\delta \boldsymbol{\kappa}_{\perp} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{r}'' . \quad (1.26)$$

Это, в свою очередь, позволяет исключить изгибающий момент из (1.23), если использовать соотношение упругости для него: проварьировав второе из равенств (1.18), получим $\delta \mathbf{M}_\perp = a_\perp \delta \boldsymbol{\kappa}_\perp$. Уравнение изгиба предварительно сжатого стержня принимает вид

$$\frac{a_\perp}{1 + \varepsilon} \delta \mathbf{r}_\perp^{\text{IV}} + P \delta \mathbf{r}_\perp'' - (1 + \varepsilon) \delta \mathbf{q} + \delta \mathbf{m} \times \mathbf{k} = 0. \quad (1.27)$$

Полагая теперь продольную деформацию ε малой, а распределённый момент \mathbf{m} равным нулю, а также обозначив $\delta \mathbf{r}_\perp \equiv \mathbf{u}$ (\mathbf{u} — вектор перемещения), $\delta \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$, $a_\perp = EI$ (E — модуль Юнга, I — момент инерции сечения), получим окончательно

$$EI \mathbf{u}^{\text{IV}} + P \mathbf{u}'' = \mathbf{p}. \quad (1.28)$$

Это уравнение известно [56, §162], однако автору не удалось найти в литературе его формальный вывод из нелинейной теории стержней, поэтому он приведён здесь. Чтобы обосновать переход от (1.27) к (1.28), можно разложить перемещение \mathbf{u} в ряд по степеням малого параметра ε , и тогда (1.28) будет уравнением для главного члена \mathbf{u} при ε^0 .

Вернёмся к задаче об изгибе под действием поперечной силы $\mathbf{F} = F \mathbf{i}$, приложенной в точке $s = s_*$, $0 < s_* < l$, при наличии осевой сжимающей силы P (рис. 1.6). Изгиб происходит в плоскости ортов \mathbf{i} , \mathbf{k} , поэтому вектор перемещения имеет вид $\mathbf{u} = u \mathbf{i}$. Для u согласно (1.28) имеем уравнение

$$u^{\text{IV}} + \omega^2 u'' = f \delta(s - s_*), \quad \omega^2 \equiv \frac{P}{EI}, \quad f \equiv \frac{F}{EI} \quad (1.29)$$

(здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака) и граничные условия $u(0) = u(l) = 0$, $u''(0) = u''(l) = 0$. При единичной силе F решение будет по существу функцией Грина $G(s, s_*)$. Чтобы найти его, рассмотрим отдельно участки $0 < s < s_*$ (участок 1) и $s_* < s < l$ (участок 2). Общее решение на каждом из них, очевидно, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 < s < s_* : u &= A_1 \sin(\omega s) + B_1 \cos(\omega s) + a_1 s + b_1, \\ s_* < s < l : u &= A_2 \sin(\omega(s - l)) + B_2 \cos(\omega(s - l)) + a_2(s - l) + b_2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Легко проверить, что граничные условия на концах удовлетворяются лишь при $B_1 = 0$, $b_1 = 0$, $B_2 = 0$, $b_2 = 0$. Оставшиеся константы A_1, a_1, A_2, a_2 найдём из условий при $s = s_*$: в этой точке должны быть непрерывными u , u' и u'' , а третья производная должна скачком изменяться на f : $u'''(s+0) - u'''(s-0) = f$.

Перемещение u и его производные на участках таковы:

	участок 1	участок 2
u	$A_1 \sin(\omega s) + a_1 s$	$A_2 \sin(\omega(s-l)) + a_2(s-l)$
u'	$A_1 \omega \cos(\omega s) + a_1$	$A_2 \omega \cos(\omega(s-l)) + a_2$
u''	$-A_1 \omega^2 \sin(\omega s)$	$-A_2 \omega^2 \sin(\omega(s-l))$
u'''	$-A_1 \omega^3 \cos(\omega s)$	$-A_2 \omega^3 \cos(\omega(s-l))$

Условия сопряжения участков дают следующую систему линейных алгебраических уравнений для констант A_1, a_1, A_2, a_2 :

$$\begin{bmatrix} -s_* & s_* - l & -\sin(\omega s_*) & \sin(\omega(s_* - l)) \\ -1 & 1 & -\omega \cos(\omega s_*) & \omega \cos(\omega(s_* - l)) \\ 0 & 0 & \sin(\omega s_*) & -\sin(\omega(s_* - l)) \\ 0 & 0 & \cos(\omega s_*) & -\cos(\omega(s_* - l)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{f}{\omega^3} \end{bmatrix}.$$

Благодаря тому, что она блочная, решение легко находится. Сначала методом Крамера найдём A_1, A_2 :

$$\Delta_A \equiv \begin{vmatrix} \sin(\omega s_*) & -\sin(\omega(s_* - l)) \\ \cos(\omega s_*) & -\cos(\omega(s_* - l)) \end{vmatrix} = -\sin(\omega l), \quad \Delta_{A1} \equiv \begin{vmatrix} 0 & -\sin(\omega(s_* - l)) \\ \frac{f}{\omega^3} & -\cos(\omega(s_* - l)) \end{vmatrix} = \frac{f}{\omega^3} \sin(\omega(s_* - l)),$$

$$\Delta_{A2} \equiv \begin{vmatrix} \sin(\omega s_*) & 0 \\ \cos(\omega s_*) & \frac{f}{\omega^3} \end{vmatrix} = \frac{f}{\omega^3} \sin(\omega s_*), \quad A_1 = \frac{\Delta_{A1}}{\Delta_A} = -\frac{f \sin(\omega(s_* - l))}{\omega^3 \sin(\omega l)}$$

$$A_2 = \frac{\Delta_{A2}}{\Delta_A} = -\frac{f \sin(\omega s_*)}{\omega^3 \sin(\omega l)}.$$

Тогда для a_1, a_2 останется система уравнений

$$\begin{bmatrix} -s_* & s_* - l \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f}{\omega^2} \end{bmatrix},$$

её решением будет

$$a_1 = \frac{f(s_* - l)}{\omega^2 l}, \quad a_2 = \frac{f s_*}{\omega^2 l}.$$

Таким образом, функция Грина найдена:

$$G(s, s_*) = \begin{cases} \frac{1}{EI\omega^2} \left(-\frac{\sin(\omega(s_*-l)) \sin(\omega s)}{\omega \sin(\omega l)} + \frac{(s_*-l)s}{l} \right) & 0 < s < s_*, \\ \frac{1}{EI\omega^2} \left(-\frac{\sin(\omega s_*) \sin(\omega(s-l))}{\omega \sin(\omega l)} + \frac{s_*(s-l)}{l} \right) & s_* < s < l. \end{cases} \quad (1.31)$$

Отметим, что знаменатель первого слагаемого обращается в нуль при критическом значении сжимающей силы P_* (1.14). Чтобы проверить эту формулу, рассмотрим прогиб в середине балки, нагруженной единичной силой также в середине, а затем устремим ω к нулю (это означает, что сжимающая сила исчезает):

$$\begin{aligned} G\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) &= \frac{1}{EI\omega^2} \left(\frac{1}{2\omega} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega l}{2}\right) - \frac{l}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{EI\omega^2} \left(\frac{1}{2\omega} \left(\frac{\omega l}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega l}{2}\right)^3 + \dots \right) - \frac{l}{4} \right) = \frac{l^3}{48EI} + \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

Получили классическое решение, известное из курса сопротивления материалов, что подтверждает правильность (1.31).

В отсутствие сжимающей силы P функция Грина принимает вид

$$g(s, s_*) = \begin{cases} \frac{1}{6EI} (l - s_*) s (2s_* l - s_*^2 - s^2) & 0 < s < s_*, \\ \frac{1}{6EI} (l - s) s_* (2sl - s^2 - s_*^2) & s_* < s < l. \end{cases} \quad (1.33)$$

В этом можно убедиться, проделав в (1.31) предельный переход при $\omega \rightarrow 0$ или заново построив решение задачи, положив $\omega = 0$.

Отношение G/g показывает, во сколько раз из-за сжимающей силы P увеличивается прогиб u под действием поперечной силы. На рис. 1.7 изображены изолинии функции G/g при разных значениях отношения сжимающей силы P к критической эйлеровой силе P_* — см. (1.14). Абсциссы точек определяют положение точки, в которой рассматривается прогиб, а ординаты — положение поперечной нагрузки.

Заметим, что в точке $s = s_* = l/2$ отношение прогибов хорошо описывается приближённой формулой [56, §162, (28.17)]:

$$u = \frac{u_0}{1 - P/P_*},$$

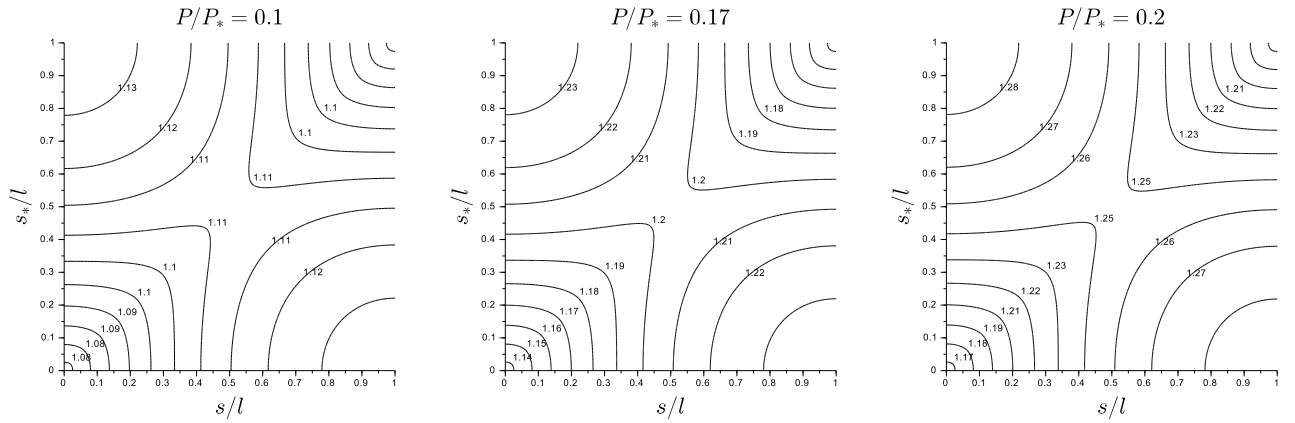


Рис. 1.7. Влияние сжимающей силы на прогиб под действием сосредоточенной поперечной нагрузки

где u_0 — прогиб в отсутствие продольной силы, u — прогиб при наличии продольной силы P . Однако в других точках плоскости (s, s_*) получаются отношения прогибов, несколько отличающиеся от вычисленных по этой формуле. Например, для $P/P_* = 0,17$ эта формула даёт $u/u_0 = 1,2$, а максимальное значение G/g равно 1,24.

На основании сделанных оценок можно заключить, что учёт сжимающих сил при моделировании изгиба пинов желателен, но не обязателен.

1.3.4. Частоты, обусловленные дискретной структурой цепи

При движении цепи вариатора пины входят в контакт с шайбами. Характерное время T^{link} между входом соседних пинов в контакт с одной и той же парой шайб определяется скоростью цепи v^{chain} и длиной звена l^{link} :

$$T^{link} = \frac{l^{link}}{v^{chain}},$$

а соответствующая частота f^{link} [Гц] равна

$$f^{link} = \frac{1}{T^{link}} = \frac{v^{chain}}{l^{link}} \quad (1.34)$$

Скорость цепи, пренебрегая проскальзыванием, можно оценить по формуле

$$v^{chain} = \omega_1 r_1, \quad (1.35)$$

где ω_1 — скорость вращения ведущего вала, а r_1 — радиус контакта на ведущей паре шайб. Длина звена l^{link} составляет около 9 мм. Скорость вращения ω_1 меняется в диапазоне от 1000 до 6000 об/мин, а радиус контакта — от 36 до 88 мм. Таким образом, скорость цепи варьируется в пределах от 3,8 до 55 м/с, а частота, вызванная входом в контакт соседних пинов — от 400 до 6000 Гц. Кроме того, расстояние между точками контакта соседних половинок одного и того же пина составляет 5–6 мм; если взять это значение вместо l^{link} в (1.34), получатся несколько бóльшие частоты (750–11000 Гц). В случае, когда цепь состоит из звеньев разной длины, играет роль частота $f^{chain} = v^{chain}/l^{chain}$, где l^{chain} — длина цепи; она меняется в диапазоне 5–70 Гц. Таким образом, частоты, обусловленные дискретной структурой цепи, занимают значительную часть слышимого акустического диапазона.

1.4. Модели малой размерности

В этом разделе рассматриваются модели малой размерности («малые модели»), описывающие динамику бесступенчатой трансмиссии. В отличие моделей, рассмотренных в разд. 1.5, они предназначены в первую очередь для описания глобальной динамики системы, а не деталей напряжённо-деформированного состояния. Благодаря малой размерности время расчёта по этим моделям несоизмеримо меньше времени расчёта по большим моделям, что делает возможным использование малых моделей для расчётов в реальном масштабе времени или быстрее.

Вопросам глобальной динамики бесступенчатой трансмиссии посвящены работы [58–64] и многие другие. Как правило, в них рассматривается конструкция с металлическим ремнём. Лишь небольшая часть работ посвящена переходным режимам, связанным с изменением передаточного числа; рассматриваются в первую очередь стационарные режимы движения.

Отметим работы [10; 11], в которых также предложены некоторые упро-

щённые модели бесступенчатой трансмиссии, число степеней свободы в которых всё же значительно выше, чем в моделях, рассмотренных здесь.

Наибольшего внимания в связи с упрощёнными моделями заслуживает, на наш взгляд, работа [18], посвящённая конструкции с металлическим ремнём; он там рассматривается как безынерционная, нерастяжимая в продольном направлении и несжимаемая в поперечном лента; допускается наклон шайб. Модель, полученная в упомянутой работе, описывается уравнениями с частными производными (независимые переменные — время и координата вдоль ленты).

1.4.1. Равновесие: модель с одной степенью свободы

В рамках этой и других малых моделей, рассмотренных в этом разделе, считается, что конструкция обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной осям валов. Таким образом, все четыре шайбы подвижны. Цепь или ремень рассматривается как однородная лента, нерастяжимая в продольном направлении и несжимаемая в поперечном. Форма части ленты, контактирующей с шайбами k -того вала, — дуга окружности радиуса r_k ; части, не находящиеся в контакте с шайбами — отрезки прямых. Валы и шайбы считаются абсолютно твёрдыми телами, шайбы движутся лишь поступательно вдоль осей валов. При равновесии вращение валов не рассматривается. Таким образом, единственная обобщённая координата, описывающая конфигурацию системы — угол φ между прямолинейным участком цепи и плоскостью, в которой находятся оси валов (рис. 1.8). Через него выражаются радиусы контакта и осевые перемещения шайб. Выражение радиусов контакта r_k через угол φ основано на геометрических соотношениях для длины ленты l (она постоянна, так как лента нерастяжима) и разностей радиусов контакта:

$$l = r_1(\pi + 2\varphi) + r_2(\pi - 2\varphi) + 2L \cos \varphi \quad r_1 - r_2 = L \sin \varphi, \quad (1.36)$$

где L — расстояние между осями валов. Осевые перемещения шайб z_k удовлетворяют следующим очевидным геометрическим соотношениям в случае торо-

идальных поверхностей шайб:

$$(r_k + y_k)^2 + (z_k - w)^2 = R_k^2, \quad k = 1, 2, \quad (1.37)$$

из которых легко найти $z_k(r_k)$. Здесь R_k — радиус дуги окружности в осевом сечении контактной поверхности шайбы на k -том валу, y_k — расстояние от центра этой окружности до оси вала, w — половина ширины ленты (рис. 1.9).

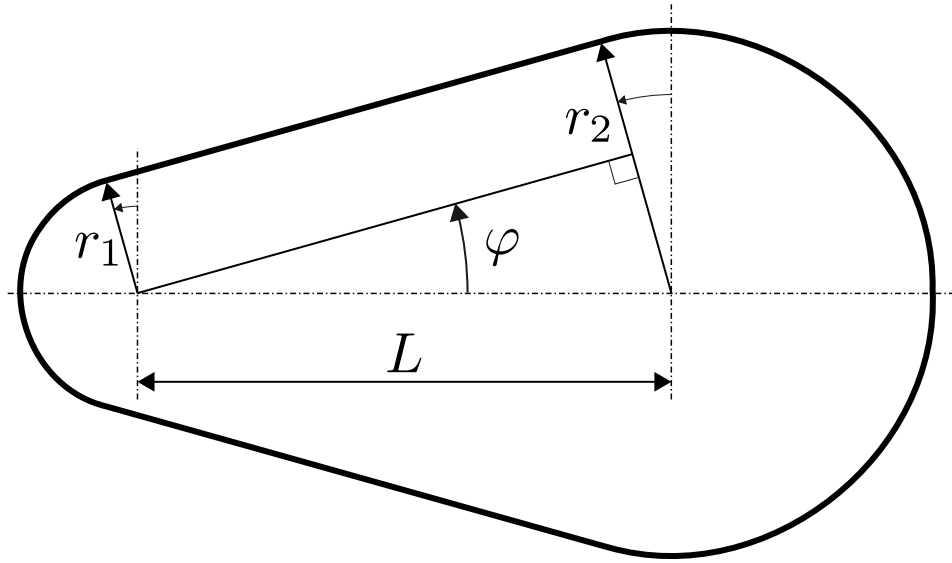


Рис. 1.8. Геометрия ленты в модели с одной степенью свободы

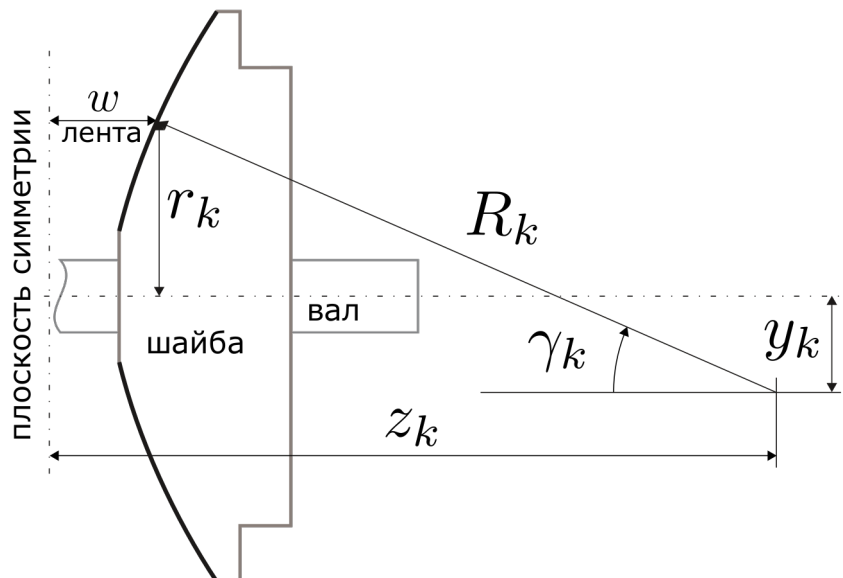


Рис. 1.9. Геометрия шайбы

Положение равновесия определяется осевыми силами F_k , сжимающими шайбы на k -том валу. Считая их постоянными и принимая потенциальную энер-

гию системы в виде

$$\Pi(\varphi) = F_1 z_1 + F_2 z_2, \quad (1.38)$$

можно найти положение равновесия. Вычисляя $dz_k/d\varphi$, из (1.36), (1.37) получим

$$\frac{dz}{d\varphi} = z'_k r'_k, \quad z'_k = -\frac{r_k + y_k}{z_k - w} \equiv -\operatorname{tg} \gamma_k, \quad r'_k = L \cos \varphi \left(\pm \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \right), \quad k = 1, 2 \quad (1.39)$$

(здесь γ_k — угол наклона шайбы на дуге контакта радиуса r_k , обозначенный на рис. 1.9; в последнем равенстве верхний знак соответствует $k = 1$, нижний — $k = 2$). В положении равновесия $\Pi' = 0$ имеем $\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$, где $f_k \equiv F_k \operatorname{tg} \gamma_k$. В этом положении потенциальная энергия имеет минимум при условии $\Pi'' > 0$, принимающем особенно простой вид в случае одинаковых шайб ($R_1 = R_2 \equiv R$) и осевых сил ($F_1 = F_2 \Rightarrow \varphi = 0, \gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$):

$$R > \frac{\pi L}{2 \sin 2\gamma \cos \gamma},$$

то есть устойчивость положения равновесия $\varphi = 0$ возможна лишь при достаточно больших радиусах в осевых сечениях контактных поверхностей шайб. В частности, она всегда имеет место в случае конических поверхностей.

Модели, рассмотренные в следующих разделах, посвящены описанию динамики.

1.4.2. Динамика: 4 степени свободы

В этой модели снова рассматривается нерастяжимая в продольном и несжимаемая в поперечном направлении лента, поэтому по-прежнему справедливы формулы (1.36), (1.37), (1.39). Для описания динамики к обобщённой координате φ добавляются ещё три: углы поворота валов φ_1, φ_2 и координата σ , определяющая положение ленты. Её можно определить как длину участка между двумя сечениями ленты: одно (S) зафиксировано на ленте, другое (X) находится в плоскости осей валов, ближе к ведущему валу (рис. 1.10); рассматривается участок от X до S, пройденный против часовой стрелки.

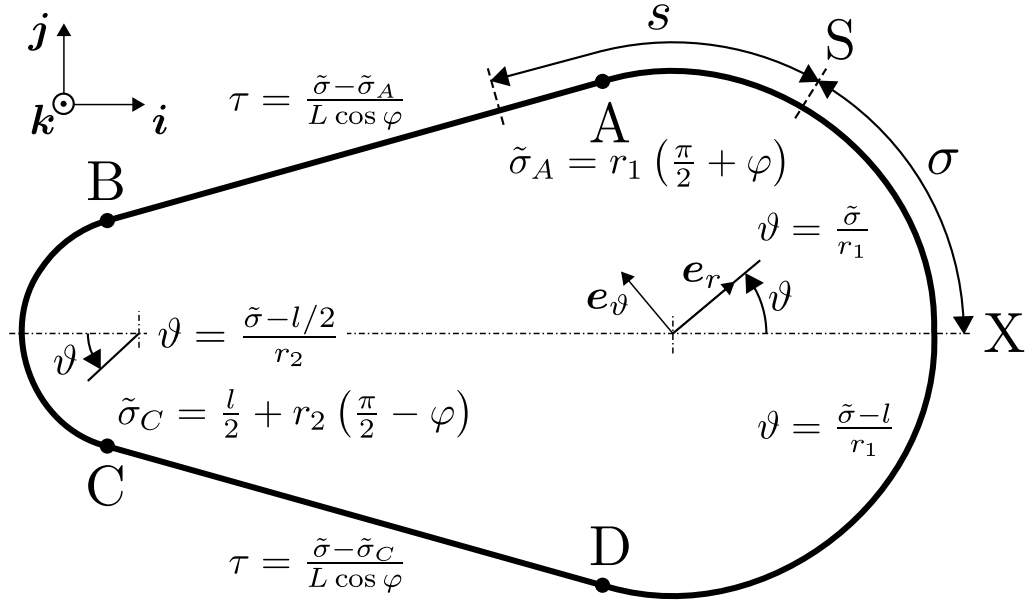


Рис. 1.10. Связь лагранжевой координаты $\tilde{\sigma} = (\sigma + s) \bmod l$ с эйлеровыми координатами

Для составления уравнений движения этой голономной системы естественно использовать формализм Лагранжа [50]. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (J_k \dot{\varphi}_k^2 + m_k \dot{z}_k^2) + T^{band}, \quad (1.40)$$

где J_k — осевой момент инерции k -того вала вместе с шайбами, m_k — масса пары шайб на k -том валу, T^{band} — кинетическая энергия ленты. Чтобы найти её, заметим, что каждая точка ленты движется лишь в плоскости, перпендикулярной осям валов, и определим радиус-вектор \mathbf{u}_\perp точки ленты в плоскости симметрии. При этом будем идентифицировать указанные точки координатой s , изменяющейся от нуля в сечении S до длины ленты l при движении против часовой стрелки. Таким образом, можно считать $\tilde{\sigma} \equiv (\sigma + s) \bmod l$ лагранжевой координатой некоторой точки ленты при фиксированном s . В дальнейшем удобно использовать эйлеровы координаты точек ленты. Примем в качестве таковых полярные углы ϑ на дугах окружностей и безразмерный параметр τ на прямолинейных участках. Указанные координаты и их связь с $\tilde{\sigma}$ показаны на рис. 1.10; отметим еще используемые в дальнейшем формулы

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\vartheta} = \mathbf{e}_\vartheta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\vartheta}{d\vartheta} = -\mathbf{e}_r, \quad \dot{\vartheta} = \frac{1}{r_k} (\dot{\sigma} - \vartheta r_k' \dot{\varphi}). \quad (1.41)$$

Радиус-вектор \mathbf{u}_\perp , очевидно, имеет вид

$$\mathbf{u}_\perp = \begin{cases} r_1 \mathbf{e}_r(\vartheta) & \text{на дуге DA} \\ r_2 \mathbf{e}_r(\vartheta) - L \mathbf{i} & \text{на дуге BC} \\ r_1 \mathbf{e}_r(\frac{\pi}{2} + \varphi) + \tau L \cos \varphi \mathbf{e}_\theta(\frac{\pi}{2} + \varphi) & \text{на отрезке AB} \\ r_1 \mathbf{e}_r(-\frac{\pi}{2} - \varphi) + (\tau - 1)L \cos \varphi \mathbf{e}_\theta(-\frac{\pi}{2} - \varphi) & \text{на отрезке CD} \end{cases} \quad (1.42)$$

(декартовы орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и полярные орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ показаны на рис. 1.10). Вычисляя кинетическую энергию ленты по формуле

$$T^{band} = \frac{1}{2} \int_0^l \rho |\dot{\mathbf{u}}_\perp|^2 ds, \quad (1.43)$$

где $\rho = m/l$ — погонная плотность ленты, m — её масса, получим следующую квадратичную форму скоростей $\dot{\varphi}, \dot{\sigma}$:

$$T^{band} = \frac{1}{2} A(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\sigma}^2. \quad (1.44)$$

Выражение коэффициента $A(\varphi)$ довольно громоздко:

$$\begin{aligned} A(\varphi) = & \left\{ r_1 \left[(\pi + 2\varphi) + \frac{(\pi + 2\varphi)^3}{12} \right] \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \right)^2 + \right. \\ & + r_2 \left[(\pi - 2\varphi) + \frac{(\pi - 2\varphi)^3}{12} \right] \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi} \right)^2 + \\ & \left. + L \cos \varphi \left[\frac{\pi^2}{8} - \left(1 - \frac{2}{\pi^2} \right) \varphi^2 + \frac{2\varphi^4}{\pi^2} \right] \right\} \rho L^2 \cos^2 \varphi; \end{aligned} \quad (1.45)$$

при практических расчётах его обычно можно заменить постоянным значением $A(0)$.

Осевые силы имеют потенциал (1.38), при этом допускается зависимость F_k от времени. Кроме них, действуют приложенные к валам крутящие моменты M_k , а также силы трения между лентой и шайбой. Соответствующие обобщённые силы находятся по выражениям элементарных работ. Для крутящего момента M_k имеем $\delta W_{M_k} = M_k \delta \varphi_k$, поэтому он является обобщённой силой, соответствующей повороту вала φ_k .

Найдём обобщённые силы, соответствующие силам трения. Будем считать, что в точках контакта ленты с шайбой k -того вала на ленту действуют сила нормальной реакции N_k и сила трения \mathbf{R}_k , направленная противоположно вектору

скорости \mathbf{v}_k^r ленты относительно шайбы; величина силы трения пропорциональна нормальной реакции и коэффициенту трения f , который в свою очередь зависит от величины относительной скорости $v_k^r \equiv |\mathbf{v}_k^r|$:

$$\mathbf{R}_k = -f(v_k^r)N_k\mathbf{t}_k, \quad \mathbf{t}_k \equiv \frac{\mathbf{v}_k^r}{v_k^r}, \quad \mathbf{v}_k^r = \dot{\mathbf{u}}_{\perp} - \mathbf{v}_k, \quad (1.46)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{\perp} = \left(\mathbf{e}_r - \frac{\vartheta}{r_k}\mathbf{e}_{\vartheta}\right)r_k'\dot{\varphi} + \mathbf{e}_{\vartheta}\dot{\sigma}, \quad \mathbf{v}_k = -r_k'\operatorname{tg}\gamma_k\mathbf{k}\dot{\varphi} + r_k\mathbf{e}_{\vartheta}\dot{\varphi}_k \quad (1.47)$$

(здесь \mathbf{v}_k — скорость шайбы в точке контакта, вычисленная по формуле кинематики твёрдого тела; при вычислении $\dot{\mathbf{u}}_{\perp}$ использованы формулы (1.42) и (1.41). Закон трения $f(v_k^r)$ в реальности близок к кулонову, однако его непосредственное использование в моделировании затруднено и не представляется возможным в данной модели с независимыми углами поворота валов. Поэтому принимается следующий вид закона трения:

$$f(v_k^r) = \begin{cases} f_0 \frac{v_k^r}{v_0} & \text{при } v_k^r < v_0 \\ f_0 & \text{при } v_k^r \geq v_0 \end{cases} \quad (1.48)$$

При относительных скоростях до v_0 трение вязкое, при бóльших скоростях коэффициент трения достигает насыщения со значением f_0 .

Итак, в точках контакта с шайбой k -того вала на ленту действует сила

$$\mathbf{P}_k^{band} = N_k\mathbf{n}_k + \mathbf{R}_k = N_k\mathbf{p}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv \mathbf{n}_k - f\mathbf{t}_k, \quad \mathbf{n}_k = \cos\gamma_k(\mathbf{e}_r \operatorname{tg}\gamma_k - \mathbf{k}), \quad (1.49)$$

\mathbf{n}_k — нормаль к поверхности шайбы. Виртуальные перемещения $\delta\mathbf{u}_{\perp}$ ленты и $\delta\mathbf{u}_k$ шайбы на k -том валу получаются из $\dot{\mathbf{u}}_{\perp}$ и $\dot{\mathbf{v}}_k$ заменой $\dot{\varphi}$, $\dot{\sigma}$, $\dot{\varphi}_k$ на $\delta\varphi$, $\delta\sigma$, $\delta\varphi_k$ соответственно (система склерономна). Элементарная работа всех сил трения равна

$$\delta W^f = 2 \sum_{k=1}^2 \int \mathbf{R}_k \cdot (\delta\mathbf{u}_{\perp} - \delta\mathbf{u}_k) ds = Q_{\varphi}^f \delta\varphi + Q_{\sigma}^f \delta\sigma + Q_{\varphi_1}^f \delta\varphi_1 + Q_{\varphi_2}^f \delta\varphi_2 \quad (1.50)$$

(интегрирование по дуге контакта с шайбами k -того вала). Множитель 2 стоит потому, что лента контактирует с двумя шайбами на каждом валу. Нетрудно

проверить, что $\mathbf{n}_k \cdot (\delta \mathbf{u}_\perp - \delta \mathbf{u}_k) = 0$, поэтому элементарная работа нормальных реакций N_k равна нулю.

Из-за несжимаемости ленты модель не позволяет найти детали распределения сил по дуге контакта — она «слишком жёсткая», и это будет исправлено в п. 1.4.3. Пока придётся использовать гипотезу о том, что нормальная реакция постоянна на дуге контакта. Обобщённые силы трения в (1.50) при этом равны

$$\begin{aligned} Q_\varphi^f &= -2 \sum_{k=1}^2 N_k \int f \mathbf{t}_k \cdot \left(\mathbf{e}_r + \operatorname{tg} \gamma_k \mathbf{k} - \frac{\vartheta}{r_k} \mathbf{e}_\vartheta \right) r_k' ds, \\ Q_\sigma^f &= -2 N_k \sum_{k=1}^2 \int f \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{e}_\vartheta ds, \quad Q_{\varphi_k}^f = 2 N_k r_k \int f \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{e}_\vartheta ds. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Интегрирование производится по соответствующим дугам контакта. Силы $Q_{\varphi_k}^f$ можно интерпретировать как крутящие моменты, создаваемые силами трения, Q_σ^f — как суммарную силу трения направлении ленты; Q_φ^f не имеет простой интерпретации.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\left(A + \sum_{k=1}^2 m_k (\operatorname{tg} \gamma_k r_k')^2 \right) \dot{\varphi} \right]' &= \sum_{k=1}^2 F_k \operatorname{tg} \gamma_k r_k' + Q_\varphi^f, \\ m \ddot{\sigma} &= Q_\sigma^f, \quad J_k \ddot{\varphi}_k = M_k + Q_{\varphi_k}^f. \end{aligned}$$

Нормальные реакции N_k в данной модели — это реакции идеальных связей, их вычисление требует рассмотрения баланса осевых сил, действующих на одну шайбу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_k \ddot{z}_k &= -F_k - \mathbf{k} \cdot \int \mathbf{P}_k^{\text{band}} ds \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m_k \left[r_k' \operatorname{tg} \gamma_k \ddot{\varphi} + (r_k' \operatorname{tg} \gamma_k)' \dot{\varphi}^2 \right] &= F_k + N_k \int \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_k ds. \end{aligned}$$

Вместе с уравнением движения для φ это даёт три линейных уравнения относительно $\ddot{\varphi}$, N_1 и N_2 . Вычисленные таким образом реакции фактически мало отличаются от $\tilde{N}_k = -F_k / \int \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_k ds$, что имело бы место при постоянном φ .

По-видимому, модель с четырьмя степенями свободы — самая простая из возможных динамических моделей бесступенчатой трансмиссии. Однако автору

не удалось найти её описание в литературе.

1.4.3. Динамика: $6 + 2n$ степеней свободы

Эта модель является развитием предыдущей. Рассматривается по-прежнему нерастяжимая в продольном направлении, но сжимаемая в поперечном лента. Благодаря этой податливости осевые перемещения шайб z_k становятся независимыми обобщёнными координатами, нормальные силы N_k перестают быть реакциями связей, а их распределение по дугам контакта определяется не нашей волей, а значениями дополнительных $2n$ обобщённых координат, детализирующих форму ленты. В итоге силы трения и глобальная динамика, связанная с изменением передаточного числа, воспроизводятся точнее.

Назовём дополнительные обобщённые координаты $h_{1i}, h_{2i}, i = 1, \dots, n$ (первый индекс обозначает номер вала). Они определяют отклонение формы ленты от *невозмущённой конфигурации*, которая определяется, как и прежде, лишь углом φ и координатой σ согласно (1.42) и обозначается \mathbf{u}_\perp^0 в этом разделе. Примем, что положение \mathbf{u}_\perp точки в середине ленты на дуге контакта определяется следующим образом:

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u}_\perp^0 + u_r \mathbf{e}_r + u_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta. \quad (1.52)$$

Малые радиальные и окружные перемещения u_r, u_ϑ вводятся как линейные комбинации координатных функций с весами h_{ki} :

$$u_r = \sum_{i=1}^n h_{ki} f_{ri}(\vartheta, \varphi), \quad u_\vartheta = \sum_{i=1}^n h_{ki} f_{\vartheta i}(\vartheta, \varphi) \quad (1.53)$$

Координатные функции вводятся таким образом, чтобы при любых h_{ki} выполнялось локальное условие нерастяжимости ленты $|d\mathbf{u}_\perp| = r_k d\vartheta$. Если в этом условии удерживать лишь члены порядка малости не выше первого по u_r, u_ϑ , оно примет вид

$$u_r + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0. \quad (1.54)$$

Условию (1.54) можно удовлетворить при любых h_{ki} , например, задавая произвольные $f_{\vartheta i}$ и принимая $f_{ri} = -\partial f_{\vartheta i}/\partial \vartheta$. Чтобы удовлетворить условию нерастяжимости глобально, то есть гарантировать, что длина цепи равна l с точностью до линейных по h_{ki} членов включительно, проще всего положить $f_{\vartheta i} = 0$ на концах дуги контакта. Например, можно взять следующую систему тригонометрических функций:

$$f_{\vartheta,2j-1} = \cos\left(j\frac{\pi\xi}{2}\right) - \cos\left(j\frac{\pi}{2}\right), \quad f_{\vartheta,2j} = \sin\left(j\frac{\pi\xi}{2}\right) - \xi \sin\left(j\frac{\pi}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\xi \equiv \vartheta/\vartheta_k^* \in [-1, 1], \quad \vartheta_1^* \equiv \pi/2 + \varphi, \quad \vartheta_2^* \equiv \pi/2 - \varphi.$$

На первый взгляд может показаться, что нулевое значение $f_{\vartheta i}$ на концах дуги контакта ограничивает возможности малых деформаций ленты в окружном направлении. Проиллюстрируем ошибочность этого утверждения примером, показывающим возможность малых поступательных перемещений всей ленты. Рассмотрим невозмущённую конфигурацию $\varphi = 0$, $h_{ki} = 0$. Подберём $\delta\varphi$ и δh_{ki} таким образом, чтобы получить на каждой дуге контакта $\delta\mathbf{u}_\perp = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j}$, где δx и δy — заданные постоянные. В невозмущённой конфигурации для виртуальных перемещений ленты из (1.52) имеем

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}_\perp &= (\delta u_r + r'_k \delta\varphi) \mathbf{e}_r + (\delta u_\vartheta - \vartheta r'_k \delta\varphi) \mathbf{e}_\vartheta = \\ &= \pm(\delta x \cos \vartheta + \delta y \sin \vartheta) \mathbf{e}_r \pm (\delta y \cos \vartheta - \delta x \sin \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta \end{aligned}$$

(на первом валу верхний знак, на втором — нижний; см. рис. 1.10). Заданное виртуальное перемещение получится при $\delta h_1 = \pm \delta y$, $\delta h_2 = \mp \delta x$, $\delta\varphi = \pm \frac{2}{\pi r'_k} \delta x = \frac{4}{\pi} L \delta x$.

Кинетическая энергия системы снова имеет вид (1.40), но теперь z_k — независимые координаты. Кинетическую энергию ленты снова следует вычислять по формуле (1.43); инерцией цепи при поперечном её сжатии можно пренебречь. Скорость $\dot{\mathbf{u}}_\perp$ теперь вычисляется на основе (1.52), и все формулы становятся существенно более громоздкими. Всё же возможно вычислить аналитически

интеграл вдоль ленты и получить кинетическую энергию системы в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(\varphi, h_{ki}) \dot{q}, \quad q \equiv [\varphi, \sigma, \varphi_1, \varphi_2, z_1, z_2, h_{11}, \dots, h_{1n}, h_{12}, \dots, h_{2n}]^T$$

Практически матрица $A(\varphi, h_{ki})$ мало отличается от невозмущённой при $\varphi = 0$.

Упругие силы сжатия ленты пропорциональны её деформации в поперечном направлении. Будем считать, что осевое положение шайбы z_k близко к её положению $z_k^0 \equiv z_k(r_k)$ в случае несжимаемой ленты (п. 1.4.2) и обозначим $\Delta z_k \equiv z_k - z_k^0$. Считая малыми Δz_k и h_{ki} , нетрудно получить линейризованное выражение поперечной деформации ленты ε на k -том валу (половина ширины деформированной ленты равна $w + \varepsilon$):

$$\varepsilon = \Delta z_k + \operatorname{tg} \gamma_k \sum_{i=1}^n h_{ki} f_{ri}. \quad (1.55)$$

Тогда потенциальная энергия упругой деформации ленты будет квадратичной функцией координат z_k, h_{ki} :

$$\Pi^{band} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int c \varepsilon^2 ds = \frac{1}{2} c \sum_{k=1}^2 r_k \left[2\vartheta_k^* \Delta z_k^2 + \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_k}{\vartheta_k^*} \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} h_{ki} h_{kj} \right] \quad (1.56)$$

(c — удвоенная поперечная жесткость ленты). Отсутствие перекрёстных членов, содержащих $\Delta z_k h_{ki}$, обеспечивается выбором координатных функций. Коэффициенты α_{ij} не зависят от угла φ . Обобщённые силы упругости находятся путём дифференцирования Π по соответствующим обобщённым координатам.

Обобщённые силы, связанные с трением, вычисляются так же, как для предыдущей модели, однако выкладки усложняются. Например, при вычислении скоростей и виртуальных перемещений точек ленты на дуге контакта необходимо учитывать зависимость координатных функций от φ — так, в частности,

$$\dot{u}_r = \sum_{i=1}^n \left[\dot{h}_{ki} f_{ri} + h_{ki} \left(\frac{\partial f_{ri}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial f_{ri}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \right].$$

Отметим, что нормальная реакция N_k теперь определяется иначе — необходимо рассмотреть баланс сил, действующих на малый участок края ленты: осевые

проекции сил нормальной реакции $N_k \mathbf{n}_k$, трения \mathbf{R}_k и упругости $-\varepsilon \mathbf{k}$ уравновешивают друг друга, поскольку лента безынерционна в поперечном направлении. Отсюда $N_p = \varepsilon / \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_k$.

1.4.4. Модель с $6 + 2n + 8$ степенями свободы

Эта модель отличается от предыдущей учётом податливости валов, на которых закреплены шайбы. Поэтому появляются новые обобщённые координаты: малые перемещения центров масс шайб в направлениях, перпендикулярных осям валов, и малые повороты шайб вокруг осей, перпендикулярных осям валов. Таким образом, радиус-вектор \mathbf{u}_k точки k -той шайбы может быть представлен в виде

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{r}_k^0 + z_k \mathbf{k} + \mathbf{U}_k + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_k \cdot \boldsymbol{\rho}_k, \quad \mathbf{r}_k^0 \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1 \\ Li & \text{при } k = 2. \end{cases}$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}_k$ — отсчётное положение точки шайбы (при отсутствии перемещений и поворотов), $\mathbf{U}_k \equiv U_{k1} \mathbf{i} + U_{k2} \mathbf{j}$ — перемещение центра масс шайбы в плоскости, перпендикулярной осям валов, $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k$ — тензор поворота шайбы; его представим в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_k = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\psi_k} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi_k \mathbf{k}), \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\psi_k} \equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}(\boldsymbol{\psi}_k).$$

Подробности динамики шайбы при таком выборе обобщённых координат (в частности, выражение кинетической энергии) рассмотрены в п. 1.5.2.3. Здесь нас в первую очередь интересует, как изменится поперечная деформация ленты (1.55) при учёте податливости валов. Индекс k , обозначающий номер шайбы, везде, кроме φ_k , далее будем опускать для краткости.

Поскольку $\boldsymbol{\psi}$ — вектор малого поворота, и нас интересует линейризованное выражение деформации ε , ограничимся линейризацией $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\psi}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\psi} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \boldsymbol{\psi} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \dots$$

Введём декартову систему координат, начало которой находится в центре масс

шайбы $\mathbf{r}^0 + z\mathbf{k} + \mathbf{U}$, а орты $\tilde{\mathbf{e}}_r$, $\tilde{\mathbf{e}}_\vartheta$, $\tilde{\mathbf{k}}$ получаются поворотом $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_\psi$ из \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ , \mathbf{k} :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_r &= \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\psi \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{e}_r + \dots = \mathbf{e}_r - \psi_\vartheta \mathbf{k} + \dots, \\ \tilde{\mathbf{e}}_\vartheta &= \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\psi \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{e}_\vartheta + \dots = \mathbf{e}_\vartheta + \psi_r \mathbf{k} + \dots, \\ \tilde{\mathbf{k}} &= \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\psi \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{k} + \dots = \mathbf{k} + \psi_\vartheta \mathbf{e}_r - \psi_r \mathbf{e}_\vartheta + \dots\end{aligned}\quad (1.57)$$

(обозначено $\psi_r \equiv \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{e}_r$, $\psi_\vartheta \equiv \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{e}_\vartheta$). Пусть в ней задан радиус-вектор $\tilde{\mathbf{r}}$ некоторой точки, имеющий вид $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}\tilde{\mathbf{e}}_r + \tilde{z}\tilde{\mathbf{k}}$. Точка находится на поверхности шайбы, если выполняется следующее соотношение, аналогичное (1.37):

$$\tilde{z} = -\sqrt{R^2 - (\tilde{r} + y)^2}. \quad (1.58)$$

Если радиус-вектор имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{r}\tilde{\mathbf{e}}_r + \tilde{u}_\vartheta\tilde{\mathbf{e}}_\vartheta + \tilde{z}\tilde{\mathbf{k}}, \quad (1.59)$$

где \tilde{u}_ϑ — малая по сравнению с \tilde{r} величина, то это же соотношение выполняется с точностью до линейного по $\tilde{u}_\vartheta/\tilde{r}$ члена включительно, так как $\sqrt{\tilde{r}^2 + \tilde{u}_\vartheta^2} = \tilde{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_\vartheta^2}{\tilde{r}^2}\right) + \dots$

Используем соотношение (1.58) для нахождения осевой деформации ленты ε — она входит в выражение радиус-вектора \mathbf{u} точки на краю ленты. Последнее, согласно (1.42), (1.52), имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}^0 + (r + u_r)\mathbf{e}_r + u_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + (w + \varepsilon)\mathbf{k} \quad (1.60)$$

Вычитая положение начала системы координат шайбы и приравнявая полученное выражение к (1.59), а затем вычисляя проекции на орты \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ , \mathbf{k} с учётом (1.57), получим

$$\begin{aligned}r + u_r - U_r &= \tilde{r} - \psi_\vartheta \tilde{z}, \\ u_\vartheta - U_\vartheta &= \tilde{u}_\vartheta + \psi_r \tilde{z}, \\ w + \varepsilon - z &= \tilde{z} + \psi_\vartheta \tilde{r} - \psi_r \tilde{u}_\vartheta.\end{aligned}\quad (1.61)$$

Далее, учитывая, что величины u_r , u_ϑ , U_r , U_ϑ , ψ_r , ψ_ϑ малы и производя линеаризацию, найдём отсюда

$$\begin{aligned}r + u_r - U_r &= \tilde{r} - \psi_\vartheta \tilde{z}^0, \quad u_\vartheta - U_\vartheta = \tilde{u}_\vartheta + \psi_r \tilde{z}^0, \quad w + \varepsilon - z = \tilde{z} + \psi_\vartheta r, \\ \tilde{z}^0 &\equiv -\sqrt{R^2 - (r + y)^2} = w - z^0.\end{aligned}\quad (1.62)$$

Окончательное выражение осевой деформации ленты таково:

$$\varepsilon = \Delta z + \psi_{\vartheta} r + \operatorname{tg} \gamma (u_r - U_r + \psi_{\vartheta} (w - z^0)). \quad (1.63)$$

Оно отличается от (1.55) наличием зависимости от малых перемещений и поворотов шайбы.

Потенциальная энергия сжатия ленты усложняется по сравнению с (1.56): в квадратичную форму добавляются слагаемые, пропорциональные U_1^2 , U_2^2 , ψ_1^2 , ψ_2^2 , $U_1\psi_2$, $U_2\psi_1$, $\Delta z U_1$, $\Delta z \psi_2$, $h_i U_1$ (для чётных i), $h_i U_2$ (для нечётных i), $h_i \psi_2$ (для чётных i), $h_i \psi_1$ (для нечётных i). Все коэффициенты могут быть вычислены аналитически, однако здесь не приводятся в силу своей громоздкости.

В потенциальную энергию системы следует также включить энергию упругой деформации валов. В простейшем случае для каждого вала добавляется слагаемое вида $\frac{1}{2}c_U|\mathbf{U}|^2 + \frac{1}{2}c_\psi|\boldsymbol{\psi}|^2$, где c_U и c_ψ — жёсткости.

Отметим, что учёт возможности наклона шайб за счёт податливости валов заметно меняет результаты глобальной динамики трансмиссии, приближая их к реальности. Это отмечается в [18], хотя использованный авторами термин “pulley deformation” не вполне уместен, так как фактически идёт речь о твердотельном движении, а не деформации шайбы.

На рис. 1.11 представлены графики распределения нормальной силы по дугам контакта, полученные численно. Модель с $6 + 2n + 8$ при разных n сравнивается с результатами расчёта по большой модели (см. разд. 1.5), в которой, в частности, учтена податливость валов. Из графиков видно, что уже при $n = 5$ распределение нормальной силы по дугам контакта в малой модели очень хорошо согласуется с распределением, полученным в большой модели. Без учёта возможности наклона шайбы подобный результат получить не удаётся.

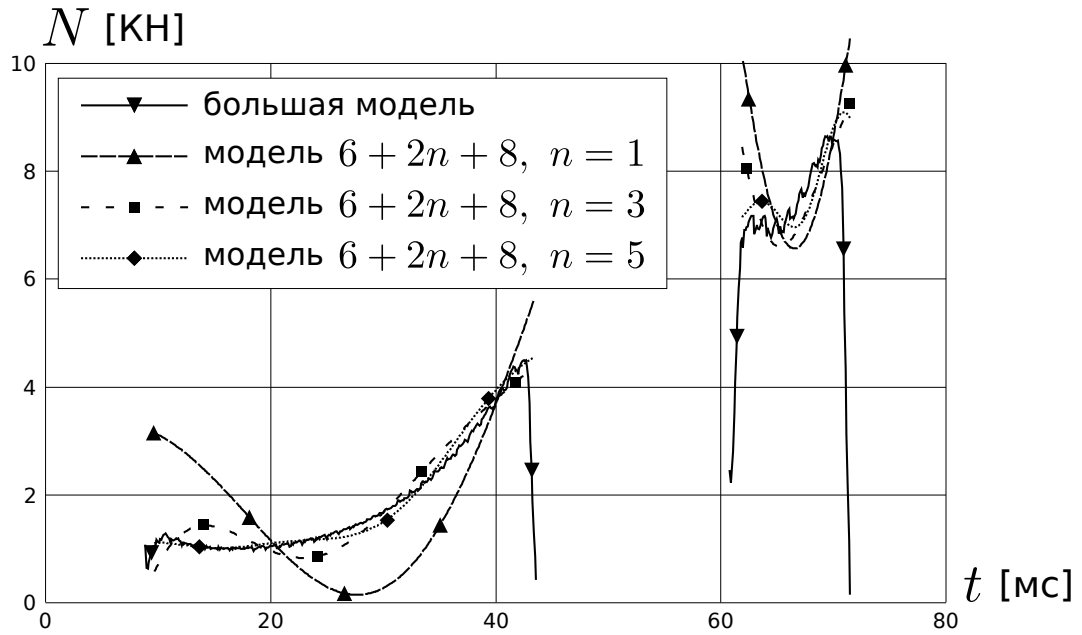


Рис. 1.11. Нормальная реакция в контакте цепь — шайба, численный эксперимент

1.5. Модели, учитывающие дискретную структуру цепи

Модели малой размерности, описанные в разд. 1.4, позволяют рассчитывать глобальную динамику вариатора, но вопрос о деталях напряжённо-деформированного состояния элементов цепи — пластинок и пинов — остаётся за кадром, поскольку вместо цепи рассматривается однородная лента. Кроме этого, дискретная структура цепи существенным образом влияет на характеристики шума устройства, представляющие большой интерес (соответствующие частоты оценены в разд. 1.3.4).

В этом разделе используется глобальная декартова система координат, изображённая на рис. 1.12. Начало координат O расположено на недеформированной оси ведомого вала, а ось Ox_3 направлена вдоль неё. Ось Ox_1 находится в плоскости, содержащей недеформированные оси обоих валов; она перпендикулярна оси Ox_3 и направлена в сторону ведущего вала. Ось Ox_2 перпендикулярна осям Ox_3, Ox_1 ; её направление таково, что система координат правая. Вдоль осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 направлены орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ соответственно; для этих же ортов часто используются синонимы $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2, \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$.

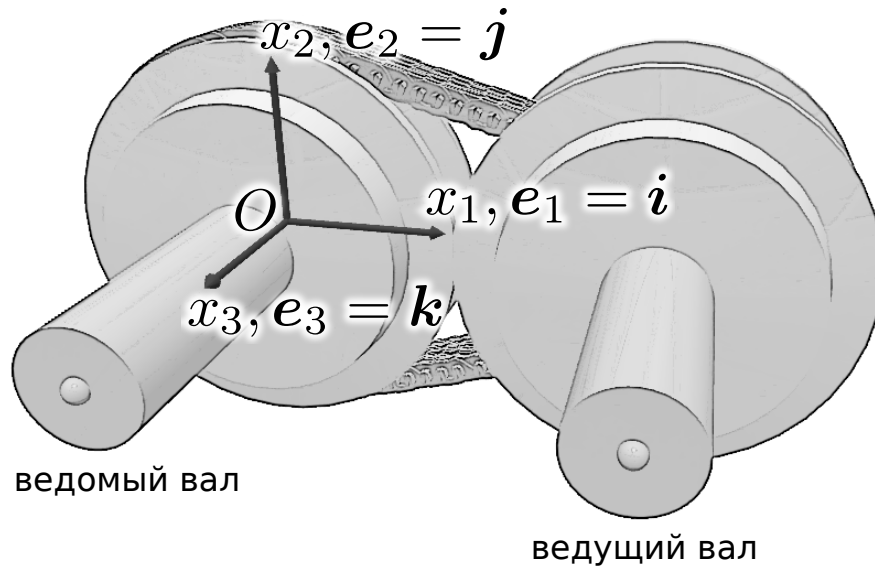


Рис. 1.12. Глобальная система координат

1.5.1. Модели цепи

Элементы цепи — пины и пластинки — представляют собой вытянутые тела. В основе моделирования цепи лежит представление о том, что каждое из этих тел можно рассматривать как стержень (балку), который может испытывать растяжение и сжатие, изгиб, кручение. При этом изгиб и кручение рассматриваются не всегда. Аппроксимируя положения точек элементов цепи по какому-нибудь закону (возможно, учитывающему характер их взаимодействия) и задавшись каким-либо законом распределения массы вдоль элементов, можно получить разные модели цепи — от простых до весьма сложных.

Во всех моделях цепи вариатора, рассматриваемых в этом разделе, считается, вся масса цепи распределена вдоль осей пинов, а пластинки безмассовые. Во всех моделях, за исключением одной, погонная плотность для каждого пина принимается постоянной. Она выбирается таким образом, чтобы суммарная масса, распределённая вдоль осей пинов, оказалась равна массе цепи. В одной из моделей масса сосредоточена в середине пина.

Пины и пластинки в цепи пронумерованы, как показано на рис. 1.13. В этом разделе номера пинов указываются при помощи нижнего индекса $p = 1, \dots, n$, где n — количество звеньев в цепи. Для идентификации звена между

пинами с номерами p и $p + 1$ используется пара нижних индексов $p, p + 1$. При этом если $p = n$, то под $p + 1$ следует понимать 1, то есть $((p + 1) - 1) \bmod n + 1$.

В звене цепи между p -тым и $(p + 1)$ -м пинами имеется $n_{p,p+1}$ пластинок; они пронумерованы от 1 до $n_{p,p+1}$, номер пластинки обозначается далее нижним индексом k .

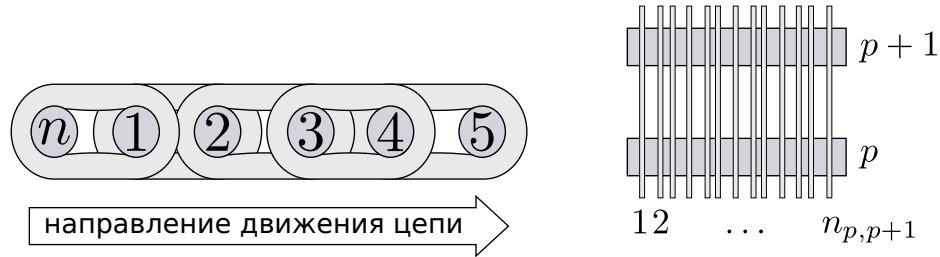


Рис. 1.13. Нумерация пинов и пластинок в цепи

1.5.1.1. Две простейшие модели цепи с плоскостью симметрии

Считается, что вся конструкция вариатора симметрична относительно координатной плоскости Ox_1x_2 — как для всех моделей малой размерности (разд. 1.4).

В обеих моделях принимается, что пины обладают нулевой податливостью на изгиб и кручение и конечной податливостью на растяжение и сжатие. Поэтому, с учётом симметрии, ось любого пина параллельна координатной оси Ox_3 . Точки оси пина можно идентифицировать при помощи параметра (лагранжевой координаты) ξ , изменяющегося от -1 на конце пина $x_3 < 0$ до 1 на конце $x_3 > 0$. Обозначив через l длину оси пина в недеформированном состоянии, примем $\xi = 2s/l$, где s — дуговая координата в недеформированном состоянии, отсчитанная от плоскости $x_3 = 0$, то есть в данном случае просто координата x_3 точки на оси недеформированного пина.

Теперь можно ввести в рассмотрение радиус-вектор \mathbf{u}_p точки на конце $x_3 > 0$ оси p -го пина и аппроксимировать с его помощью радиус-вектор $\mathbf{U}_p(\xi)$

любой точки на оси этого пина следующим образом.

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_p^\perp + \mathbf{k}u_p^\parallel, \quad \mathbf{u}_p^\perp \equiv u_{p,1}\mathbf{i} + u_{p,2}\mathbf{j}, \quad u_p^\parallel \equiv u_{p,3}, \quad (1.64)$$

$$\mathbf{U}_p(\xi) = \mathbf{U}_p^\perp + \mathbf{k}U_p^\parallel, \quad \mathbf{U}_p^\perp = \mathbf{u}_p^\perp, \quad U_p^\parallel = \xi u_p^\parallel. \quad (1.65)$$

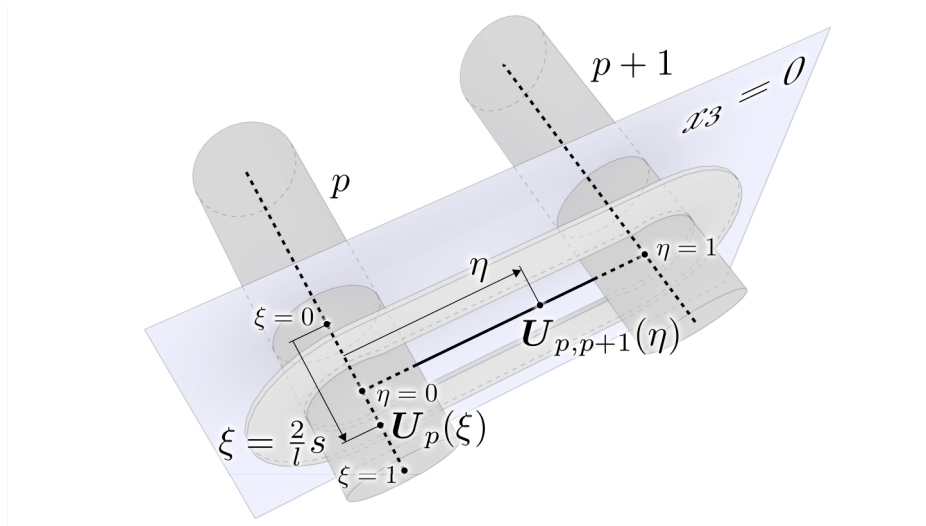


Рис. 1.14. Аппроксимация положений точек на осях пина и пластинки

Чтобы задать положение k -той пластинки звена между p -тым и $(p + 1)$ -м пинами, введём на её оси параметр (лагранжеву координату) η , изменяющийся от 0 в месте соединения пластинки с p -тым пином до 1 в месте её соединения с $(p + 1)$ -м пином и примем следующую аппроксимацию положения $\mathbf{U}_{p,p+1}^k(\eta)$ точки на оси пластинки:

$$\mathbf{U}_{p,p+1}^k(\eta) = (1 - \eta)\mathbf{U}_p(\xi_{p,p+1}^k) + \eta\mathbf{U}_{p+1}(\xi_{p,p+1}^k). \quad (1.66)$$

Здесь координата $\xi_{p,p+1}^k$ определяет положение пластинки вдоль оси пина; для каждой пластинки эта координата считается фиксированной. Координаты ξ, η и радиус-векторы $\mathbf{U}_p(\xi), \mathbf{U}_{p,p+1}(\eta)$ изображены на рис. 1.14.

Две модели, рассмотренные в этом разделе, отличаются лишь распределением массы вдоль оси пина. В первой модели масса p -го пина и половина массы связанных с ним пластинок звеньев $(p - 1, p)$ и $(p, p + 1)$ сосредоточена в середине пина ($\xi = 0$). Во второй модели эта же масса равномерно распределена вдоль оси пина. Это незначительное на первый взгляд различие позволяет, сравнивая

модели, понять, насколько важно рассматривать удары при вхождении пинов в контакт с шайбами (см. разд. 1.5.3.2).

В первой модели пин считается упругим в осевом направлении; во второй модели, кроме этого, действует сила линейного демпфирования вдоль оси. Две модели пина изображены на рис. 1.15. Пластинки — вязко-упругие на растяжение в обеих моделях; направление оси пластинки определяется положениями её концов $U_{p,p+1}^k(0)$, $U_{p,p+1}^k(1)$.

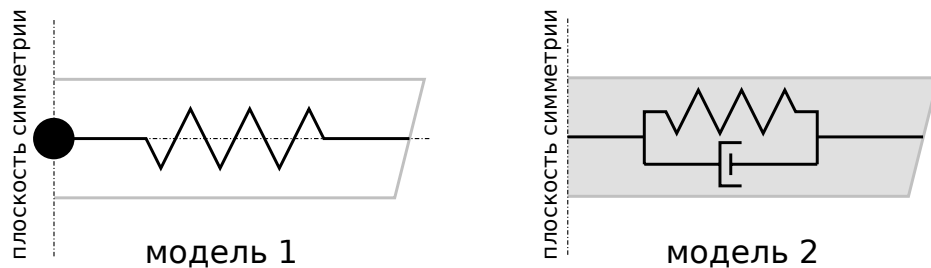


Рис. 1.15. Пины в двух простейших моделях цепи вариатора

Таким образом, в первой модели фактически лишь две обобщённые координаты в каждом пине — это декартовы координаты $u_{p,1}$, $u_{p,2}$ концов пина в плоскости Ox_1x_2 . В первой модели осевая координата конца пина $u_{p,3}$ не является независимой: на прямых участках цепи она равна половине длины пина $l/2$, так как осевая сила в пине нулевая, а при контакте пина с шайбой она определяется положением шайбы. Во второй модели $u_{p,3}$ — независимая обобщённая координата. Обобщённые координаты в двух моделях цепи изображены на рис. 1.16.

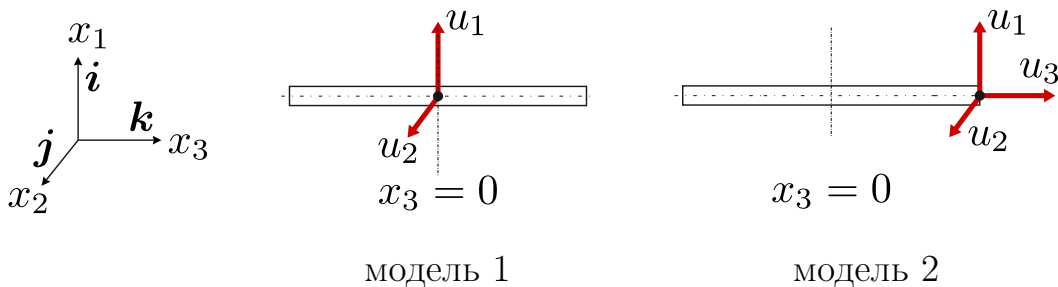


Рис. 1.16. Обобщённые координаты двух простейших моделях цепи вариатора

Чтобы, в соответствии с принятым подходом (разд. 1.2), сформулировать

уравнения динамики, требуется вычислить кинетическую и потенциальную энергию цепи, а также диссипативную функцию Рэлея, и, кроме того, найти работу внешних сил (их роль играют силы контактного взаимодействия с шайбами) на виртуальных перемещениях. Заметим, что, принимая определённые аппроксимации положений точек системы в пространстве и действуя далее в рамках формализма Лагранжа, мы фактически производим пространственную дискретизацию системы с распределёнными параметрами методом Ритца.

Кинетическая энергия цепи в первой модели равна

$$T^1 = \sum_{p=1}^n T_p^1, \quad T_p^1 = \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{u}}_p^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}_p^\perp = \frac{1}{2} m_p \sum_{\alpha=1}^2 \dot{u}_{p,\alpha}^2, \quad (1.67)$$

где m_p — эффективная масса пина (с учётом массы половинок прилегающих пластинок):

$$m_p = m_p^{pin} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n_{p-1,p}} m_{p-1,p}^k + \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} m_{p,p+1}^k \right) \quad (1.68)$$

(m_p^{pin} — масса пина, $m_{p,p+1}^k$ — масса пластинки). Во второй модели погонная плотность пина равна $\rho_p = m_p/l$, а кинетическая энергия отличается от (1.67) наличием слагаемых, обусловленных движением в осевом направлении:

$$T^2 = \sum_{p=1}^n T_p^2, \quad T_p^2 = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p \rho_p ds = T_p^1 + \frac{1}{2} m_p \frac{1}{3} \dot{u}_{p,3}^2. \quad (1.69)$$

Потенциальная энергия цепи равна энергии упругой деформации пинов и пластинок:

$$\Pi = \Pi^{pins} + \Pi^{links}, \quad \Pi^{pins} = \sum_{p=1}^n \Pi_p^{pin}, \quad \Pi^{links} = \sum_{p=1}^n \Pi_{p,p+1}^{link}, \quad (1.70)$$

$$\Pi_p^{pin} = \Pi_p^{pin,ext} = \frac{1}{2} c_p \Delta_p^2, \quad \Delta_p \equiv 2u_{p,3} - l, \quad (1.71)$$

$$\Pi_{p,p+1}^{link} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k (\Delta_{p,p+1}^k)^2, \quad (1.72)$$

$$\Delta_{p,p+1}^k \equiv |\mathbf{U}_{p,p+1}^k(1) - \mathbf{U}_{p,p+1}^k(0)| - L_{p,p+1}. \quad (1.73)$$

Здесь c_p — жёсткость пина на сжатие, $c_{p,p+1}^k$ — жёсткость пластинки на растяжение, Δ_p — осевая деформация пина, $L_{p,p+1}$ — длина осевой линии недеформированной пластинки, $\Delta_{p,p+1}^k$ — осевая деформация пластинки. Несмотря на то, что пластинки цепи фактически не способны работать на сжатие, в потенциальной энергии (1.72) это не отражено. Учёт этого обстоятельства в рассматриваемых простейших моделях цепи и не требуется, так как в расчётах деформации всех пластинок оказываются положительными благодаря натяжению цепи.

Деформации пинов и пластинок, конечно, можно считать малыми. С учётом этого целесообразно упростить выражение деформации пластинки (1.73) — это существенно упростит выражения потенциальной энергии и обобщённых сил. Временно введём формальный малый параметр $\lambda \ll 1$ и заменим Δ_p на $\lambda \Delta_p$, $\Delta_{p,p+1}^k$ — на $\lambda \Delta_{p,p+1}^k$. После этого удержим в правой части лишь слагаемые порядка λ . Итак, с учётом (1.66) и (1.65) выражение деформации пластинки (1.73) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda \Delta_{p,p+1}^k &= \left| \mathbf{u}_{p+1}^\perp - \mathbf{u}_p^\perp + \xi_{p,p+1}^k (u_{p+1,3} - u_{p,3}) \mathbf{k} \right| - L_{p,p+1} = \\ &= \left| \mathbf{u}_{p+1}^\perp - \mathbf{u}_p^\perp + \frac{1}{2} \lambda \xi_{p,p+1}^k (\Delta_{p+1} - \Delta_p) \mathbf{k} \right| - L_{p,p+1} \end{aligned}$$

Введём в рассмотрение близкий к единичному вектор, лежащий в плоскости Ox_1x_2 (рис. 1.17)

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \equiv \frac{\mathbf{u}_{p+1}^\perp - \mathbf{u}_p^\perp}{L_{p,p+1}}, \quad (1.74)$$

а также обозначим

$$a_{p,p+1}^k \equiv \frac{1}{2L_{p,p+1}} \xi_{p,p+1}^k (\Delta_{p+1} - \Delta_p).$$

Тогда

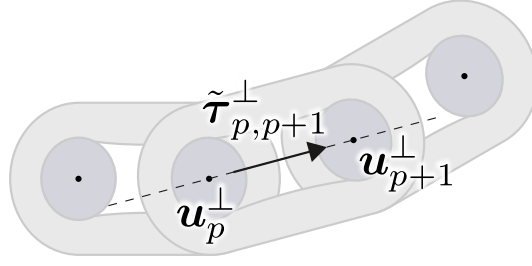


Рис. 1.17. Вектор направления звена цепи

$$\begin{aligned} \lambda \Delta_{p,p+1}^k &= L_{p,p+1} \left(\left| \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp + \lambda a_{p,p+1}^k \mathbf{k} \right| - 1 \right) = \\ &= L_{p,p+1} \left(\left| \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \right| - 1 \right) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Выражение в скобках должно иметь порядок λ , поэтому

$$\left| \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \right| = 1 + \lambda b_{p,p+1} + O(\lambda^2).$$

Константу $b_{p,p+1}$ можно определить из тождества

$$\tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp = \left| \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \right|^2 = 1 + 2\lambda b_{p,p+1} + O(\lambda^2),$$

в итоге получим

$$\lambda \Delta_{p,p+1}^k = \frac{L_{p,p+1}}{2} \left(\tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp - 1 \right) + O(\lambda^2).$$

Отбрасывая теперь члены $O(\lambda^2)$ и полагая $\lambda = 1$, получим окончательное упрощённое выражение деформации пластинки:

$$\Delta_{p,p+1}^k = \Delta_{p,p+1} \equiv \frac{L_{p,p+1}}{2} \left(\tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp - 1 \right). \quad (1.76)$$

Именно оно, а не (1.73), фактически используется в выражении потенциальной энергии (1.72). Отметим, что выражение (1.76) является квадратичной функцией обобщённых координат, и, следовательно, не требует вычисления квадратного корня. Более важно, что полученное выражение $\Delta_{p,p+1}^k$ не зависит от номера пластинки k — см. (1.75), — то есть деформации всех пластинок звена одинаковы, поэтому верхний индекс k можно опустить. Это позволяет рассматривать

все пластинки звена как один упругий элемент с жёсткостью $c_{p,p+1}$, равной суммарной жёсткости пластинок:

$$\Pi_{p,p+1}^{link} = \frac{1}{2} c_{p,p+1} (\Delta_{p,p+1})^2, \quad c_{p,p+1} \equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k. \quad (1.77)$$

Диссипативная функция Рэлея содержит слагаемые, отвечающие за продольное демпфирование в пинах (Φ^{pins} , только во второй модели) и пластинках (Φ^{links} , в обеих моделях). Кроме того, как показало сравнение КПД вариатора, измеренного экспериментально и вычисленного в расчётах динамики на основе рассматриваемых моделей, необходим учёт диссипативных сил, возникающих при относительном повороте соседних звеньев цепи (Φ^{joints} , в обеих моделях).

Итак, в первой модели цепи диссипативная функция Рэлея Φ^1 равна

$$\Phi^1 = \Phi^{links} + \Phi^{joints}, \quad \Phi^{links} = \sum_{p=1}^n \Phi_{p,p+1}^{link}, \quad \Phi^{joints} = \sum_{p=1}^n \Phi_p^{joint}, \quad (1.78)$$

$$\Phi_{p,p+1}^{link} = \frac{1}{2} b_{p,p+1} \left(\dot{\Delta}_{p,p+1} \right)^2, \quad (1.79)$$

$$\Phi_p^{joint} = \frac{1}{2} b_p^{joint} \left(\omega_p^{joint} \right)^2. \quad (1.80)$$

Скорость деформации пластинки вычисляется дифференцированием (1.76) по времени:

$$\dot{\Delta}_{p,p+1} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{p+1}^\perp - \dot{\mathbf{u}}_p^\perp). \quad (1.81)$$

Скорость относительного поворота звеньев ω_p^{joint} можно определить следующим образом. Направление оси каждой пластинки в звене между p -тым и $(p+1)$ -м пинами близко к направлению вектора $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$, поэтому естественно принять это направление за направление всего звена. Поскольку вектор $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ всё время остаётся в плоскости Ox_1x_2 , его угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{p,p+1}$ перпендикулярна этой плоскости: $\boldsymbol{\omega}_{p,p+1} = \omega_{p,p+1} \mathbf{k}$. Величину угловой скорости $\omega_{p,p+1}$ проще всего вычислить, рассмотрев ортонормированный базис из векто-

ров $\boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp \equiv \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp / |\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|$, $\boldsymbol{n}_{p,p+1}^\perp \equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp$, \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp &= x \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp, \quad x \equiv |\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp = \dot{x} \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp + x \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp &= \omega_{p,p+1} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp = \omega_{p,p+1} \boldsymbol{n}_{p,p+1}^\perp \quad \Rightarrow \\ \omega_{p,p+1} &= \boldsymbol{n}_{p,p+1}^\perp \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp = \mathbf{k} \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \times \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp}{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Скорость относительного поворота соседних звеньев ω_p^{joint} , входящая в (1.80), есть, очевидно, разность величин угловых скоростей звеньев:

$$\omega_p^{joint} = \omega_{p,p+1} - \omega_{p-1,p}. \quad (1.83)$$

Во второй модели цепи диссипативная функция Рэля Φ^2 содержит также слагаемое Φ^{pins} , обеспечивающее осевое демпфирование в пинах:

$$\Phi^2 = \Phi^1 + \Phi^{pins}, \quad \Phi^{pins} = \sum_{p=1}^n \Phi_p^{pin}, \quad (1.84)$$

$$\Phi_p^{pin} = \Phi_p^{pin,ext} = \frac{1}{2} b_p \dot{\Delta}_p^2, \quad \dot{\Delta}_p = 2\dot{u}_{p,3}. \quad (1.85)$$

Выбор коэффициентов демпфирования. Демпфирование в динамических моделях вариатора играет в основном роль «регуляризирующего фактора»: оно используется преимущественно для подавления колебаний с наиболее высокими для данной модели частотами. Получаемые в динамических моделях вариатора высокочастотные колебания обычно не представляют интереса и могут существенно отличаться от реальных. Если рассматривать свободные колебания линейной упругой системы с демпфированием

$$A\ddot{u} + B\dot{u} + Cu = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad A = A^T > 0, \quad B = B^T \geq 0, \quad C = C^T \geq 0,$$

то для подавления наиболее высокочастотных собственных колебаний естественно вводить демпфирование так, чтобы соответствующая ему матрица B была пропорциональна матрице жёсткости C : $B = \beta C$ (внутреннее демпфирование), потому что в этом случае оказывается, что чем больше частота, тем больше

демпфирование [65, §16]. Действительно, приведя матрицы инерции и жёсткости к диагональному виду одним и тем же преобразованием подобия X , получим n независимых уравнений колебаний в главных координатах [65, §12]:

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \text{diag}(A_1, \dots, A_n), & X^{-1}CX &= \text{diag}(C_1, \dots, C_n), \\ X^{-1}u = \xi &\Rightarrow A_i \ddot{\xi}_i + \beta C_i \dot{\xi}_i + C_i \xi_i = 0 &\Leftrightarrow \\ \ddot{\xi}_i + 2n_i \dot{\xi}_i + k_i^2 \xi_i &= 0, & k_i^2 &\equiv \frac{C_i}{A_i}, \quad n_i \equiv \frac{1}{2} \beta k_i^2 \end{aligned}$$

При докритическом демпфировании $n_i < k_i$ показатель экспоненты в решении комплексный и равен $-n_i \pm i \sqrt{k_i^2 - n_i^2}$. Удобно количественно характеризовать демпфирование безразмерным коэффициентом *относительного демпфирования* $\nu_i \equiv n_i/k_i$. Докритическому демпфированию соответствуют $\nu_i < 1$, а малым можно считать демпфирование при значениях ν_i до 0,01–0,1. Легко видеть, что в случае, когда матрица демпфирования пропорциональна матрице жёсткости, относительное демпфирование растёт с ростом собственной частоты:

$$\nu_i = \frac{1}{2} \beta k_i.$$

Отсюда следует простая рекомендация по выбору коэффициента демпфирования β в линейной системе. Задавшись уровнем относительного демпфирования ν колебаний с наибольшей частотой k , принимают

$$\beta = \frac{2\nu}{k}, \quad 0 < \nu < 1. \quad (1.86)$$

Даже если система ОДУ нелинейна, предложенный подход к выбору демпфирования хорошо работает для моделей вариатора, потому что в каждый момент времени поведение системы близко к поведению линеаризованной системы. Требуется лишь оценить максимальную частоту колебаний — для этого можно рассмотреть один характерный осциллятор. Так, например, легко найти частоту осевых колебаний отдельного пина (во второй модели) или частоту продольных колебаний отдельного звена цепи. Из (1.69) и (1.71) ясно, что частота осевых колебаний пина равна $\sqrt{12c_p/m_p}$; из (1.67) и (1.77) ясно, что частота

продольных колебаний звена равна $\sqrt{2c_{p,p+1}/m_p}$. В последнем случае следует рассмотреть линейную систему с двумя степенями свободы q_1 , q_2 и лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}m_p (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}c_{p,p+1}(q_1 - q_2)^2.$$

Для собственной частоты ω получится характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} k^2 - \omega^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^2(\omega^2 - 2k^2) = 0, \quad k^2 \equiv \frac{c_{p,p+1}}{m_p}.$$

Предложенная методика выбора коэффициентов демпфирования используется в рассматриваемых моделях повсеместно; исключение составляет коэффициент b_p^{joint} демпфирования относительного поворота звеньев. Он существенно влияет на КПД в расчётах динамики, особенно на быстрых режимах с небольшим крутящим моментом. Поэтому b_p^{joint} трактуется как подгоночный параметр, он назначается таким образом, чтобы обеспечить совпадение измеренного и расчётного КПД в некотором быстром слабо нагруженном режиме.

Работа сил контактного взаимодействия с шайбами. Модель цепи является подсистемой всей модели вариатора, поэтому силы контактного взаимодействия с шайбами естественно считать приложенными к цепи извне. Для вычисления соответствующих обобщённых сил требуется найти выражение элементарной работы этих сил на виртуальных перемещениях.

Будем считать, что к точкам на концах p -го пина (в рассматриваемых здесь простейших моделях цепи силы контактного взаимодействия всегда прикладываются в точках на концах оси пина) приложены силы \mathbf{F}_p^- (на конце $x_3 < 0$), \mathbf{F}_p^+ (на конце $x_3 > 0$). Поскольку плоскость $x_3 = 0$ является плоскостью симметрии не только для модели цепи, но и для всей модели вариатора, приложенные силы можно представить в виде

$$\mathbf{F}_p^- = \mathbf{F}_p^\perp - F_{p,3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_p^+ = \mathbf{F}_p^\perp + F_{p,3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_p^\perp = F_{p,1}\mathbf{i} + F_{p,2}\mathbf{j}. \quad (1.87)$$

Эти силы совершают работу

$$\delta W_p = 2\mathbf{F}_p^+ \cdot \delta \mathbf{u}_p = 2\mathbf{F}_p^\perp \cdot \delta \mathbf{u}_p^\perp + 2F_{p,3} \delta u_{p,3}. \quad (1.88)$$

Напомним, что в первой из двух рассматриваемых моделей цепи $u_{p,3}$ (а для некоторых моделей контактного взаимодействия и во второй модели — при контакте пина с шайбой) не является независимой обобщённой координатой — в этой модели $\delta u_{p,3}$ выражается через $\delta \mathbf{u}^\perp$ и положение шайбы: пусть контактная поверхность шайбы задана функцией z от радиус-вектора $\mathbf{x}^\perp = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}$ в плоскости Ox_1x_2 , равной третьей координате x_3 точки на поверхности. Пусть положение шайбы определяется набором обобщённых координат $q = [q_1, \dots, q_m]^T$. Тогда указанная функция зависит ещё и от них: $z(\mathbf{x}^\perp, q)$. Когда p -тый пин находится в контакте с шайбой, имеет место зависимость $u_{p,3} = z(\mathbf{u}_p^\perp, q)$. Отсюда

$$\delta u_{p,3} = \left. \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}^\perp} \right|_{\mathbf{x}^\perp = \mathbf{u}_p^\perp} \cdot \delta \mathbf{u}_p^\perp + \sum_{i=1}^m \frac{\partial z}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (1.89)$$

Это выражение $\delta u_{p,3}$ и подразумевается в (1.88), когда $u_{p,3}$ не является независимой обобщённой координатой и пин находится в контакте с шайбой.

Обобщённые силы. Силы инерции вычисляются в обеих моделях весьма просто — см. (1.67), (1.69):

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial T^{1,2}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = -m_p \ddot{\mathbf{u}}_p^\perp, \quad -\frac{d}{dt} \frac{\partial T^2}{\partial u_{p,3}} = -\frac{1}{3} m_p \ddot{u}_{p,3}. \quad (1.90)$$

Потенциальные силы — см. (1.70), (1.71), (1.76), (1.77), (1.74):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^{\Pi, \perp} &\equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = -\frac{\partial \Pi_{p-1,p}^{link}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} - \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = \\ &= -\frac{\partial \Pi_{p-1,p}^{link}}{\partial \Delta_{p-1,p}} \frac{\partial \Delta_{p-1,p}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} - \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \Delta_{p,p+1}} \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = \\ &= \frac{\partial \Pi_{p-1,p}^{link}}{\partial \Delta_{p-1,p}} \frac{\partial \Delta_{p-1,p}}{\partial \mathbf{u}_{p-1}^\perp} - \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \Delta_{p,p+1}} \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = \mathbf{Q}_{p,p+1}^{\Pi, link} - \mathbf{Q}_{p-1,p}^{\Pi, link}, \\ \mathbf{Q}_{p,p+1}^{\Pi, link} &\equiv -\frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = c_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp; \\ \mathbf{Q}_{p,3}^{\Pi} &\equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial u_{p,3}} = -\frac{\partial \Pi_p^{pin}}{\partial u_{p,3}} = -2c_p \Delta_p. \end{aligned}$$

Если $u_{p,3}$ не является независимой обобщённой координатой, а выражается через другие обобщённые координаты q_1, \dots, q_m , то $Q_{p,3}^{\Pi}$ превращается в несколько обобщённых сил $Q_{p,3,q_i}^{\Pi}$ для каждой из этих координат:

$$Q_{p,3}^{\Pi} \delta u_{p,3} = \sum_{i=1}^m Q_{p,3,q_i}^{\Pi} \delta q_i, \quad Q_{p,3,q_i}^{\Pi} \equiv Q_{p,3}^{\Pi} \frac{\partial u_{p,3}}{\partial q_i}. \quad (1.91)$$

Диссипативные силы вычисляются аналогичным образом — см. (1.78), (1.84), (1.81), (1.82), (1.83):

$$\begin{aligned} Q_p^{d,\perp} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = -\frac{\partial \Phi_{p-1,p}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_p^{joint}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \\ &= -\frac{\partial \Phi_{p-1,p}^{link}}{\partial \dot{\Delta}_{p-1,p}} \frac{\partial \dot{\Delta}_{p-1,p}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link}}{\partial \dot{\Delta}_{p,p+1}} \frac{\partial \dot{\Delta}_{p,p+1}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_p^{joint}}{\partial \omega_p^{joint}} \frac{\partial \omega_p^{joint}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \\ &= \frac{\partial \Phi_{p-1,p}^{link}}{\partial \dot{\Delta}_{p-1,p}} \frac{\partial \dot{\Delta}_{p-1,p}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p-1}^\perp} - \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link}}{\partial \dot{\Delta}_{p,p+1}} \frac{\partial \dot{\Delta}_{p,p+1}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_p^{joint}}{\partial \omega_p^{joint}} \left(\frac{\partial \omega_{p,p+1}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} + \frac{\partial \omega_{p-1,p}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p-1}^\perp} \right) = \\ &= Q_{p,p+1}^{d,link} - Q_{p-1,p}^{d,link} - Q_p^{d,joint}, \\ Q_{p,p+1}^{d,link} &\equiv -\frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = b_{p,p+1} \dot{\Delta}_{p,p+1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, \\ Q_p^{d,joint} &= b_p^{joint} \omega_p^{joint} (V_{p,p+1} + V_{p-1,p}) \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$V_{p,p+1} \equiv \frac{\partial \omega_{p,p+1}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \frac{\mathbf{k} \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp}{L_{p,p+1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp}, \quad (1.93)$$

$$Q_{p,3}^d = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_{p,3}} = -\frac{\partial \Phi_p^{pin}}{\partial \dot{u}_{p,3}} = -2b_p \dot{\Delta}_p. \quad (1.94)$$

Сила $Q_{p,3}^d$ есть только во второй модели цепи, так как в первой модели отсутствует осевое демпфирование пинов. В случае, когда $u_{p,3}$ не является независимой обобщённой координатой, а выражается через другие обобщённые координаты q_1, \dots, q_m , то для $Q_{p,3}^d$, имеет место соотношение, аналогичное (1.91).

1.5.1.2. Учёт изгиба пинов в рамках модели с плоскостью симметрии

Очевидным недостатком простейших моделей цепи, описанных в п. 1.5.1.1, является отсутствие возможности выяснить детали распределения сил натяжения по пластинкам звена цепи: их деформации в этих моделях одинаковы, так

как ось каждого пина находится на прямой, параллельной оси Ox_3 . В реальности пины изгибаются, и из-за этого деформации пластинок в звене различны. В данном разделе представлена модель цепи, учитывающая изгиб пинов; при этом по-прежнему считается, что вся конструкция вариатора обладает плоскостью симметрии $x_3 = \text{const}$.

Обобщённые координаты в модели цепи — декартовы координаты $u_{p,1}$, $u_{p,2}$, $u_{p,3}$ точек на концах осей пинов $x_3 > 0$ (как в модели 2 из п. 1.5.1.1), а также две координаты $u'_{p,1}$, $u'_{p,2}$ вектора касательной к осям пина в тех же точках (рис. 1.18). Радиус-вектор $\mathbf{U}_p(\xi)$ точки на оси p -го пина аппроксимируется следующим образом.

$$\mathbf{U}_p(\xi) = \mathbf{U}_p^\perp + \mathbf{k}U_p^\parallel, \quad \mathbf{U}_p^\perp = h_0(\xi)\mathbf{u}_p^\perp + h_1(\xi)\mathbf{u}'_p, \quad (1.95)$$

$$\mathbf{u}_p^\perp \equiv u_{p,1}\mathbf{i} + u_{p,2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}'_p \equiv u'_{p,1}\mathbf{i} + u'_{p,2}\mathbf{j} \quad (1.96)$$

$$h_0(\xi) = 1, \quad h_1(\xi) = \frac{l}{2}(\xi^2 - 1) \quad (1.96)$$

$$U_p^\parallel = \xi u_{p,3}. \quad (1.97)$$

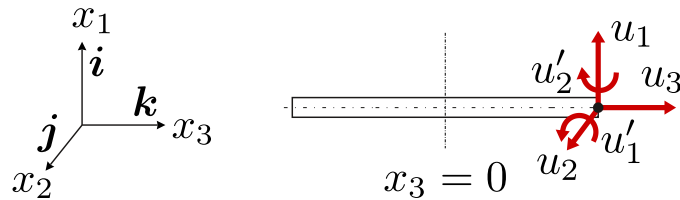


Рис. 1.18. Обобщённые координаты в симметричной модели цепи с учётом изгиба пина

При этом форма изогнутой оси пина определяется интерполяционным многочленом $h_1(\xi)$ (см. рис. 1.19) — это парабола. Такую форму имеет балка Бернулли–Эйлера, нагруженная сосредоточенным моментом на конце. Заметим, что в реальности пин нагружен силами натяжения пластинок (их можно приближённо трактовать как распределённую силу) и внецентренно приложенными силами на концах (их можно приближённо трактовать сосредоточенными силами и моментами на концах). Поэтому, безусловно, в реальности форма изгиба оси пина отличается от параболы.

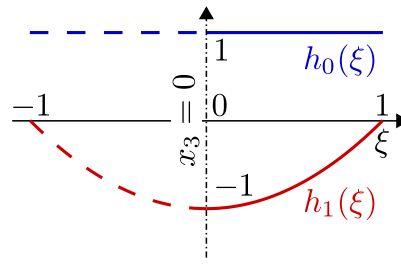


Рис. 1.19. Многочлены для интерполяции формы изогнутой оси пина

Чтобы количественно оценить, насколько хороша предлагаемая аппроксимация прогиба пина, рассмотрим две задачи. В рамках первой задачи найдём прогиб $u(s)$ в балке длины l под действием постоянной распределённой силы q с граничными условиями $u'(0) = 0$, $u'''(0) = 0$, $u(l) = 0$, $u''(l) = 0$ (рис. 1.20).

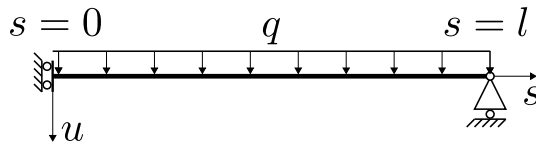


Рис. 1.20. Задача для количественной оценки качества аппроксимации формы изогнутой линии пина

Интегрируя уравнение изгиба балки $au^{IV} = q$ (здесь a — жёсткость на изгиб) с учётом граничных условий, получим

$$u(s) = \frac{q}{24a} (5l^4 - 6l^2s^2 + s^4). \quad (1.98)$$

Сравним это точное решение с тем, которое получается при аппроксимации прогиба параболой (обозначим его $\tilde{u}(s)$, чтобы не путать с $u(s)$):

$$\tilde{u} = c(s^2 - l^2), \quad (1.99)$$

где c — коэффициент, по смыслу являющийся обобщённой координатой. Чтобы построить приближённое решение, вычислим потенциальную энергию $\Pi(c)$ и найдём положение равновесия $\Pi' = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi(c) &= \int_0^l \left[\frac{1}{2}a(\tilde{u}''(s))^2 - q\tilde{u}(s) \right] ds = 2alc^2 + \frac{2}{3}ql^3c \Rightarrow \\ \Pi'(c) &= 4alc + 2ql^3 = 0 \Rightarrow c = -\frac{ql^2}{6a} \end{aligned}$$

Таким образом, при аппроксимации прогиба параболой получаем следующее приближённое решение:

$$\tilde{u}(s) = \frac{q}{24a} (4l^4 - 4l^2 s^2). \quad (1.100)$$

Сравнивая (1.98) и (1.100), убеждаемся, что различие прогибов не превышает 20% (рис. 1.21) — примерно такая же ошибка может возникнуть из-за отсутствия учёта влияния осевой силы в пине на его изгибную жёсткость (см. п. 1.3.3).

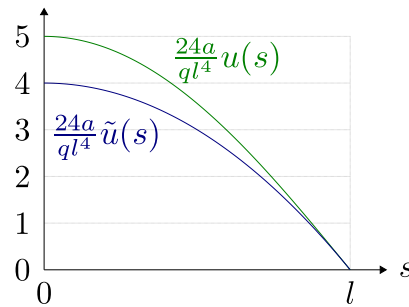


Рис. 1.21. Сравнение форм изогнутой оси пина в тестовой задаче

В рамках второй задачи сравним первую частоту собственных колебаний балки при тех же граничных условиях с частотой, которая получается при аппроксимации (1.99). Точное решение удовлетворяет уравнению колебаний балки $au^{IV} + \rho\ddot{u} = 0$, где $\rho = m/l$ — погонная плотность, а m — масса. Решение с наименьшей частотой ω_1 при заданных граничных условиях имеет вид $u = \sin(\omega_1 t) \cos \frac{\pi s}{2l}$. Получается частота колебаний $\omega_1 = \sqrt{\frac{a}{ml^3} \frac{\pi^4}{16}}$.

Чтобы найти частоту в случае аппроксимации (1.99), найдём кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{u}^2 ds = \frac{m}{2l} \int_0^l (s^2 - l^2)^2 ds = \frac{4}{15} ml^4 \dot{c}^2.$$

Потенциальная энергия в задаче о свободных колебаниях состоит из одного квадратичного слагаемого — такого же, как в первой задаче. Составляя уравнение Лагранжа, получим

$$\frac{8}{15} ml^4 \ddot{c} + 4alc = 0,$$

откуда находим частоту $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{a}{m l^3} \frac{15}{2}}$. Она выше частоты ω_1 на 11%.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что выбор многочленов (1.96) для аппроксимации формы изогнутой оси пина разумен. Однако остался за кадром вопрос о том, насколько сильно влияет такая аппроксимация на силы натяжения пластинок цепи. Оценки показывают, что это сильно зависит от соотношения жёсткости пина на изгиб и жёсткости пластинки на растяжение.

Вернёмся к модели цепи, учитывающей изгиб пинов. Будем считать, что, не считая податливости на изгиб, пин такой же как во второй модели цепи из п. 1.5.1.1: масса m_p (1.68) равномерно распределена вдоль оси p -го пина; пин вязко-упругий в осевом направлении (рис. 1.15, справа). Пластинки по-прежнему считаются безынерционными, вязко-упругими и работающими лишь на растяжение.

Кинетическая энергия цепи определяется скоростями точек осей пинов, которые теперь вычисляются согласно (1.95), (1.97):

$$\begin{aligned} T &= \sum_{p=1}^n T_p, \quad T_p = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p \rho_p ds = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_p}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\dot{\mathbf{U}}_p^\perp \cdot \dot{\mathbf{U}}_p^\perp + \left(\dot{U}_p^\parallel \right)^2 \right) ds = \\ &= \frac{1}{2} m_p \left[\dot{\mathbf{u}}_p^\perp \cdot \mathbf{u}_p^\perp - \frac{2l}{3} \dot{\mathbf{u}}_p^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}_p' + \frac{2l^2}{15} \dot{\mathbf{u}}_p' \cdot \dot{\mathbf{u}}_p' + \frac{1}{3} \dot{u}_{p,3}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} m_p \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\dot{u}_{p,\alpha}^2 - \frac{2l}{3} \dot{u}_{p,\alpha} \dot{u}_{p,\alpha}' + \frac{2l^2}{15} (\dot{u}_{p,\alpha}')^2 \right) + \frac{1}{3} \dot{u}_{p,3}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Потенциальная энергия цепи равна суммарной энергии упругой деформации пинов и пластинок, как в моделях п. 1.5.1.1 (1.70). При этом энергия Π_p^{pin} деформации p -го пина складывается из энергий осевого сжатия и изгиба:

$$\Pi_p^{pin} = \Pi_p^{pin,ext} + \Pi_p^{pin,bend}. \quad (1.102)$$

Энергия осевой деформации $\Pi_p^{pin,ext}$ остаётся прежней (1.71). Энергия изгиба $\Pi_p^{pin,bend}$ требует вычисления. Заметим, что жёсткости пина на изгиб различны.

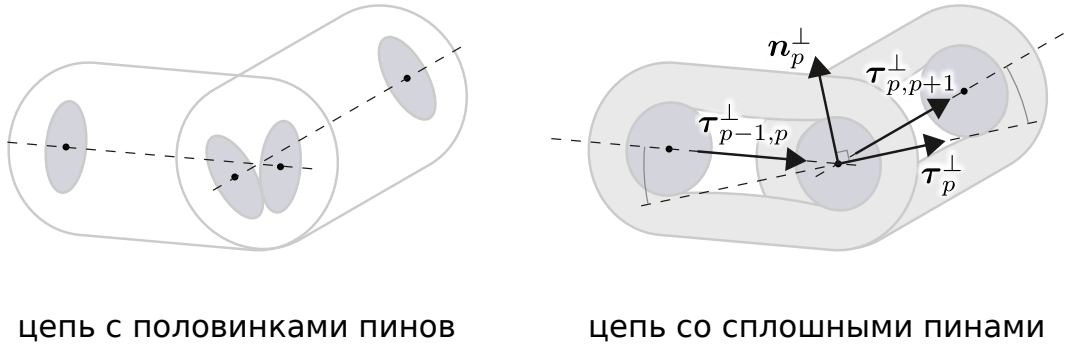


Рис. 1.22. Ориентация поперечного сечения пина

В реальности пин состоит из двух одинаковых половинок, ориентация (поворот вокруг оси) каждой из которых определяется ориентацией связанного с ней звена цепи. В данной модели считается, что пин цельный, изгибные жёсткости не зависят от взаимной ориентации охватывающих его звеньев, а ориентация главных осей инерции сечения определяется ориентацией звеньев, охватывающих пин (рис. 1.22) — принимается, что тензор изгибной жёсткости p -го пина $\underline{\underline{a}}_p$ имеет вид

$$\underline{\underline{a}}_p = a_1 \boldsymbol{\tau}_p^\perp \boldsymbol{\tau}_p^\perp + a_2 \mathbf{n}_p^\perp \mathbf{n}_p^\perp, \quad \boldsymbol{\tau}_p^\perp \equiv \frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|}, \quad \mathbf{n}_p^\perp \equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_p^\perp. \quad (1.103)$$

Орты $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$, \mathbf{n}_p^\perp параллельны главным осям инерции сечения. Коэффициенты a_1 и a_2 — жёсткости на изгиб в плоскостях векторов \mathbf{k} , \mathbf{n}_p^\perp и \mathbf{k} , $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$ соответственно. Близкий к единичному вектор $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ (1.74) определяет ориентацию звена между p -тым и $(p+1)$ -м пирами. Введённый таким образом тензор $\underline{\underline{a}}_p$ не зависит от координаты ξ на оси пина.

Упругий потенциал Π^\perp , связанный с изгибом пина, определяется следующим образом:

$$\Pi^\perp = \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^\perp \cdot \underline{\underline{a}}_p \cdot \boldsymbol{\kappa}^\perp, \quad \boldsymbol{\kappa}^\perp = \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}^\perp}{\partial s},$$

где $\boldsymbol{\vartheta}^\perp = \vartheta_1 \mathbf{i} + \vartheta_2 \mathbf{j}$ — вектор малого поворота сечения. Будем считать, что пин не работает на сдвиг, то есть деформация сдвига $\boldsymbol{\gamma}^\perp$ нулевая:

$$\boldsymbol{\gamma}^\perp = \frac{\partial \mathbf{U}^\perp}{\partial s} - \boldsymbol{\vartheta}^\perp \times \mathbf{k} = 0.$$

Это равенство выражает обычную для балки Бернулли — Эйлера связь касательной к оси и вектора малого поворота сечения; оно позволяет исключить из рассмотрения деформацию $\boldsymbol{\kappa}^\perp$:

$$\boldsymbol{\kappa}^\perp = \mathbf{k} \times \frac{\partial^2 \mathbf{U}^\perp}{\partial s^2},$$

или, если перейти от производной по s к производной по параметру ξ , которую далее будем обозначать штрихом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^\perp = \frac{4}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{U}^{\perp''} &\Rightarrow \Pi^\perp = \frac{8}{l^4} \mathbf{U}^{\perp''} \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{U}^{\perp''}, \\ \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p &\equiv -\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{a}}_p \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Таким образом, потенциальная энергия изгиба p -го пина равна

$$\Pi_p^{pin,bend} = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \Pi^\perp d\xi = \frac{4}{l^3} \int_{-1}^1 \mathbf{U}_p^{\perp''} \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{U}_p^{\perp''} d\xi. \quad (1.105)$$

Согласно принятой аппроксимации перемещений (1.95), (1.96),

$$\mathbf{U}_p^{\perp''} = l \mathbf{u}'_p = \sum_{\alpha=1}^2 l u'_{p,\alpha} \mathbf{e}_\alpha$$

(не зависит от ξ), так что

$$\Pi_p^{pin,bend} = \frac{8}{l} \mathbf{u}'_p \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{u}'_p = \frac{8}{l} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \hat{a}_{\alpha\beta} u'_{p,\alpha} u'_{p,\beta}, \quad a_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{e}_\beta. \quad (1.106)$$

Потенциальная энергия растяжения пластинок цепи определяется формулой (1.72). При этом деформация пластинки вычисляется по формуле, аналогичной (1.76), но теперь из-за изгибов пина каждая (k -тая) пластинка имеет свой вектор направления $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp(\xi_{p,p+1}^k)$, близкий к $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp(\xi) \equiv \frac{\mathbf{U}_{p+1}^\perp(\xi) - \mathbf{U}_p^\perp(\xi)}{L_{p,p+1}}.$$

Все рассуждения, ведущие к формуле (1.76), можно повторить, взяв $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ вместо $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$. Чтобы упростить выражение потенциальной энергии растяжения

пластинок с учётом малости прогибов пинов и в результате исключить необходимость суммирования по всем пластинкам звена, представим вектор $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ в виде

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp(\xi) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + \lambda h_1(\xi) \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1} = \frac{\mathbf{u}'_{p+1} - \mathbf{u}'_p}{L_{p,p+1}}.$$

Формальный малый параметр λ указывает на малость вектора $\tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}$. Если теперь подставить выражение $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ в (1.76) вместо $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$, отбросить слагаемые $O(\lambda^2)$ и положить $\lambda = 1$, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{p,p+1}^k &= \frac{L_{p,p+1}}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + 2h_1(\xi_{p,p+1}^k) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1} - 1) = \\ &= \Delta_{p,p+1} + h_1(\xi_{p,p+1}^k) \Delta'_{p,p+1}, \quad \Delta'_{p,p+1} \equiv L_{p,p+1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Таким образом, потенциальная энергия растяжения всех пластинок звена (1.72) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{p,p+1}^{link} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k (\Delta_{p,p+1}^k)^2 = \\ &= \frac{1}{2} [c_{p,p+1} \Delta_{p,p+1}^2 + 2c'_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1} + c''_{p,p+1} (\Delta'_{p,p+1})^2], \quad (1.108) \\ c'_{p,p+1} &\equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k h_1(\xi_{p,p+1}^k), \quad c''_{p,p+1} \equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k h_1^2(\xi_{p,p+1}^k). \end{aligned}$$

Это отличается от (1.77) наличием слагаемых, связанных с изгибом пина. Суммирование по всем пластинкам звена есть лишь в коэффициентах $c_{p,p+1}$, $c'_{p,p+1}$, $c''_{p,p+1}$ и может быть выполнено заранее, это существенно уменьшает объём вычислений в численной реализации. Таким образом, в рамках данной модели можно считать, что все пластинки звена ведут себя как некоторым образом гомогенизированный упругий слой.

К выбору изгибных жёсткостей пина. В реальности пин состоит из двух одинаковых половинок, находящихся в контакте друг с другом, а в данной модели пин цельный. Рассмотрим отдельно изгиб в плоскостях векторов \mathbf{k} , \mathbf{n} и \mathbf{k} , $\boldsymbol{\tau}$ (в этом разделе будем для краткости опускать нижний индекс p и верхний \perp : \mathbf{n} вместо \mathbf{n}_p^\perp , $\boldsymbol{\tau}$ вместо $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$). Рассмотрим пин, состоящий из двух половинок,

причём будем считать, что их взаимная ориентация такова, что соответствующие главные оси инерции сечений обеих половинок параллельны друг другу, то есть векторы $\boldsymbol{\tau}$ и \boldsymbol{n} направлены по главным осям каждой половинки (обычно это соответствует взаимному повороту звеньев на угол около 10°). Тогда тензор изгибной жёсткости одной половинки пина имеет вид

$$\underline{\underline{\boldsymbol{a}}}^{half} = a_1^{half} \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau} + a_2^{half} \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}.$$

Тогда, очевидно, жёсткость a_2 пары половинок пина на изгиб в плоскости векторов $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}$ равна удвоенной жёсткости одной половинки, потому что в этой плоскости пины изгибаются одинаково вне зависимости от того, считать ли их независимыми или же единым телом (рис. 1.23, слева):

$$a_2 = 2a_2^{half}.$$



Рис. 1.23. Изгиб пина из двух половинок

Что касается изгиба в плоскости $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\tau}$, то здесь картина сложнее: если считать пины независимыми (и, как следствие, $a_1 = a_1^{(a)} = 2a_1^{half}$), то при изгибе неизбежно скольжение вдоль линии контакта, поскольку в изогнутом состоянии образующие боковых поверхностей на линии контакта имеют разные длины на разных половинках (рис. 1.23, в центре). Если же считать, что проскальзывание вдоль линии контакта отсутствует и обе половинки изгибаются как одна балка, то следует принять

$$a_1 = a_1^{(b)} = 2 \int_F (x - h)^2 dF = 2 \int_F x^2 dF + 4h \int_F x dF + 2h^2 \int_F dF = 2 \left(a_1^{half} + h^2 F \right),$$

где F — площадь поперечного сечения половинки пина, x — координата вдоль

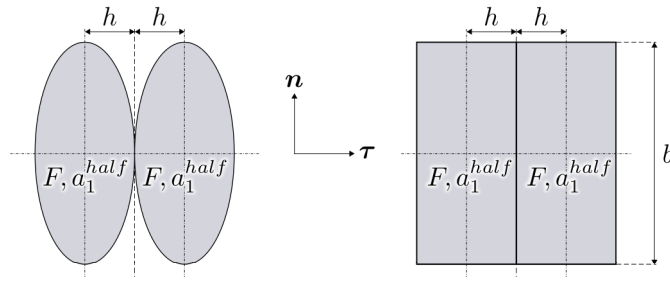


Рис. 1.24. К оценке изгибной жёсткости пина a_1

главной центральной оси сечения половинки пина, параллельной вектору τ , h — расстояние между центром инерции сечения и плоскостью, разделяющей половинки (рис. 1.24, слева). Различие между жёсткостями $a_1^{(a)}$ и $a_1^{(b)}$ значительно, например, для прямоугольного сечения высоты $2h$ (в направлении τ) и ширины b (в направлении \mathbf{n}) — рис. 1.24, справа — получается

$$F = 2bh, \quad a_1^{half} = \frac{2}{3}bh^3, \quad a_1^{(a)} = \frac{4}{3}bh^3, \quad a_1^{(b)} = \frac{16}{3}bh^3,$$

то есть жёсткости $a_1^{(a)}$ и $a_1^{(b)}$ различаются в четыре раза.

Чтобы выяснить, какой из случаев (а), (б) имеет место при изгибе пина в плоскости векторов \mathbf{k}, τ , представим на некоторое время, что реализуется случай (б) и определим, при каких условиях это возможно. Поскольку в деформированном состоянии оси половинок имеют различные длины, осевые усилия в половинках должны быть различными. К этому могут привести два фактора: различие осевых сил на торцах (этот фактор далее не рассматриваем) и сила трения в осевом направлении вдоль линии контакта половинок. Половинки пина прижаты друг к другу силами натяжения пластинок цепи; силу натяжения всего звена обозначим T . Тогда сила сухого трения покоя не превосходит Tf , где f — коэффициент трения покоя. Оценим теперь, какое различие осевых сил в двух половинках требуется, чтобы реализовался случай (б).

Найдём изменение длины осевой линии половинки пина при изгибе, считая, что длина линии контакта меняется незначительно. Пусть $\mathbf{r}_0(s)$ — радиус-

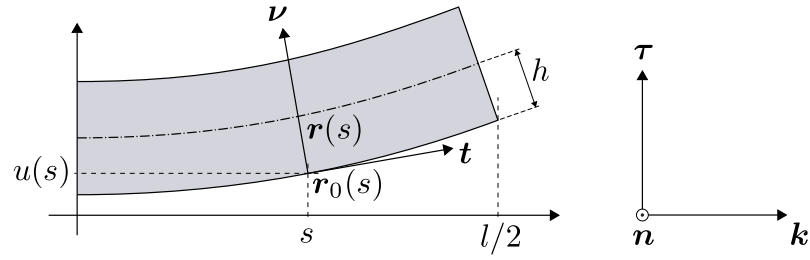


Рис. 1.25. Геометрия линии контакта и осевой линии половинки пина

вектор линии контакта, $\mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор осевой линии, $\mathbf{t}(s)$ — вектор касательной к линии контакта, $\boldsymbol{\nu}(s)$ — вектор нормали к линии контакта в плоскости изгиба (всё в деформированном состоянии; см. рис. 1.25). Примем

$$\mathbf{r}_0 = s\mathbf{k} + \lambda u(s)\boldsymbol{\tau}, \quad 0 \leq s \leq \frac{l}{2},$$

где u — прогиб, λ — формальный малый параметр. Тогда

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{k} + \lambda u'\boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_0'| = 1 + O(\lambda^2), \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_0'}{|\mathbf{r}_0'|} = \mathbf{k} + \lambda u'\boldsymbol{\tau} + O(\lambda^2),$$

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n} \times \mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} - \lambda u'\mathbf{k} + O(\lambda^2),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + h\boldsymbol{\nu} = (s - \lambda h u')\mathbf{k} + (h + \lambda u)\boldsymbol{\tau} + O(\lambda^2).$$

(радиус-вектор \mathbf{r} введён именно так благодаря отсутствию сдвига — рассматриваем балку Бернулли — Эйлера). Длина кривой $\mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq l/2$, равна $l/2$ в недеформированном состоянии; в деформированном состоянии обозначим эту длину $L/2$. Имеем

$$\frac{L}{2} = \int_0^{l/2} |d\mathbf{r}| = \int_0^{l/2} |\mathbf{r}'| ds = \int_0^{l/2} (1 - \lambda h u'') ds + O(\lambda^2) \quad (1.109)$$

Отбрасывая теперь слагаемые $O(\lambda^2)$ и полагая $\lambda = 1$, устанавливаем, что абсолютное удлинение ε оси половинки пина равно

$$\varepsilon = L - l = -2h \int_0^{l/2} u'' ds,$$

или, учитывая соотношение упругости $M = a_1^{half} u''$,

$$\varepsilon = -\frac{2h}{a_1^{half}} \int_0^{l/2} M ds.$$

Такому удлинению соответствует продольная сила в пине $P = c^{half} \varepsilon$, где $c^{half} = EF/l$ — продольная жёсткость половинки пина. Необходимое условие отсутствия проскальзывания состоит в том, что осевая сила трения не превышает по абсолютной величине силу P , то есть

$$\frac{2hc^{half}}{a_1^{half}} \left| \int_0^{l/2} M ds \right| \leq T f. \quad (1.110)$$

Отношение жёсткостей c^{half}/a^{half} можно представить в виде

$$\frac{c^{half}}{a^{half}} = \frac{K}{lh^2},$$

где безразмерный коэффициент K зависит от формы сечения: например, для прямоугольного сечения $K = 3$, для эллиптического $K = 4$. Кроме того, найдём интеграл от момента в предположении, что он линейно меняется вдоль оси и равен нулю на конце (это соответствует задаче с сосредоточенными силами $\alpha T/2$ на концах пина и $-\alpha T$ в середине):

$$M = \alpha \left(\frac{l}{2} - s \right) \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \left| \int_0^{l/2} M ds \right| = \frac{|\alpha| T l^2}{8}$$

С учётом этого необходимое условие отсутствия проскальзывания (1.110) примет вид

$$|\alpha| \leq \frac{4hf}{Kl}. \quad (1.111)$$

В правой части неравенства стоит значение около 0,01, поскольку коэффициент трения f близок к 0,1, отношение h/l менее 0,1, отношение $4/K$ близко к 1. Представляется, что значение $|\alpha|$ на самом деле должно значительно превышать 0,01, по крайней мере при контакте пина с шайбами, поскольку типичные значения действующих на концах половинки пина сил касательной реакции — 100 Н при натяжении 3000 Н. Поэтому при вычислении изгибной жёсткости пина a_1 делается выбор в пользу варианта (а): половинки изгибаются независимо, $a_1 = 2a_1^{half}$.

Диссипативная функция Рэлея содержит следующие слагаемые, обеспечивающие демпфирование продольных колебаний пластинок, Φ^{links} ; относительного поворота звеньев, Φ^{joints} ; осевых и изгибных колебаний пинов, Φ^{pins} . За демпфирование осевых колебаний p -го пина отвечает слагаемое $\Phi_p^{pin,ext}$, изгибных — слагаемое $\Phi_p^{pin,bend}$, приведённое ниже. Таким образом, диссипативная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{links} + \Phi^{joints} + \Phi^{pins}, & \Phi^{links} &= \sum_{p=1}^n \Phi_{p,p+1}^{link}, \\ \Phi^{joints} &= \sum_{p=1}^n \Phi_p^{joint}, & \Phi^{pins} &= \sum_{p=1}^n (\Phi_p^{pin,ext} + \Phi_p^{pin,bend}). \end{aligned} \quad (1.112)$$

Здесь все слагаемые, за исключением Φ^{links} и $\Phi_p^{pin,bend}$, такие же, как во второй модели цепи (п. 1.5.1.1); остаются в силе формулы (1.80), (1.82), (1.83) для вычисления Φ^{joints} и (1.85) для вычисления $\Phi_p^{pin,ext}$. Слагаемые $\Phi_{p,p+1}^{link}$ отличаются от (1.79), потому что изменился вид потенциальной энергии деформации звена $\Pi_{p,p+1}^{link}$. Слагаемых $\Phi_p^{pin,bend}$ нет в модели без изгиба пинов.

В соответствии с видом потенциальной энергии растяжения звена (1.108) вводится его демпфирование:

$$\Phi_{p,p+1}^{link} = \frac{1}{2} \beta^{link} \left[c_{p,p+1} \dot{\Delta}_{p,p+1}^2 + 2c'_{p,p+1} \dot{\Delta}_{p,p+1} \dot{\Delta}'_{p,p+1} + c''_{p,p+1} (\dot{\Delta}'_{p,p+1})^2 \right]. \quad (1.113)$$

Коэффициент β^{link} назначается исходя из требуемого уровня относительного демпфирования колебаний с наивысшей частотой по формуле (1.86).

Демпфирование изгибных колебаний пина $\Phi_p^{pin,bend}$ необходимо вводить с учётом специфики, характерной для вращающихся валов: поскольку речь идёт о внутреннем демпфировании, оно не создаёт сил в случае, когда тело вращается вокруг оси как твёрдое, с неизменными деформациями. Формально это в данном случае означает, что скорости деформаций \mathbf{u}'_p , входящих в потенциальную энергию изгиба пина $\Pi_p^{pin,bend}$ (1.106) следует вычислять относительно базиса, вращающегося вместе с пином вокруг его оси:

$$\Phi_p^{pin,bend} = \frac{8}{l} \beta^{bend} \mathbf{u}'_p{}^\nabla \cdot \hat{\mathbf{a}}_p \cdot \mathbf{u}'_p{}^\nabla, \quad \mathbf{u}'_p{}^\nabla \equiv \dot{\mathbf{u}}'_p - \omega_p \mathbf{k} \times \mathbf{u}'_p. \quad (1.114)$$

Коэффициент демпфирования β^{bend} опять назначается по (1.86). Скорость ω_p вращения пина вокруг его оси связана с производной по времени от единичного вектора $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$ (1.103), поскольку именно он определяет ориентацию сечения пина.

Чтобы вычислить скорость вращения пина, рассмотрим ненулевой вектор $\boldsymbol{x}(\alpha)$, зависящий от параметра α и находящийся в плоскости $x_3 = 0$ (так что $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = 0$), и определим единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, \boldsymbol{n} в той же плоскости:

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\tau}.$$

Векторы $\boldsymbol{\tau}$, \boldsymbol{n} , \boldsymbol{k} образуют правый ортонормированный базис. Имеем

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|} - \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} |\boldsymbol{x}'|, \quad |\boldsymbol{x}'| = (\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}})' = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} (\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{x}'.$$

Далее, так как $\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$ и, кроме того, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})' = 0$,

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} (\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{x}' = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}' = \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \omega \equiv \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}|}. \quad (1.115)$$

В соответствии с полученной формулой (со временем в роли параметра α) и определениями векторов $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$, \boldsymbol{n}_p^\perp в (1.103), скорость вращения пина вокруг оси равна

$$\omega_p = \frac{\boldsymbol{n}_p^\perp \cdot (\dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p-1,p}^\perp + \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp)}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|}. \quad (1.116)$$

Формулы (1.114) и (1.116) определяют демпфирование изгибных колебаний пина.

Работа сил контактного взаимодействия с шайбами. Обобщённые координаты $u'_{p,1}$, $u'_{p,2}$, описывающие изгиб пина, никак не влияют на радиус-вектор точки на конце оси, где приложены силы контактного взаимодействия — он остаётся таким же, как во второй модели цепи (разд. 1.5.1.1). Поэтому для данной модели остаётся справедливой формула (1.88). Отметим также, что модель цепи с учётом изгиба пинов допускает приложение сосредоточенного изгибающего момента \boldsymbol{M}_p^\perp на конце оси (это используется в уточнённой модели контактного

взаимодействия пина с шайбой, допускающей внецентренное приложение контактных сил — разд. 1.5.3.4). Работа изгибающего момента \mathbf{M}_p^\perp (этот вектор лежит в плоскости $x_3 = 0$), приложенного к обоим концам пина, на виртуальных перемещениях равна

$$\delta W = 2\mathbf{M}_p^\perp \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp, \quad \boldsymbol{\vartheta}_p^\perp = \mathbf{k} \times \mathbf{u}'_p \quad \Rightarrow \quad \delta W = (2\mathbf{M}_p^\perp \times \mathbf{k}) \cdot \delta\mathbf{u}'_p. \quad (1.117)$$

Обобщённые силы. Силы инерции вычисляются согласно (1.101):

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} &= -m_p \left(\ddot{\mathbf{u}}_p^\perp - \frac{l}{3} \ddot{\mathbf{u}}_p' \right), & -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{u}'_p} &= -m_p \left(-\frac{l}{3} \ddot{\mathbf{u}}_p^\perp + \frac{2l^2}{15} \ddot{\mathbf{u}}_p' \right), \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial u_{p,3}} &= -\frac{1}{3} m_p \ddot{u}_{p,3}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Вычисление потенциальных сил — см. (1.70), (1.71), (1.103), (1.106), (1.107), (1.108) — несколько усложняется по сравнению с моделью без изгиба пинов, в первую очередь потому, что появилась потенциальная энергия изгиба пинов, зависящая как от наклонов \mathbf{u}'_p (это квадратичная форма относительно них), так и от положений \mathbf{u}_p^\perp (они входят в выражения главных осей $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$, \mathbf{n}_p^\perp тензора жёсткости $\hat{\mathbf{a}}_p$). Таким образом, комбинации обобщённых координат \mathbf{u}_p^\perp соответствует обобщённая сила

$$\mathbf{Q}_p^{\Pi, \perp} \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = -\sum_{j=-1}^1 \frac{\partial \Pi_{p+j}^{pin, bend}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} - \frac{\partial \Pi_{p-1, p}^{link}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} - \frac{\partial \Pi_{p, p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp}. \quad (1.119)$$

В обобщённую силу, соответствующую комбинации \mathbf{u}'_p , из энергии изгиба пинов попадает слагаемое только для p -го пина:

$$\mathbf{Q}_p^{\Pi, ' } \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}'_p} = -\frac{\partial \Pi_p^{pin, bend}}{\partial \mathbf{u}'_p} - \frac{\partial \Pi_{p-1, p}^{link}}{\partial \mathbf{u}'_p} - \frac{\partial \Pi_{p, p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}'_p}. \quad (1.120)$$

Для вычисления сил сначала рассмотрим тензор $\hat{\mathbf{a}} = a_2 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} + a_1 \mathbf{n} \mathbf{n}$, где вновь (как на стр. 78) $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $\mathbf{x}(\alpha)$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}$. Нас интересует в первую очередь производная от тензора $\hat{\mathbf{a}}$ по параметру α . С учётом (1.115) имеем

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau})' &= \omega(\mathbf{n} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}), & (\mathbf{n} \mathbf{n})' &= (\underline{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{k} \mathbf{k})' = -\omega(\mathbf{n} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) \quad \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{a}}' &= \omega(a_2 - a_1)(\mathbf{n} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Кроме того, найдём производную тензора $\hat{\underline{\underline{a}}}$ по вектору \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \mathbf{j}, \\ \frac{\partial \hat{\underline{\underline{a}}}}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{\underline{\underline{a}}} = (\mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y)(a_2 - a_1)(\mathbf{n}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}), \\ \omega_x &\equiv \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{x}|}, \quad \omega_y \equiv \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{x}|}, \\ \frac{\partial \hat{\underline{\underline{a}}}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}|} (a_2 - a_1)(\mathbf{n}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}).\end{aligned}$$

В потенциальную энергию изгиба пина (1.106) входит комбинация вида $\frac{8}{l} \mathbf{u}' \cdot \hat{\underline{\underline{a}}} \cdot \mathbf{u}'$, причём \mathbf{u}' не зависит от \mathbf{x} . Следовательно, производная от этой комбинации по вектору \mathbf{x} равна

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{8}{l} \mathbf{u}' \cdot \hat{\underline{\underline{a}}} \cdot \mathbf{u}' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \hat{\underline{\underline{a}}} \cdot \mathbf{u}' \mathbf{u}' = \frac{16\mathbf{n}}{l|\mathbf{x}|} (a_2 - a_1) \mathbf{n}\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}' \mathbf{u}'$$

Пользуясь этой формулой, определением (1.103) вектора $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$ и определением (1.74) вектора $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$, находим обобщённые силы, обусловленные изгибом пина и соответствующие комбинации обобщённых координат \mathbf{u}_p^\perp :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_p^{pin,bend}}{\partial \mathbf{u}_{p-1}^\perp} &= -\frac{1}{L_{p-1,p}} \mathbf{v}_p^\perp, \quad \frac{\partial \Pi_p^{pin,bend}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = \left(\frac{1}{L_{p-1,p}} - \frac{1}{L_{p,p+1}} \right) \mathbf{v}_p^\perp, \\ \frac{\partial \Pi_p^{pin,bend}}{\partial \mathbf{u}_{p+1}^\perp} &= \frac{1}{L_{p,p+1}} \mathbf{v}_p^\perp, \quad \mathbf{v}_p^\perp \equiv \frac{16\mathbf{n}_p^\perp}{l|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|} (a_2 - a_1) \mathbf{n}_p^\perp \boldsymbol{\tau}_p^\perp \cdot \mathbf{u}'_p \mathbf{u}'_p, \\ \mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp,pin} &\equiv -\frac{\partial \Pi_p^{pins}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = \\ &= -\frac{1}{L_{p-1,p}} \mathbf{v}_{p-1}^\perp + \left(\frac{1}{L_{p,p+1}} - \frac{1}{L_{p-1,p}} \right) \mathbf{v}_p^\perp + \frac{1}{L_{p,p+1}} \mathbf{v}_{p+1}^\perp.\end{aligned}\tag{1.121}$$

Далее, обобщённые силы, обусловленные изгибом пина и соответствующие комбинации обобщённых координат \mathbf{u}'_p , очевидно, равны — см. (1.106)

$$\mathbf{Q}_p^{\Pi,\prime,pin} \equiv -\frac{\partial \Pi_p^{pins}}{\partial \mathbf{u}'_p} = -\frac{16}{l} \hat{\underline{\underline{a}}}_p \cdot \mathbf{u}'_p.\tag{1.122}$$

Найдём теперь обобщённые силы, обусловленные растяжением пластинок. Продифференцируем потенциальную энергию растяжения пластинок звена (1.108) по произвольному параметру α , от которого могут зависеть деформации $\Delta_{p,p+1}$, $\Delta'_{p,p+1}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \alpha} &= \left(c_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} + c'_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1} \right) \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \alpha} + \\ &+ \left(c'_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} + c''_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1} \right) \frac{\partial \Delta'_{p,p+1}}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Кроме того, из (1.107) найдём производные от деформаций $\Delta_{p,p+1}$, $\Delta'_{p,p+1}$ по комбинациям обобщённых координат \mathbf{u}_p^\perp , \mathbf{u}'_p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} &= -\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, & \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p+1}^\perp} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, & \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}'_p} &= \frac{\partial \Delta_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}'_{p+1}} = 0, \\ \frac{\partial \Delta'_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} &= -\tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}, & \frac{\partial \Delta'_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p+1}^\perp} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}, & \frac{\partial \Delta'_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}'_p} &= -\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, & \frac{\partial \Delta'_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}'_{p+1}} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp. \end{aligned}$$

Обобщённые силы, обусловленные натяжением пластинок, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp,link} &\equiv -\frac{\partial \Pi^{link}}{\partial \mathbf{u}_p^\perp} = \mathbf{Q}_{p,p+1}^{\Pi,\perp,link} - \mathbf{Q}_{p-1,p}^{\Pi,\perp,link}, \\ \mathbf{Q}_{p,p+1}^{\Pi,\perp,link} &\equiv -\frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}_{p,p+1}^\perp} = (c_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} + c'_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1}) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + \\ &\quad + (c'_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} + c''_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1}) \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1}, \\ \mathbf{Q}_p^{\Pi,'link} &\equiv -\frac{\partial \Pi^{link}}{\partial \mathbf{u}'_p} = \mathbf{Q}_{p,p+1}^{\Pi,'link} - \mathbf{Q}_{p-1,p}^{\Pi,'link}, \\ \mathbf{Q}_{p,p+1}^{\Pi,'link} &\equiv -\frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}'_{p,p+1}} = (c'_{p,p+1} \Delta_{p,p+1} + c''_{p,p+1} \Delta'_{p,p+1}) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp. \end{aligned} \tag{1.123}$$

Обобщённые потенциальные силы в цепи в итоге принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp} &= \mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp,pin} + \mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp,link}, & \mathbf{Q}_p^{\Pi,'} &= \mathbf{Q}_p^{\Pi,'pin} + \mathbf{Q}_p^{\Pi,'link}, \\ \mathbf{Q}_{p,3}^\Pi &\equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial u_{p,3}} = -\frac{\partial \Pi_p^{pin}}{\partial u_{p,3}} = -2c_p \Delta_p. \end{aligned} \tag{1.124}$$

Слагаемые в правых частях равенств вычисляются по следующим формулам: $\mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp,pin}$ (1.103), (1.121); $\mathbf{Q}_p^{\Pi,'pin}$ (1.122); $\mathbf{Q}_p^{\Pi,\perp,link}$ и $\mathbf{Q}_p^{\Pi,'link}$ (1.123). Осевая деформация пина Δ_p в последней формуле определена в (1.71)

Диссипативные силы — производные от диссипативной функции Рэлея по обобщённым скоростям. Представим их, подобно другим обобщённым силам, в виде векторов $\mathbf{Q}_p^{d,\perp}$ и $\mathbf{Q}_p^{d,'}$, соответствующих комбинациям обобщённых координат \mathbf{u}_p^\perp , \mathbf{u}'_p , а также скаляра $Q_{p,3}^d$, соответствующего координатам $u_{p,3}$ — для него остаётся в силе формула (1.94). В данной модели имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^{d,\perp} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = -\sum_{j=-1}^1 \frac{\partial \Phi_{p+j}^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_{p-1,p}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} - \frac{\partial \Phi_p^{joint}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp}, \\ \mathbf{Q}_p^{d,'} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{u}}'_p} = -\frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}'_p} - \frac{\partial \Phi_{p-1,p}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}'_p} - \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link}}{\partial \dot{\mathbf{u}}'_p}. \end{aligned}$$

Прежде, чем начать вычисление, отметим формулу дифференцирования скалярной функции f векторного аргумента \mathbf{u} , представляющего собой вектор-

функцию другого векторного аргумента \mathbf{v} . Все векторы будем рассматривать в декартовом базисе \mathbf{e}_i . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} &= \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{u}(\mathbf{v})) = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \sum_{i,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial v_i} = \\ &= \sum_{i,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial u_j} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j \frac{\partial u_j}{\partial v_i} = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Рассмотрим теперь производные от функции $\Phi_p^{pin,bend}$ (1.114) по векторам $\dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p-1,p}^\perp$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp$; см. также (1.116):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp} &= \frac{\partial \mathbf{u}'^\nabla}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp} \cdot \frac{16}{l} \beta^{bend} \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{u}'^\nabla, \quad \frac{\partial \mathbf{u}'^\nabla}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp} = -\frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp} \mathbf{k} \times \mathbf{u}'_p, \\ \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp} &= \frac{\mathbf{n}_p^\perp}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|} = \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p-1,p}^\perp} \Rightarrow \\ \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p-1,p}^\perp} &= \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^\perp} = \mathbf{w}_p^\perp, \\ \mathbf{w}_p^\perp &\equiv -\frac{16\beta^{bend}}{l|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|} \mathbf{n}_p^\perp (\mathbf{k} \times \mathbf{u}'_p) \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{u}'^\nabla. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p-1}^\perp} = -\frac{1}{L_{p-1,p}} \mathbf{w}_p^\perp, \quad \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \left(\frac{1}{L_{p-1,p}} - \frac{1}{L_{p,p+1}} \right) \mathbf{w}_p^\perp, \quad \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p+1}^\perp} = -\frac{1}{L_{p,p+1}} \mathbf{w}_p^\perp.$$

Обобщённые силы, связанные с диссипацией при изгибе пинов, для комбинации обобщённых координат \mathbf{u}_p^\perp , равны

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^{d,\perp,pin} &= -\sum_{j=-1}^1 \frac{\partial \Phi_{p+j}^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \\ &= \frac{1}{L_{p-1,p}} \mathbf{w}_{p-1}^\perp + \left(\frac{1}{L_{p,p+1}} - \frac{1}{L_{p-1,p}} \right) \mathbf{w}_p^\perp + \frac{1}{L_{p,p+1}} \mathbf{w}_{p+1}^\perp \end{aligned} \quad (1.127)$$

Для комбинации обобщённых координат \mathbf{u}'_p обобщённые силы вычисляются гораздо проще: из (1.114) следует

$$\mathbf{Q}_p^{d,\perp,pin} = -\frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}'_p} = -\frac{16}{l} \beta^{bend} \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{u}'^\nabla. \quad (1.128)$$

Далее рассмотрим диссипацию растяжения звена $\Phi_{p,p+1}^{link}$ (1.113). Скорость деформации $\dot{\Delta}_{p,p+1}$ вычисляется по формуле (1.81), скорость деформации $\dot{\Delta}'_{p,p+1}$, согласно (1.107), равна

$$\dot{\Delta}'_{p,p+1} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot (\dot{\mathbf{u}}'_{p+1} - \dot{\mathbf{u}}'_p) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}'_{p,p+1} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{p+1}^\perp - \dot{\mathbf{u}}_p^\perp). \quad (1.129)$$

Отсюда находим обобщённые силы

$$\begin{aligned}
Q_p^{d,\perp,link} &= Q_{p,p+1}^{d,\perp,link} - Q_{p-1,p}^{d,\perp,link}, & Q_p^{d,t,link} &= Q_{p,p+1}^{d,t,link} - Q_{p-1,p}^{d,t,link}, \\
Q_{p,p+1}^{d,\perp,link} &\equiv -\frac{\partial\Phi_{p,p+1}}{\dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \beta^{link} (c_{p,p+1}\dot{\Delta}_{p,p+1} + c'_{p,p+1}\dot{\Delta}'_{p,p+1})\tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp + \\
&\quad + \beta^{link} (c'_{p,p+1}\dot{\Delta}_{p,p+1} + c''_{p,p+1}\dot{\Delta}'_{p,p+1})\tilde{\tau}'_{p,p+1}, \\
Q_{p,p+1}^{d,t,link} &\equiv -\frac{\partial\Phi_{p,p+1}}{\dot{\mathbf{u}}_p'} = \beta^{link} (c'_{p,p+1}\dot{\Delta}_{p,p+1} + c''_{p,p+1}\dot{\Delta}'_{p,p+1})\tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp.
\end{aligned} \tag{1.130}$$

Сила $Q_p^{d,\perp,link}$ соответствует комбинации обобщённых координат \mathbf{u}_p^\perp , сила $Q_p^{d,t,link}$ — комбинации \mathbf{u}_p' . Итак, вычислены все диссипативные силы в цепи:

$$\begin{aligned}
Q_p^{d,\perp} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = Q_p^{d,\perp,pin} + Q_p^{d,\perp,link} + Q_p^{d,joint}, \\
Q_p^{d,t} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\mathbf{u}}_p'} = Q_p^{d,t,pin} + Q_p^{d,t,link}.
\end{aligned} \tag{1.131}$$

Фигурирующие здесь слагаемые вычисляются по формулам, приведённым выше: $Q_p^{d,\perp,pin}$ (1.116), (1.114), (1.126), (1.127); $Q_p^{d,t,pin}$ (1.128); $Q_p^{d,\perp,link}$ и $Q_p^{d,t,link}$ (1.81), (1.129), (1.130); $Q_p^{d,joint}$ (1.92), (1.93). Кроме того, сила осевого демпфирования пина вычисляется по формуле (1.94).

1.5.1.3. Модели без плоскости симметрии

Все модели, рассмотренные до сих пор, предполагали наличие плоскости симметрии $x_3 = 0$. В реальном устройстве отсутствует такая симметрия конструкции: например, на каждом валу подвижна лишь одна из двух шайб, причём на разных валах подвижные шайбы расположены с разных сторон от цепи (см. рис. 1.2) — это обеспечивает значительно меньший перекося цепи при изменении передаточного числа, чем если бы обе подвижные шайбы находились с одной стороны от цепи. Даже если бы конструкция была симметричной относительно плоскости $x_3 = 0$, нельзя было бы заключить, что её напряжённо-деформированное состояние также симметрично. Ряд эффектов в поведении конструкции невозможно описать в рамках моделей с плоскостью симметрии. Поэтому оказались необходимыми модели цепи, в которых такая симметрия не предполагается.

Эффекты, связанные с отсутствием симметрии. Представим себе прямолинейный участок цепи, находящийся между валами. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — вектор направления цепи. В моделях с плоскостью симметрии $x_3 = 0$ оба конца оси пина находятся на одной прямой, параллельной оси x_3 ; кроме того, середина каждого пина находится в плоскости симметрии $x_3 = 0$. Это означает, что в силу связей невозможны закручивание цепи вокруг её направления $\boldsymbol{\tau}$, а также сдвиг в плоскости векторов $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{k}$ (рис. 1.26).

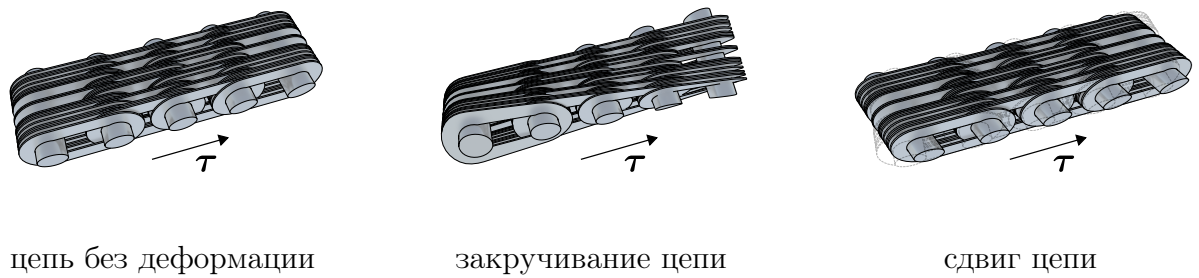


Рис. 1.26. Закручивание и сдвиг цепи вариатора

В реальности возможны и закручивание, и сдвиг. Например, незначительный сдвиг неизбежен в конструкции с двумя неподвижными и двумя подвижными шайбами, если они имеют коническую или тороидальную форму контактных поверхностей. Если, например, при передаточном числе $i_{var} = 1$ сдвиг отсутствует, то при других значениях передаточного числа он есть.



Рис. 1.27. Перекос цепи вариатора

На рис. 1.27 показан результат работы алгоритма генерации начального состоя-

ния системы с заданным передаточным числом. Если задать осевое положение середины каждого пина посередине между ближайшими к нему шайбами, то одно звено на каждом из двух прямолинейных участков цепи оказывается «перекошенным»: два пина в этом звене смещены друг относительно друга в осевом направлении на величину Δ (назовём её *перекосом* цепи); величина перекоса составляет обычно не более 1 мм и зависит от передаточного числа и геометрии контактных поверхностей шайб (рис. 1.28). Возможно подобрать форму шайб таким образом, чтобы перекос отсутствовал при любом передаточном числе; однако ввиду его малости этого не делают. С другой стороны, учёт сдвига в цепи представляет интерес.

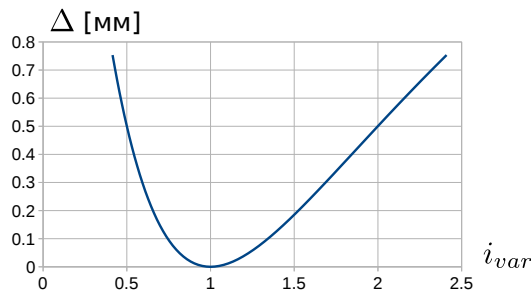


Рис. 1.28. Типичная зависимость перекоса цепи вариатора от передаточного числа

Другой существенный эффект, который не может быть учтён в рамках модели с плоскостью симметрии, связан с поворотом пинов вокруг вектора $\boldsymbol{\tau}$ направления цепи. Геометрия контактных поверхностей шайб и торцов пинов такова, что контактные силы способствуют уменьшению отклонения оси пина от направления оси x_3 , когда пин находится между шайбами. Как это происходит, показано на рис. 1.29. При повороте пина вокруг вектора $\boldsymbol{\tau}$ точки контакта между пином и шайбами смещаются таким образом, что возникает восстанавливающий момент, способствующий уменьшению этого поворота. Для корректного учёта этого эффекта требуется также уточнённая модель контактного взаимодействия пина с шайбой, рассмотренная в п. 1.5.3.4.

Наконец, большой интерес представляет анализ акустических колебаний, позволяющий судить о шуме, производимом при работе вариатора. Для это-

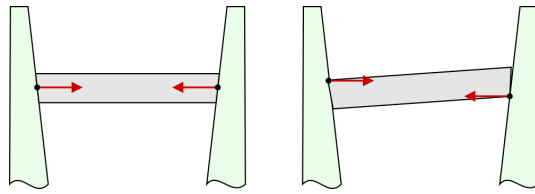


Рис. 1.29. Восстанавливающий момент, препятствующий перекосу цепи

го необходимо, в частности, чтобы модель валов с шайбами воспроизводила достаточное количество низших частот и форм колебаний. Так как даже в симметричной конструкции есть формы колебаний, не симметричные относительно плоскости $x_3 = 0$, требуются несимметричные модели (не только валов с шайбами, но и взаимодействующей с ними цепи). Ещё раз заметим, что реальная конструкция не обладает симметрией относительно плоскости $x_3 = 0$, поэтому, строго говоря, ни одна форма колебаний не может быть воспроизведена в рамках симметричной модели.

Учёт жёсткости цепи на сдвиг и кручение возможен лишь в рамках моделей без плоскости симметрии $x_3 = 0$. Необходимость рассмотрения таких моделей цепи вариатора обоснована выше. Эти модели могут быть получены как обобщение рассмотренной в п. 1.5.1.2 симметричной модели с учётом изгиба пина. При отказе от плоскости симметрии модель цепи претерпевает значительные изменения, поэтому фактически все соотношения для кинетической и потенциальной энергии, диссипативной функции, работы сил контактного взаимодействия на виртуальных перемещениях и обобщённых сил придётся вывести заново.

Введём обобщённые координаты, равные декартовым координатам точек на концах оси пина и вектора касательной в этой точке (подобно тому, как это сделано для симметричной модели с изгибом пинов). Конец оси пина с меньшим значением координаты x_3 будем называть *дальним*, с большим — *ближним*. Обобщённые координаты $u_{p,11}$, $u_{p,21}$, $u_{p,31}$ — декартовы координаты дальнего конца оси p -го пина; обобщённые координаты $u'_{p,11}$, $u'_{p,21}$ — две декартовы

координаты вектора касательной к оси на дальнем конце. Координаты ближнего конца оси — $u_{p,12}$, $u_{p,22}$, $u_{p,32}$, координаты вектора касательной к оси на ближнем конце — $u'_{p,12}$, $u'_{p,22}$ (рис. 1.30). Таким образом, на каждый пин приходится 10 обобщённых координат; первый из двух нижних индексов после номера пина p в обозначении координаты — номер декартовой оси, второй — конец пина (1 — дальний, 2 — ближний).

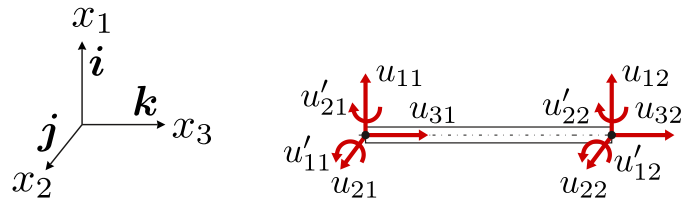


Рис. 1.30. Обобщённые координаты в несимметричной модели цепи с цельными пинами

Оказывается удобным аппроксимировать форму деформированной оси пина при помощи следующей системы многочленов $h_i(\xi)$, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} h_0(\xi) &= 1, & h_2(\xi) &= \frac{l}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3), \\ h_1(\xi) &= \xi, & h_3(\xi) &= \frac{l}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3). \end{aligned} \quad (1.132)$$

Здесь l — длина оси пина, ξ — лагранжева координата вдоль оси; они введены в п. 1.5.1.1 (стр. 54). Графики многочленов h_i приведены на рис. 1.31.

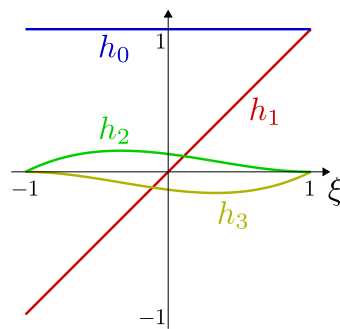


Рис. 1.31. Кубические многочлены для аппроксимации положения оси пина

Выбранные обобщённые координаты и интерполяционные многочлены определяют следующий вид аппроксимации положения $\mathbf{U}_p(\xi)$ точки на деформиро-

ванной оси p -го пина.

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_p(\xi) &= \mathbf{U}_p^\perp + \mathbf{k}U_p^\parallel, & \mathbf{U}_p^\perp &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{u}_{p,i}^\perp h_i(\xi), & U_p^\parallel &= \sum_{i=0}^1 u_{p,i}^\parallel h_i(\xi), \\
\mathbf{u}_{p,0}^\perp &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} (u_{p,\alpha 2} + u_{p,\alpha 1}) \mathbf{e}_\alpha, & u_{p,0}^\parallel &\equiv \frac{1}{2} (u_{p,32} + u_{p,31}), \\
\mathbf{u}_{p,1}^\perp &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} (u_{p,\alpha 2} - u_{p,\alpha 1}) \mathbf{e}_\alpha, & u_{p,1}^\parallel &\equiv \frac{1}{2} (u_{p,32} - u_{p,31}), \\
\mathbf{u}_{p,2}^\perp &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 u'_{p,\alpha 1} \mathbf{e}_\alpha - \frac{2}{l} \mathbf{u}_{p,1}^\perp, & \mathbf{u}_{p,3}^\perp &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 u'_{p,\alpha 2} \mathbf{e}_\alpha - \frac{2}{l} \mathbf{u}_{p,1}^\perp.
\end{aligned} \tag{1.133}$$

Введённые здесь комбинации обобщённых координат имеют следующий смысл:

$\mathbf{u}_{p,0}^\perp$ — среднее положение оси пина в плоскости Ox_1x_2 ;

$u_{p,0}^\parallel$ — среднее положение оси пина вдоль оси Ox_3 ;

$\mathbf{u}_{p,1}^\perp$ — средний наклон² оси пина, умноженный на $l/2$;

$u_{p,1}^\parallel$ — половина длины деформированной оси пина;

$\mathbf{u}_{p,2}^\perp$ — разность наклона на дальнем конце и среднего наклона;

$\mathbf{u}_{p,3}^\perp$ — разность наклона на ближнем конце и среднего наклона.

Кинетическая энергия цепи в тех же предположениях, что и в раньше (вторая модель цепи, п. 1.5.1.1), — то есть суммарная масса пина и половин двух прилегающих к нему звеньев равномерно распределена вдоль оси пина — имеет вид

$$T = \sum_{p=1}^n T_p, \quad T_p = \frac{1}{2} \frac{m_p}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p ds = \frac{1}{2} \frac{m_p}{2} \int_{-1}^1 \dot{\mathbf{U}}_p \cdot \dot{\mathbf{U}}_p d\xi, \tag{1.134}$$

где m_p — эффективная масса пина (1.68). Подставляя сюда аппроксимации (1.133), нетрудно вычислить коэффициенты этой квадратичной формы обобщённых

² Наклоном здесь мы называем вектор $\boldsymbol{\vartheta}^\perp \times \mathbf{k}$, где $\boldsymbol{\vartheta}^\perp$ — вектор малого поворота, лежащий в плоскости Ox_1x_2 .

скоростей:

$$\begin{aligned}
T_p &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 m_{p,ij}^\perp \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}_{p,j}^\perp + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^1 m_{p,ij}^\parallel \dot{u}_{p,i}^\parallel \dot{u}_{p,j}^\parallel, \\
m_{p,ij}^\perp &= \frac{m_p}{2} \int_{-1}^1 h_i(\xi) h_j(\xi) d\xi, \quad i, j = 0, \dots, 3, \quad m_{p,ij}^\parallel = m_{p,ij}^\perp, \quad i, j = 0, 1, \\
m_p^\perp &= m_p \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \text{sym} & & \\ 0 & 1/3 & & \\ l/12 & -l/60 & l^2/105 & \\ -l/12 & -l/60 & -l^2/140 & l^2/105 \end{bmatrix}, \quad m_p^\parallel = m_p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.135}$$

Потенциальная энергия цепи содержит слагаемые, соответствующие упругим деформациям её пинов и пластинок; она по-прежнему имеет вид (1.70). Потенциальная энергия пина Π_p^{pin} , как и в симметричной модели цепи с изгибом пинов (п. 1.5.1.2), содержит энергию осевой деформации $\Pi_p^{pin,ext}$ и деформации изгиба $\Pi_p^{pin,bend}$.

$$\Pi_p^{pin} = \Pi_p^{pin,ext} + \Pi_p^{pin,bend}.$$

Вычислим энергию осевой деформации:

$$\begin{aligned}
\Pi_p^{pin,ext} &= \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} EF \left(\frac{\partial U_p^\parallel}{\partial s} \right)^2 ds = \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 EF \left((U_p^\parallel)' \right)^2 d\xi = \frac{1}{2} c_p \Delta_p^2, \\
c_p &= \frac{EF}{l}, \quad \Delta_p = 2u_{p,1}^\parallel - l
\end{aligned} \tag{1.136}$$

(здесь E — модуль Юнга, F — площадь поперечного сечения пина). Полученная формула аналогична (1.71), но отличается выражение деформации растяжения Δ_p , так как модель несимметрична. Далее, энергия деформации изгиба, как и в симметричной модели с изгибом пинов, определяется формулой (1.105) и в случае принятых аппроксимаций (1.133) равна

$$\begin{aligned}
\Pi_p^{pin,bend} &= \frac{4}{l^3} \int_{-1}^1 \mathbf{U}_p^{\perp''} \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{U}_p^{\perp''} d\xi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^3 c_{ij}^{bend} \mathbf{u}_{p,i}^\perp \cdot \hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \mathbf{u}_{p,j}^\perp, \\
c_{ij}^{bend} &= \frac{8}{l^3} \int_{-1}^1 h_i''(\xi) h_j''(\xi) d\xi, \quad i, j = 2, 3, \quad \Rightarrow \\
&\begin{bmatrix} c_{22}^{bend} & c_{23}^{bend} \\ c_{32}^{bend} & c_{33}^{bend} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.137}$$

Тензор изгибной жёсткости пина $\hat{\underline{\mathbf{a}}}_p$ определяется формулами (1.103), (1.104). При этом вектор направления звена $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$, фигурирующий в (1.103), следует вычислять по следующей формуле, аналогичной (1.74):

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \equiv \frac{\mathbf{u}_{p+1,0}^\perp - \mathbf{u}_{p,0}^\perp}{L_{p,p+1}}. \quad (1.138)$$

Рассмотрим теперь потенциальную энергию деформации пластинок звена $\Pi_{p,p+1}^{link}$. Слагаемое $\Pi_{p,p+1}^{link,ext}$ определяет, как и в предыдущих моделях, энергию растяжения пластинок. Им и исчерпывалась энергия деформации звена во всех моделях с плоскостью симметрии $x_3 = 0$. Однако в несимметричной модели цепи этого недостаточно, поскольку, как указывалось выше, возможны закручивание и сдвиг цепи (см. рис. 1.26). Ничто в модели цепи не будет препятствовать этим деформациям, если не ввести соответствующие жёсткости. В реальности, конечно, что-то препятствует сдвигу и закручиванию; механизмы, создающие соответствующую жёсткость, могут быть довольно сложны: например, они могут быть связаны с контактом пластинок, охватывающих пин, между собой. В данной модели цепи эти сложные механизмы не рассматриваются. Вместо этого принимается, что пластинка цепи — стержень, имеющий податливость на растяжение, кручение и изгиб в плоскости наименьшей жёсткости; концы этого стержня жёстко связаны с некоторыми точками на осях двух пинов. В результате в потенциальной энергии деформации звена появляются слагаемые $\Pi_{p,p+1}^{link,tors}$ и $\Pi_{p,p+1}^{link,shear}$, обеспечивающие жёсткость цепи на кручение и сдвиг соответственно:

$$\Pi_{p,p+1}^{link} = \Pi_{p,p+1}^{link,ext} + \Pi_{p,p+1}^{link,tors} + \Pi_{p,p+1}^{link,shear}.$$

Вычисление потенциальной энергии растяжения пластинок звена (1.72) по существу сводится к вычислению продольной деформации пластинки $\Delta_{p,p+1}^k$ и её линеаризации с учётом того, что деформация мала и вектор направления пластинки близок к $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$. Повторяя рассуждения, сделанные при вычислении энергии растяжения пластинок для симметричной модели с изгибом пинов и приведшие к формуле (1.107), введём вектор $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k$ направления k -той пластин-

ки звена:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}(\boldsymbol{\xi}) &\equiv \frac{\mathbf{U}_{p+1}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{U}_p(\boldsymbol{\xi})}{L_{p,p+1}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + \lambda \Delta \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}(\boldsymbol{\xi}), \\
\Delta \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{L_{p,p+1}} \left[\sum_{i=1}^3 \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp h_i(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{k} \sum_{i=0}^1 \Delta u_{p,p+1,i}^\parallel h_i(\boldsymbol{\xi}) \right], \\
\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp &\equiv \mathbf{u}_{p+1,i}^\perp - \mathbf{u}_{p,i}^\perp, \quad \Delta u_{p,p+1,i}^\parallel \equiv u_{p+1,i}^\parallel - u_{p,i}^\parallel, \\
\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k &\equiv \hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}(\boldsymbol{\xi}_{p,p+1}^k)
\end{aligned} \tag{1.139}$$

(здесь λ — формальный малый параметр). Подставляя выражение $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k$ в (1.76) вместо $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$, отбрасывая слагаемые $O(\lambda^2)$ и полагая $\lambda = 1$, получим

$$\begin{aligned}
\Delta_{p,p+1}^k &= \frac{L_{p,p+1}}{2} \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + 2 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}(\boldsymbol{\xi}_{p,p+1}^k) - 1 \right) = \\
&= \Delta_{p,p+1} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \sum_{i=1}^3 \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp h_i(\boldsymbol{\xi}_{p,p+1}^k) = \sum_{i=0}^3 \Delta_{p,p+1,i} h_i(\boldsymbol{\xi}_{p,p+1}^k), \\
\Delta_{p,p+1,0} &\equiv \Delta_{p,p+1}, \quad \Delta_{p,p+1,i} \equiv \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Величина $\Delta_{p,p+1}$ вычисляется по формуле (1.76). Теперь потенциальная энергия пластинок звена может быть записана в таком виде, что суммы по пластинкам звена входят лишь в постоянные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\Pi_{p,p+1}^{link,ext} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k (\Delta_{p,p+1}^k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 c_{p,p+1,ij} \Delta_{p,p+1,i} \Delta_{p,p+1,j}, \\
c_{p,p+1,ij} &\equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k h_i(\boldsymbol{\xi}_{p,p+1}^k) h_j(\boldsymbol{\xi}_{p,p+1}^k).
\end{aligned} \tag{1.141}$$

Закручивание пластинки цепи изображено на рис. 1.32. Для определения

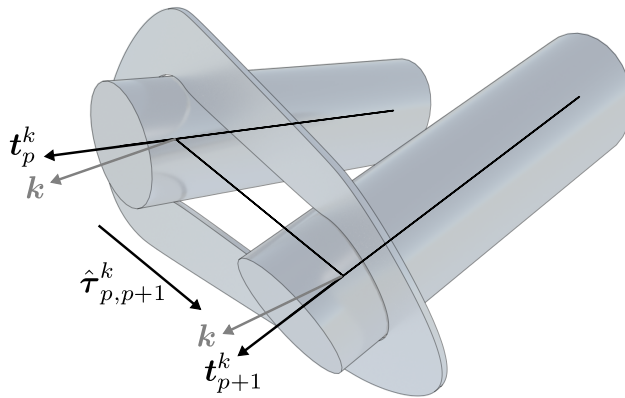


Рис. 1.32. Закручивание пластинки цепи

потенциальной энергии закручивания пластинок введём в рассмотрение соответствующую деформацию k -той пластинки в звене между p -тым и $(p + 1)$ -м пинами — угол закручивания $\varphi_{p,p+1}$. Поскольку считается, что концы пластинки жёстко связаны с осями p -го и $(p + 1)$ -го пинов в точках $\xi_{p,p+1}^k$, ориентация концов пластинок определяется ориентацией поперечных сечений пинов в этих точках. Пусть $\mathbf{t}_p(\xi)$ — близкий к единичному вектор касательной к оси p -го пина в точке ξ :

$$\mathbf{t}_p(\xi) \equiv \frac{\partial \mathbf{U}_p(\xi)}{\partial s} = \frac{2}{l} \mathbf{U}'_p = \mathbf{t}_p^\perp + \mathbf{k} t_p^\parallel, \quad \mathbf{t}_p^\perp = \frac{2}{l} (\mathbf{U}_p^\perp)', \quad t_p^\parallel = 1 + \frac{\Delta_p}{l} \quad (1.142)$$

В модели стержня без учёта сдвига вектор $\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp$ малого поворота сечения при изгибе (повороты, вызванные деформациями изгиба и кручения, мы всюду считаем малыми) связан с вектором касательной соотношением $\mathbf{t}_p - \mathbf{k} = \boldsymbol{\vartheta}_p^\perp \times \mathbf{k}$. Поскольку $\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp$ лежит в плоскости Ox_1x_2 , имеем отсюда

$$\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp = \mathbf{k} \times \mathbf{t}_p^\perp. \quad (1.143)$$

Вектору малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp$ соответствует тензор малого поворота $\underline{\mathbf{P}}_p = \underline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\vartheta}_p^\perp \times \underline{\mathbf{E}}$ (линеаризованный по $\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp$). Интересующий нас угол закручивания — проекция вектора поворота тензора $\underline{\mathbf{P}}_{p+1} \cdot \underline{\mathbf{P}}_p^T$ на ось пластинки $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k$. Но в случае малых поворотов этим вектором поворота будет разность $\boldsymbol{\vartheta}_{p+1}^\perp - \boldsymbol{\vartheta}_p^\perp$, в чём нетрудно убедиться, перемножая линеаризованные повороты и отбрасывая члены порядка выше первого по $|\boldsymbol{\vartheta}_p^\perp|, |\boldsymbol{\vartheta}_{p+1}^\perp|$. Таким образом, приходим к следующему выражению угла закручивания k -той пластинки:

$$\varphi_{p,p+1}^k = [\mathbf{k} \times (\mathbf{t}_{p+1}^\perp(\xi_{p,p+1}^k) - \mathbf{t}_p^\perp(\xi_{p,p+1}^k))] \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k.$$

С учётом малости $\mathbf{t}_p^\perp, \mathbf{t}_{p+1}^\perp$ можно умножить эти векторы на формальный малый параметр λ ; если теперь ещё использовать близость $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k$ к $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}$ (см. 1.139), отбросить слагаемые $O(\lambda^2)$ и положить $\lambda = 1$, получим

$$\varphi_{p,p+1}^k = [\mathbf{k} \times (\mathbf{t}_{p+1}^\perp(\xi_{p,p+1}^k) - \mathbf{t}_p^\perp(\xi_{p,p+1}^k))] \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp. \quad (1.144)$$

Эта формула ещё более упростится, если при вычислении векторов касательных \mathbf{t}_p^\perp , \mathbf{t}_{p+1}^\perp не учитывать изгиб пина: представляется, что основной вклад в эти векторы даёт перекося пина, а не изгиб — иными словами, имеют место соотношения $|\mathbf{u}_{p,2}^\perp| \ll |\mathbf{u}_{p,1}^\perp|$ и $|\mathbf{u}_{p,3}^\perp| \ll |\mathbf{u}_{p,1}^\perp|$. Тогда вектор касательной к оси будет, конечно, постоянным, и для \mathbf{t}_p^\perp вместо (1.142) будем иметь

$$\mathbf{t}_p^\perp = \frac{2}{l} \mathbf{u}_{p,1}^\perp. \quad (1.145)$$

Итог этого упрощения в том, что угол закручивания всех пластинок одного и того же звена теперь одинаков, так что вместо $\varphi_{p,p+1}^k$ можно писать $\varphi_{p,p+1}$. Благодаря этому потенциальная энергия закручивания пластинок звена определяется очевидным образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{p,p+1}^{link,tors} &= \frac{1}{2} c_{p,p+1}^{tors} (\varphi_{p,p+1})^2, & c_{p,p+1}^{tors} &\equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} c_{p,p+1}^{k,tors}, \\ \varphi_{p,p+1} &= \frac{2}{lL_{p,p+1}} (\mathbf{k} \times \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,1}^\perp) \cdot \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp = \frac{2}{l} \mathbf{k} \cdot (\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,1}^\perp \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp). \end{aligned} \quad (1.146)$$

где $c_{p,p+1}^{k,tors}$ — жёсткость пластинки на кручение; последнее равенство написано с учётом (1.138) и 1.145), величины $\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp$ определены в (1.139).

При сдвиге цепи в рамках данной модели происходит изгиб пластинок (рис. 1.33). Рассмотрим подробнее кинематику жёстко связанных оси пина и

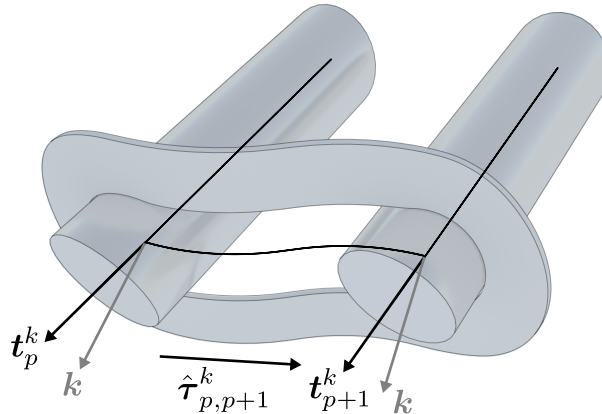


Рис. 1.33. Изгиб пластинки цепи

оси пластинки, чтобы определить изгибные деформации пластинки. На время будем опускать многочисленные индексы, чтобы не загромождать запись. На

рис. 1.34 изображены оси пинов и деформированная ось пластинки, а также показаны следующие единичные векторы: $\boldsymbol{\tau}$ — направление недеформированной оси пластинки; \boldsymbol{t} — направление касательной к оси одного из пинов в точке крепления пластинки; \boldsymbol{n} — вектор нормали к плоскости, в которой лежит деформированная ось пластинки (то есть плоскости векторов \boldsymbol{t} , $\boldsymbol{\tau}$), $\boldsymbol{\nu}$ — вектор касательной к деформированной оси пластинки в месте соединения с осью пина. Векторы \boldsymbol{t} , $\boldsymbol{\nu}$, \boldsymbol{n} образуют правый ортонормированный базис (угол между векторами \boldsymbol{t} и $\boldsymbol{\nu}$ прямой, поскольку пластинка считается жёстко связанной с пином).

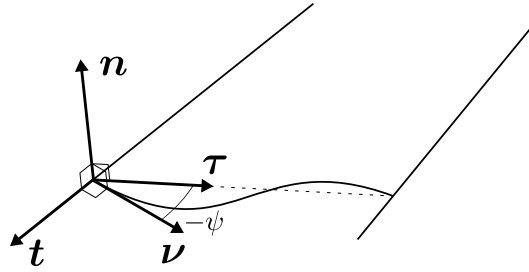


Рис. 1.34. Деформированная ось пластинки цепи при изгибе

Деформированное состояние пластинки при изгибе в плоскости наименьшей жёсткости естественно определить при помощи углов, образуемых касательной к деформированной оси и направлением недеформированной оси $\boldsymbol{\tau}$, на концах, соединённых с пинами. Один из этих углов, ψ , изображён на рис. 1.34. Для него имеем

$$\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{n} \sin \psi \quad \Rightarrow \quad \psi = (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{n} + O(|\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}|^2).$$

Поскольку угол ψ считается малым, слагаемое $O(|\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}|^2)$ в дальнейшем отбрасывается, и в итоге приходим к соотношению

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu} \quad \Rightarrow \quad \psi = (\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{t}. \quad (1.147)$$

Возвращаясь к прежним обозначениям с индексами для номеров пинов и пластинок, введём на концах k -той пластинки звена между p -тым и $(p+1)$ -м пинами углы $\psi_{p,p+1,1}^k$ (в месте соединения с p -тым пином) и $\psi_{p,p+1,2}^k$ (в месте

соединения с $(p + 1)$ -м пином), имеющие тот же смысл, что и угол ψ выше. В соответствии с (1.147) они определяются следующим образом:

$$\psi_{p,p+1,1}^k = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_p^k, \quad \psi_{p,p+1,2}^k = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p+1}^k. \quad (1.148)$$

С целью получить наиболее простой вид потенциальной энергии изгиба пластинок, позволяющий избежать суммирования по пластинкам звена, пренебрежём изгибом пинов, как сделали это в потенциальной энергии закручивания пластинок, а также осевой деформацией пинов (то есть будем считать, что $u_{p,1}^{\parallel} = l/2$). Тогда вдоль всего пина вектор касательной к оси постоянен и равен $\mathbf{k} + \mathbf{t}_p^{\perp}$, где второе слагаемое вычисляется по (1.145). Кроме того, представим вектор направления пластинки $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k$ в виде (1.139) и отбросим в (1.148) малые второго порядка и выше по $|\mathbf{t}_p^{\perp}|$, $|\Delta \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}|$ — тогда получим одинаковые для всех пластинок звена углы, что позволяет опустить верхний индекс k , обозначающий номер пластинки ($\psi_{p,p+1,i}^k \equiv \psi_{p,p+1,i}$):

$$\begin{aligned} \psi_{p,p+1,1} &= \frac{2}{l} \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^{\perp} \cdot \mathbf{u}_{p,1}^{\perp} + \frac{1}{L_{p,p+1}} \Delta u_{p,p+1,0}^{\parallel}, \\ \psi_{p,p+1,2} &= \frac{2}{l} \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^{\perp} \cdot \mathbf{u}_{p+1,1}^{\perp} + \frac{1}{L_{p,p+1}} \Delta u_{p,p+1,0}^{\parallel}. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Для вычисления потенциальной энергии пластинки осталось аппроксимировать форму её изогнутой оси $\mathbf{U}_{p,p+1}(\eta)$ кубическими полиномами $h_i(2\eta - 1)$ — см. (1.132); напомним, что $\eta \in [0, 1]$ — координата вдоль оси пластинки, см. рис. 1.14:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{p,p+1}(\eta) &= \mathbf{U}_{p,p+1}^{\perp}(\eta) + \mathbf{k} U_{p,p+1}^{\parallel}(\eta), \\ \mathbf{U}_{p,p+1}^{\perp}(\eta) &= \sum_{i=0}^1 \Delta \mathbf{u}_{p,p+1}^{\perp} h_{p,p+1,i}(\eta) + \mathbf{k} \sum_{i=2}^3 \psi_{p,p+1,i-1} h_{p,p+1,i}(\eta), \\ U_{p,p+1}^{\parallel}(\eta) &= \sum_{i=0}^1 \Delta u_{p,p+1}^{\parallel} h_{p,p+1,i}(\eta). \end{aligned}$$

В аппроксимации $\mathbf{U}_{p,p+1}^{\perp}(\eta)$ вместо векторов касательных к осям пина взят вектор \mathbf{k} — с точностью до малых первого порядка включительно слагаемые $\mathbf{t}_{p,p+1}^k \psi_{p,p+1,i-1} h_i(2\eta - 1)$ и $\mathbf{k} \psi_{p,p+1,i-1} h_i(2\eta - 1)$ совпадают. Интерполяционные

полиномы $h_{p,p+1,i}(\eta)$ аналогичны полиномам $h_i(\xi)$ — см. (1.132):

$$\begin{aligned} h_{p,p+1,0}(\eta) &= 1, & h_{p,p+1,2}(\eta) &= \frac{L_{p,p+1}}{l} h_2(2\eta - 1) = L_{p,p+1} \eta(\eta - 1)^2, \\ h_{p,p+1,1}(\eta) &= 2\eta - 1, & h_{p,p+1,3}(\eta) &= \frac{L_{p,p+1}}{l} h_3(2\eta - 1) = L_{p,p+1} \eta^2(\eta - 1). \end{aligned} \quad (1.150)$$

Потенциальная энергия изгиба пластинок звена может быть записана в виде

$$\Pi_{p,p+1}^{link, shear} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} \frac{1}{L_{p,p+1}^3} \int_0^1 \mathbf{U}_{p,p+1}^{\perp''} \cdot a_{p,p+1}^k \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_{p,p+1}^{\perp''} d\eta. \quad (1.151)$$

Тензор изгибной жёсткости $a_{p,p+1}^k \mathbf{k}\mathbf{k}$ аналогичен тензору $\hat{\mathbf{a}}_p$, введённому при описании изгиба пина (1.104), скаляр $a_{p,p+1}^k$ — жёсткость пластинки на изгиб; вид потенциальной энергии такой же, как у энергии изгиба пина (1.137). Вычисляя энергию изгиба пластинок (1.151), получим

$$\begin{aligned} \Pi_{p,p+1}^{link, shear} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 c_{p,p+1,ij}^{bend} \psi_{p,p+1,i} \psi_{p,p+1,j}, \\ c_{p,p+1}^{bend} &= \frac{1}{L_{p,p+1}} \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} a_{p,p+1}^k \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.152)$$

Ещё более простое выражение потенциальной энергии $\Pi_{p,p+1}^{link, shear}$ можно получить следующим образом. Обозначим

$$\gamma_{p,p+1} \equiv \frac{1}{2}(\psi_{p,p+1,1} + \psi_{p,p+1,2}), \quad \delta_{p,p+1} \equiv \frac{1}{2}(\psi_{p,p+1,1} - \psi_{p,p+1,2}).$$

В этих переменных потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi_{p,p+1}^{link, shear} = \frac{1}{2} \left[2 (c_{p,p+1,11}^{bend} + c_{p,p+1,12}^{bend}) \gamma_{p,p+1}^2 + 2 (c_{p,p+1,11}^{bend} - c_{p,p+1,12}^{bend}) \delta_{p,p+1}^2 \right].$$

Сдвиг звена цепи определяется деформацией $\gamma_{p,p+1}$, а не $\delta_{p,p+1}$ и, кроме того, в реальных конфигурациях $|\delta_{p,p+1}| \ll |\gamma_{p,p+1}|$. Поэтому второе слагаемое в потенциальной энергии можно опустить как несущественное, тогда окончательно получим

$$\begin{aligned} \Pi_{p,p+1}^{link, shear} &= \frac{1}{2} c_{p,p+1}^{shear} \gamma_{p,p+1}^2, \quad c_{p,p+1}^{shear} \equiv 2 (c_{p,p+1,11}^{bend} + c_{p,p+1,12}^{bend}), \\ \gamma_{p,p+1} &= \frac{2}{l} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^{\perp} \cdot (\mathbf{u}_{p,1}^{\perp} + \mathbf{u}_{p+1,1}^{\perp}) + \frac{2}{L_{p,p+1}} \Delta u_{p,p+1,0}^{\parallel}. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Таким образом, определены все слагаемые в выражении потенциальной энергии для несимметричной модели цепи.

Диссипативная функция вводится аналогично тому, как это было сделано для предыдущих моделей, её структура в основном повторяет структуру потенциальной энергии и она по-прежнему имеет вид (1.112). При этом в звеньях цепи к диссипации растяжения пластинок добавляются диссипация их кручения и изгиба:

$$\Phi_{p,p+1}^{link} = \Phi_{p,p+1}^{link,ext} + \Phi_{p,p+1}^{link,tors} + \Phi_{p,p+1}^{link,shear}.$$

Запишем все слагаемые подробнее. Для диссипации растяжения пластинок звена в соответствии с (1.141) имеем

$$\Phi_{p,p+1}^{link,ext} = \frac{1}{2} \beta^{link,ext} \sum_{i,j=1}^3 c_{p,p+1,ij} \dot{\Delta}_{p,p+1,i} \dot{\Delta}_{p,p+1,j}, \quad (1.154)$$

$\beta^{link,ext}$ — коэффициент демпфирования. Скорости деформаций, согласно формулам (1.76), (1.138), (1.140), вычисляются так:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{p,p+1,0} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^{\perp} \cdot (\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^{\perp})^{\cdot}, \\ \dot{\Delta}_{p,p+1,i} &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^{\perp} \cdot (\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^{\perp})^{\cdot} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^{\perp} \cdot \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^{\perp}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Далее, диссипация при кручении звена соответствует потенциальной энергии (1.146):

$$\begin{aligned} \Phi_{p,p+1}^{link,tors} &= \frac{1}{2} \beta^{link,tors} c_{p,p+1}^{tors} (\dot{\varphi}_{p,p+1})^2, \\ \dot{\varphi}_{p,p+1} &= \frac{2}{l} \mathbf{k} \cdot \left[(\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,1}^{\perp})^{\cdot} \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^{\perp} + \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,1}^{\perp} \times \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^{\perp} \right]. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Диссипация при сдвиге звена соответствует потенциальной энергии (1.153):

$$\begin{aligned} \Phi_{p,p+1}^{link,shear} &= \frac{1}{2} \beta^{link,shear} c_{p,p+1}^{shear} \dot{\gamma}_{p,p+1}^2, \\ \dot{\gamma}_{p,p+1} &= \frac{2}{l} \left[\dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{p,p+1}^{\perp} \cdot (\mathbf{u}_{p,1}^{\perp} + \mathbf{u}_{p+1,1}^{\perp}) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^{\perp} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_{p,1}^{\perp} + \dot{\mathbf{u}}_{p+1,1}^{\perp}) \right] + \\ &\quad + \frac{2}{L_{p,p+1}} \left(\Delta u_{p,p+1,0}^{\parallel} \right)^{\cdot}. \end{aligned} \quad (1.157)$$

Диссипация при относительном повороте звеньев Φ_p^{joint} сохраняет вид (1.80); скорость относительного поворота ω_p^{joint} определяется, как и раньше, формула-

ми (1.82), (1.83), но вектор направления звена $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ в данной модели вычисляется по формуле (1.138).

Диссипация осевых колебаний пинов $\Phi_p^{pin,ext}$ определяется по формуле, аналогичной (1.85):

$$\Phi_p^{pin,ext} = \frac{1}{2} b_p \dot{\Delta}_p^2, \quad \dot{\Delta}_p = \dot{u}_{p,1}^\parallel. \quad (1.158)$$

Наконец, внутренняя диссипация изгибных колебаний пинов определяется по формуле, аналогичной (1.114), но с учётом вида потенциальной энергии изгиба пина (1.137):

$$\Phi_p^{pin,bend} = \frac{1}{2} \beta^{bend} \sum_{i,j=2}^3 c_{ij}^{bend} \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\nabla} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\underline{p}} \cdot \mathbf{u}_{p,j}^{\perp\nabla}, \quad \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\nabla} = \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp - \omega_p \mathbf{k} \times \mathbf{u}_{p,i}^\perp. \quad (1.159)$$

Скорость ω_p вращения пина вокруг оси находится по формуле (1.116), при этом направление звена $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp$ вычисляется по формуле (1.138). Диссипативная функция Рэлея для несимметричной модели цепи полностью определена.

Найдём работу сил контактного взаимодействия с шайбами в случае, когда на ближнем ($\xi = 1$) и дальнем ($\xi = -1$) концах оси пина приложены сила $\mathbf{F}_p^\pm = \mathbf{F}_p^{\perp\pm} + \mathbf{k} F_p^{\parallel\pm}$ и момент $\mathbf{M}_p^{\perp\pm}$, причём $\mathbf{M}_p^{\perp\pm} \cdot \mathbf{k} = 0$ (верхний индекс $+$ обозначает ближний конец пина, $-$ — дальний конец, \pm — ближний или дальний). Нас в первую очередь интересуют положение $\mathbf{U}_p^\pm = \mathbf{U}_p^{\perp\pm} + \mathbf{k} U_p^{\parallel\pm}$ точки оси и поворот $\boldsymbol{\vartheta}_p^{\perp\pm}$ сечения на конце $\xi = \pm 1$. В соответствии с принятыми аппроксимациями (1.132), (1.133), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_p^{\perp\pm} &= \mathbf{u}_{p,0}^\perp \pm \mathbf{u}_{p,1}^\perp, & U_p^{\parallel\pm} &= u_{p,0}^\parallel \pm u_{p,1}^\parallel, \\ \boldsymbol{\vartheta}_p^{\perp+} &= \mathbf{k} \times \left(\frac{2}{l} \mathbf{u}_{p,1}^\perp + \mathbf{u}_{p,3}^\perp \right), & \boldsymbol{\vartheta}_p^{\perp-} &= \mathbf{k} \times \left(\frac{2}{l} \mathbf{u}_{p,1}^\perp + \mathbf{u}_{p,2}^\perp \right). \end{aligned}$$

Поэтому виртуальная работа приложенных сил и моментов такова:

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathbf{F}_p^+ \cdot \delta \mathbf{U}_p^+ + \mathbf{M}_p^{\perp+} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}_p^{\perp+} + \mathbf{F}_p^- \cdot \delta \mathbf{U}_p^- + \mathbf{M}_p^{\perp-} \cdot \delta \boldsymbol{\vartheta}_p^{\perp-} = \\ &= (\mathbf{F}_p^{\perp+} + \mathbf{F}_p^{\perp-}) \cdot \delta \mathbf{u}_{p,0}^\perp + (F_p^{\parallel+} + F_p^{\parallel-}) \delta u_{p,0}^\parallel + \\ &+ (\mathbf{F}_p^{\perp+} - \mathbf{F}_p^{\perp-} + \frac{2}{l} (\mathbf{M}_p^{\perp+} + \mathbf{M}_p^{\perp-})) \cdot \delta \mathbf{u}_{p,1}^\perp + (F_p^{\parallel+} - F_p^{\parallel-}) \delta u_{p,1}^\parallel + \\ &+ (\mathbf{M}_p^{\perp+} \times \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{u}_{p,3}^\perp + (\mathbf{M}_p^{\perp-} \times \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{u}_{p,2}^\perp. \end{aligned}$$

Найдём теперь обобщённые силы, соответствующие кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции Рэлея. При этом будем рассматривать комбинации обобщённых сил, соответствующие векторам $\mathbf{u}_{p,i}^\perp$ и скалярам $u_{p,i}^\parallel$ (см. стр. 88). Силы инерции, согласно (1.135), равны

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} &= -\sum_{j=0}^3 m_{p,ij}^\perp \ddot{\mathbf{u}}_{p,j}^\perp, & i = 0, \dots, 3, \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_{p,i}^\parallel} &= -\sum_{j=0}^1 m_{p,ij}^\parallel \ddot{u}_{p,j}^\parallel, & i = 0, 1. \end{aligned}$$

Для потенциальных сил, соответствующих комбинациям $\mathbf{u}_{p,i}^\perp$ имеем формулы, аналогичные формулам (1.119), (1.120), полученным для симметричной модели с учётом изгиба пина:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{p,i}^{\Pi,\perp} &\equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} = \mathbf{Q}_{p,i}^{\Pi,\perp,pin} + \mathbf{Q}_{p,i}^{\Pi,\perp,link}, \\ \mathbf{Q}_{p,i}^{\Pi,\perp,pin} &\equiv -\frac{\partial \Pi^{pins}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} = \begin{cases} -\sum_{j=-1}^1 \frac{\partial \Pi_{p+j}^{pin,bend}}{\partial \mathbf{u}_{p,0}^\perp}, & i = 0 \\ 0, & i = 1 \\ \frac{\partial \Pi_p^{pin,bend}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp}, & i = 2, 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.160)$$

$$\mathbf{Q}_{p,i}^{\Pi,\perp,link} \equiv -\frac{\partial \Pi^{links}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} = -\frac{\partial \Pi_{p-1,p}^{link}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} - \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp}, \quad i = 0, \dots, 3. \quad (1.161)$$

Наличие сил $\mathbf{Q}_{p,0}^{\Pi,\perp,pin}$ обусловлено, как и ранее, поворотом главных осей тензора жёсткости $\hat{\underline{\mathbf{a}}}_p$ в (1.137) — он определяется векторами $\mathbf{u}_{p-1,0}^\perp$, $\mathbf{u}_{p,0}^\perp$, $\mathbf{u}_{p+1,0}^\perp$. Чтобы вычислить эти силы, требуется повторить рассуждения на стр. 80; результат аналогичен (1.121):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p^\perp &\equiv \frac{\mathbf{n}_p^\perp}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|} (a_2 - a_1) \mathbf{n}_p^\perp \boldsymbol{\tau}_p^\perp \cdot \sum_{i,j=2}^3 c_{ij}^{bend} \mathbf{u}_{p,i}^\perp \mathbf{u}_{p,j}^\perp, \\ \mathbf{Q}_{p,0}^{\Pi,\perp,pin} &= -\frac{1}{L_{p-1,p}} \mathbf{v}_{p-1}^\perp + \left(\frac{1}{L_{p,p+1}} - \frac{1}{L_{p-1,p}} \right) \mathbf{v}_p^\perp + \frac{1}{L_{p,p+1}} \mathbf{v}_{p+1}^\perp. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Обобщённые силы, связанные с изгибом пина, как следует из (1.137), равны

$$\mathbf{Q}_{p,i}^{\Pi,\perp,pin} = -\hat{\underline{\mathbf{a}}}_p \cdot \sum_{j=2}^3 c_{ij}^{bend} \mathbf{u}_{p,j}^\perp, \quad i = 2, 3 \quad (1.163)$$

В энергии упругой деформации пластинок звена три слагаемых, соответствующих их растяжению, закручиванию и изгибу в плоскости наименьшей жёсткости. Найдём связанные с этими факторами обобщённые силы, входящие в $Q_{p,i}^{\Pi,\perp,link}$. Начнём с потенциальной энергии растяжения пластинок (1.141). Имейм

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \Delta_{p,p+1,i}} &= \sum_{j=0}^3 c_{p,p+1,ij} \Delta_{p,p+1,j} \equiv f_{p,p+1,i}^{link,ext}, \\ \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} &= \sum_{j=0}^3 f_{p,p+1,j}^{link,ext} \frac{\partial \Delta_{p,p+1,j}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} \equiv Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,ext}, \\ \frac{\partial \Delta_{p,p+1,j}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} &= \begin{cases} \frac{\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,j}}{L_{p,p+1}} & i=0, \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \delta_{ij} & i=1, 2, 3, \end{cases} \quad - \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} = \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \mathbf{u}_{p+1,i}^\perp} = Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,ext} \Rightarrow \\ Q_{p,i}^{\perp,link,ext} &\equiv - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{p,i}} \sum_{p=1}^n \Pi_{p,p+1}^{link,ext} = Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,ext} - Q_{p-1,p,i}^{\perp,link,ext}, \\ Q_{p,p+1,0}^{\perp,link,ext} &= \frac{1}{L_{p,p+1}} \sum_{j=0}^3 f_{p,p+1,j}^{link,ext} \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,j}, \quad Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,ext} = f_{p,p+1,i}^{link,ext} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, \quad i=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Производя аналогичные выкладки для энергии закручивания пластинок (1.146), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,tors}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} &= c_{p,p+1}^{tors} \varphi_{p,p+1} \frac{\partial \varphi_{p,p+1}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} \equiv Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,tors}, \\ \frac{\partial \varphi_{p,p+1}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} &= \begin{cases} \frac{2}{lL_{p,p+1}} \mathbf{k} \times \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,1}^\perp & i=0, \\ \frac{2}{l} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \times \mathbf{k} & i=1, \\ 0 & i=2, 3, \end{cases} \\ - \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,tors}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} &= \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,tors}}{\partial \mathbf{u}_{p+1,i}^\perp} = Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,tors} \Rightarrow \\ Q_{p,i}^{\perp,link,tors} &\equiv - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp} \sum_{p=1}^n \Pi_{p,p+1}^{link,tors} = Q_{p,p+1,i}^{\perp,link,tors} - Q_{p-1,p,i}^{\perp,link,tors}, \quad i=0, 1. \end{aligned}$$

Наконец, для энергии изгиба пластинок $\Pi^{shear} \equiv \sum_{p=1}^n \Pi_{p,p+1}^{link,shear}$ (1.153) полу-

чим следующие обобщённые силы:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link, shear}}}{\partial \gamma_{p,p+1}} &= c_{p,p+1}^{shear} \gamma_{p,p+1} \equiv f_{p,p+1}^{link, shear}, \\
\frac{\partial \gamma_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p+1,0}^\perp} &= -\frac{\partial \gamma_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p,0}^\perp} = \frac{2}{lL_{p,p+1}} (\mathbf{u}_{p,1}^\perp + \mathbf{u}_{p+1,1}^\perp), \\
\frac{\partial \gamma_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p+1,1}^\perp} &= \frac{\partial \gamma_{p,p+1}}{\partial \mathbf{u}_{p,1}^\perp} = \frac{2}{l} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, \quad \frac{\partial \gamma_{p,p+1}}{\partial u_{p+1,0}^\parallel} = -\frac{\partial \gamma_{p,p+1}}{\partial u_{p,0}^\parallel} = \frac{2}{L_{p,p+1}} \Rightarrow \\
Q_{p,0}^{\perp, link, shear} &\equiv -\frac{\partial \Pi^{shear}}{\partial \mathbf{u}_{p,0}^\perp} = \frac{2f_{p,p+1}^{link, shear}}{lL_{p,p+1}} (\mathbf{u}_{p,1}^\perp + \mathbf{u}_{p+1,1}^\perp) - \frac{2f_{p-1,p}^{link, shear}}{lL_{p-1,p}} (\mathbf{u}_{p-1,1}^\perp + \mathbf{u}_{p,1}^\perp), \\
Q_{p,1}^{\perp, link, shear} &\equiv -\frac{\partial \Pi^{shear}}{\partial \mathbf{u}_{p,1}^\perp} = -\frac{2}{l} \left(f_{p,p+1}^{link, shear} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + f_{p-1,p}^{link, shear} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp \right), \\
Q_{p,0}^{\parallel, link, shear} &\equiv -\frac{\partial \Pi^{shear}}{\partial u_{p,0}^\parallel} = \frac{2f_{p,p+1}^{link, shear}}{L_{p,p+1}} - \frac{2f_{p-1,p}^{link, shear}}{L_{p-1,p}}.
\end{aligned}$$

Осталось найти обобщённые силы, обусловленные диссипативной функцией Рэлея. Прежде, чем начать, рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, аргументы которой в свою очередь зависят от времени, и отметим известное тождество:

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.164)$$

(оно используется при выводе уравнений Лагранжа второго рода). Далее при использовании этого тождества роль функции f играют деформации, входящие в различные слагаемые потенциальной энергии, а роль аргументов x_i — комбинации обобщённых координат, от которых эти деформации зависят. Производные от $\partial f / \partial x_i$ фактически уже вычислены при вычислении потенциальных сил. Если в диссипативную функцию входят непосредственно скорости деформаций, то в обобщённые силы войдут производные $\partial \dot{f} / \partial \dot{x}_i$; однако в силу указанного тождества вычислять их снова не требуется.

Вычислим вклад в обобщённые силы слагаемых $\Phi_{p,p+1}^{link, ext}$ (1.154), $\Phi_{p,p+1}^{link, tors}$ (1.156), $\Phi_{p,p+1}^{link, shear}$ (1.157), Φ_p^{joint} (1.80), $\Phi_p^{pin, ext}$ (1.158), $\Phi_p^{pin, bend}$ (1.159). Будем использовать обозначения вида $Q_{p,i}^{d, \perp, link, ext}$, $Q_{p,i}^{d, \parallel, pin, ext}$ и т. п. — верхний индекс d означает, что силы диссипативные; верхние индексы \perp , \parallel вместе с нижними индексами p, i , как обычно, идентифицируют комбинацию обобщённых координат; остальные верхние индексы (например, $link, ext$) идентифицируют слагаемые в

диссипативной функции. Итак, для диссипации растяжения пластинок имеем

$$\begin{aligned}
Q_{p,i}^{d,\perp,link,ext} &\equiv -\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp} \sum_{p=1}^n \Phi_{p,p+1}^{link,ext} = Q_{p,p+1,i}^{d,\perp,link,ext} - Q_{p-1,p,i}^{d,\perp,link,ext}, \\
Q_{p,p+1,i}^{d,\perp,link,ext} &\equiv \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp} = \sum_{j=0}^3 f_{p,p+1,j}^{d,link,ext} \frac{\partial \Delta_{p,p+1,j}}{\partial \mathbf{u}_{p,i}^\perp}, \\
f_{p,p+1,i}^{d,link,ext} &\equiv \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \Delta_{p,p+1,i}} = \beta^{link,ext} \sum_{j=0}^3 c_{p,p+1,ij} \dot{\Delta}_{p,p+1,j}, \\
Q_{p,p+1,0}^{d,\perp,link,ext} &= \frac{1}{L_{p,p+1}} \sum_{j=0}^3 f_{p,p+1,j}^{d,link,ext} \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,j}, \\
Q_{p,p+1,i}^{d,\perp,link,ext} &= f_{p,p+1,i}^{d,link,ext} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Далее, для диссипации закручивания пластинок имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link,tors}}{\partial (\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp)} &= \beta^{link,tors} c_{p,p+1}^{tors} \dot{\varphi}_{p,p+1} \frac{\partial \varphi_{p,p+1}}{\partial \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp} \equiv Q_{p,p+1,i}^{d,\perp,link,tors}, \\
-\frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link,tors}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp} &= \frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link,tors}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p+1,i}^\perp} = Q_{p,p+1,i}^{d,\perp,link,tors} \Rightarrow \\
Q_{p,i}^{d,\perp,link,tors} &\equiv -\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp} \sum_{p=1}^n \Phi_{p,p+1}^{link,tors} = Q_{p,p+1,i}^{d,\perp,link,tors} - Q_{p-1,p,i}^{d,\perp,link,tors}, \quad i = 0, 1.
\end{aligned}$$

Для диссипации сдвига пластинок имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{p,p+1}^{link,shear}}{\partial \dot{\gamma}_{p,p+1}} &= \beta^{link,shear} c_{p,p+1}^{shear} \dot{\gamma}_{p,p+1} \equiv f_{p,p+1}^{d,link,shear}, \\
Q_{p,0}^{d,\perp,link,shear} &\equiv -\frac{\partial \Phi^{shear}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,0}^\perp} = \frac{2f_{p,p+1}^{d,link,shear}}{lL_{p,p+1}} (\mathbf{u}_{p,1}^\perp + \mathbf{u}_{p+1,1}^\perp) - \frac{2f_{p-1,p}^{d,link,shear}}{lL_{p-1,p}} (\mathbf{u}_{p-1,1}^\perp + \mathbf{u}_{p,1}^\perp), \\
Q_{p,1}^{d,\perp,link,shear} &\equiv -\frac{\partial \Phi^{shear}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,1}^\perp} = -\frac{2}{l} \left(f_{p,p+1}^{d,link,shear} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp + f_{p-1,p}^{d,link,shear} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp \right), \\
Q_{p,0}^{d,\parallel,link,shear} &\equiv -\frac{\partial \Phi^{shear}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,0}^\parallel} = \frac{2f_{p,p+1}^{d,link,shear}}{L_{p,p+1}} - \frac{2f_{p-1,p}^{d,link,shear}}{L_{p-1,p}}.
\end{aligned}$$

Для демпфирования относительного поворота звеньев обобщённые силы совпадают с (1.92), (1.93) с точностью до обозначений (комбинация $\mathbf{u}_{p,0}^\perp$ в данной модели и $\mathbf{u}_{p,0}^\perp$ в прежних моделях — по существу одно и то же):

$$\begin{aligned}
Q_{p,0}^{d,\perp,joint} &= b_p^{joint} \omega_p^{joint} (V_{p,p+1} + V_{p-1,p}), \\
V_{p,p+1} &\equiv \frac{\partial \omega_{p,p+1}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,0}^\perp} = \frac{\mathbf{k} \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp}{L_{p,p+1} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp}.
\end{aligned} \tag{1.165}$$

Демпфированию осевых колебаний пинов соответствуют обобщённые силы

$$Q_{p,1}^{d,\parallel,pin,ext} \equiv -\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,1}^\parallel} \sum_{p=1}^n \Phi_p^{pin,ext} = -b_p \dot{\Delta}_p. \tag{1.166}$$

Наконец, силы демпфирования изгибных колебаний пинов аналогичны (1.127), (1.128):

$$\begin{aligned}
Q_{p,0}^{d,\perp,pin,bend} &\equiv - \sum_{q=1}^n \frac{\partial \Phi_q^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,0}^\perp} = - \sum_{j=-1}^1 \frac{\partial \Phi_{p+j}^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,0}^\perp} = \\
&= \frac{1}{L_{p-1,p}} \mathbf{w}_{p-1}^\perp + \left(\frac{1}{L_{p,p+1}} - \frac{1}{L_{p-1,p}} \right) \mathbf{w}_p^\perp + \frac{1}{L_{p,p+1}} \mathbf{w}_{p+1}^\perp, \\
\mathbf{w}_p^\perp &= \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\tilde{\tau}}_{p-1,p}^\perp} = \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\tilde{\tau}}_{p,p+1}^\perp} = - \frac{\beta^{bend}}{|\tilde{\tau}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\tau}_{p,p+1}^\perp|} \sum_{i,j=2}^3 c_{ij}^{pin,bend} \mathbf{n}_p^\perp (\mathbf{k} \times \mathbf{u}_{p,i}^\perp) \cdot \hat{\mathbf{a}}_p \cdot \mathbf{u}_{p,j}^{\perp \nabla}, \\
Q_{p,i}^{d,\perp,pin} &= - \frac{\partial \Phi_p^{pin,bend}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp} = - \beta^{bend} \sum_{j=2}^3 \hat{\mathbf{a}}_p \cdot \mathbf{u}_{p,j}^{\perp \nabla}.
\end{aligned} \tag{1.167}$$

Таким образом, вычислены все обобщённые силы в несимметричной модели цепи.

Уточнённое моделирование пластинок цепи. Во всех рассмотренных до сих пор моделях цепи потенциальная энергия деформации пластинок определялась таким образом, чтобы вычисление обобщённых сил не требовало суммирования по пластинкам звена — по существу, набор пластинок рассматривался как упругий слой, жесткостные характеристики которого вычислялись заранее в виде некоторых сумм по пластинкам звена. С одной стороны, эти модели выигрывают в быстродействии при расчётах; с другой стороны, в определении потенциальной энергии пластинок оказался неизбежным ряд упрощений, что может негативно отразиться на точности получаемых численных результатов. Кроме того, в рамках концепции упругого слоя затруднительно или невозможно смоделировать некоторые аспекты поведения пластинок (например, они не работают на сжатие), которым в основном и посвящена рассматриваемая в этом подразделе модель. В рамках этой модели каждая пластинка рассматривается отдельно, в том смысле, что концепция упругого слоя не используется.

При описании сдвига в цепи в рамках предыдущей модели было принято, что пластинки жёстко соединены с пинами. В реальности жёсткое соединение отсутствует, пластинки просто надеты на пины. В данной модели предложен

способ описания сдвига в цепи, не опирающийся на предположение о жёстком соединении пластинки и пина.

Рассмотрим подробнее изгиб пластинки, надетой на два пина, в плоскости её наименьшей жёсткости. Будем считать, что пластинка имеет толщину h ; кроме того, ограничимся двумерной постановкой, то есть будем считать пластинку и пины двумерными полосками. Конфигурация в недеформированном состоянии показана на рис. 1.35. Пропорции намеренно не соблюдены. Пластинка

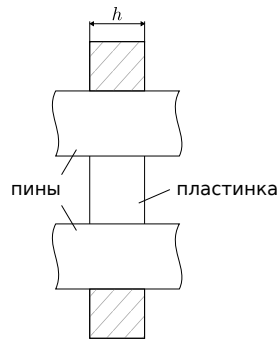


Рис. 1.35. Пластинка, надетая на два пина (недеформированное состояние)

считается безынерционной, поэтому она всегда находится в положении равновесия и её деформированное состояние полностью определяется приложенными в данный момент нагрузками. Эти нагрузки — силы, действующие со стороны пинов, на которые надета пластинка. Изгибающий момент вызван тем, что нагрузка распределена по линии контакта пин — пластинка неравномерно. Но как бы она ни была распределена, создаваемый ею момент ограничен сверху значением $Th/2$, где T — сила натяжения в пластинке. Если момент, действующий на пластинку, равен указанному наибольшему значению, то это означает, что нагрузка не распределена по всей линии контакта, а сосредоточена в углу: в любом другом случае создаваемый момент окажется меньше (по абсолютной величине). Формально это утверждение доказывается следующим образом. Пусть x — координата, изменяющаяся вдоль линии контакта от $-h/2$ на одной стороне пластинки до $h/2$ на другой её стороне. К линии контакта приложена нагрузка $q(x) > 0$ (отрицательной она быть не может, так как ничто не создаёт такую нагрузку). Натяжение пластинки T и действующий на неё момент M определя-

ются соотношениями

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} q(x) dx, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} xq(x) dx.$$

Требуемая оценка момента получается следующим образом.

$$\begin{aligned} Q(x) &\equiv \int_{-h/2}^x q(\xi) d\xi, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} xQ' dx = xQ \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} Q dx = \\ &= \frac{h}{2}T - \int_{-h/2}^{h/2} Q dx \leq \frac{h}{2}T \end{aligned}$$

(неравенство следует из того, что $Q \geq 0$). С другой стороны, на рассматриваемом отрезке $x \in [-h/2, h/2]$ имеем $q = (Q - T)'$, $Q - T \leq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} x(Q - T)' dx = x(Q - T) \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} (Q - T) dx = \\ &= -\frac{h}{2}T - \int_{-h/2}^{h/2} (Q - T) dx \geq -\frac{h}{2}T. \end{aligned}$$

Полученная двусторонняя оценка и доказывает утверждение.

С учётом приведённых выше соображений в предлагаемой модели рассматривается возможность контакта пластинки и пина как вдоль линии, так и в углу. В любом случае действующий со стороны пина на пластинку момент не превышает по абсолютной величине $Th/2$. Кроме того, считается, что натяжение T не может быть отрицательным.

Пронумеруем пины, контактирующие с пластинкой, индексами 1 и 2. Обозначим углы наклона пинов в деформированном состоянии ψ_1 и ψ_2 , а углы наклона сечений пластинки на линии контакта — ζ_1 и ζ_2 . При контакте вдоль всей линии эти углы совпадают: $\psi_\alpha = \zeta_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Однако при контакте углом они различаются (рис. 1.36):

$$\zeta_\alpha = \psi_\alpha - \delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.168)$$

В случае, если контакт с пином номер α происходит по всей толщине пластинки, угол δ_α равен нулю; если же пластинка контактирует с пином углом, он отличен от нуля: если точка контакта в правом углу, то $\delta_\alpha > 0$, а если в левом, то $\delta_\alpha < 0$.

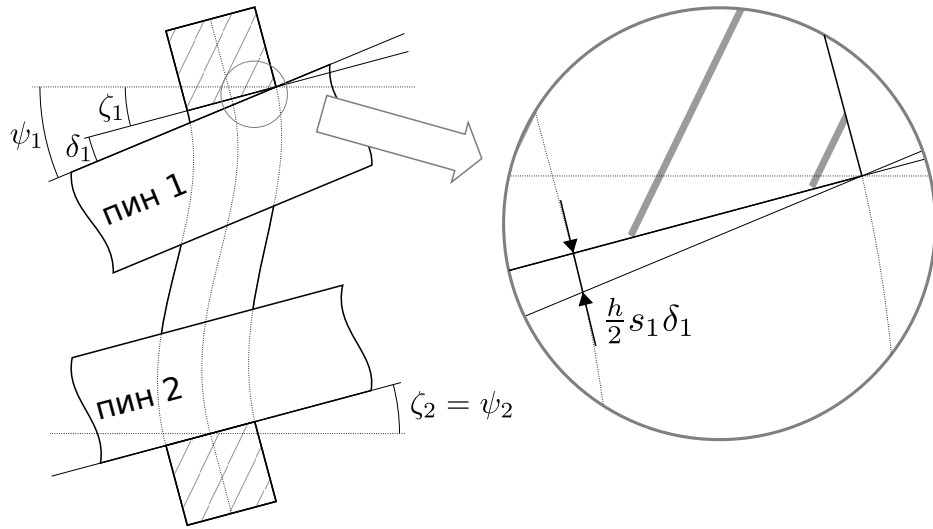


Рис. 1.36. Деформированное состояние пластинки цепи при растяжении и изгибе

Определим теперь осевую деформацию пластинки. Пусть Δ — абсолютное удлинение пластинки в некотором деформированном состоянии в случае, если контакт с обоими пинами происходит вдоль линии, то есть $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Если теперь рассмотреть состояние, отличающееся от первого лишь тем, что углы δ_α стали отличными от нуля, осевая деформация должна измениться — она увеличится и будет равна $\tilde{\Delta}$ (рис. 1.36):

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{h}{2}(s_1\delta_1 + s_2\delta_2), \quad s_\alpha \equiv \operatorname{sgn} \delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.169)$$

Отметим, что изменение длины оси пластинки за счёт её изгиба — величина второго порядка малости относительно ζ_1, ζ_2 (см., например, вывод формулы (1.109); в ней надо положить $h = 0$) и потому не рассматривается.

Потенциальная энергия растяжения и изгиба пластинки может быть записана в виде

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^b, \quad \Pi^e = \frac{1}{2}c\tilde{\Delta}^2, \quad \Pi^b = \frac{1}{2}[c_1(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + 2c_2\zeta_1\zeta_2] \quad (1.170)$$

(см. (1.141), (1.152)). Нагрузки, действующие на пластинку — сила натяжения T и изгибающие моменты M_1, M_2 , — очевидным образом выражаются через потенциальную энергию и деформации:

$$T = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\Delta}} = c\tilde{\Delta}, \quad M_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1} = c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2, \quad M_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_2} = c_2\zeta_1 + c_1\zeta_2. \quad (1.171)$$

Дальнейший анализ сводится к установлению условий существования каждого из следующих десяти случаев в зависимости от значений Δ , ψ_1 , ψ_2 :

- | | | |
|--|--|--|
| 1: $T > 0, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$; | 2: $T > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 = 0$; | 3: $T > 0, \delta_1 < 0, \delta_2 = 0$; |
| 4: $T > 0, \delta_1 = 0, \delta_2 > 0$; | 5: $T > 0, \delta_1 = 0, \delta_2 < 0$; | 6: $T > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$; |
| 7: $T > 0, \delta_1 < 0, \delta_2 < 0$; | 8: $T > 0, \delta_1 < 0, \delta_2 > 0$; | 9: $T > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 < 0$; |
| 10: $T \leq 0$. | | |

Указанные случаи схематично изображены на рис. 1.37.

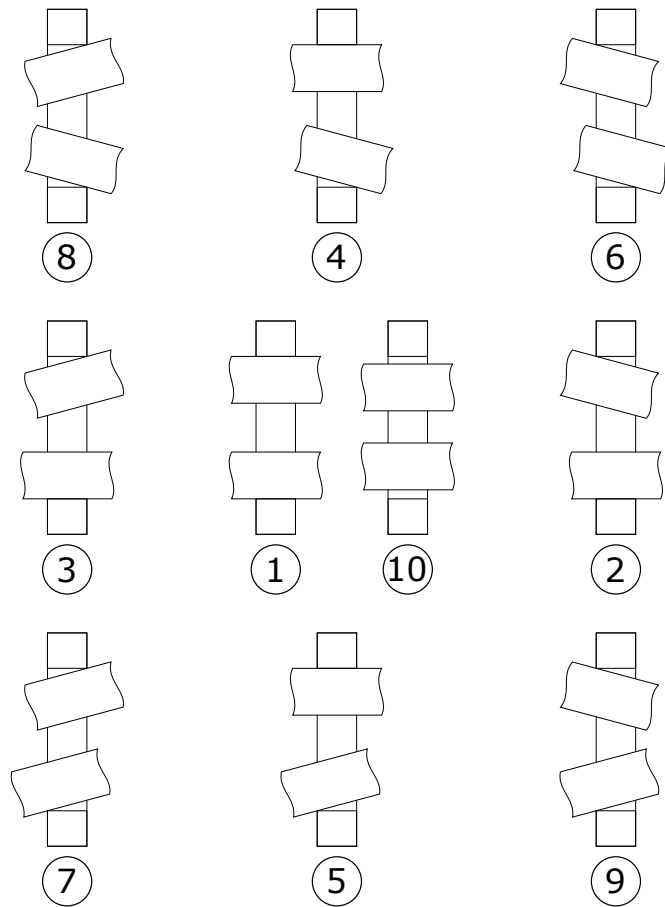


Рис. 1.37. Возможные случаи контакта пластинки с пинами

В каждом из случаев 1–9 выполняются неравенства

$$T > 0, \quad |M_1| \leq \frac{h}{2}T, \quad |M_2| \leq \frac{h}{2}T. \quad (1.172)$$

Два последних нестрогих неравенства обращаются в равенства соответственно при $\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$. При $\delta_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2$) будем считать соответствующее неравенство строгим. Углы δ_1, δ_2 в случаях, когда они отличны от нуля, находятся

из условий равновесия пластинки

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} = 0. \quad (1.173)$$

Введём ещё следующие обозначения.

$$\begin{aligned} T^0 &\equiv \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\Delta}} \right|_{\delta_1=\delta_2=0} = c\Delta, & M^0 &\equiv \frac{h}{2}T^0, & c_0 &\equiv \frac{h^2}{4}c, \\ M_1^0 &\equiv \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1} \right|_{\delta_1=\delta_2=0} = c_1\psi_1 + c_2\psi_2, & M_2^0 &\equiv \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_2} \right|_{\delta_1=\delta_2=0} = c_2\psi_1 + c_1\psi_2. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Найдём условия, при которых реализуется каждый из вышеуказанных случаев 1–10.

Случай 1: $T > 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$. Имеем

$$\tilde{\Delta} = \Delta \quad \Rightarrow \quad T = T^0, \quad \zeta_\alpha = \psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad M_\alpha = M_\alpha^0. \quad (1.175)$$

Неравенства (1.172) принимают вид

$$\Delta > 0, \quad -M^0 < M_\alpha^0 < M^0, \quad \alpha = 1, 2.$$

На плоскости (ψ_1, ψ_2) случаю 1 соответствует внутренность параллелограмма, ограниченного прямыми $|M_\alpha^0| = M^0$ (рис. 1.38).

Случаи 2, 3: $T > 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 = 0$. Имеем

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{h}{2}s_1\delta_1, \quad \zeta_1 = \psi_1 - \delta_1, \quad \zeta_2 = \psi_2. \quad (1.176)$$

Неравенство $T > 0$, таким образом, сводится к

$$\Delta + \frac{h}{2}s_1\delta_1 > 0.$$

Далее, из (1.173) находим угол δ_1 :

$$\delta_1 : \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\Delta}} \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \delta_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \delta_1} = T \frac{h}{2}s_1 - M_1 = 0,$$

то есть, как и ожидалось, второе из неравенств (1.172) обратилось в равенство; далее, используя (1.171), (1.174), несложно вычислить

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{M_1^0 - s_1 M^0}{c_0 + c_1} = \frac{1}{c_0 + c_1} (c_1\psi_1 + c_2\psi_2 - s_1 \frac{2}{h}c_0\Delta), \\ T &= \frac{1}{c_0 + c_1} [c_1 M^0 + c_0 s_1 M_1^0], \\ M_2 &= \frac{1}{c_0 + c_1} [(c_1^2 - c_2^2)\psi_2 + c_0 M_2^0 + c_2 s_1 M^0]. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Здесь следует отметить появление ещё одного неравенства, которое должно выполняться, чтобы δ_1 имело правильный знак:

$$s_1 \delta_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 M_1^0 > M^0. \quad (1.178)$$

Неравенства (1.172) для T и M_2 принимают следующий вид:

$$s_1 M_1^0 > -\frac{c_1}{c_0} M^0, \quad (1.179)$$

$$\begin{cases} -s_1 c_0 \psi_1 + (c_1 + s_1 c_2 + c_0) \psi_2 - M^0 < 0, \\ s_1 c_0 \psi_1 + (c_1 - s_1 c_2 + c_0) \psi_2 + M^0 > 0. \end{cases} \quad (1.180)$$

Обозначим

$$M_2^1 \equiv -c_0 \psi_1 + (c_1 + c_2 + c_0) \psi_2, \quad M_2^2 \equiv c_0 \psi_1 + (c_1 - c_2 + c_0) \psi_2.$$

Тогда неравенства для (1.180) момента M_2 примут следующий вид для случаев 2 и 3:

$$2 : M_2^1 - M^0 < 0, \quad M_2^2 + M^0 > 0, \quad 3 : M_2^2 - M^0 < 0, \quad M_2^1 + M^0 > 0.$$

Отметим теперь, что одно из неравенств (1.178), (1.179) является избыточным: при $\Delta > 0$ избыточно (1.179), а при $\Delta \leq 0$ избыточно (1.178) — такой вывод следует из того, что $\text{sgn } M^0 = \text{sgn } \Delta$. С другой стороны, (1.179) избыточно в случаях 2 и 3 всегда, так как последние два неравенства в (1.172) не могут выполняться при нарушении первого.

Случаи 4 и 5: $T > 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 \neq 0$. Они аналогичны случаям 2 и 3. Отметим, что выражение потенциальной энергии пластинки (1.170) симметрично в том смысле, что она не меняется, если значения ζ_1 и ζ_2 меняются местами. Благодаря этой симметрии анализ случаев 4 и 5 в точности повторяет анализ случаев 2 и 3, но индексы 1 и 2 везде (кроме c) меняются местами. Результат следующий:

$$4 : M_1^1 - M^0 < 0, \quad M_1^2 + M^0 > 0, \quad 5 : M_1^2 - M^0 < 0, \quad M_1^1 + M^0 > 0, \\ M_1^1 \equiv (c_1 + c_2 + c_0) \psi_1 - c_0 \psi_2, \quad M_1^2 \equiv (c_1 - c_2 + c_0) \psi_1 + c_0 \psi_2;$$

При $\Delta > 0$ добавляются также неравенства, обеспечивающие правильный знак δ_2 , аналогичные (1.178):

$$4 : M_2^0 - M^0 > 0, \quad 5 : -M_2^0 - M^0 < 0.$$

Угол δ_2 вычисляется по формуле

$$\delta_2 = \frac{M_2^0 - s_2 M^0}{c_0 + c_1} = \frac{1}{c_0 + c_1} (c_2 \psi_1 + c_1 \psi_2 - s_2 \frac{2}{h} c_0 \Delta). \quad (1.181)$$

Случаи 6, 7, 8, 9: $T > 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$. Имеем

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{h}{2} (s_1 \delta_1 + s_2 \delta_2), \quad \zeta_1 = \psi_1 - \delta_1, \quad \zeta_2 = \psi_2 - \delta_2. \quad (1.182)$$

Углы δ_1 , δ_2 находятся из условия равновесия (1.173):

$$\begin{aligned} \delta_1 : \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\Delta}} \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \delta_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \delta_1} = T \frac{h}{2} s_1 - M_1 = 0, \\ \delta_2 : \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_2} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\Delta}} \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \delta_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \delta_2} = T \frac{h}{2} s_2 - M_2 = 0. \end{aligned}$$

Теперь второе и третье из неравенств (1.172) обратились в равенства, как и должно быть. Вычисление углов δ_1 , δ_2 с использованием (1.171), (1.174) приводит к следующему:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{D} (m_1 \psi_1 + m_2 \psi_2 - s_1 M^0), \quad \delta_2 = \frac{1}{D} (m_2 \psi_1 + m_1 \psi_2 - s_2 M^0), \\ D &\equiv 2c_0 + c_1 + s_1 s_2 c_2, \quad m_1 \equiv c_0 + c_1 + s_1 s_2 c_2, \quad m_2 \equiv -s_1 s_2 c_0. \end{aligned} \quad (1.183)$$

Для реализации случаев 6, 7, 8, 9 должны выполняться неравенства $s_1 \delta_1 > 0$, $s_2 \delta_2 > 0$. Так как $c_0 > 0$, $c_1 > c_2 > 0$, множитель $1/D$ в (1.183) положителен и эти неравенства принимают вид

$$s_1 (m_1 \psi_1 + m_2 \psi_2) > 0, \quad s_2 (m_2 \psi_1 + m_1 \psi_2) > 0.$$

В каждом конкретном случае они превращаются в те, что встречались для случаев 2–5, но с противоположным знаком:

$$\begin{aligned} 6 : M_1^1 - M^0 &> 0, \quad M_2^1 - M^0 > 0, \\ 7 : M_1^1 + M^0 &< 0, \quad M_2^1 + M^0 < 0, \\ 8 : M_1^2 + M^0 &< 0, \quad M_2^2 - M^0 > 0, \\ 9 : M_1^2 - M^0 &> 0, \quad M_2^2 + M^0 < 0. \end{aligned}$$

Вычисление силы натяжения звена T даёт

$$\frac{h}{2}T = \frac{c_0(c_1 + s_1s_2c_2)}{D} \left(s_1\psi_1 + s_2\psi_2 + \frac{M^0}{c_0} \right). \quad (1.184)$$

При $\Delta > 0$ натяжение положительно; при $\Delta < 0$ оно положительно лишь при выполнении условия

$$s_1\psi_1 + s_2\psi_2 > -\frac{M^0}{c_0} \equiv \psi^*,$$

которое в каждом из случаев имеет вид

$$\begin{aligned} 6: \quad & \psi_1 + \psi_2 - \psi^* > 0, & 7: \quad & -\psi_1 - \psi_2 - \psi^* > 0, \\ 8: \quad & -\psi_1 + \psi_2 - \psi^* > 0, & 9: \quad & \psi_1 - \psi_2 - \psi^* > 0. \end{aligned} \quad (1.185)$$

Области на плоскости (ψ_1, ψ_2) , соответствующие случаям 1–10 представлены на рис. 1.38 (слева для $\Delta > 0$, справа для $\Delta < 0$). Подписи на линиях обозначают функции, обращающиеся на этих линиях в ноль; стрелки поперёк линий обозначают направления возрастания (градиенты) функций. Отметим, что при $\Delta > 0$ невозможен случай 10, а при $\Delta < 0$ невозможен случай 1.

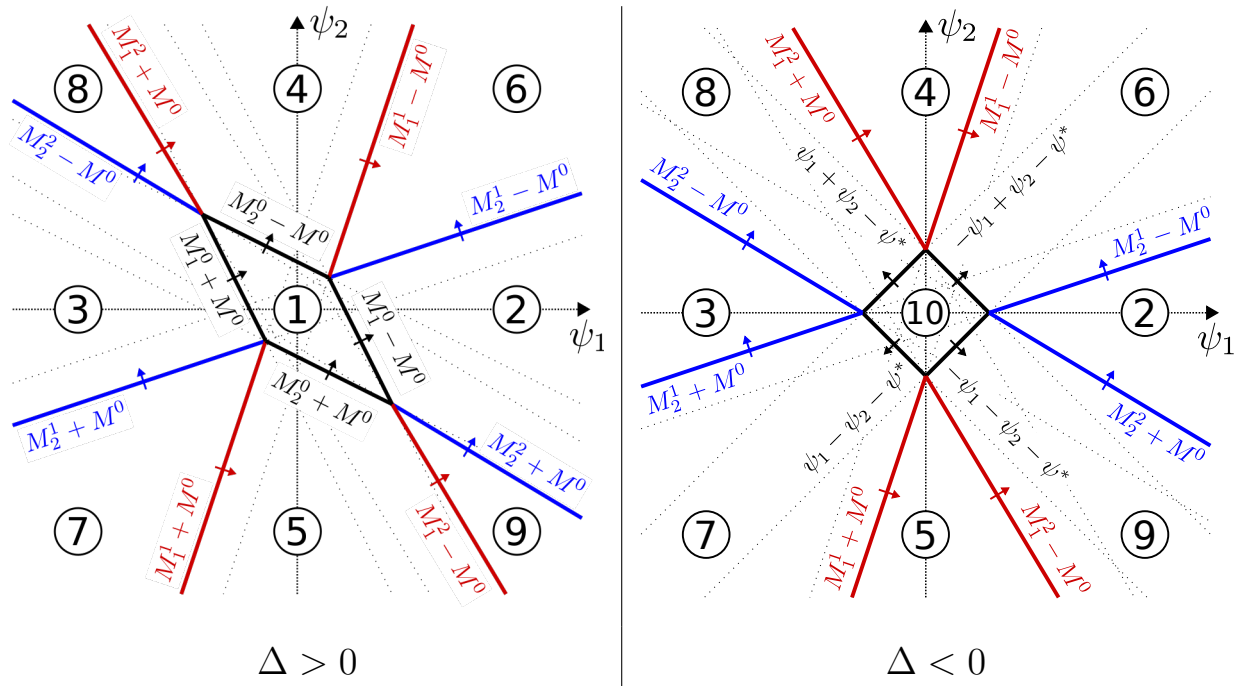


Рис. 1.38. Диаграмма состояний пластинки цепи

Таким образом, проведён полный анализ условий, при которых реализуются случаи 1–10. Эта модель взаимодействия пластинки с пинами при её растяжении и изгибе была реализована для расчётов динамики бесступенчатой

трансмиссии. Изменения по сравнению с предыдущей моделью цепи состоят в том, что слагаемые $\Pi_{p,p+1}^{link,ext}$ и $\Pi_{p,p+1}^{link,shear}$ в потенциальной энергии, а также слагаемые $\Phi_{p,p+1}^{link,ext}$ и $\Phi_{p,p+1}^{link,shear}$ в диссипативной функции Рэлея заменяются другими, предложенными ниже; в остальном модель остаётся прежней. В частности, для описания закручивания пластинок по-прежнему используются выражения $\Pi_{p,p+1}^{link,tors}$ (1.146) и $\Phi_{p,p+1}^{link,tors}$ (1.156).

Поскольку в рассматриваемой модели цепи мы отказываемся от рассмотрения пластинок звена (при растяжении и изгибе) в рамках концепции упругого слоя, то есть рассматриваем каждую пластинку в отдельности, уже нет большого смысла в линеаризации и другом упрощении вида деформаций, определяющих её растяжение и изгиб. В частности, нет смысла пренебрегать изгибом пинов при описании деформаций изгиба пластинки, как это было сделано в предыдущей модели — см. (1.149).

Деформация $\Delta_{p,p+1}^k$ растяжения k -той пластинки звена цепи между p -тым и $(p+1)$ -м пинами (в случае, когда она жёстко связана с пинами) определяется следующим «прямолинейным» образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{p,p+1}^k &= |\Delta \mathbf{U}_{p,p+1}^k| - L_{p,p+1}, \quad \Delta \mathbf{U}_{p,p+1}^k \equiv \Delta \mathbf{U}_{p,p+1}(\xi_{p,p+1}^k), \\ \Delta \mathbf{U}_{p,p+1}(\xi) &\equiv \mathbf{U}_{p+1}(\xi) - \mathbf{U}_p(\xi). \end{aligned} \quad (1.186)$$

Единичный вектор направления пластинки $\boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k$ принимается в виде

$$\boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k = \frac{\Delta \mathbf{U}_{p,p+1}^k}{|\Delta \mathbf{U}_{p,p+1}^k|} \quad (1.187)$$

Углы $\psi_{p,p+1,1}^k$, $\psi_{p,p+1,2}^k$ (деформации, определяющие изгиб пластинки, жёстко связанной с пинами) определяются соотношениями, аналогичными (1.148):

$$\psi_{p,p+1,1}^k = \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p,p+1,1}^k, \quad \psi_{p,p+1,2}^k = \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p,p+1,2}^k. \quad (1.188)$$

Фигурирующие здесь векторы касательных к осям пина $\mathbf{t}_{p,p+1,1}^k$, $\mathbf{t}_{p,p+1,2}^k$ вводятся

так (ср. с формулой (1.142)):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_p(\xi) &\equiv \mathbf{t}_p^\perp(\xi) + \mathbf{k}, & \mathbf{t}_p^\perp(\xi) &\equiv \frac{2}{l} (\mathbf{U}_p^\perp(\xi))' = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_{p,i}^\perp h'_i(\xi), \\ \mathbf{t}_{p,p+1,1}^k &\equiv \mathbf{t}_p(\xi_{p,p+1}^k), & \mathbf{t}_{p,p+1,2}^k &\equiv \mathbf{t}_{p+1}(\xi_{p,p+1}^k). \end{aligned} \quad (1.189)$$

Осевая деформация пина Δ_p/l отброшена, так как нас интересуют векторы касательных, единичные хотя бы с точностью до членов первого порядка; написанное выражение $\mathbf{t}_p(\xi)$ фактически является результатом линеаризации выражения $\mathbf{U}'(\xi)/|\mathbf{U}'(\xi)|$.

По деформациям $\Delta_{p,p+1}^k$ (1.186), $\psi_{p,p+1,1}^k$, $\psi_{p,p+1,2}^k$ (1.188) можно определить, в каком из десяти состояний находится пластинка, а также найти углы $\delta_{p,p+1,1}^k$, $\delta_{p,p+1,2}^k$ (обозначенные выше как δ_1 , δ_2 , так как рассматривалось всего одно звено и одна пластинка) по формулам (1.177), (1.181) или (1.183), в зависимости от состояния. После этого можно вычислить истинные деформации пластинки $\tilde{\Delta}_{p,p+1}^k$ (1.169), $\zeta_{p,p+1,1}^k$, $\zeta_{p,p+1,2}^k$ (1.168). Пластинки, для которых $\tilde{\Delta}_{p,p+1}^k \leq 0$, находятся в состоянии 10; они не работают ни на растяжение, ни на изгиб и поэтому не учитываются в потенциальной энергии и диссипативной функции.

Потенциальная энергия растяжения звена может теперь быть определена следующим образом (см. также (1.141)):

$$\Pi_{p,p+1}^{link,ext} = \frac{1}{2} \sum_{k \in S_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k \left(\tilde{\Delta}_{p,p+1}^k \right)^2, \quad S_{p,p+1} \equiv \left\{ k : \tilde{\Delta}_{p,p+1}^k > 0 \right\}. \quad (1.190)$$

Потенциальная энергия изгиба пластинок звена определяется согласно (1.152), (1.170):

$$\begin{aligned} \Pi_{p,p+1}^{link,shear} &= \frac{1}{2} \sum_{k \in S_{p,p+1}} \sum_{i,j=1}^2 c_{p,p+1,ij}^{bend} \zeta_{p,p+1,i}^k \zeta_{p,p+1,j}^k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in S_{p,p+1}} \left[c_{p,p+1,11}^{bend} \left((\zeta_{p,p+1,1}^k)^2 + (\zeta_{p,p+1,2}^k)^2 \right) + 2c_{p,p+1,12}^{bend} \zeta_{p,p+1,1}^k \zeta_{p,p+1,2}^k \right]. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Диссипация растяжения пластинок звена, согласно (1.190) (см. также 1.154), такова

$$\Phi_{p,p+1}^{link,ext} = \frac{1}{2} \beta^{link,ext} \sum_{k \in S_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k \left(\dot{\tilde{\Delta}}_{p,p+1}^k \right)^2. \quad (1.192)$$

При изгибе пластинок, согласно (1.191) (см. также (1.157)), имеем

$$\Phi_{p,p+1}^{link, shear} = \frac{1}{2} \beta^{link, shear} \sum_{k \in S_{p,p+1}} \sum_{i,j=1}^2 c_{p,p+1,ij}^{bend} \dot{\zeta}_{p,p+1,i}^k \dot{\zeta}_{p,p+1,j}^k \quad (1.193)$$

Скорости деформаций $\dot{\Delta}_{p,p+1}^k$, $\dot{\zeta}_{p,p+1,1}^k$, $\dot{\zeta}_{p,p+1,2}^k$ выражаются через $\dot{\Delta}_{p,p+1}^k$, $\dot{\psi}_{p,p+1,1}^k$, $\dot{\psi}_{p,p+1,2}^k$ при помощи формул (1.205), (1.206), (1.207), (1.208), полученных ниже, в зависимости от того, какой случай реализуется для данной пластинки. Осталось вычислить скорости $\dot{\Delta}_{p,p+1}^k$, $\dot{\psi}_{p,p+1,1}^k$, $\dot{\psi}_{p,p+1,2}^k$. Из (1.186), (1.187) следует

$$\dot{\Delta}_{p,p+1}^k = \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k \cdot \Delta \dot{\mathbf{U}}_{p,p+1}^k, \quad \Delta \dot{\mathbf{U}}_{p,p+1}^k \equiv (\Delta \mathbf{U}_{p,p+1}^k) \dot{\quad} \quad (1.194)$$

Далее, из (1.188) находим

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{p,p+1,1}^k &= \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p,p+1,1}^k + \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p,p+1,1}^k, \\ \dot{\psi}_{p,p+1,2}^k &= \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p,p+1,2}^k + \dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k \cdot \mathbf{t}_{p,p+1,2}^k; \end{aligned} \quad (1.195)$$

из (1.187) находим $\dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k$:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^k = \frac{1}{|\Delta \mathbf{U}_{p,p+1}^k|} (\underline{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^k) \cdot \Delta \dot{\mathbf{U}}_{p,p+1}^k \quad (1.196)$$

($\underline{\mathbf{E}}$ — единичный тензор). Наконец, из (1.189) находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}_p(\xi) &= \dot{\mathbf{t}}_p^\perp(\xi) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^\perp h'_i(\xi), \\ \dot{\mathbf{t}}_{p,p+1,1}^k &= \dot{\mathbf{t}}_p(\xi_{p,p+1}^k), \quad \dot{\mathbf{t}}_{p,p+1,2}^k = \dot{\mathbf{t}}_{p+1}(\xi_{p,p+1}^k). \end{aligned} \quad (1.197)$$

Выкладки при вычислении обобщённых сил становятся чрезмерно громоздкими, если во всех обозначениях сохранять индексы $(\dots)_{p,p+1}^k$, идентифицирующие пластинку в звене. Поэтому временно откажемся от них, рассматривая обобщённые силы всего для одной пластинки. Кроме того, вместо нижних индексов p и $p+1$, идентифицирующих пины, соединённые с пластинкой, будем использовать индексы 1 и 2, как при анализе возможных состояний пластинки, проведённом выше. Потенциальная энергия при растяжении и изгибе будет тогда иметь вид (1.170), а диссипативная функция — следующий:

$$\Phi = \Phi^e + \Phi^b, \quad \Phi^e = \frac{1}{2} \beta^{link, ext} c \dot{\Delta}^2, \quad \Phi^b = \frac{1}{2} \beta^{link, shear} \left[c_1 \left(\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2 \right) + 2c_2 \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_2 \right] \quad (1.198)$$

Формулы для деформаций растяжения и изгиба пластинки, жёстко связанной с пинами, и прочие кинематические соотношения тоже будут компактнее:

$$\Delta = \tilde{L} - L, \quad \tilde{L} \equiv |\mathbf{V}|, \quad \mathbf{V} \equiv \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1, \quad (1.199)$$

$$\mathbf{U}_\alpha(\xi) = \mathbf{U}_\alpha^\perp + \mathbf{k}U_\alpha^\parallel, \quad \mathbf{U}_\alpha^\perp = \sum_{i=0}^3 \mathbf{u}_{\alpha,i}^\perp h_i(\xi), \quad U_\alpha^\parallel = \sum_{i=0}^1 u_{\alpha,i}^\parallel h_i(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \\ \boldsymbol{\tau} \equiv \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \frac{\mathbf{V}}{\tilde{L}} = \boldsymbol{\tau}^\perp + \mathbf{k}\tau^\parallel, \quad \boldsymbol{\tau}^\perp = \underline{\underline{\mathbf{E}}}^\perp \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \tau^\parallel = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.200)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^\perp \equiv \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{k}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{t}_\alpha \equiv \mathbf{t}_\alpha^\perp + \mathbf{k}, \quad \mathbf{t}_\alpha^\perp = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_{\alpha,i}^\perp h'_i(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.201)$$

$$\psi_\alpha = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_\alpha = \boldsymbol{\tau}^\perp \cdot \mathbf{t}_\alpha^\perp + \tau^\parallel \quad (1.202)$$

Чтобы найти обобщённые силы, требуется вычислить производные от потенциальной энергии по комбинациям обобщённых координат $\mathbf{u}_{\alpha,i}^\perp$, $u_{\alpha,i}^\parallel$ и производные диссипативной функции по аналогичным комбинациям обобщённых скоростей.

Пусть

$$\mathbf{Q}_{\alpha,i}^{\text{П},\perp} \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_{\alpha,i}^\perp}, \quad \mathbf{Q}_{\alpha,i}^{d,\perp} \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{\alpha,i}^\perp}, \quad \alpha = 1, 2, \quad i = 0, \dots, 3, \\ \mathbf{Q}_{\alpha,i}^{\text{П},\parallel} \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial u_{\alpha,i}^\parallel}, \quad \mathbf{Q}_{\alpha,i}^{d,\parallel} \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}_{\alpha,i}^\parallel}, \quad \alpha = 1, 2, \quad i = 0, 1 \quad (1.203)$$

Потенциальная энергия зависит от деформаций пластинки $\tilde{\Delta}$, ζ_1 , ζ_2 , которые в свою очередь зависят от Δ , ψ_1 , ψ_2 ; последние зависят от указанных комбинаций обобщённых координат. Аналогично, диссипативная функция зависит от скоростей деформаций $\dot{\tilde{\Delta}}$, $\dot{\zeta}_1$, $\dot{\zeta}_2$, которые зависят от $\dot{\Delta}$, $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$, которые уже зависят от комбинаций обобщённых скоростей. Для сокращения записи при вычислении производных уместно воспользоваться матричными обозначениями, поэтому введём в рассмотрение следующие столбцы:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \tilde{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \tilde{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}.$$

Согласно сказанному, производные от потенциальной энергии по какой-нибудь обобщённой координате q и производные от диссипативной функции по обоб-

щённой координате \dot{q} фактически вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\varepsilon}_i} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_i}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial q}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_i} \frac{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_i}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_j}{\partial \dot{q}} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_i} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_i}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \dot{q}}.$$

Последнее равенство — следствие тождества (1.164). Благодаря ему верно следующее:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = \sum_{i,j=1}^3 f_i A_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial q}, \quad f_i \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\varepsilon}_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_i}, \quad A_{ij} \equiv \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_i}{\partial \varepsilon_j}$$

(введена матрица Якоби $A = D\tilde{\varepsilon}/D\varepsilon$). Воспользуемся этим для вычисления величин (1.203):

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,i}^\perp &\equiv Q_{\alpha,i}^{\Pi,\perp} + Q_{\alpha,i}^{d,\perp} = \sum_{s,j=1}^3 f_s A_{sj} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_{\alpha,i}^\perp}, \\ Q_{\alpha,i}^\parallel &\equiv Q_{\alpha,i}^{\Pi,\parallel} + Q_{\alpha,i}^{d,\parallel} = \sum_{s,j=1}^3 f_s A_{sj} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial u_{\alpha,i}^\parallel}, \\ f &\equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\varepsilon}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}} = - \begin{bmatrix} c_1 \dot{\zeta}_1 + c_2 \dot{\zeta}_2 + \beta^{link,shear} (c_1 \dot{\zeta}_1 + c_2 \dot{\zeta}_2) \\ c_2 \dot{\zeta}_1 + c_1 \dot{\zeta}_2 + \beta^{link,shear} (c_2 \dot{\zeta}_1 + c_1 \dot{\zeta}_2) \\ c\tilde{\Delta} + \beta^{link,ext} c\dot{\tilde{\Delta}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.204)$$

Отметим также, что скорости деформаций пластинки $\dot{\tilde{\Delta}}, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2$ выражаются через $\dot{\Delta}, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ при помощи матрицы Якоби: $\dot{\tilde{\varepsilon}} = A\dot{\varepsilon}$.

Вычислим матрицу A в каждом из состояний пластинки 1–10. Случай 1 тривиален: из (1.175) следует

$$A = I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.205)$$

В случаях 2, 3 из (1.176), (1.177) находим

$$A = \frac{1}{c_0 + c_1} \begin{bmatrix} c_0 & -c_2 & s_1 \frac{2}{h} c_0 \\ 0 & c_0 + c_1 & 0 \\ s_1 \frac{h}{2} c_1 & s_1 \frac{h}{2} c_2 & c_1 \end{bmatrix}. \quad (1.206)$$

В аналогичных случаях 4, 5 получим — см. (1.181)

$$A = \frac{1}{c_0 + c_1} \begin{bmatrix} c_0 + c_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_0 & s_2 \frac{2}{h} c_0 \\ s_2 \frac{h}{2} c_2 & s_2 \frac{h}{2} c_1 & c_1 \end{bmatrix}. \quad (1.207)$$

Наконец, в случаях 6–9 вычисление матрицы A согласно (1.182), (1.183) даёт

$$A = \frac{1}{2c_0 + c_1 + s_1 s_2 c_2} \begin{bmatrix} c_0 & s_1 s_2 c_0 & s_1 \frac{2}{h} c_0 \\ s_1 s_2 c_0 & c_0 & s_2 \frac{2}{h} c_0 \\ \frac{h}{2}(s_1 c_1 + s_2 c_2) & \frac{h}{2}(s_2 c_1 + s_1 c_2) & c_1 + s_1 s_2 c_2 \end{bmatrix}. \quad (1.208)$$

Осталось вычислить производные от компонент ε по комбинациям обобщённых координат на основании формул (1.199), (1.200), (1.201), (1.202). Пусть q — какая-нибудь обобщённая координата, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial q} &= \frac{\partial |\mathbf{V}|}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^{1/2} = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = -\frac{1}{|\mathbf{V}|} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q} - \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|^2} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q} \cdot \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q} \cdot \frac{1}{L} (\underline{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}), \\ \frac{\partial t_\alpha}{\partial q} &= \frac{\partial t_\alpha^\perp}{\partial q} = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_{\alpha,i}^\perp}{\partial q} h'_i. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u_{1,i}^\perp} &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u_{2,i}^\perp} = \frac{h_i}{L} (\underline{\mathbf{E}}^\perp - \boldsymbol{\tau}^\perp \boldsymbol{\tau}), & -\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u_{1,i}^\parallel} &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u_{2,i}^\parallel} = \frac{h_i}{L} (\mathbf{k} - \boldsymbol{\tau}^\parallel \boldsymbol{\tau}), & i = 0, \dots, 3, \\ \frac{\partial t_\alpha}{\partial u_{\alpha,i}^\perp} &= \frac{2}{l} h'_i \underline{\mathbf{E}}^\perp, & \frac{\partial t_1}{\partial u_{2,i}^\perp} &= \frac{\partial t_2}{\partial u_{1,i}^\perp} = 0, & \frac{\partial t_\alpha}{\partial u_{\beta,i}^\parallel} &= 0, & i = 0, 1, & \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

При помощи этих формул находим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Delta}{\partial u_{1,i}^\perp} &= \frac{\partial \Delta}{\partial u_{2,i}^\perp} = h_i \boldsymbol{\tau}^\perp, & -\frac{\partial \Delta}{\partial u_{1,i}^\parallel} &= \frac{\partial \Delta}{\partial u_{2,i}^\parallel} = h_i \boldsymbol{\tau}^\parallel, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u_{1,i}^\perp} &= -\mathbf{e}_{1,i}^\perp + \frac{2h'_i}{L} \boldsymbol{\tau}^\perp, & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_{2,i}^\perp} &= \mathbf{e}_{1,i}^\perp, & -\frac{\partial \psi_1}{\partial u_{1,i}^\parallel} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial u_{2,i}^\parallel} = e_{1,i}^\parallel, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u_{1,i}^\perp} &= -\mathbf{e}_{2,i}^\perp, & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_{2,i}^\perp} &= \mathbf{e}_{2,i}^\perp + \frac{2h'_i}{L} \boldsymbol{\tau}^\perp, & -\frac{\partial \psi_2}{\partial u_{1,i}^\parallel} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial u_{2,i}^\parallel} = e_{2,i}^\parallel, \\ \mathbf{e}_{\alpha,i}^\perp &\equiv \frac{h_i}{L} (\mathbf{t}_\alpha^\perp - \boldsymbol{\tau}^\perp \psi_\alpha), & i &= 0, \dots, 3, \\ \mathbf{e}_{\alpha,i}^\parallel &\equiv \frac{h_i}{L} (1 - \boldsymbol{\tau}^\parallel \psi_\alpha) & i &= 0, 1. \end{aligned} \quad (1.209)$$

Таким образом, величины $\mathbf{Q}_{\alpha,i}^\perp$, $\mathbf{Q}_{\alpha,i}^\parallel$ (1.204), определяющие обобщённые силы, полностью вычислены. Сами обобщённые силы теперь можно найти, перейдя к обозначениям, позволяющим идентифицировать пластинку в цепи —

указанные величины тогда будут обозначаться $Q_{p,p+1,\alpha,i}^{k,\perp,plate,xb}$, $Q_{p,p+1,\alpha,i}^{k,\parallel,plate,xb}$ (верхний индекс xb обозначает растяжение, *eXtension*, и изгиб, *Bending*). Окончательно получаются следующие выражения обобщённых сил, обусловленных растяжением и изгибом, включая упругость и диссипацию:

$$Q_{p,i}^{\perp,link,xb} = \sum_{k=1}^{n_{p-1,p}} Q_{p-1,p,2,i}^{k,\perp,plate,xb} + \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} Q_{p,p+1,1,i}^{k,\perp,plate,xb}, \quad i = 0, \dots, 3$$

$$Q_{p,i}^{\parallel,link,xb} = \sum_{k=1}^{n_{p-1,p}} Q_{p-1,p,2,i}^{k,\parallel,plate,xb} + \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} Q_{p,p+1,1,i}^{k,\parallel,plate,xb}, \quad i = 0, 1.$$

Как обычно, сила $Q_{p,i}^{\perp,link,xb}$ соответствует комбинации обобщённых координат $u_{p,i}^{\perp}$, а сила $Q_{p,i}^{\parallel,link,xb}$ — комбинации $u_{p,i}^{\parallel}$.

Модели с двумя половинками пинов. В реальности каждый пин цепи беступенчатой трансмиссии состоит из двух одинаковых отдельных частей (половинок), обкатывающихся друг по другу при изменении угла между соседними звеньями (рис. 1.3). Каждая половинка имеет двояковыпуклые торцевые поверхности, контактирующие с шайбами; их геометрия подобрана специальным образом, чтобы добиться желаемого расположения точек контакта.

Во всех рассмотренных до сих пор моделях цепи пины считаются цельными — без половинок, с одной торцевой поверхностью на каждом конце, а их угловая ориентация (поворот вокруг оси) определяется вектором среднего направления прилегающих к пину звеньев. В этом разделе вкратце рассмотрены два подхода, позволяющие описать половинки пинов с большей или меньшей степенью детализации.

Первый подход сравнительно прост и фактически не меняет модель цепи, а лишь сказывается на расположении точек контакта пинов с шайбами. Его идея состоит в том, чтобы описать кинематику деформированной оси каждой половинки, опираясь на кинематику оси цельного пина, принимая во внимание, что половинки должны проскальзывать друг по другу в осевом направлении при изгибе в плоскости $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\tau}_p)$, как показывает оценка (1.111). Кроме того, каждая половинка пина снабжается своими торцевыми контактными поверхностями

ми нужной геометрии. Изменение взаимной угловой ориентации половинок не рассматривается, пин продолжает оставаться цельным. Обозначим радиус-векторы деформированных осей половинок пина $\mathbf{U}_p^-, \mathbf{U}_p^+$, тогда для них в рамках данного подхода будут выполняться следующие элементарные соотношения:

$$\mathbf{U}_p^- = \mathbf{U}_p - h\boldsymbol{\tau}_p, \quad \mathbf{U}_p^+ = \mathbf{U}_p + h\boldsymbol{\tau}_p, \quad (1.210)$$

где \mathbf{U}_p — радиус-вектор точки на оси цельного пина, h — половина расстояния между центрами инерции сечений половинок (см. рис. 1.24, слева). Этот простейший подход к описанию кинематики половинок пина иллюстрирует рис. 1.39.

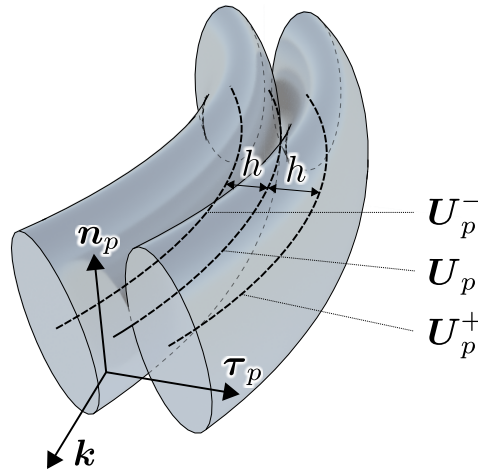


Рис. 1.39. Простейший подход к описанию кинематики половинок пина

Второй подход значительно сложнее. В его рамках половинки пина считаются полностью независимыми деформируемыми телами, конфигурация каждого из которых определяется десятью обобщёнными координатами, подобно конфигурации цельного пина в предыдущих несимметричных моделях цепи. Для обеспечения жёсткости цепи в такой модели требуется (в дополнение ко всему, что было в прежних моделях) описать взаимодействие половинок пина между собой, а также взаимодействие половинки пина с пластинками, охватывающими другую половинку того же пина. Кроме того, поскольку половинки пинов теперь независимы, они могут смещаться друг относительно друга в осевом направлении, и встаёт вопрос о положении пластинок вдоль оси пина: раньше

положение пластинки определялось координатой $\xi_{p,p+1}^k$, которая идентифицировала две точки на осях p -го и $(p+1)$ -го пинов и считалась постоянной; но поскольку теперь вместо пина две независимые половинки, такое простое описание становится невозможным. Приходится задавать положение целых блоков пластинок вдоль оси Ox_3 новыми обобщёнными координатами (по одной на пин). Каждая из них определяет осевое положение всех пластинок двух звеньев, охватывающих данный пин.

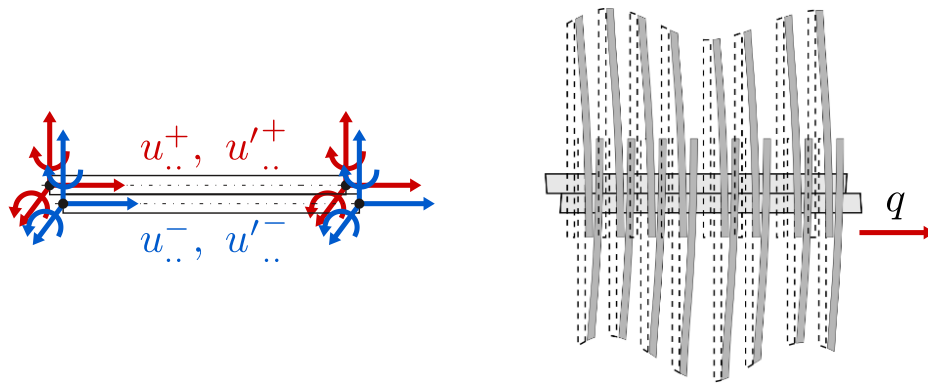


Рис. 1.40. Обобщённые координаты в модели цепи с независимыми половинками пинов

На рис. 1.40 показаны обобщённые координаты в модели цепи с независимыми половинками пинов. Для того, чтобы различать две половинки пина, в обозначениях относящихся к ним величин используются верхние индексы $+$, $-$. Принимается соглашение, что пластинки звена между пинами p и $(p+1)$ связаны с половинками пинов p^- и $(p+1)^+$ (рис. 1.41).

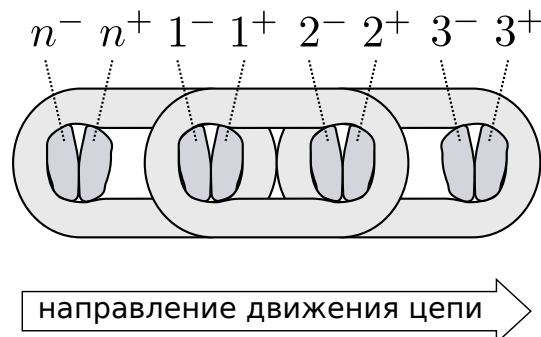


Рис. 1.41. Обобщённые координаты в модели цепи с независимыми половинками пинов

Конфигурация каждой половинки пина определяется координатами $u_{p,i\beta}^\pm, u'_{p,\alpha\beta}^\pm$ ($i = 1, 2, 3, \alpha, \beta = 1, 2$), полностью аналогичными обобщённым координатам

$u_{p,i\beta}, u'_{p,\alpha\beta}$ всего пина в несимметричной модели цепи (рис. 1.30). Форма деформированной оси половинки пина определяется соотношениями (1.133), в которые надо ещё добавить индексы $+$, $-$, идентифицирующие половинку пина. Кроме указанных координат для каждого пина вводится обобщённая координата q_p — она определяет положение блока пластинок вдоль направления Ox_3 следующим образом. Рассмотрим k -тую пластинку звена между p -тым и $(p+1)$ -м пинами. Координату вдоль оси Ox_3 конца оси этой пластинки, соединённого с p -тым пином, обозначим $z_{p,p+1,1}^k$, а конца, соединённого с $(p+1)$ -м пином — $z_{p,p+1,2}^k$. Положим

$$z_{p,p+1,1}^k = q_p + d_{p,p+1}^k, \quad z_{p,p+1,2}^k = q_{p+1} + d_{p,p+1}^k, \quad (1.211)$$

где $d_{p,p+1}^k$ — фиксированная для данной пластинки величина, определяемая так называемым *узором плетения* цепи. Зная координаты $z_{p,p+1,\alpha}^k$ ($\alpha = 1, 2$), можно найти координаты $\xi_{p,p+1,\alpha}^k$, идентифицирующие на осях половинок пина точки, в которых прикреплены пластинки: с учётом (1.133) имеем

$$z_{p,p+1,1}^k = U_p^{\parallel-}(\xi_{p,p+1,1}^k) = u_{p,0}^{\parallel-} + u_{p,1}^{\parallel-} \xi_{p,p+1,1}^k \Rightarrow \xi_{p,p+1,1}^k = \frac{z_{p,p+1,1}^k - u_{p,0}^{\parallel-}}{u_{p,1}^{\parallel-}}.$$

Знаменатель отличается от длины пина l на величину его удлинения, которое очень мало по сравнению с длиной пина; удлинением в данном случае можно пренебречь, это несколько упростит вычисление обобщённых сил. Тогда, подставив $z_{p,p+1,1}^k$ из (1.211) и проделав аналогичную выкладку для другого конца пластинки, получим

$$\xi_{p,p+1,1}^k = \frac{1}{l} \left(q_p - u_{p,0}^{\parallel-} + d_{p,p+1}^k \right), \quad \xi_{p,p+1,2}^k = \frac{1}{l} \left(q_{p+1} - u_{p+1,0}^{\parallel+} + d_{p,p+1}^k \right). \quad (1.212)$$

Можно считать, что в модели цепи с цельными пинами имели место равенства $q_p = u_{p,0}^{\parallel-} = u_{p,0}^{\parallel+}$.

Кинетическая энергия цепи имеет вид, аналогичный (1.135), но, во-первых, добавляется слагаемое для кинетической энергии осевого движения пластинок,

и, во-вторых, меняются инерционные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
T_p &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 \sum_{\pm} m_{p,ij}^{\perp\pm} \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^{\perp\pm} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{p,j}^{\perp\pm} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0,\pm}^1 m_{p,ij}^{\parallel} \dot{u}_{p,i}^{\parallel\pm} \dot{u}_{p,j}^{\parallel\pm} + \frac{1}{2} m_p^q \dot{q}_p^2, \\
m_p^{\perp\pm} &= m_p^{\pm} \begin{bmatrix} 1 & & & \text{sym} \\ 0 & 1/3 & & \\ l/12 & -l/60 & l^2/105 & \\ -l/12 & -l/60 & -l^2/140 & l^2/105 \end{bmatrix}, \quad m_p^{\parallel} = \frac{1}{2} m_p^{\text{pin}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \\
m_p^+ &= \frac{1}{2} m_p^{\text{pin}} + \frac{1}{2} m_{p-1,p}^{\text{plates}}, \quad m_p^- = \frac{1}{2} m_p^{\text{pin}} + \frac{1}{2} m_{p,p+1}^{\text{plates}}, \\
m_p^q &= \frac{1}{2} \left(m_{p-1,p}^{\text{plates}} + m_{p,p+1}^{\text{plates}} \right), \quad m_{p,p+1}^{\text{plates}} \equiv \sum_{k=1}^{n_{p,p+1}} m_{p,p+1}^k
\end{aligned} \tag{1.213}$$

(см. также определение m_p (1.68)). Здесь и далее запись $\sum_{\pm}(\dots)^{\pm}$ означает $(\dots)^+ + (\dots)^-$. Отметим, что в коэффициентах матрицы m_p^{\parallel} больше нет массы пластинок, так как их осевое движение теперь определяется координатами q_p .

Потенциальная энергия цепи содержит новые слагаемые $\Pi^{\text{pin-pin}}$ и $\Pi^{\text{pin-link}}$, о которых говорилось выше:

$$\Pi = \Pi^{\text{pins}} + \Pi^{\text{links}} + \Pi^{\text{pin-pin}} + \Pi^{\text{pin-link}}.$$

Здесь, как и ранее — см. (1.70), — Π^{pins} — потенциальная энергия растяжения и изгиба пинов, Π^{links} — потенциальная энергия растяжения, изгиба и кручения пластинок; слагаемое $\Pi^{\text{pin-pin}}$ отвечает за взаимодействие половинок пинов, а $\Pi^{\text{pin-link}}$ — за взаимодействие половинки пина с пластинками, надетыми на другую половинку того же пина. Без последних двух слагаемых цепь в распадается на n никак не взаимодействующих друг с другом частей; p -тая часть состоит из половинок пинов p^- и $(p+1)^+$ и пластинок, надетых на эти половинки пинов.

Потенциальная энергия осевой деформации пинов определяется соотношениями, аналогичными (1.136):

$$\begin{aligned}
\Pi^{\text{pins,ext}} &= \sum_{p=1}^n \sum_{\pm} \Pi_p^{\text{pin,ext},\pm}, \quad \Pi_p^{\text{pin,ext},\pm} = \frac{1}{2} c_p^{\pm} (\Delta_p^{\pm})^2, \\
c_p^{\pm} &= \frac{1}{2} c_p, \quad \Delta_p^{\pm} = 2u_{p,1}^{\parallel\pm} - l.
\end{aligned} \tag{1.214}$$

Потенциальная энергия деформации изгиба пинов в случае независимых половинок похожа на (1.137), но отличается в первую очередь тем, что главные оси сечения каждой половинки пина — свои; они определяются ориентацией звена из пластинок, надетых на соответствующую половинку. В модели с цельными пинами главные оси определялись векторами $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$, \mathbf{n}_p^\perp (1.103), в то время как в модели с независимыми половинками пинов главные оси половинок определяются следующими векторами $\boldsymbol{\tau}_p^{\perp\pm}$, $\mathbf{n}_p^{\perp\pm}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_p^{\perp-} &\equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp, & \boldsymbol{\tau}_p^{\perp+} &\equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{p-1,p}^\perp, \\ \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp &\equiv \frac{\Delta\mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp}{|\Delta\mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp|}, & \mathbf{n}_p^{\perp\pm} &\equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_p^{\perp\pm}.\end{aligned}\tag{1.215}$$

Здесь γ — некоторый фиксированный угол (около 5°), $\underline{\underline{\mathbf{P}}}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k})$ — тензор поворота на γ вокруг орта \mathbf{k} [55]:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{k} + \cos\gamma(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) + \sin\gamma\mathbf{k} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}.\tag{1.216}$$

Далее, определение величин $\Delta\mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp$ (а также $\Delta u_{p,p+1,i}^\parallel$), введённых ранее соотношениями (1.139) для модели с цельными пинами, требует уточнения:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp &\equiv \mathbf{u}_{p+1,i}^{\perp+} - \mathbf{u}_{p,i}^{\perp-}, & i &= 0, \dots, 3, \\ \Delta u_{p,p+1,i}^\parallel &\equiv u_{p+1,i}^{\parallel+} - u_{p,i}^{\parallel-}, & i &= 0, 1.\end{aligned}\tag{1.217}$$

Потенциальная энергия деформации изгиба пинов может теперь быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi^{pins,bend} &= \sum_{p=1}^n \sum_{\pm} \Pi_p^{pin,bend,\pm}, & \Pi_p^{pin,bend,\pm} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^3 c_{ij}^{bend} \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\pm} \cdot \hat{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}_p^\pm \cdot \mathbf{u}_{p,j}^{\perp\pm}, \\ \hat{\underline{\underline{\mathbf{a}}}}_p^\pm &= a_1 \mathbf{n}_p^{\perp\pm} \mathbf{n}_p^{\perp\pm} + a_2 \boldsymbol{\tau}_p^{\perp\pm} \boldsymbol{\tau}_p^{\perp\pm} -\end{aligned}\tag{1.218}$$

см. (1.137), (1.103), (1.104).

Для потенциальной энергии растяжения и изгиба пластинок имеют место те же соотношения (1.190), (1.191), что и в предыдущей модели, но при вычислении $\Delta_{p,p+1}^k$ в (1.186), очевидно, следует положить

$$\Delta\mathbf{U}_{p,p+1}(\xi) \equiv \mathbf{U}_{p+1}^+(\xi) - \mathbf{U}_p(\xi)^-, \tag{1.219}$$

а при вычислении углов $\psi_{p,p+1,1}^k, \psi_{p,p+1,2}^k$ (1.188) следует брать касательные к осям соответствующих половинок пинов — см. (1.189)

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_p^\pm(\xi) &\equiv \mathbf{t}_p^{\perp\pm}(\xi) + \mathbf{k}, & \mathbf{t}_p^{\perp\pm}(\xi) &\equiv \frac{2}{l} (\mathbf{U}_p^{\perp\pm}(\xi))' = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\pm} h'_i(\xi), \\ \mathbf{t}_{p,p+1,1}^k &\equiv \mathbf{t}_p^-(\xi_{p,p+1}^k), & \mathbf{t}_{p,p+1,2}^k &\equiv \mathbf{t}_{p+1}^+(\xi_{p,p+1}^k). \end{aligned} \quad (1.220)$$

Отметим, при вычислении обобщённых сил, обусловленных растяжением и изгибом пластинок, необходимо учитывать, что в кинематических соотношениях для $\Delta_{p,p+1}^k, \psi_{p,p+1,1}^k, \psi_{p,p+1,2}^k$ имеется зависимость (1.212) координат $\xi_{p,p+1}^k$ от комбинаций обобщённых координат $u_p^{\parallel\pm}$ и обобщённой координаты q_p — в отличие от моделей с цельными пинами, где координаты $\xi_{p,p+1}^k$ постоянны. Эта зависимость приводит к определённому вкладу растяжения и изгиба пластинок в осевую динамику цепи.

Потенциальная энергия деформации закручивания пластинок имеет вид (1.146), как и в несимметричной модели с цельными пинами, при этом векторы $\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,i}^\perp$ вычисляются по формулам (1.217), а не (1.139).

Наиболее интересным в модели цепи с независимыми половинками пинов является способ моделирования обкатывания половинок p^+ и p^- друг по другу при изменении угла между звеньями $(p-1, p)$ и $(p, p+1)$. Результат моделирования — слагаемые $\Pi^{pin-pin}$ и $\Pi^{pin-link}$ в потенциальной энергии цепи. По ряду причин эта часть не может быть здесь представлена и не выносится на защиту.

Рассмотрим лишь одно слагаемое в $\Pi^{pin-link}$, описывающее взаимодействие блоков пластинок с *ограничителями* (рис. 1.42) — без него в модели с координатами q_p пластинки имеют возможность выйти за пределы пина в осевом направлении. В реальности к ограничителю представляют собой маленькие штырьки, которые приваривают к половинкам пинов после сборки цепи. При контакте ограничителей с пластинками возникают силы, которые мы считаем направленными вдоль оси Ox_3 . Считая ограничитель консольной балкой длины l_* с жёсткостью на изгиб a_* , можно найти прогиб u_* на конце в зависимости от приложенной на конце поперечной силы F_* . Получится $u_* = k_* F_*$, где $k_* = l_*^3 / (3a_*)$ —

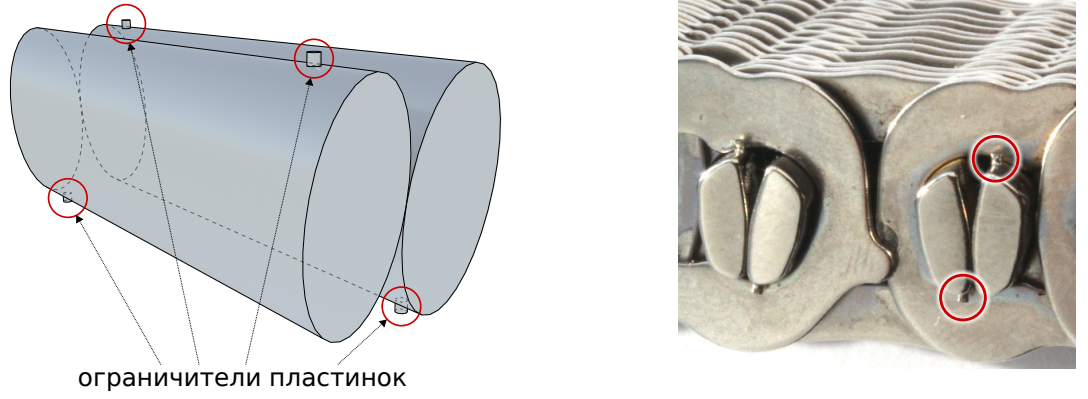


Рис. 1.42. Ограничители осевых перемещений пластинок цепи

жёсткость. В качестве прогиба u_* можно взять величину $|u_{p,0}^{\parallel\pm} - q_p| - d_p$, где d_p — некоторая постоянная длина. В случае $u_* > 0$ имеет место контакт, ограничитель нагружен; если же $u_* \leq 0$, контакта с ограничителем нет. Таким образом, потенциальная энергия Π^* , описывающая ограничители пластинок, имеет вид

$$\Pi^* = \sum_{p=1}^n \Pi_p^*, \quad \Pi_p^* = \begin{cases} \frac{1}{2} k_* \left(|u_{p,0}^{\parallel\pm} - q_p| - d_p \right)^2, & |u_{p,0}^{\parallel\pm} - q_p| - d_p > 0, \\ 0, & |u_{p,0}^{\parallel\pm} - q_p| - d_p \leq 0. \end{cases}$$

Диссипативная функция Рэлея, как обычно, повторяет структуру потенциальной энергии (но есть ещё слагаемое Φ^{joints}):

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{pins} + \Phi^{links} + \Phi^{joints} + \Phi^{pin-pin} + \Phi^{pin-link}, \\ \Phi^{pins} &= \Phi^{pins,ext} + \Phi^{pins,bend}, \\ \Phi^{pins,ext} &= \sum_{p=1}^n \sum_{\pm} \Phi_p^{pin,ext,\pm}, \quad \Phi_p^{pin,ext,\pm} = \frac{1}{2} b_p^{\pm} \left(\dot{\Delta}_p^{\pm} \right)^2, \\ \Phi^{pins,bend} &= \sum_{p=1}^n \sum_{\pm} \Phi_p^{pin,bend,\pm}, \quad \Phi_p^{pin,bend,\pm} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^3 \beta^{bend} c_{ij}^{bend} \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\pm\nabla} \cdot \hat{\mathbf{a}}_p^{\pm} \cdot \mathbf{u}_{p,j}^{\perp\pm\nabla}, \\ \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\pm\nabla} &= \dot{\mathbf{u}}_{p,i}^{\perp\pm} - \omega_p^{\pm} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_{p,i}^{\perp\pm}. \end{aligned}$$

Отметим, что скорость вращения вокруг оси своя у каждой половинки пина, она вычисляется по формуле, аналогичной (1.116):

$$\omega_p^{\pm} = \mathbf{n}_p^{\perp\pm} \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}}_p^{\perp\pm}.$$

Для вектора $\dot{\boldsymbol{\tau}}_p^{\perp\pm}$, согласно (1.215), получается формула

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_p^{\perp\pm} = \mathbf{n}_p^{\perp\pm} \mathbf{n}_p^{\perp\pm} \cdot \frac{\dot{\Delta} \mathbf{u}_{p,p+1,0}^{\perp}}{|\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^{\perp}|}.$$

Далее, для диссипации в пластинках имеем

$$\Phi^{links} = \sum_{p=1}^n \Phi_{p,p+1}^{link,ext} + \Phi_{p,p+1}^{link,shear} + \Phi_{p,p+1}^{link,tors},$$

при этом остаются в силе соотношения (1.192) для $\Phi_{p,p+1}^{link,ext}$, (1.193) для $\Phi_{p,p+1}^{link,shear}$ и (1.156) для $\Phi_{p,p+1}^{link,tors}$. Диссипация при относительном повороте звеньев Φ^{joints} определяется, как и раньше, соотношением (1.80); в выражении (1.82) следует взять в качестве вектора направления звена $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^{\perp}$ вектор $\boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^{\perp}$ (1.215). Два последних слагаемых, $\Phi^{pin-pin}$ и $\Phi^{pin-link}$, вводятся обычным способом, но здесь не приводятся, как и слагаемые $\Pi^{pin-pin}$, $\Pi^{pin-link}$ в потенциальной энергии цепи.

Кроме потенциальных и диссипативных сил, в рамках модели с независимыми половинками пинов рассматриваются силы трения, действующие в осевом направлении между половинками пинов, а также между половинками пинов и блоками пластинок. Считается, что реальности эти силы близки к силам сухого трения. Однако моделирование систем с сухим трением представляет большую сложность и не рассматривается в данной модели цепи. Вместо этого, подобно тому, как это делается при моделировании контактного взаимодействия пин — шайба (разд. 1.5.3), рассматривается трение с коэффициентом f , зависящим от абсолютной величины скорости проскальзывания $|v|$ таким образом, что при маленьких скоростях (меньше v_0) трение линейно-вязкое, а при больших (не меньше v_0) — сухое с коэффициентом f_0 (рис 1.43):

$$f(|v|) = \begin{cases} \frac{|v|}{v_0} f_0, & |v| < v_0, \\ f_0, & |v| \geq v_0. \end{cases} \quad (1.221)$$

Принимается, что величина силы трения, R , есть произведение коэффициента трения на силу нормальной реакции N : $R = f(|v|)N$, а направление — против скорости проскальзывания.

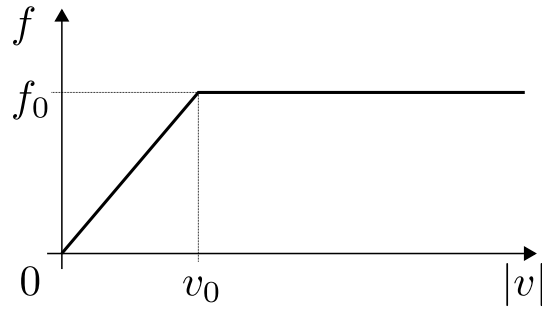


Рис. 1.43. Зависимость коэффициента трения от скорости проскальзывания

Для сил трения половинок p -го пина друг о друга естественно считать нормальной реакцией полусумму натяжений в звеньях $(p-1, p)$ и $(p, p+1)$, а для сил трения между половинкой пина и блоком пластинок — натяжение звена, соответствующего половинке: $(p-1, p)$ для половинки p^+ и $(p, p+1)$ для половинки p^- . При этом берётся лишь упругая составляющая силы натяжения звена, определяемая потенциальной энергией его растяжения (1.190):

$$T_{p,p+1} \equiv \sum_{k \in S_{p,p+1}} \frac{\partial \Pi_{p,p+1}^{link,ext}}{\partial \tilde{\Delta}_{p,p+1}^k} = \sum_{k \in S_{p,p+1}} c_{p,p+1}^k \tilde{\Delta}_{p,p+1}^k.$$

Итак, в осевом направлении действуют следующие силы трения R_p (со стороны половинками пина p^- на половинку p^+), R_p^- (со стороны пластинок на половинку пина p^-) и R_p^+ (со стороны пластинок на половинку пина p^+):

$$R_p = -\operatorname{sgn}(v_p) f(v_p) N_p, \quad N_p = \frac{1}{2} (T_{p-1,p} + T_{p,p+1}), \quad v_p = \dot{u}_{p,0}^{\parallel+} - \dot{u}_{p,0}^{\parallel-}$$

$$R_p^\pm = -\operatorname{sgn}(v_p^\pm) f(v_p^\pm) N_p^\pm, \quad N_p^- = T_{p,p+1}, \quad N_p^+ = T_{p-1,p}, \quad v_p^\pm = \dot{u}_{p,0}^{\parallel\pm} - \dot{q}_p.$$

Мы пренебрегли растяжением пина при вычислении скоростей проскальзывания. Элементарная работа сил трения на виртуальных перемещениях, с учётом третьего закона Ньютона, такова:

$$W_p^R = R_p \left(\delta u_{p,0}^{\parallel+} - \delta u_{p,0}^{\parallel-} \right) + \sum_{\pm} R_p^\pm \left(\delta u_{p,0}^{\parallel\pm} - \delta q_p \right).$$

Из этого выражения находятся обобщённые силы, соответствующие силам трения.

1.5.2. Модели валов, шайб и упругих опор

Модели цепи, рассмотренные в разд. 1.5.1, представляют наибольшую сложность при моделировании бесступенчатой трансмиссии. Моделированию всех остальных частей, а также контактного взаимодействия пинов с шайбами, посвящён этот раздел.

1.5.2.1. Жёсткие валы с шайбами

В рамках этой модели вал считается абсолютно твёрдым телом, способным лишь вращаться вокруг оси Ox_3 . Шайбы — тоже абсолютно твёрдые тела, способные вращаться вокруг оси Ox_3 вместе с валом, а также перемещаться вдоль неё (рис. 1.44). Эта модель используется как часть модели всей трансмиссии, если для цепи используются наиболее простые модели 1, 2, описанные в п. 1.5.1.1. Если модель цепи сложнее, нет смысла отказываться от учёта малых поворотов шайбы вокруг осей Ox_1 , Ox_2 : с одной стороны, он существенно влияет на распределение сил в цепи; с другой стороны, использование более сложных моделей валов с шайбами (см. пп. 1.5.2.2–1.5.2.5) не ведёт к большому увеличению времени расчёта из-за того, что основное время при расчёте тратится на вычисление обобщённых сил в цепи.

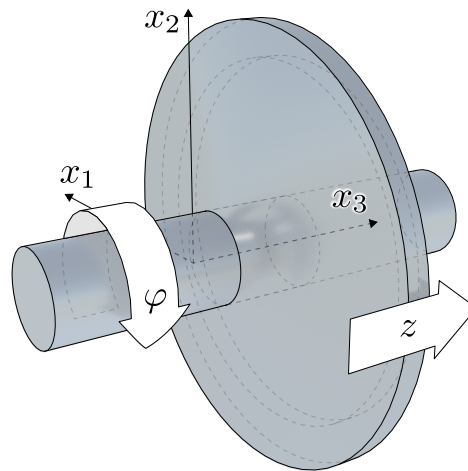


Рис. 1.44. Жёсткие валы с шайбами

В этой модели плоскость $x_3 = 0$ — это плоскость симметрии, так как она используется с симметричными моделями цепи. Таким образом, конфигурация вала с шайбами определяется двумя обобщёнными координатами — углом φ поворота вала и шайб вокруг оси Ox_3 и положением z центра масс шайбы вдоль этой же оси. Точно также валы с шайбами моделировались в разд. 1.4.2, 1.4.3. Кинетическая энергия вала с шайбами, очевидно, определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2, \quad (1.222)$$

где J — момент инерции вала вместе с шайбами, m — масса обеих шайб на валу; см. также (1.40). В случаях, когда рассматривается сухое трение между пинами и шайбами или контактное взаимодействие с учётом ударов пинов о шайбы (см. п. 1.5.3.2), к этим инерционным характеристикам добавляется инерция пинов, находящихся в контакте с шайбами — остановимся на этом подробнее.

Пусть положение оси вала определяется постоянным вектором

$$\mathbf{r}^{shaft,\perp} \equiv r_1^{shaft} \mathbf{i} + r_2^{shaft} \mathbf{j},$$

так что радиус-вектор \mathbf{r} точки на оси вала удовлетворяет уравнению прямой $(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{shaft,\perp}) \times \mathbf{k} = 0$. Тогда уравнение контактной поверхности шайбы может быть записано в следующем виде, разрешённом относительно координаты r_3 радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}^\perp + r_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{r}^\perp \equiv r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j}$:

$$r_3 = z + f(r), \quad r \equiv |\mathbf{r}^\perp - \mathbf{r}^{shaft,\perp}|, \quad (1.223)$$

так как шайба является телом вращения; функция $f(r)$ определяется формой образующей, см. (1.37) и рис. 1.9. Проварьировав (1.223), а также продифференцировав по времени, получим

$$\begin{aligned} \delta r &= \mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}^\perp, \quad \dot{r} = \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{r}}^\perp, \quad \mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}^\perp - \mathbf{r}^{shaft,\perp}}{r} \Rightarrow \\ \delta r_3 &= \delta z + f'(r) \mathbf{e}_r \cdot \delta \mathbf{r}^\perp, \quad \dot{r}_3 = \dot{z} + f'(r) \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{r}}^\perp. \end{aligned} \quad (1.224)$$

Далее, рассмотрим кинематику материальных точек шайбы на её поверхности. Пусть \mathbf{r}^{pul} — радиус-вектор такой точки в актуальном положении, \mathbf{r}_0^{pul} — в отсчётном, z_0 — значение обобщённой координаты z в отсчётном положении. По основной формуле кинематики твёрдого тела имеем

$$\mathbf{r}^{pul} = \mathbf{r}^{shaft,\perp} + z\mathbf{k} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi\mathbf{k}) \cdot \left(\mathbf{r}_0^{pul} - \mathbf{r}^{shaft,\perp} - z_0\mathbf{k} \right),$$

где $\underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi\mathbf{k})$ — тензор поворота на угол φ вокруг \mathbf{k} . Отсюда находятся следующие виртуальное перемещение и скорость точки:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}^{pul} &= \mathbf{k} \delta z + \mathbf{k} \times (\mathbf{r}^{pul} - \mathbf{r}^{shaft,\perp}) \delta\varphi, \\ \dot{\mathbf{r}}^{pul} &= \mathbf{k} \dot{z} + \mathbf{k} \times (\mathbf{r}^{pul} - \mathbf{r}^{shaft,\perp}) \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.225)$$

Рассмотрим три категории пинов: одни не находятся в контакте с шайбами данного вала (обозначим множество их номеров F и будем называть F -пинами), другие скользят по шайбам данного вала (обозначим множество их номеров S и будем называть S -пинами), третьи находятся в контакте с шайбами и не скользят, то есть находятся в состоянии залипания и удерживаются на шайбах силами трения покоя (множество их номеров K , K -пины). K -пины лишены степеней свободы в силу возникающих связей, и поэтому их кинетическая энергия добавляется к кинетической энергии вала с шайбами, а соответствующие обобщённые силы превращаются в обобщённые силы, соответствующие координатам z и φ . Кинетическая энергия K -пинов, согласно (1.67), (1.69), (1.225), равна

$$\begin{aligned} T^{1,K} &\equiv \sum_{p \in K} T_p^1, \quad T_p^1 = \frac{1}{2} m_p r_p^2 \dot{\varphi}^2, \quad r_p \equiv |\mathbf{u}_p^\perp - \mathbf{u}^{shaft,\perp}|, \\ T^{2,K} &= \sum_{p \in K} T_p^2, \quad T_p^2 = T_p^1 + \frac{1}{2} \frac{m_p}{3} \dot{z}^2 \end{aligned}$$

($T^{1,K}$ — в первой модели цепи, $T^{2,K}$ — во второй). Все обобщённые силы (\mathbf{Q}_p^\perp в первой модели цепи, \mathbf{Q}_p^\perp и $Q_{p,3}$ во второй), соответствующие K -пинам, трансформируются в обобщённые силы Q_z^K , Q_φ^K для координат z , φ соответственно в силу (1.225):

$$Q_z^K = \sum_{p \in K} Q_{p,3}, \quad Q_\varphi^K = \sum_{p \in K} \mathbf{Q}_p^\perp \cdot [\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_p^\perp - \mathbf{r}^{shaft,\perp})]$$

S -пины в первой модели цепи не теряют степеней свободы, так как не возникает новых связей, а во второй модели обобщённая координата $u_{p,3}$ (нам удобно выбрать именно её) перестаёт быть независимой и определяется из (1.223). Кинетическая энергия S -пинов в первой модели цепи не зависит от \dot{z} , $\dot{\varphi}$, а во второй — зависит от \dot{z} : согласно (1.69), (1.224),

$$T^{2,S} \equiv \sum_{p \in S} T_p^2, \quad T_p^2 = T_p^1 + \frac{1}{2} \frac{m_p}{3} \left(\dot{z} + f'(r_p) \mathbf{e}_{r,p} \cdot \dot{\mathbf{u}}_p^\perp \right)^2, \quad \mathbf{e}_{r,p} \equiv \frac{\mathbf{u}_p^\perp - \mathbf{r}^{shaft,\perp}}{r_p}.$$

Таким образом, для первой модели цепи суммарная кинетическая энергия валов с шайбами и цепи не содержит перекрёстных членов; для валов с шайбами следует использовать следующие инерционные характеристики:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{J} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2, \quad \tilde{J} \equiv J + \sum_{p \in K} m_p r_p^2. \quad (1.226)$$

Отсюда находятся силы инерции:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -\tilde{J} \ddot{\varphi}, \quad -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = -m \ddot{z}. \quad (1.227)$$

Для второй модели цепи в суммарной кинетической энергии цепи (T^2) и валов с шайбами (T) имеются перекрёстные члены:

$$T^2 + T = \sum_{p \in F \cup S} T_p^1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in F} \frac{m_p}{3} \dot{u}_{p,3}^2 + \frac{1}{2} \tilde{J} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{m} \dot{z}^2 + \dot{z} \sum_{p \in S} \tilde{\mathbf{m}}_p^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}_p^\perp, \\ \tilde{m} \equiv m + \frac{1}{3} \sum_{p \in S \cup K} m_p, \quad \tilde{\mathbf{m}}_p^\perp \equiv \frac{m_p}{3} f'(r_p) \mathbf{e}_{r,p}.$$

Силы инерции для цепи и валов с шайбами следующие:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}_p^\perp} = \begin{cases} -m_p \ddot{\mathbf{u}}_p^\perp, & p \in F, \\ -m_p \ddot{\mathbf{u}}_p^\perp - (\tilde{\mathbf{m}}_p^\perp \dot{z}), & p \in S, \end{cases} \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{p,3}} = -\frac{m_p}{3} \ddot{u}_{p,3}, \quad p \in F, \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -\tilde{J} \ddot{\varphi}, \quad -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = -\tilde{m} \ddot{z} - \frac{d}{dt} \sum_{p \in S} \tilde{\mathbf{m}}_p^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}_p^\perp. \quad (1.228)$$

Обобщённые силы, действующие на S -пины, никак не меняются для первой модели цепи. Для второй модели цепи, согласно (1.224), они превращаются в

обобщённые силы для \mathbf{u}_p^\perp и z :

$$\mathbf{Q}_p^{\perp,S} = \mathbf{Q}_p^\perp + Q_{p,3} f'(r_p) \mathbf{e}_{r,p}, \quad p \in S, \quad Q_z^S = \sum_{p \in S} Q_{p,3}.$$

Определим также элементарную работу приложенных воздействий на виртуальных перемещениях. К этим воздействиям относятся сила P , сжимающая шайбы в осевом направлении, крутящий момент M и силы контактного взаимодействия со стороны пинов (1.87) $-\mathbf{F}_p^\pm = -(\mathbf{F}_p^\perp \pm F_{p,3} \mathbf{k})$. Имеем

$$\delta W_P = -2P\delta z, \quad \delta W_M = M\delta\varphi, \quad \delta W_F = - \sum_{p \in S \cup K} \delta W_{F,p}, \quad (1.229)$$

$$\delta W_{F,p} = 2\mathbf{F}_p^\perp \cdot [\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_p^\perp - \mathbf{r}^{shaft,\perp})] \delta\varphi + 2F_{p,3}\delta z$$

(множители 2 — из-за того, что на валу две шайбы). Очевидно, для K -пинов суммарная работа сил контактного взаимодействия на виртуальных перемещениях пина и вала с шайбами равна нулю; см. также (1.88):

$$\sum_{p \in K} [\delta W_p + \delta W_{F,p}] = 2 \sum_{p \in K} \mathbf{F}_p^+ \cdot \left[\delta \mathbf{u}_p^\perp - \delta \mathbf{r}^{pul} \Big|_{\mathbf{r}^{pul} = \mathbf{u}_p} \right];$$

но множитель в квадратных скобках для K -пинов равен нулю. Поэтому силы контактного взаимодействия для K -пинов исключаются из уравнений динамики; однако, несмотря на это, они требуют вычисления, так как на основании этих сил можно судить о переходе пина в состояние S или F (см. разд. 1.5.3.1). Для S -пинов осевые силы $F_{p,3}$ не могут быть исключены из уравнений динамики аналогичным образом, как может показаться на первый взгляд: согласно (1.224), (1.229)

$$2F_{p,3} (\delta u_{p,3} - \delta z) = 2F_{p,3} f'(r_p) \mathbf{e}_{r,p} \cdot \delta \mathbf{u}_p^\perp \neq 0.$$

1.5.2.2. Модель упругого вала

Малые повороты шайб бесступенчатой трансмиссии вокруг осей Ox_1 , Ox_2 оказывают существенное влияние на распределение параметров напряжённо-деформированного состояния цепи при её контакте с шайбами. Поэтому был разработан ряд моделей, позволяющих воспроизвести эти малые повороты шайб

в численном решении. В частности, создана конечно-элементная модель вала, учитывающая его изгиб, растяжение и кручение. При этом изгиб вала рассматривается в рамках модели балки Бернулли — Эйлера, то есть без учёта поперечного сдвига.

Пусть $\mathbf{u}(x_3) = \mathbf{u}^\perp(x_3) + u_3(x_3)\mathbf{k}$ — перемещение точек оси вала, причём $\mathbf{u}^\perp = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ — поперечное перемещение (прогиб), u_3 — осевое перемещение; $\boldsymbol{\vartheta}^\perp = \vartheta_1\mathbf{e}_1 + \vartheta_2\mathbf{e}_2$ — вектор малого поворота сечения вокруг осей Ox_1, Ox_2 ; φ — поворот сечения вокруг оси Ox_3 .

Считая сечение вала осесимметричным (следовательно, равножёстким), можно записать квадратичный упругий потенциал [Дж/м], определяющий линейные соотношения упругости, в следующем виде:

$$\Pi = \Pi^{bend} + \Pi^{tors} + \Pi^{ext}, \quad (1.230)$$

$$\Pi^{bend} = \frac{1}{2}a^\perp \boldsymbol{\vartheta}^{\perp'} \cdot \boldsymbol{\vartheta}^{\perp'}, \quad (1.231)$$

$$\Pi^{tors} = \frac{1}{2}a^\parallel (\varphi')^2, \quad (1.232)$$

$$\Pi^{ext} = \frac{1}{2}b (u_3')^2. \quad (1.233)$$

Штрихом здесь обозначена производная по координате вдоль оси вала или, что в данном случае то же самое, по x_3 . В выражение потенциала входят жёсткости на изгиб a^\perp , кручение a^\parallel и растяжение b . Отсутствие поперечного сдвига означает, что выполняется соотношение

$$\mathbf{u}^{\perp'} = \boldsymbol{\vartheta}^\perp \times \mathbf{k}, \quad (1.234)$$

благодаря которому можно исключить $\boldsymbol{\vartheta}^\perp$:

$$\Pi^{bend} = \frac{1}{2}a^\perp \mathbf{u}^{\perp''} \cdot \mathbf{u}^{\perp''}. \quad (1.235)$$

С учётом (1.234), кинетическая энергия единицы длины вала [Дж/м] имеет вид

$$T = T^{bend} + T^{tors} + T^{ext}, \quad (1.236)$$

$$T^{bend} = \frac{1}{2} [\rho \dot{\mathbf{u}}^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}^\perp + J^\perp \dot{\mathbf{u}}^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}^\perp], \quad (1.237)$$

$$T^{tors} = \frac{1}{2} J^\parallel \dot{\varphi}^2, \quad (1.238)$$

$$T^{ext} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_3^2, \quad (1.239)$$

где ρ — погонная масса [кг/м], J^\perp и J^\parallel [кг м²/м] — соответственно меридиональный и осевой моменты инерции сечения. Отметим, что в (1.236) не учитываются гироскопические эффекты, возникающие из-за того, что скорость вращения $\dot{\varphi}$ не является малой величиной. Представляется, что эти эффекты дают несущественный вклад в динамику по сравнению со вкладом, который дают шайбы — их осевой момент инерции значительно больше, чем у вала; модель шайбы с учётом гироскопических слагаемых рассмотрена в п. 1.5.2.3.

Благодаря отсутствию в Π и T перекрёстных связей между изгибом, кручением и растяжением оказывается возможным рассматривать отдельные конечно-элементные модели для описания этих трёх факторов. Этот подход представляется удобным, так как позволяет учитывать одни факторы (например, изгиб), пренебрегая при этом другими (например, растяжением и кручением) — такая возможность исключительно полезна при проведении численных исследований.

Вал состоит из участков, на которых поперечное сечение имеет форму круга или кольца. Отдельные участки могут иметь довольно малую длину; одномерная конечно-элементная модель должна допускать возможность наличия нескольких участков в пределах одного конечного элемента, потому что в противном случае может потребоваться использовать элементы малой длины, что приводит к неоправданно высоким собственным частотам и, как следствие, к увеличению жёсткости системы дифференциальных уравнений динамики. Поэтому в рассматриваемых конечно-элементных моделях допускается произвольное (но с сохранением осевой симметрии) распределение жесткостных и инерционных свойств сечения вдоль оси — рис. 1.45.

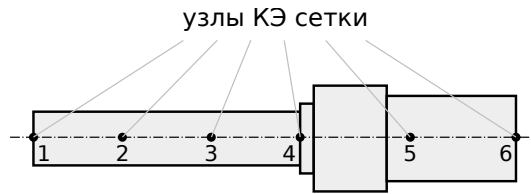


Рис. 1.45. Узлы одномерной конечно-элементной сетки вала

Изгиб вала моделируется двухузловыми конечными элементами с аппроксимацией перемещения \mathbf{u}^\perp кубическими многочленами Эрмита. По заданным векторам перемещения \mathbf{u}_k^\perp и малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}_k^\perp$ в узлах элемента (индексом k обозначен номер узла) можно вычислить наклоны $\mathbf{u}^{\perp'}$ на концах при помощи связи (1.234) и затем аппроксимировать перемещения $\mathbf{u}^\perp(\eta)$ внутри элемента. Здесь и далее η — координата, идентифицирующая сечение вала в пределах конечного элемента; $\eta = 0$ в узле 1, $\eta = 1$ в узле 2 (номера узлов локальные в элементе). Верхний индекс (e) далее обозначает номер конечного элемента. Следующие формулы определяют аппроксимацию перемещений в конечном элементе длины $L^{(e)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\perp(\eta) &= \sum_{k=1}^2 \left[\mathbf{u}_k^\perp N_{2k-1}^{(e)}(\eta) + \mathbf{u}_k^{\perp'} N_{2k}^{(e)}(\eta) \right], \quad \mathbf{u}_k^{\perp'} = \boldsymbol{\vartheta}_k^\perp \times \mathbf{k}, \\ N_1^{(e)} &= 2\eta^3 - 3\eta^2 + 1, \quad N_2^{(e)} = L^{(e)} (\eta^3 - 2\eta^2 + \eta), \\ N_3^{(e)} &= -2\eta^3 + 3\eta^2, \quad N_4^{(e)} = L^{(e)} (\eta^3 - \eta^2). \end{aligned} \quad (1.240)$$

Поскольку сечение вала осесимметричное, можно рассматривать изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях независимо — это позволяет повысить эффективность расчётов благодаря более узкому профилю получаемых матриц жёсткости и инерции. Поэтому рассмотрим далее изгиб в координатной плоскости $Ox_s x_3$, где s может принимать значения 1, 2. Пусть u_{ks} , u'_{ks} — координаты векторов \mathbf{u}_k^\perp и $\mathbf{u}_k^{\perp'}$ соответственно:

$$\mathbf{u}_k^\perp = u_{k1} \mathbf{e}_1 + u_{k2} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_k^{\perp'} = u'_{k1} \mathbf{e}_1 + u'_{k2} \mathbf{e}_2.$$

и будем считать u_{1s} , u'_{1s} , u_{2s} , u'_{2s} узловыми переменными конечного элемента для моделирования изгиба в плоскости $Ox_s x_3$.

Удобно далее перейти к матричным обозначениям. Введём столбец $U^{(e)}$ узловых переменных конечного элемента (верхний индекс (e) идентифицирует элемент) и матрицу функций формы $N^{(e)}$:

$$U^{(e)} = [u_{1s}, u'_{1s}, u_{2s}, u'_{2s}]^T, \quad N^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}, N_4^{(e)}], \quad (1.241)$$

так что аппроксимация перемещения $u_s \equiv u$ в элементе вычисляется по формуле

$$u = N^{(e)}U^{(e)}. \quad (1.242)$$

Конечно-элементная процедура состоит в вычислении матриц жёсткости $C^{(e)}$ и инерции $A^{(e)}$ конечного элемента путём подстановки аппроксимации (1.242) в (1.235) и (1.237) соответственно и интегрирования по длине элемента:

$$\begin{aligned} \Pi^{bend,(e)} &= L^{(e)} \int_0^1 \Pi^{bend} d\eta = \frac{1}{2} U^{(e)T} C^{(e)} U^{(e)}, \quad C^{(e)} = L^{(e)} \int_0^1 a^\perp N^{(e)''T} N^{(e)''} d\eta, \\ T^{bend,(e)} &= L^{(e)} \int_0^1 T^{bend} d\eta = \frac{1}{2} \dot{U}^{(e)T} A^{(e)} \dot{U}^{(e)}, \\ A^{(e)} &= L^{(e)} \int_0^1 [\rho N^{(e)T} N^{(e)} + J^\perp N^{(e)T} N^{(e)'}] d\eta \end{aligned} \quad (1.243)$$

Поскольку параметры a^\perp , ρ , J^\perp кусочно-постоянны в пределах конечного элемента, интегралы можно вычислить аналитически. Пусть отрезок $[0, 1]$ разбит на n участков $[\eta_{i-1}, \eta_i]$, $i = 1, \dots, n$, $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_n = 1$, и пусть значения параметров на участке $\eta \in [\eta_{i-1}, \eta_i]$ равны a_i^\perp , ρ_i , J_i^\perp соответственно. Тогда получим следующие выражения матриц жёсткости и инерции элемента:

$$\begin{aligned} C^{(e)} &= \sum_{i=1}^n C_i^{(e)}, \quad C_i^{(e)} = L^{(e)} a_i^\perp \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} N^{(e)''T} N^{(e)''} d\eta, \\ A^{(e)} &= \sum_{i=1}^n A_i^{(e)}, \quad A_i^{(e)} = L^{(e)} \rho_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} N^{(e)T} N^{(e)} d\eta + L^{(e)} J_i^\perp \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} N^{(e)T} N^{(e)'} d\eta. \end{aligned} \quad (1.244)$$

Формулы для коэффициентов матриц довольно громоздки, так как подынтегральные функции — многочлены до шестой степени включительно; чтобы представить их в обозримом виде, сначала запишем $C_i^{(e)}$ и $A_i^{(e)}$ так:

$$C_i^{(e)} = L^{(e)} \Lambda^{(e)} \left[a_i^\perp \sum_{p=1}^3 C_p (\eta_i^p - \eta_{i-1}^p) \right] \Lambda^{(e)},$$

$$A_i^{(e)} = L^{(e)} \Lambda^{(e)} \left[\rho_i \sum_{p=1}^7 A_{p1} (\eta_i^p - \eta_{i-1}^p) + J_i^\perp \sum_{p=1}^5 A_{p2} (\eta_i^p - \eta_{i-1}^p) \right] \Lambda^{(e)},$$

$$\Lambda^{(e)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Входящие в эти выражения матрицы C_p , A_{p1} , A_{p2} постоянны:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 36 & 24 & -36 & 12 \\ 24 & 16 & -24 & 8 \\ -36 & -24 & 36 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -72 & -42 & 72 & -30 \\ -42 & -24 & 42 & -18 \\ 72 & 42 & -72 & 30 \\ -30 & -18 & 30 & -12 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 48 & 24 & -48 & 24 \\ 24 & 12 & -24 & 12 \\ -48 & -24 & 48 & -24 \\ 24 & 12 & -24 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{31} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{41} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{51} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & 8 & -9 & 3 \\ 8 & 6 & -8 & 3 \\ -9 & -8 & 9 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{61} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -12 & -7 & 12 & -5 \\ -7 & -4 & 7 & -3 \\ 12 & 7 & -12 & 5 \\ -5 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{71} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{32} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 36 & 30 & -36 & 12 \\ 30 & 22 & -30 & 11 \\ -36 & -30 & 36 & -12 \\ 12 & 11 & -12 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{42} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -36 & -21 & 36 & -15 \\ -21 & -12 & 21 & -9 \\ 36 & 21 & -36 & 15 \\ -15 & -9 & 15 & -6 \end{bmatrix},$$

$$A_{52} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 36 & 18 & -36 & 18 \\ 18 & 9 & -18 & 9 \\ -36 & -18 & 36 & -18 \\ 18 & 9 & -18 & 9 \end{bmatrix}.$$

В случае постоянного сечения получаем следующие выражения матриц жёсткости и инерции:

$$C^{(e)} = L^{(e)} a^\perp \Lambda^{(e)} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \Lambda^{(e)},$$

$$A^{(e)} = L^{(e)} \Lambda^{(e)} \left\{ \frac{\rho}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} + \frac{J^\perp}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \right\} \Lambda^{(e)}.$$

Узловые нагрузки могут быть вычислены по элементарным работам приложенных распределённых поперечной силы $\mathbf{q}^\perp = q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2$ и изгибающего момента $\mathbf{m}^\perp = m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2$ на виртуальных перемещениях. Вместо последнего удобнее рассматривать вектор $\mathbf{m}^\perp \times \mathbf{k} \equiv \hat{\mathbf{m}}^\perp = \hat{m}_1 \mathbf{e}_1 + \hat{m}_2 \mathbf{e}_2$. Работа этих факторов на элементе при изгибе в плоскости $Ox_s x_3$ равна (с учётом обозначения $u_s \equiv u$)

$$\delta W = \int_0^{L^{(e)}} [q_s \delta u + \hat{m}_s \delta u'] dx_3 = F^{(e)T} \delta U^{(e)}, \quad F^{(e)} \equiv L^{(e)} \int_0^1 [q_s N^{(e)} + \hat{m}_s N^{(e)'}]^T d\eta. \quad (1.245)$$

Здесь $F^{(e)}$ и есть столбец узловых нагрузок конечного элемента. В частности, при постоянных q_s и \hat{m}_s отсюда получается

$$F^{(e)} = L^{(e)} \left\{ q_s \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{12} \right]^T + \hat{m}_s \left[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right]^T \right\} \Lambda^{(e)}. \quad (1.246)$$

В случае сил и моментов, сосредоточенных в точке $\eta_* \in [0, 1]$, то есть

$$q_s = \frac{Q_s}{L^{(e)}} \delta(\eta - \eta_*), \quad \hat{m}_s = \frac{\hat{M}_s}{L^{(e)}} \delta(\eta - \eta_*)$$

(здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; знаменатель $L^{(e)}$ подсказывают соображения размерности, так как $[q_s] = \text{Н/м}$, $[Q_s] = \text{Н}$, $[\hat{m}_s] = \text{Нм/м}$, $[\hat{M}_s] = \text{Нм}$), получим

$$F^{(e)} = \left[Q_s \sum_{p=0}^3 F_{p1} \eta_*^p + \hat{M}_s \sum_{p=0}^3 F_{p2} \eta_*^p \right] \Lambda^{(e)}. \quad (1.247)$$

Столбцы F_{p1} и F_{p2} постоянны:

$$F_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{21} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad F_{31} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$F_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{12} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad F_{22} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Отметим, что построенный конечный элемент даёт точное решение в рамках модели балки Бернулли — Эйлера в случае, когда сечение постоянно, а нагрузки — сосредоточенные в узлах силы и моменты.

Кручение вала моделируется при помощи двухузловых конечных элементов с линейной аппроксимацией угла φ :

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=1}^2 \varphi_k N_k^{(e)}(\eta), \quad N_1^{(e)} = 1 - \eta, \quad N_2^{(e)} = \eta, \quad (1.248)$$

где φ_k — значения φ в узлах. В матричных обозначениях имеем

$$\varphi(\eta) = N^{(e)} U^{(e)}, \quad N^{(e)} \equiv \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} \end{bmatrix}, \quad U^{(e)} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T. \quad (1.249)$$

Подставляя эти аппроксимации в (1.232), (1.238) и интегрируя по длине, найдём матрицы жёсткости и инерции.

$$\begin{aligned} \Pi^{tors,(e)} &= L^{(e)} \int_0^1 \Pi^{tors} d\eta = \frac{1}{2} U^{(e)T} C^{(e)} U^{(e)}, \quad C^{(e)} = L^{(e)} \int_0^1 a \parallel N^{(e)T} N^{(e)'} d\eta, \\ T^{tors,(e)} &= L^{(e)} \int_0^1 T^{tors} d\eta = \frac{1}{2} \dot{U}^{(e)T} A^{(e)} \dot{U}^{(e)}, \quad A^{(e)} = L^{(e)} \int_0^1 J \parallel N^{(e)T} N^{(e)} d\eta. \end{aligned} \quad (1.250)$$

В случае кусочно-постоянного сечения имеем

$$\begin{aligned} C^{(e)} &= \sum_{i=1}^n C_i^{(e)}, \quad C_i^{(e)} = L^{(e)} a \parallel \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} N^{(e)T} N^{(e)'} d\eta, \\ A^{(e)} &= \sum_{i=1}^n A_i^{(e)}, \quad A_i^{(e)} = L^{(e)} J_i \parallel \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} N^{(e)T} N^{(e)} d\eta. \end{aligned} \quad (1.251)$$

Результат вычисления следующий:

$$C_i^{(e)} = L^{(e)} a^{\parallel} C_1 (\eta_i - \eta_{i-1}), \quad A_i^{(e)} = L^{(e)} J^{\parallel} \sum_{p=1}^3 A_p (\eta_i^p - \eta_{i-1}^p),$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

В частности, при постоянном сечении получится

$$C^{(e)} = L^{(e)} a^{\parallel} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(e)} = L^{(e)} J^{\parallel} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Узловые нагрузки вычисляются по элементарной работе на виртуальных перемещениях. Работа распределённого крутящего момента m^{\parallel} равна

$$\delta W = \int_0^{L^{(e)}} dx_3 = F^{(e)T} \delta U^{(e)}, \quad F^{(e)} = L^{(e)} \int_0^1 m^{\parallel} N^{(e)T} d\eta$$

В частности, при постоянной нагрузке имеем

$$F^{(e)} = L^{(e)} m^{\parallel} \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right]^T, \quad (1.252)$$

а при сосредоточенном в точке $\eta_* \in [0, 1]$ крутящем моменте M^{\parallel} , то есть при распределённой нагрузке вида $m^{\parallel} = \frac{M^{\parallel}}{L^{(e)}} \delta(\eta - \eta_*)$,

$$F^{(e)} = M^{\parallel} \sum_{p=0}^1 F_p \eta_*^p, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.253)$$

Растяжение вала моделируется точно так же, как и кручение — двухузловыми конечными элементами с линейной аппроксимацией, поскольку (1.233), (1.239) совпадают с (1.232), (1.238) с точностью до обозначений. Результаты предыдущего параграфа используются непосредственно, изменяется лишь смысл обозначений: теперь $U^{(e)} = [u_1^3, u_2^3]^T$ — столбец узловых осевых перемещений; вместо жёсткости на кручение a^{\parallel} следует взять жёсткость на растяжение b , вместо момента инерции J^{\parallel} — погонную плотность ρ , вместо распределённого крутящего момента m^{\parallel} — распределённую осевую силу q_3 .

Матрицы жёсткости и инерции и узловые силы для вала. Пусть имеются конечно-элементные сетки для моделирования изгиба, кручения и растяжения вала, определяемые положениями узлов:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^{bend} < x_1^{bend} < \dots < x_{n^{bend}}^{bend} = L, \\ 0 &= x_0^{tors} < x_1^{tors} < \dots < x_{n^{tors}}^{tors} = L, \\ 0 &= x_0^{ext} < x_1^{ext} < \dots < x_{n^{ext}}^{ext} = L. \end{aligned}$$

Координаты узлов вдоль оси вала отсчитываются от одного из его концов и меняются в пределах от 0 до L — длины вала. Узлы x_k^{bend} определяют две сетки, из n^{bend} конечных элементов каждая, для моделирования изгиба в плоскостях Ox_1x_3 и Ox_2x_3 , узлы x_k^{tors} — сетку из n^{tors} элементов для моделирования кручения, узлы x_k^{ext} — сетку из n^{ext} элементов для моделирования растяжения.

В пределах каждой из этих сеток упорядочим узловые переменные по возрастанию номера узла: $U = [U_1, \dots, U_n]^T$, где U_k — переменные k -того узла (поперечное перемещение и наклон — при изгибе, угол закручивания — при кручении, осевое перемещение — при растяжении). Столбец узловых переменных e -того конечного элемента $U^{(e)}$ тогда может быть получен из U следующим образом (здесь и далее считаем, что нумерация элементов e начинается с 1):

$$U^{(e)} = [U_{e-1}^T, U_e^T]^T = t^{(e)}U, \quad t^{(e)} = \underbrace{[0, \dots, 0]}_{e-1 \text{ раз}}, I, \underbrace{[0, \dots, 0]}_{n-e \text{ раз}},$$

где I — единичная матрица соответствующего размера (4×4 при изгибе в одной плоскости, 2×2 — при растяжении или кручении), а 0 обозначает нулевую матрицу того же размера. Отсюда следует правило сборки «больших» матриц жёсткости, и инерции, A , и столбцов узловых нагрузок, F , для всей сетки:

$$C = \sum_{e=1}^n t^{(e)T} C^{(e)} t^{(e)}, \quad A = \sum_{e=1}^n t^{(e)T} A^{(e)} t^{(e)}, \quad F = \sum_{e=1}^n t^{(e)T} F^{(e)}.$$

Снабдим эти матрицы, а также столбцы узловых переменных U , верхними индексами, идентифицирующими конкретную сетку: *bend*, 1 — изгиб в плоскости

Ox_1x_3 ; $tors$ — кручение; ext — растяжение. Далее введём в рассмотрение столбец U^{shaft} всех узловых переменных вала. Естественно упорядочить переменные следующим образом:

$$U^{shaft} = \begin{bmatrix} U^{bend,1} \\ U^{bend,2} \\ U^{tors} \\ U^{ext} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицы жёсткости C^{shaft} и инерции A^{shaft} вала в целом получатся блочно-диагональными:

$$C^{shaft} = \begin{bmatrix} C^{bend,1} & & & \\ & C^{bend,2} & & \\ & & C^{tors} & \\ & & & C^{ext} \end{bmatrix}, \quad A^{shaft} = \begin{bmatrix} A^{bend,1} & & & \\ & A^{bend,2} & & \\ & & A^{tors} & \\ & & & A^{ext} \end{bmatrix},$$

$$F^{shaft} = \begin{bmatrix} F^{bend,1} \\ F^{bend,2} \\ F^{tors} \\ F^{ext} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при моделировании бесступенчатой трансмиссии в столбец узловых нагрузок F^{shaft} попадают силы взаимодействия вала с опорами (см. п.1.5.2.4) и шайбами (см. п.1.5.2.5).

1.5.2.3. Модель шайбы

Шайбы бесступенчатой трансмиссии рассматриваются как твёрдые тела. Каждая шайба закреплена на валу посредством упругого элемента (см. п. 1.5.2.5) и имеет шесть степеней свободы. Специфика модели состоит в том, что поворот шайбы вокруг оси вращения конечен, в то время как повороты вокруг осей Ox_1, Ox_2 малы. Оставаясь в рамках лагранжевого формализма, выразим кинетическую энергию через обобщённые координаты. В качестве таковых примем координаты u_i вектора $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i$ перемещения центра масс шайбы, угол поворота φ вокруг оси вращения и координаты вектора малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}$, лежащего в плоскости Ox_1x_2 (рис. 1.46). Более точно, представим тензор поворота

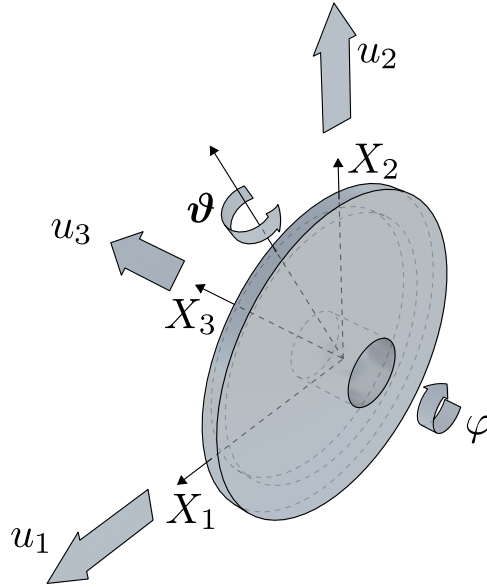


Рис. 1.46. Обобщённые координаты шайбы

$\underline{\underline{P}}$ шайбы в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}} &= \underline{\underline{P}}_{\vartheta} \cdot \underline{\underline{P}}_{\varphi}, \quad \vartheta = \vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3, \\ \underline{\underline{P}}_{\vartheta} &\equiv \underline{\underline{P}}(\vartheta), \quad \underline{\underline{P}}_{\varphi} \equiv \underline{\underline{P}}(\varphi \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1.254)$$

Здесь $\underline{\underline{P}}(\mathbf{a})$ обозначает тензор поворота, соответствующий вектору поворота \mathbf{a} (1.216). Считая вектор поворота ϑ малым, будем далее использовать в его обозначении формальный малый параметр λ , $|\lambda| \ll 1$, и писать $\lambda\vartheta$ вместо ϑ . Предстоит вычислить кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.255)$$

где m — масса шайбы, $\underline{\underline{J}}$ — её тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, с точностью до $O(\lambda^2)$ включительно, чтобы получить правильные коэффициенты ли-неаризованных по λ уравнений движения. Необходимость учёта слагаемых порядка $O(\lambda^2)$ обусловлена наличием конечного угла поворота φ .

Пусть \mathbf{n} — орт оси шайбы; в отсчётном положении он совпадает с \mathbf{k} , поэтому $\mathbf{n} = \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{k} = \underline{\underline{P}}_{\vartheta} \cdot \mathbf{k}$. Поскольку шайба осесимметрична, её тензор инерции имеет вид

$$\underline{\underline{J}} = A \mathbf{n} \mathbf{n} + B(\underline{\underline{E}} - \mathbf{n} \mathbf{n}) = (A - B) \mathbf{n} \mathbf{n} + B \underline{\underline{E}}. \quad (1.256)$$

Здесь A — осевой момент инерции шайбы, B — меридиональный.

Представим поворот $\underline{\underline{P}}_{\vartheta}$ в виде

$$\underline{\underline{P}}_{\vartheta} = \underline{\underline{P}}(\lambda\vartheta) = \exp(\lambda\vartheta \times \underline{\underline{E}})$$

(экспоненту от тензора следует определять как ряд — см. [66, п. 5.10]) и удержим лишь три члена ряда:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}}_{\vartheta} &= \underline{\underline{E}} + \lambda\vartheta \times \underline{\underline{E}} + \frac{\lambda^2}{2}\vartheta \times \underline{\underline{E}} \times \vartheta + O(\lambda^3) = \\ &= \underline{\underline{E}} + \lambda\vartheta \times \underline{\underline{E}} + \frac{\lambda^2}{2}(\vartheta\vartheta - \vartheta^2\underline{\underline{E}}) + O(\lambda^3), \end{aligned} \quad (1.257)$$

где $\vartheta \equiv |\vartheta|$. Вычисляя вектор \mathbf{n} с использованием (1.257), получим

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} + \lambda\vartheta \times \mathbf{k} - \frac{\lambda^2}{2}\vartheta^2\mathbf{k} + O(\lambda^3). \quad (1.258)$$

Далее, найдём угловую скорость. Имеем

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{P}}} &= \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{P}}, \quad \underline{\underline{\dot{P}}}_{\vartheta} = \boldsymbol{\omega}_{\vartheta} \times \underline{\underline{P}}_{\vartheta}, \quad \underline{\underline{\dot{P}}}_{\varphi} = \boldsymbol{\omega}_{\varphi} \times \underline{\underline{P}}_{\varphi}, \quad \Rightarrow \\ &\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\vartheta} + \underline{\underline{P}}_{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.259)$$

Скорость $\boldsymbol{\omega}_{\vartheta}$ можно вычислить с необходимой точностью по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_{\vartheta} = -\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\dot{P}}}_{\vartheta} \cdot \underline{\underline{P}}_{\vartheta}^T \right)_{\times} = \lambda\dot{\vartheta} + \frac{1}{2}\lambda^2\vartheta \times \dot{\vartheta} + O(\lambda^3). \quad (1.260)$$

Последнее равенство получено с использованием (1.257), причём

$$\underline{\underline{\dot{P}}}_{\vartheta} = \lambda\dot{\vartheta} \times \underline{\underline{E}} + \lambda^2 \left(\vartheta\dot{\vartheta}^S - \vartheta \cdot \dot{\vartheta}\underline{\underline{E}} \right) + O(\lambda^3);$$

здесь учтено, что $(\vartheta^2)^{\cdot} = (\vartheta \cdot \vartheta)^{\cdot} = 2\vartheta \cdot \dot{\vartheta}$. Повороту $\underline{\underline{P}}_{\varphi}$ соответствует угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{\varphi} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$, поскольку ось поворота \mathbf{k} неподвижна. Угловая скорость шайбы находится по формуле (1.259) с использованием (1.257), (1.260):

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k} + \lambda \left(\dot{\vartheta} + \dot{\varphi}\vartheta \times \mathbf{k} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left(\vartheta \times \dot{\vartheta} - \vartheta^2\dot{\varphi}\mathbf{k} \right) + O(\lambda^3). \quad (1.261)$$

Теперь легко вычислить кинетический момент $\underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$: из (1.256), (1.258), (1.261) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \dot{\varphi} - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{k} \cdot (\vartheta \times \dot{\vartheta}) + O(\lambda^3), \\ \mathbf{nn} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \dot{\varphi}\mathbf{k} + \lambda\dot{\varphi}\vartheta \times \mathbf{k} - \frac{\lambda^2}{2} \left(\vartheta \times \dot{\vartheta} + \vartheta^2\dot{\varphi}\mathbf{k} \right) + O(\lambda^3), \\ \underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} &= A\dot{\varphi}\mathbf{k} + \lambda \left(B\dot{\vartheta} + A\dot{\varphi}\vartheta \times \mathbf{k} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left((2B - A)\vartheta \times \dot{\vartheta} - A\vartheta^2\dot{\varphi}\mathbf{k} \right) + O(\lambda^3). \end{aligned}$$

Скалярно умножая последнее равенство на $\boldsymbol{\omega}$, получим удвоенную кинетическую энергию вращения. Кинетическая энергия шайбы принимает вид

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \left[B\dot{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}} - A\dot{\varphi}\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\vartheta} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}) \right] + O(\lambda^3). \quad (1.262)$$

Перекрестный член, пропорциональный $\dot{\varphi}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$, определяет гироскопический эффект.

Обобщённая сила инерции Z_q , соответствующая обобщённой координате q , вычисляется в рамках формализма Лагранжа по формуле

$$Z_q = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

В нашем случае обобщёнными координатами являются координаты u_1, u_2, u_3 вектора \mathbf{u} положения центра масс шайбы, угол φ и координаты $\lambda\vartheta_1, \lambda\vartheta_2$ вектора малого поворота $\lambda\boldsymbol{\vartheta}$. Уместно в качестве сил инерции рассмотреть следующие величины, в том числе векторные комбинации:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_u &\equiv \sum_{i=1}^3 Z_{u_i} \mathbf{e}_i = -m\ddot{\mathbf{u}}, \\ Z_\varphi &= -A\ddot{\varphi} + \frac{\lambda^2}{2} A\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\vartheta} \times \ddot{\boldsymbol{\vartheta}}) + O(\lambda^3), \\ \mathbf{Z}_\vartheta &\equiv \sum_{i=1}^2 Z_{\lambda\vartheta_i} \mathbf{e}_i = -\lambda B\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} + \lambda A \left(\frac{1}{2}\ddot{\varphi}\mathbf{k} \times \boldsymbol{\vartheta} + \dot{\varphi}\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \right) + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Вычислим теперь обобщённые силы, соответствующие приложенным к шайбе силе $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{e}_i$ (в центре масс) и моменту $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\perp + M_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{M}^\perp \equiv M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2$. Элементарная работа силы, очевидно, равна

$$\delta W_F = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 F_i \delta u_i.$$

Таким образом, координата F_i вектора силы является обобщённой силой, соответствующей обобщённой координате u_i ; сам вектор \mathbf{F} является комбинацией обобщённых сил, соответствующей комбинации \mathbf{u} . Элементарная работа приложенного момента равна

$$\delta W_M = \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}, \quad \delta \boldsymbol{\omega} : \delta \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}}.$$

Вектор $\delta \mathbf{o}$ аналогичен вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и получается, если в последнем заменить скорости на виртуальные перемещения — $\dot{\varphi}$ на $\delta\varphi$, а также $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ на $\delta\boldsymbol{\vartheta}$. В соответствии с (1.261), имеем

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{o} &= \mathbf{k}\delta\varphi + \lambda(\delta\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}\delta\varphi) + \frac{\lambda^2}{2}(\boldsymbol{\vartheta} \times \delta\boldsymbol{\vartheta} - \vartheta^2 \mathbf{k}\delta\varphi) + O(\lambda^3) = \\ &= \mathbf{k}\delta\varphi + \delta(\lambda\boldsymbol{\vartheta}) + \lambda(\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}\delta\varphi + \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta} \times \delta(\lambda\boldsymbol{\vartheta})) - \frac{\lambda^2}{2}\vartheta^2 \mathbf{k}\delta\varphi + O(\lambda^3).\end{aligned}$$

Вычисляя элементарную работу момента, получим отсюда

$$\begin{aligned}\delta W_M &= M_\varphi \delta\varphi + \mathbf{M}_\vartheta \cdot \delta(\lambda\boldsymbol{\vartheta}), \\ M_\varphi &= M_3 + \lambda \mathbf{M}^\perp \cdot (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}) + O(\lambda^2), \\ \mathbf{M}_\vartheta &= \mathbf{M}^\perp + \frac{\lambda}{2} M_3 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\vartheta} + O(\lambda^2).\end{aligned}\tag{1.263}$$

Теперь можно записать уравнения движения:

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{F}, \\ A\ddot{\varphi} &= M_3 + \lambda \mathbf{M}^\perp \cdot (\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}) + O(\lambda^2), \\ \lambda \left(B\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - \frac{1}{2} A\ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\vartheta} - A\dot{\varphi} \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \right) &= \mathbf{M}^\perp + \frac{\lambda}{2} M_3 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\vartheta} + O(\lambda^2).\end{aligned}\tag{1.264}$$

В левой части последнего уравнения — величина порядка λ , это требует скорректировать нагрузку: момент \mathbf{M}^\perp тоже должен иметь порядок λ . Поэтому далее вместо \mathbf{M}^\perp будем писать $\lambda \mathbf{M}^\perp$. Но тогда в предпоследнем уравнении слагаемое с \mathbf{M}^\perp оказывается порядка λ^2 и потому должно быть опущено. Далее, в последнем уравнении исключим $\ddot{\varphi}$, воспользовавшись для этого предпоследним:

$$A\ddot{\varphi} = M_3 + O(\lambda^2) \quad \Rightarrow \quad \lambda \left(B\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} - A\dot{\varphi} \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \right) = \lambda \left(\mathbf{M}^\perp + M_3 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\vartheta} \right) + O(\lambda^2).$$

Окончательный вид системы линеаризованных уравнений движения шайбы таков (полагаем $\lambda = 1$ — малый параметр больше не нужен):

$$m\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}, \tag{1.265}$$

$$A\ddot{\varphi} = M_3, \tag{1.266}$$

$$B\ddot{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{M}^\perp + M_3 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\vartheta} + A\dot{\varphi} \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\vartheta}}. \tag{1.267}$$

Нельзя не отметить, что тот же результат может быть получен значительно более простым способом, без необходимости учёта слагаемых порядка λ^2 в повороте $\underline{\underline{P}}_{\vartheta}$: ограничившись линейным приближением $\underline{\underline{P}}_{\vartheta} = \underline{\underline{E}} + \lambda \vartheta \times \underline{\underline{E}} + O(\lambda^2)$ — ср. с (1.257) — получим следующее выражение кинетического момента:

$$\underline{\underline{L}} \equiv \underline{\underline{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} = A \dot{\varphi} \mathbf{k} + \lambda \left(B \dot{\vartheta} + A \dot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{k} \right) + O(\lambda^2).$$

Применение теоремы об изменении кинетического момента в виде

$$\dot{\underline{\underline{L}}} = M_3 \mathbf{k} + \lambda \mathbf{M}^\perp$$

ведёт непосредственно к (1.266), (1.267). Этот пример показывает, насколько трудоёмким в некоторых случаях может оказаться составление уравнений Лагранжа по сравнению с другими подходами.

В проделанном анализе использовалось предположение, что ϑ , $\dot{\vartheta}$ и $\ddot{\vartheta}$ имеют порядок малости $O(\lambda)$; оно повлекло за собой требование $\mathbf{M}^\perp = O(\lambda)$, что представляется сомнительным. Более разумно считать, что моменты M_φ и \mathbf{M}^\perp оба имеют порядок $O(\lambda^0)$, тогда и $\ddot{\vartheta}$ имеет тот же порядок. В конструкции бесступенчатой трансмиссии часть момента \mathbf{M}^\perp обусловлена упругостью вала и опоры шайбы. Если считать, что соответствующая жёсткость имеет порядок $O(\lambda^{-1})$, то асимптотический анализ проходит несколько иначе. Положим $\mu \equiv \sqrt{\lambda}$ и примем, что, как и раньше, $\vartheta = O(\lambda) = O(\mu^2)$. Характерная частота колебаний ϑ должна быть порядка μ^{-1} , поэтому $\dot{\vartheta} = O(\mu)$, $\ddot{\vartheta} = O(\mu^0)$. Если теперь повторить проделанные выкладки, удерживая в силах инерции (или в $\dot{\underline{\underline{L}}}$, если пользоваться теоремой об изменении кинетического момента) слагаемые порядков μ^0 , μ^1 , μ^2 , то получим следующие уравнения движения для φ , ϑ :

$$A \ddot{\varphi} = M_3 + \left(1 - \frac{A}{2B} \right) (\vartheta \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{M}^\perp, \quad (1.268)$$

$$B \ddot{\vartheta} = \mathbf{M}^\perp + M_3 \mathbf{k} \times \vartheta + A \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \dot{\vartheta}. \quad (1.269)$$

Уравнения (1.267) и (1.269) совпадают, а (1.268) отличается от (1.266) наличием в правой части слагаемого с \mathbf{M}^\perp . При численном моделировании бесступенчатой трансмиссии используются (1.265), (1.268), (1.269). Отметим в заключение,

что для получения уравнений (1.268), (1.269) с использованием теоремы об изменении кинетического момента необходим учёт слагаемых порядка λ^2 в тензоре поворота $\underline{\underline{P}}_{\vartheta}$.

1.5.2.4. Модель опоры вала

Опора вала бесступенчатой трансмиссии моделируется как вязко-упругий элемент, упругая характеристика которого может быть нелинейной. Кроме того, модель предусматривает добавление сосредоточенной инерции к валу в некотором сечении — *точке крепления опоры*. Можно считать, что модель опоры обеспечивает взаимодействие между неподвижным основанием и точкой крепления опоры; в отсчётной конфигурации они занимают одно и то же положение в пространстве (рис. 1.47).

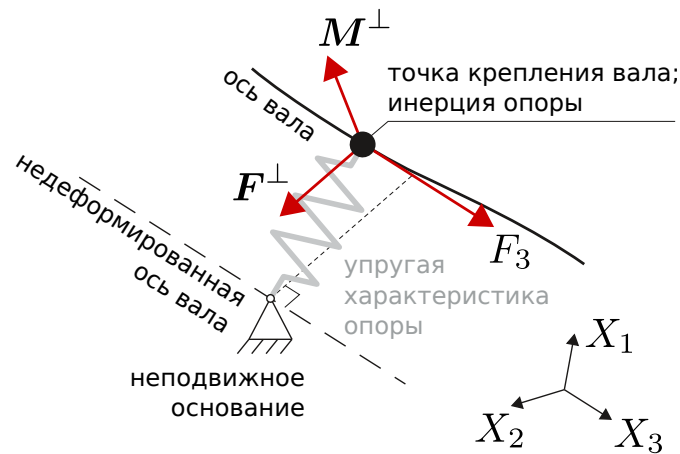


Рис. 1.47. Модель опоры вала

Взаимодействие сводится к сосредоточенным силе \mathbf{F} и моменту \mathbf{M} , приложенным к валу в точке крепления опоры. При этом крутящий момент, создаваемый опорой, считается нулевым, так что $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2$. Пусть \mathbf{u} — вектор положения точки крепления относительно основания, $\vartheta = \vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2$ — вектор малого поворота сечения вала вокруг осей X_1, X_2 . В общем случае вязко-упругой характеристики (с линейной вязкостью) имеют место зависимости

$$\Pi(\mathbf{u}, \vartheta), \quad \Phi(\mathbf{u}, \vartheta, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\vartheta}), \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{M} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\vartheta}},$$

где Π — некоторая потенциальная энергия, Φ — диссипативная функция (квадратичная по скоростям). Но в предлагаемой модели принимается ряд упрощений. Во-первых, силовая и моментная характеристики считаются не связанными; характеристики осевой и поперечной силы также считаются не связанными, поэтому имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\perp + u_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{u}^\perp \equiv u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2, \quad (1.270)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^\perp + F_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{F}^\perp \equiv F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2, \quad (1.271)$$

$$\Pi = \Pi^\perp(\mathbf{u}^\perp) + \Pi^3(u_3) + \Pi^\vartheta(\boldsymbol{\vartheta}), \quad \Phi = \Phi^\perp(\mathbf{u}^\perp, \dot{\mathbf{u}}^\perp) + \Phi^3(u_3, \dot{u}_3) + \Phi^\vartheta(\boldsymbol{\vartheta}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}),$$

$$\mathbf{F}^\perp = -\frac{\partial \Pi^\perp}{\partial \mathbf{u}^\perp} - \frac{\partial \Phi^\perp}{\partial \dot{\mathbf{u}}^\perp}, \quad F_3 = -\frac{\partial \Pi^3}{\partial u_3} - \frac{\partial \Phi^3}{\partial \dot{u}_3}, \quad \mathbf{M} = -\frac{\partial \Pi^\vartheta}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} - \frac{\partial \Phi^\vartheta}{\partial \dot{\boldsymbol{\vartheta}}},$$

то есть, потенциальная энергия представима в виде суммы трёх слагаемых, зависящих от \mathbf{u}^\perp , u_3 и $\boldsymbol{\vartheta}$ соответственно; аналогично, диссипативная функция представима в виде суммы трёх слагаемых, зависящих от $(\mathbf{u}^\perp, \dot{\mathbf{u}}^\perp)$, (u_3, \dot{u}_3) и $(\boldsymbol{\vartheta}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}})$ соответственно. Во-вторых, опора считается изотропной относительно направлений X_1, X_2 . Чтобы формально выразить это существенное упрощение, представим векторы $\mathbf{u}^\perp, \boldsymbol{\vartheta}$ в следующем виде:

$$\mathbf{u}^\perp = u \mathbf{e}_u, \quad |\mathbf{e}_u| = 1, \quad u = |\mathbf{u}^\perp| \quad (1.272)$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta \mathbf{e}_\vartheta, \quad |\mathbf{e}_\vartheta| = 1, \quad \vartheta = |\boldsymbol{\vartheta}|. \quad (1.273)$$

Изотропия, например, потенциальной энергии $\Pi^\perp(\mathbf{u}^\perp)$ означает, что она не зависит от направления вектора \mathbf{u}^\perp , что можно формально выразить равенством

$$\Pi^\perp(\mathbf{u}^\perp) = \Pi^\perp(\underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{u}^\perp),$$

где $\underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi \mathbf{e}_3)$ — тензор поворота на произвольный угол φ вокруг оси X_3 . Выберем φ таким образом, чтобы выполнялось, например, равенство $\underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_1$, тогда $\Pi^\perp(\mathbf{u}^\perp) = \Pi^\perp(u \mathbf{e}_1)$. Выбирая угол φ иначе, можно получить аналогичное равенство $\Pi^\perp(\mathbf{u}^\perp) = \Pi^\perp(u \mathbf{e}_2)$. Таким образом, фактически потенциальная энергия Π^\perp зависит лишь от скаляра u . Совершенно аналогично, Π^ϑ зависит лишь от скаляра ϑ .

Диссипативная функция Φ^\perp зависит от двух векторных аргументов, поэтому не вполне очевидно, от каких скалярных величин может зависеть эта изотропная функция. Представим вектор скорости \mathbf{u}^\perp в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}^\perp &= (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) \cdot \dot{\mathbf{u}}^\perp = (\mathbf{e}_u\mathbf{e}_u + \mathbf{n}_u\mathbf{n}_u) \cdot \dot{\mathbf{u}}^\perp = v_e\mathbf{e}_u + v_n\mathbf{n}_u, \\ \mathbf{n}_u &\equiv \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_u, \quad v_e = \dot{\mathbf{u}}^\perp \cdot \mathbf{e}_u, \quad v_n = \dot{\mathbf{u}}^\perp \cdot \mathbf{n}_u = u^{-1}(\dot{\mathbf{u}}^\perp \times \mathbf{u}^\perp) \cdot \mathbf{e}_3; \\ u^2 &= \mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{u}^\perp \quad \Rightarrow \quad u\dot{u} = \mathbf{u}^\perp \cdot \dot{\mathbf{u}}^\perp \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = v_e.\end{aligned}$$

Теперь очевидно, что аргументы Φ^\perp — векторы $u\mathbf{e}_u$ и $\dot{u}\mathbf{e}_u + v_n\mathbf{n}_u$. Но в силу изотропии она имеет то же самое значение на аргументах $u\mathbf{e}_1$ и $\dot{u}\mathbf{e}_1 + v_n\mathbf{e}_2$, откуда можно заключить, что $\Phi^\perp(u, \dot{u}, v_n)$. В предлагаемой модели опоры зависимость от v_n , однако, не учитывается. Прделанные рассуждения переносятся без изменений на диссипативную функцию Φ^ϑ .

Окончательно принимается следующий вид потенциальной энергии и диссипативной функции:

$$\Pi^\perp(u) = \int_0^u f_r(x) dx, \quad \Pi^3(u_3) = \int_0^{|u_3|} f_3(x) dx, \quad \Pi^\vartheta = \int_0^\vartheta m_r(x) dx, \quad (1.274)$$

$$\Phi^\perp(\dot{u}) = \frac{1}{2}\beta C^\perp \dot{u}^2, \quad \Phi^3(\dot{u}_3) = \frac{1}{2}\beta_3 C_3 \dot{u}_3^2, \quad \Phi^\vartheta(\dot{\vartheta}) = \beta \frac{1}{2} C_\vartheta \dot{\vartheta}^2, \quad (1.275)$$

$$C^\perp \equiv \left. \frac{d^2 \Pi^\perp}{du^2} \right|_{u=0}, \quad C_3 \equiv \left. \frac{d^2 \Pi^3}{du_3^2} \right|_{u_3=0}, \quad C_\vartheta \equiv \left. \frac{d^2 \Pi^\vartheta}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta=0}, \quad (1.276)$$

где f_r , f_3 , m_r — заданные упругие характеристики, β и β_3 [с] — заданные коэффициенты демпфирования. Как обычно, в демпфирование считается пропорциональным жёсткости (см. стр. 61), хотя жёсткостью, согласно (1.276), считается производная от соответствующей упругой характеристики при нулевом, а не при текущем, значении аргумента.

Сила и момент, действующие со стороны опоры на вал в точке крепления, вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{u}^\perp} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^\perp} (\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{u}^\perp)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u} 2\mathbf{u}^\perp = \mathbf{e}_u = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{\mathbf{u}}^\perp}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial \dot{\vartheta}} = \mathbf{e}_\vartheta, \\ \mathbf{F}^\perp &= -\frac{\partial \Pi^\perp}{\partial \mathbf{u}^\perp} - \frac{\partial \Phi^\perp}{\partial \dot{\mathbf{u}}^\perp} = -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{u}^\perp} \frac{d\Pi^\perp}{du} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{\mathbf{u}}^\perp} \frac{d\Phi^\perp}{d\dot{u}} = -(f_r + \beta C^\perp \dot{u})\mathbf{e}_u, \\ F_3 &= -\frac{\partial \Pi^3}{\partial u_3} - \frac{\partial \Phi^3}{\partial \dot{u}_3} = -(f_3 + \beta_3 C_3 \dot{u}_3), \\ \mathbf{M} &= -\frac{\partial \Pi^\vartheta}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \Phi^\vartheta}{\partial \dot{\vartheta}} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{\vartheta}} \frac{d\Pi^\vartheta}{d\vartheta} - \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial \dot{\vartheta}} \frac{d\Phi^\vartheta}{d\dot{\vartheta}} = -(m_r + \beta C_\vartheta \dot{\vartheta})\mathbf{e}_\vartheta.\end{aligned} \quad (1.277)$$

Соответствующие обобщённые силы могут быть вычислены по формуле (1.247).

Учёт сосредоточенной в точке крепления инерции опоры требует добавления соответствующих слагаемых в матрицу инерции конечного элемента, в котором находится точка крепления. Пусть m — масса, j^\perp — экваториальный момент инерции, j^\parallel — осевой момент инерции осесимметричного твёрдого тела, «добавленного» в точке крепления опоры. Положим в (1.243)

$$\rho = \frac{m}{L^{(e)}}\delta(\eta - \eta_*), \quad J^\perp = \frac{j^\perp}{L^{(e)}}\delta(\eta - \eta_*),$$

где η_* — значение координаты η в точке крепления. Тогда получим следующую добавку $a^{(e),bend}$ к матрице инерции конечного элемента, описывающего изгиб вала:

$$a^{(e),bend} = mN^{(e)T}(\eta_*)N^{(e)}(\eta_*) + j^\perp N^{(e)T}(\eta_*)N^{(e)'}(\eta_*).$$

Для элемента, описывающего кручение, получим аналогичным образом, полагая в (1.250) $J^\parallel = j^\parallel/L^{(e)}$, добавку $a^{(e),tors}$; с учётом (1.248)

$$a^{(e),tors} = j^\parallel N^{(e)T}(\eta_*)N^{(e)}(\eta_*) = j^\parallel \begin{bmatrix} (1 - \eta_*)^2 & \eta_*(1 - \eta_*) \\ \eta_*(1 - \eta_*) & \eta_*^2 \end{bmatrix}.$$

Наконец, для элемента, описывающего растяжение вала, получим в матрице инерции добавку $a^{(e),ext}$:

$$a^{(e),ext} = mN^{(e)T}(\eta_*)N^{(e)}(\eta_*) = m \begin{bmatrix} (1 - \eta_*)^2 & \eta_*(1 - \eta_*) \\ \eta_*(1 - \eta_*) & \eta_*^2 \end{bmatrix}.$$

1.5.2.5. Модель опоры шайбы

Жёсткое соединение. Одна из шайб на каждом валу трансмиссии неподвижна, фактически эта шайба и вал представляют собой единую деталь. В этом случае можно считать, что шайба и вал соединены жёстко. При моделировании этого жёсткого соединения в конечно-элементных сетках, описывающих изгиб, растяжение и кручение вала (п. 1.5.2.2), присутствуют узлы, положение которых в отсчётной конфигурации совпадает с положением центра масс шайбы

(рис. 1.48). Радиус-векторы и повороты вала и шайбы считаются одинаковыми, то есть имеют место связи

$$\mathbf{u}^{\perp,shaft} = \mathbf{u}^{\perp,pulley}, \quad \mathbf{u}^{\perp,shaft} = \mathfrak{D}^{pulley} \times \mathbf{e}_3, \quad (1.278)$$

$$u^{3,shaft} = u^{3,pulley}, \quad (1.279)$$

$$\varphi^{shaft} = \varphi^{pulley}. \quad (1.280)$$

Величины с верхним индексом $shaft$ относятся к валу (в указанных узлах), с индексом $pulley$ — к шайбе: $\mathbf{u}^{\perp,shaft}$ — проекция радиус-вектора точки оси вала на плоскость Ox_1x_2 , $\mathbf{u}^{\perp,shaft}$ — наклон оси вала, $u^{3,shaft}$ — проекция радиус-вектора точки оси вала на ось Ox_3 , φ^{shaft} — поворот вала вокруг \mathbf{e}_3 ; $\mathbf{u}^{\perp,pulley}$ — проекция радиус-вектора центра масс шайбы на плоскость Ox_1x_2 , \mathfrak{D}^{pulley} — малый поворот шайбы (см. п. 1.5.2.3), $u^{3,pulley}$ — проекция радиус-вектора центра масс шайбы на ось Ox_3 , φ^{pulley} — поворот шайбы вокруг \mathbf{e}_3 .

Для реализации связей (1.278), (1.279), (1.280) используется следующий подход. Рассмотрим голономную систему, имеющую n независимых обобщённых координат $q = [q_1, \dots, q_n]^T$, описываемую уравнениями Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}$$

Элементарная работа обобщённых сил Q_i на виртуальных перемещениях равна

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = Q^T \delta q, \quad Q \equiv [Q_1, \dots, Q_n]^T. \quad (1.281)$$

Рассмотрим теперь другую голономную систему, отличающуюся от предыдущей лишь наличием дополнительных d линейных идеальных связей. Будем считать, что эти линейные связи можно выразить соотношением

$$q = B \tilde{q}, \quad \tilde{q} = [\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m]^T, \quad m = n - d, \quad (1.282)$$

где \tilde{q} — новые независимые обобщённые координаты, B — постоянная матрица из n строк и m столбцов. Поскольку новая система также голономна, она также описывается уравнениями Лагранжа, причём с той же самой кинетической

энергией:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} - \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \tilde{A} \dot{\tilde{q}}, \quad \tilde{A} = B^T A B;$$

последнее равенство следует из (1.282). Обобщённые силы \tilde{Q}_i следует находить исходя из того, что их работа на виртуальных перемещениях та же, что работа сил Q_i (1.281) в первой системе. Отсюда имеем

$$\delta W = Q^T \delta q = \tilde{Q}^T \delta \tilde{q} \Rightarrow \tilde{Q} \equiv [\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_m]^T = B^T Q.$$

Таким образом, мы нашли уравнения движения системы с дополнительными связями вида (1.282). Очевидно, связи (1.278), (1.279), (1.280) представимы в таком виде, так что можно считать, что описано жёсткое соединение податливого вала с шайбой. Отметим ещё, что не составляет труда описать жесткую связь вала с шайбой лишь по отношению к изгибу (1.278), растяжению (1.279) или кручению (1.280), с тем, чтобы использовать упругое соединение (описанное ниже) по отношению к остальным факторам.

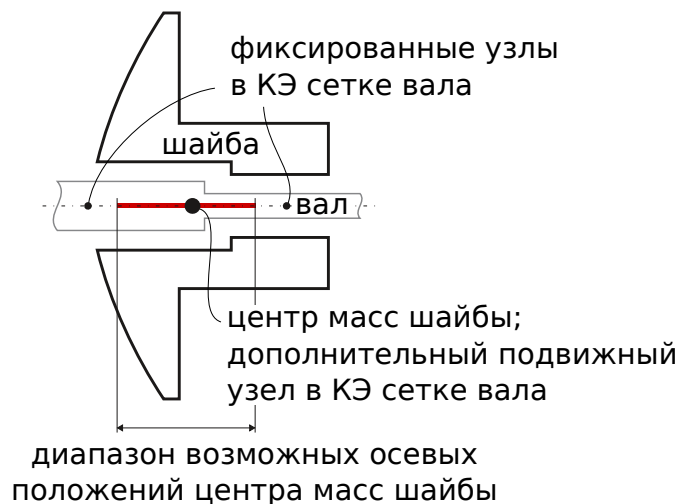


Рис. 1.48. Жёсткое соединение шайбы с валом

Наконец, отметим, что и для подвижной в осевом направлении шайбы можно рассматривать жёсткое соединение с упругим валом. При этом связь (1.279) не вводится, а узел на валу, находящийся в центре масс шайбы, считается подвижным (его положение определяется осевым положением шайбы). Матрица

инерции вала становится переменной, но слагаемым $\dot{A}\dot{\tilde{q}}$ в уравнениях Лагранжа можно пренебречь, потому что шайба движется в осевом направлении относительно медленно. При использовании данного подхода необходимо учитывать, что диапазон осевых положений шайбы (обозначен на рис. 1.48) должен быть таким, чтобы длина конечных элементов вала, содержащих дополнительный подвижный узел, была не слишком мала.

Упругое соединение. При упругом соединении вала принимается, что шайба опирается на вал в заданных точках (опорах), положение которых фиксировано на оси шайбы (рис. 1.49). Считается, что каждая опора — линейная упруго-вязкая, с несвязанными характеристиками (подобно опоре вала, п. 1.5.2.4). Пусть $\mathbf{u}^{pulley} = \mathbf{u}^{\perp,pulley} + u^{3,pulley}\mathbf{e}_3$, как уже обозначено выше, — радиус-век-

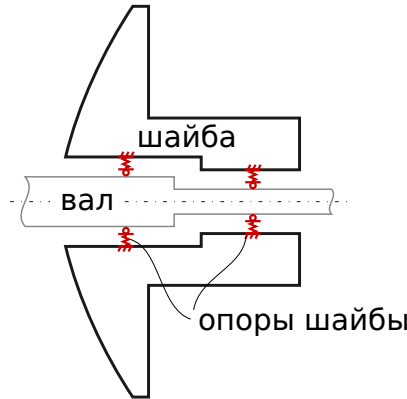


Рис. 1.49. Упругое соединение шайбы с валом

тор центра масс шайбы, ϑ^{pulley} — её малый поворот (вектор в плоскости Ox_1x_2), φ^{pulley} — поворот шайбы вокруг \mathbf{e}_3 . Радиус-вектор i -й опоры на оси шайбы равен

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{pulley} &= \mathbf{u}_i^{\perp,pulley} + u_i^{3,pulley}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{u}_i^{\perp,pulley} &= \mathbf{u}^{\perp,pulley} + z_i\vartheta^{pulley} \times \mathbf{e}_3, \quad u_i^{3,pulley} = u^{3,pulley} + z_i \end{aligned} \quad (1.283)$$

(здесь z_i — осевая координата опоры в системе координат, связанной с шайбой; при вычислении положений опор мы ограничились линейным приближением малого поворота $\underline{\underline{P}}(\vartheta)$). Осевой координате $u_i^{3,pulley}$ соответствует сечение вала, находящееся в этом месте в отсчётном состоянии; исходя из этого соответствия,

можно в каждой конечно-элементной сетке вала найти конечный элемент и значение параметра, идентифицирующие данное сечение. При помощи конечно-элементных аппроксимаций (1.240), (1.248) можно далее найти радиус-вектор $\mathbf{u}_i^{shaft} = \mathbf{u}_i^{\perp,shaft} + u_i^{3,shaft} \mathbf{e}_3$ точки на оси вала, наклон оси $\mathbf{u}_i^{\prime,shaft}$ и поворот φ_i^{shaft} вала вокруг \mathbf{e}_3 в актуальном положении. Это позволяет определить деформации опоры следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{u,i} &\equiv \left| \mathbf{u}_i^{\perp,pulley} - \mathbf{u}_i^{\perp,shaft} \right|, & \Delta_{\vartheta,i} &\equiv \left| \boldsymbol{\vartheta}^{pulley} - \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_i^{\prime,shaft} \right|, \\ \Delta_{3,i} &\equiv \left| u_i^{3,pulley} - u_i^{3,shaft} \right|, & \Delta_{\varphi,i} &\equiv \left| \varphi^{pulley} - \varphi_i^{shaft} \right|. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно определить потенциальную энергию опоры — это квадратичная форма деформаций, причём перекрёстные члены в ней отброшены:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \Pi_i^{\perp} + \Pi_i^3 + \Pi_i^{\varphi}, \\ \Pi_i^{\perp} &= \frac{1}{2} c_{u,i} \Delta_{u,i}^2 + \frac{1}{2} c_{\vartheta,i} \Delta_{\vartheta,i}^2, & \Pi_i^3 &= \frac{1}{2} c_{3,i} \Delta_{3,i}^2, & \Pi_i^{\varphi} &= \frac{1}{2} c_{\varphi,i} \Delta_{\varphi,i}^2, \end{aligned}$$

Жёсткости $c_{u,i}$ на относительное радиальное перемещение и $c_{\vartheta,i}$ на относительный поворот считаются скалярами в связи с предполагаемой изотропией свойств опоры. Диссипативная функция i -той опоры шайбы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_i^{\perp} + \Phi_i^3 + \Phi_i^{\varphi}, \\ \Phi_i^{\perp} &= \frac{1}{2} \beta_i c_{u,i} \dot{\Delta}_{u,i}^2 + \frac{1}{2} \beta_i c_{\vartheta,i} \dot{\Delta}_{\vartheta,i}^2, & \Phi_i^3 &= \frac{1}{2} \beta_i c_{3,i} \dot{\Delta}_{3,i}^2, & \Phi_i^{\varphi} &= \frac{1}{2} \beta_i c_{\varphi,i} \dot{\Delta}_{\varphi,i}^2, \end{aligned}$$

где β_i — коэффициент демпфирования [с].

При вычислении обобщённых сил удобно ввести векторы $\mathbf{e}_{u,i}$, $\mathbf{e}_{\vartheta,i}$, подобно тому, как это сделано в п. 1.5.2.4:

$$\mathbf{e}_{u,i} \equiv \frac{1}{\Delta_{u,i}} \left(\mathbf{u}_i^{\perp,pulley} - \mathbf{u}_i^{\perp,shaft} \right), \quad \mathbf{e}_{\vartheta,i} \equiv \frac{1}{\Delta_{\vartheta,i}} \left(\boldsymbol{\vartheta}^{\perp,pulley} - \mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}_i^{\prime,shaft} \right).$$

Тогда частные производные от деформаций по комбинациям обобщённых координат, соответствующих шайбе, примут вид

$$\frac{\partial \Delta_{u,i}}{\partial \mathbf{u}_i^{\perp,pulley}} = \frac{\partial \dot{\Delta}_{u,i}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_i^{\perp,pulley}} = \mathbf{e}_{u,i}, \quad \frac{\partial \Delta_{\vartheta,i}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_i^{\perp,pulley}} = \frac{\partial \dot{\Delta}_{\vartheta,i}}{\partial \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i^{\perp,pulley}} = \mathbf{e}_{\vartheta,i},$$

и легко вычислить силу \mathbf{F}_i и момент \mathbf{M}_i , действующие на шайбу со стороны i -той опоры (сила приложена в точке опоры):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \mathbf{F}_i^\perp + F_i^3 \mathbf{e}_3, & \mathbf{M}_i &= \mathbf{M}_i^\perp + M_i^3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{F}_i^\perp &= -\frac{\partial \Pi_i}{\partial \mathbf{u}_i^{\perp, pulley}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{\mathbf{u}}_i^{\perp, pulley}} = -c_{u,i} \left(\Delta_{u,i} + \beta_i \dot{\Delta}_{u,i} \right) \mathbf{e}_u, \\ F_i^3 &= -\frac{\partial \Pi_i}{\partial u_i^{3, pulley}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{u}_i^{3, pulley}} = -c_{3,i} \left(\Delta_{3,i} + \beta_i \dot{\Delta}_{3,i} \right), \\ \mathbf{M}_i^\perp &= -\frac{\partial \Pi_i}{\partial \vartheta^{pulley}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{\vartheta}^{pulley}} = -c_{\vartheta,i} \left(\Delta_{\vartheta,i} + \beta_i \dot{\Delta}_{\vartheta,i} \right) \mathbf{e}_\vartheta, \\ M_i^3 &= -\frac{\partial \Pi_i}{\partial \varphi^{pulley}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{\varphi}^{pulley}} = -c_{\varphi,i} \left(\Delta_{\varphi,i} + \beta_i \dot{\Delta}_{\varphi,i} \right).\end{aligned}$$

При вычислении частных производных считалось, что $\mathbf{u}_i^{\perp, pulley}$ не зависят от ϑ^{pulley} . Силы, действующие на шайбу со стороны опор, создают моменты относительно центра масс шайбы: в силу (1.283) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i^{pulley}}{\partial \vartheta^{pulley}} = z_i \underline{\mathbf{E}} \times \mathbf{e}_3,$$

поэтому на шайбу со стороны всех опор действуют следующие сила \mathbf{F}^{pulley} и момент \mathbf{M}^{pulley} относительно её центра масс:

$$\mathbf{F}^{pulley} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M}^{pulley} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}_i + z_i \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F}_i),$$

где n — количество опор.

Обобщённые силы, действующие на вал, вычисляются по формулам (1.247), (1.253); при этом, как нетрудно убедиться, формально вычисляя производные от Π_i , по $\mathbf{u}_i^{\perp, shaft}$, $u_i^{3, shaft}$, $\mathbf{u}_i^{l, shaft}$, φ_i^{shaft} и от Φ_i по соответствующим скоростям, на вал со стороны i -той опоры действуют сила $-\mathbf{F}_i$ и момент $-\mathbf{M}_i$, что согласуется с третьим законом Ньютона.

В заключение отметим, что предложенные модели опоры шайбы допускают комбинацию жёсткого и упругого соединения вала и шайбы: например, можно рассматривать шайбу, жёстко связанную с валом на поворот вокруг оси Ox_3 , упруго — на радиальное перемещение и малый поворот вокруг оси, перпендикулярной Ox_3 , и не связанную с валом в осевом направлении.

1.5.3. Модели контактного взаимодействия пина с шайбой

Работоспособность бесступенчатой трансмиссии обеспечивается возможностью передачи крутящего момента с ведущего вала на ведомый посредством сил трения, действующих между шайбами и торцевыми поверхностями пинов цепи. Поэтому моделирование контактного взаимодействия пин — шайба с учётом сил трения — один из наиболее важных аспектов при описании динамики трансмиссии.

В рассматриваемых конструкциях трансмиссии контактные поверхности пинов и шайб — двояковыпуклые, что обеспечивает локализацию контактного взаимодействия в небольшой области. Поэтому во всех предлагаемых упрощённых моделях контактного взаимодействия считается, что для каждой пары контактных поверхностей это взаимодействие сводится к возникновению сил, сосредоточенных в *точке контакта*, соответствующей области контакта в реальной конструкции. С одной стороны, такие упрощённые модели позволяют адекватно описать как динамику трансмиссии, так и напряжённое состояние цепи. С другой стороны, представляется, что более сложные модели контактного взаимодействия, традиционные для вычислительной механики сплошной среды, требуют неоправданно высоких вычислительных затрат.

1.5.3.1. Описание сил трения при контактном взаимодействии

Трение между контактными поверхностями пина и шайбы в реальной конструкции близко к кулонову (сухому) трению. Рассмотрим материальную точку массы m , движущуюся по заданной материальной поверхности при наличии силы трения (рис. 1.50). Отметим, что в данном случае нельзя задать поверхность уравнением $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ (\mathbf{r} — радиус-вектор, t — время): например, неподвижная сфера радиуса a и сфера того же радиуса, произвольно вращающаяся вокруг неподвижного центра, обе описываются уравнением $|\mathbf{r}| = a$; но, поскольку нас интересует скорость материальной точки относительно поверхности, требуется

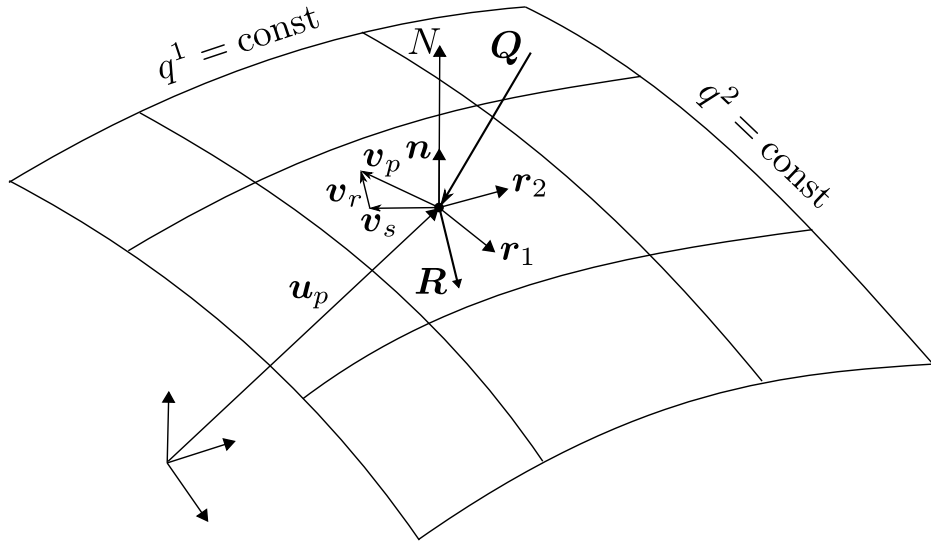


Рис. 1.50. Движение материальной точки по поверхности

знать скорости точек поверхности. Поэтому для описания поверхности используем лагранжевы материальные координаты q^1, q^2 , с их помощью поверхность задаётся параметрически:

$$\mathbf{r}(q^1, q^2, t). \quad (1.284)$$

Точка поверхности тогда идентифицируется парой (q^1, q^2) , и её скорость равна $\mathbf{v}_s = \partial_t \mathbf{r}$ (∂_t — частная производная по времени). Далее будем считать $q^1(t)$ и $q^2(t)$ лагранжевыми координатами материальной точки, движущейся по поверхности, её радиус-вектор обозначим \mathbf{u}_p , а скорость — \mathbf{v}_p . Скорость и ускорение материальной точки, очевидно, определяются формулами

$$\mathbf{v}_p \equiv \dot{\mathbf{u}}_p = \mathbf{r}_\alpha \dot{q}^\alpha + \partial_t \mathbf{r}(q^1, q^2, t), \quad \mathbf{r}_\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r} \quad (1.285)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_p = \partial_\beta \mathbf{r}_\alpha \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \mathbf{r}_\alpha \ddot{q}^\alpha + \partial_t \mathbf{r}_\alpha \dot{q}^\alpha + \partial_t^2 \mathbf{r}(q^1, q^2, t). \quad (1.286)$$

Здесь ∂_1, ∂_2 — производные по q^1 и q^2 соответственно; в этом разделе подразумевается, что по дважды повторяющимся разновысоким индексам, обозначенным греческими буквами, производится суммирование от 1 до 2 (правило суммирования Эйнштейна). Векторы \mathbf{r}_α лежат в касательной плоскости, единичный вектор нормали \mathbf{n} к поверхности выражается через них по формуле

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (1.287)$$

Считая, что к материальной точке приложены силы нормальной реакции $N\mathbf{n}$ и трения \mathbf{R} (сила трения лежит в касательной плоскости, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = 0$), а также заданная сила \mathbf{Q} , запишем второй закон Ньютона:

$$m\ddot{\mathbf{u}}_p = N\mathbf{n} + \mathbf{R} + \mathbf{Q}. \quad (1.288)$$

Скалярно умножая обе части этого равенства на вектор нормали, получим

$$N = \mathbf{n} \cdot (m\ddot{\mathbf{u}}_p - \mathbf{Q})$$

Величина $\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_p$ может быть найдена из (1.286), причём она не зависит от обобщённых ускорений \ddot{q}_α , так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\alpha = 0$. Более практичная формула получается, если скалярно умножить (1.285) на \mathbf{n} и затем продифференцировать по времени:

$$\mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{u}}_p - \partial_t \mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_p = \mathbf{n} \cdot \partial_t^2 \mathbf{r} - \mathbf{v}_r \cdot \dot{\mathbf{n}},$$

где $\mathbf{v}_r \equiv \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s$ — скорость материальной точки относительно поверхности. В итоге получим следующее выражение нормальной реакции:

$$N = \mathbf{n} \cdot (m\partial_t^2 \mathbf{r} - \mathbf{Q}) - m\mathbf{v}_r \cdot \dot{\mathbf{n}}. \quad (1.289)$$

Определим теперь силу трения \mathbf{R} . Она зависит от нормальной реакции, а также относительной скорости \mathbf{v}_r . Вектор относительной скорости представим в виде

$$\mathbf{v}_r = v_r \boldsymbol{\tau}, \quad v_r \equiv |\mathbf{v}_r| \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{\tau}| = 1, \quad (1.290)$$

что возможно в случае, если $\mathbf{v}_r \neq 0$.

Кулоново трение. Для систем с сухим трением характерно «залипание», то есть нулевая относительная скорость. Будем различать случаи *скольжения*, $v_r > 0$, и *залипания*, $v_r = 0$. При скольжении примем, что сила трения направлена противоположно вектору $\boldsymbol{\tau}$, а её величина пропорциональна нормальной реакции и коэффициенту трения f :

$$\mathbf{R} = -fN\boldsymbol{\tau}. \quad (1.291)$$

Коэффициент трения обычно считается постоянным, хотя допускается считать его зависящим от относительной скорости v_r и даже от нормальной реакции N . Кроме того, сила трения не обязательно должна быть направлена параллельно $\boldsymbol{\tau}$, иногда рассматривают анизотропию, и коэффициент трения становится тензором второго ранга в касательной плоскости, так что в наиболее общем виде сила трения определяется так:

$$\mathbf{R} = -\underline{\mathbf{f}} \cdot N\boldsymbol{\tau}, \quad \underline{\mathbf{f}} = f^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta = \underline{\mathbf{f}}^T, \quad f_{\alpha\beta}(v_r, N). \quad (1.292)$$

В этом разделе, однако, ограничимся соотношением (1.291) и будем считать, что f не зависит от N .

При залипании фактически добавляются ещё две связи, так как координаты q^α в этом состоянии остаются постоянными до тех пор, пока не произойдёт переход к скольжению. Поэтому при залипании касательная сила определяется из соотношения $\dot{\mathbf{v}}_p = \dot{\mathbf{v}}_s$: из (1.288) получим силу трения покоя \mathbf{R}_* :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_* = (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot (m\dot{\mathbf{v}}_s - \mathbf{Q}). \quad (1.293)$$

Переход от залипания к скольжению происходит, когда величина силы трения покоя достигает критического значения: $\mathbf{R}_* = f_*N$, где $f_* \geq f$ — коэффициент трения покоя. Обратный переход — от скольжения к залипанию — происходит, когда относительная скорость v_r падает до нуля. Однако при решении системы ОДУ численным методом получить нулевую скорость практически невозможно, поэтому считают, что переход к залипанию происходит при условии $v_r < v_{r*}$, где $v_{r*} > 0$ — некоторое пороговое значение относительной скорости; оно должно быть согласовано с шагом интегрирования.

Рассмотренная модель контактного взаимодействия использовалась для первой и второй моделей цепи (п. 1.5.1.1) в сочетании с моделью жёстких валов с шайбами (п. 1.5.2.1). Уточним процедуру вычисления нормальных и касательных сил в этом случае. Пусть, согласно обозначениям п. 1.5.2.1, пины с номерами $p \in S$ (S -пины) скользят по шайбе, а пины с номерами $p \in K$ (K -пины)

находятся в состоянии залипания; остальные пины не находятся в контакте с шайбой.

Для первой модели цепи вычисления проще: при скольжении пина по поверхности шайбы отсутствует кинематическая связь, так как инерция пина считается сосредоточенной в его центре массой. Чтобы найти нормальную реакцию, достаточно рассмотреть равновесие (безынерционного) конца p -го пина $x_3 > 0$. Проекция действующих сил на нормаль к поверхности шайбы равна (см. 1.71)

$$0 = \mathbf{n}_p \cdot (\mathbf{Q}_p + N_p \mathbf{n}_p + \mathbf{R}_p).$$

(здесь и далее в этом разделе нормальная реакция, сила трения, сила, приложенная (со стороны цепи) к концу пина и вектор нормали получают нижний индекс, идентифицирующий пин: N_p , \mathbf{R}_p , \mathbf{Q}_p , \mathbf{n}_p вместо N , \mathbf{R} , \mathbf{Q} , \mathbf{n} ; индекс p получают и другие величины: $\mathbf{v}_{s,p}$, $\mathbf{v}_{r,p}$, $v_{r,p}$, $\boldsymbol{\tau}_p$, m_p , вместо \mathbf{v}_s , \mathbf{v}_r , v_r , $\boldsymbol{\tau}$, m). Поскольку сила трения лежит в касательной плоскости, находим отсюда $N = -\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{Q}_p$. При залипании пина в первой модели цепи сила трения покоя может быть вычислена по формуле (1.293). При этом надо иметь в виду, что инерция K -пинов добавляется к инерции шайбы согласно (1.226).

Для второй модели цепи ситуация более соответствует рассмотренному в начале раздела случаю движения материальной точки по поверхности, так как в этой модели масса пина сосредоточена на его концах. Для вычисления сил нормальной реакции N_p по формуле (1.289) требуется знание ускорений точек контактной поверхности шайбы (слагаемое $\partial_t^2 \mathbf{r}$), которые в свою очередь зависят от реакций. Поэтому для нахождения нормальных реакций требуется решить систему линейных алгебраических уравнений. Кроме реакций, в неё входят обобщённые ускорения шайбы \ddot{z} , $\ddot{\varphi}$. Найдём ускорение точки шайбы с радиус-вектором \mathbf{r}_p . Продифференцировав второе из соотношений (1.225), в котором $\mathbf{r}^{pul} \equiv \mathbf{v}_{s,p}$, получим

$$\dot{\mathbf{v}}_s = \mathbf{k}\ddot{z} + \mathbf{k} \times \mathbf{x}_p \ddot{\varphi} + \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{s,p} \dot{\varphi}, \quad \mathbf{x}_p \equiv (\mathbf{u}_p - \mathbf{r}^{shaft,\perp}). \quad (1.294)$$

Отметим, что, поскольку контактная поверхность шайбы является поверхностью вращения, вектор \mathbf{x}_p является линейной комбинацией \mathbf{n}_p и \mathbf{k} (напомним, что $\mathbf{r}^{shaft,\perp}$ — радиус-вектор некоторой точки оси вала). Поэтому $\mathbf{x}_p \times \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k} = 0$.

Рассмотрим баланс сил и моментов для шайбы. Со стороны p -го пина на неё действуют сила $-(N_p \mathbf{n}_p + \mathbf{R}_p)$ и момент $-\mathbf{x}_p \times (N_p \mathbf{n}_p + \mathbf{R}_p)$. Кроме того, приложены сжимающая сила P и крутящий момент $M/2$ (так как на валу две шайбы), см. (1.229). Таким образом, для осевой силы крутящего момента имеем следующие уравнения баланса:

$$m\ddot{z} = -\mathbf{k} \cdot \sum_{p \in S \cup K} (N_p \mathbf{n}_p + \mathbf{R}_p) + P, \quad \frac{J}{2}\ddot{\varphi} = -\mathbf{k} \cdot \sum_{p \in S \cup K} \mathbf{x}_p \times (N_p \mathbf{n}_p + \mathbf{R}_p) + \frac{M}{2} \quad (1.295)$$

Подставив в них выражения для силы трения и добавив выражения для сил нормальной реакции (1.289), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно N_p , \ddot{z} , $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{aligned} a_z \ddot{z} + \sum_{p \in S \cup K} a_p N_p &= a, \\ b_\varphi \ddot{\varphi} + \sum_{p \in S \cup K} b_p N_p &= b, \\ c_p \ddot{z} + N_p &= d_p, \quad p \in S \cup K. \end{aligned} \quad (1.296)$$

Коэффициенты определяются следующим образом.

$$\begin{aligned} a_z &= m + \sum_{p \in K} m_p \left[1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_p)^2 \right], \quad b_\varphi = \frac{J}{2} + \sum_{p \in K} m_p |\mathbf{x}_p|^2, \\ a_p &= \begin{cases} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n}_p - f \boldsymbol{\tau}_p), & p \in S, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_p, & p \in K, \end{cases} \quad b_p = \begin{cases} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_p \times (\mathbf{n}_p - f \boldsymbol{\tau}_p)], & p \in S, \\ \mathbf{k} \cdot [\mathbf{x}_p \times \mathbf{n}_p], & p \in K, \end{cases} \\ \mathbf{F}_p &\equiv (m_p \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{s,p} \dot{\varphi} - \mathbf{Q}_p), \quad F_{p,n} \equiv \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{F}_p, \quad \mathbf{F}_{p,\perp} \equiv \mathbf{F}_p - \mathbf{n}_p F_{p,n}, \\ a &= -\mathbf{k} \cdot \sum_{p \in K} \mathbf{F}_{p,\perp} + P, \quad b = -\mathbf{k} \cdot \sum_{p \in K} \mathbf{x}_p \times \mathbf{F}_{p,\perp} + \frac{M}{2}, \\ c_p &= - \sum_{p \in S \cup K} m_p \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_p, \quad d_p = F_{p,n} - m_p \mathbf{v}_{r,p} \cdot \dot{\mathbf{n}}_p. \end{aligned} \quad (1.297)$$

Решая систему уравнений (1.296), можно найти нормальные реакции N_p и обобщённые ускорения шайбы \ddot{z} , $\ddot{\varphi}$; затем производится проверка перехода в состояние отсутствия контакта (это происходит, если $N_p < 0$); наконец, вычисляются

силы трения \mathbf{R}_p . Для S -пинов N_p и \mathbf{R}_p участвуют в формировании обобщённых сил — см. (1.88); для K -пинов силы \mathbf{R}_p используются для проверки перехода в состояние скольжения.

Регуляризованное трение. При расчётах динамики систем с сухим трением обнаруживаются трудности: необходимо отслеживать переключения каждой контактной пары между состояниями нет контакта — скольжение — залипание; меняется число степеней свободы; для вычисления сил требуется решать систему линейных уравнений (1.296). Наконец, на практике иногда наблюдаются «зацикленные» последовательности переключений скольжение — залипание. Эти многократные переключения происходят в одной или двух контактных парах практически в один и тот же момент времени, не позволяя продолжать расчёт; приходится применять некоторую искусственную тактику игнорирования таких переключений. Известно также [67], что в системах с сухим трением возможны парадоксы Пенлеве, когда решение не существует или неединственно. В связи с этими трудностями использовались другие законы трения, в которых залипание не происходит. Их можно рассматривать как результат некоторой «регуляризации» кулонова трения. Предлагаемый здесь вариант состоит в том, что коэффициент трения f — функция от относительной скорости v_r , ведущая себя в окрестности нуля как линейная, а при больших относительных скоростях — как константа. Например, возможны варианты

$$f(v_r) = f_0 \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi v_r}{2v_0}, \quad f(v_r) = \begin{cases} \frac{f_0}{v_0} v_r, & v_r < v_0 \\ f_0, & v_r \geq v_0. \end{cases} \quad (1.298)$$

В обоих случаях значения $f(v_r)$ близки к $f_0 v_r / v_0$ при $v_r \ll v_0$. и к f_0 при $v_r \gg v_0$ (рис. 1.51). Это означает, что при малых относительных скоростях трение вязкое, и залипания, как при сухом трении, не происходит. Таким образом исчезают трудности, связанные с закливанием переключений скольжение — залипание, и с необходимостью вычисления сил трения покоя (для отслеживания перехода залипание — скольжение). Во второй модели цепи, однако, остаётся

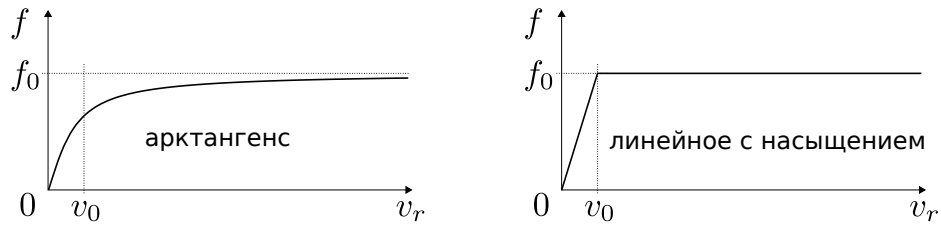


Рис. 1.51. Регуляризованное трение

ся необходимым решение системы линейных алгебраических уравнений (1.296) для нахождения нормальных реакций. Модели контактного взаимодействия, лишённые этого недостатка, рассмотрены в пп. 1.5.3.3, 1.5.3.4.

1.5.3.2. Ударное взаимодействие пинов с шайбами

В этом разделе рассматриваются вторая модель цепи (п. 1.5.1.1) и модель жёстких валов с шайбами (п. 1.5.2.1); закон трения в силах контактного взаимодействия считается кулоновым (с. 159). Во второй модели цепи инерция сосредоточена на концах пинов. При контакте с шайбой конец пина движется по её поверхности, а при отсутствии контакта его движение произвольно. Как уже было указано в п. 1.5.3.1, переключения нет контакта — скольжение (или нет контакта — залипание) и обратно меняют число степеней свободы в системе, если речь идёт о второй модели цепи. При переключении нет контакта — скольжение (или нет контакта — залипание) происходит *удар* пина о шайбу, потому что скорости должны удовлетворять связи вида $u_{p,z} = f(\mathbf{u}_p^\perp, z)$ (здесь $u_{p,z}$ — осевое положение пина, \mathbf{u}_p^\perp — его положение в плоскости Ox_1x_2 , z — осевое положение шайбы) сразу после соприкосновения пина и шайбы. Это означает, что в момент соприкосновения конца пина с шайбой относительная скорость меняется на конечную величину. При соприкосновении происходит обмен импульсами: p -тый пин получает импульс \mathbf{P}_p , а шайба — импульс $-\mathbf{P}_p$. Для вычисления \mathbf{P}_p недостаточно законов сохранения суммарных импульса и момента импульса пина и шайбы в момент удара, требуются дополнительные определяющие соотношения (например, удар может быть абсолютно упругим, абсолютно неупругим или

каким-нибудь ещё).

Пусть \mathbf{n}_p — единичный вектор нормали к поверхности шайбы в точке контакта (то есть на конце оси пина в момент удара). Представим импульс \mathbf{P}_p в виде

$$\mathbf{P}_p = P_p^n \mathbf{n}_p + \mathbf{P}_p^\perp, \quad \mathbf{P}_p^\perp \equiv \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp \cdot \mathbf{P}_p, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp \equiv (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{n}_p \mathbf{n}_p) \quad (1.299)$$

В рамках предлагаемой модели ударное взаимодействие предполагается абсолютно неупругим по отношению к нормальной компоненте P_p^n и учитывает трение в касательной плоскости. В отсутствие трения касательная составляющая импульса, \mathbf{P}_p^\perp , равна нулю. Примем определяющее соотношение для \mathbf{P}_p^\perp , согласующееся с описанием сил кулонова трения, когда при проскальзывании для силы трения \mathbf{R}_p имеет место (1.291), а при залипании $|\mathbf{R}_p| \leq N_p$.

Чтобы различать значения величин, меняющихся при ударе скачком, будем использовать верхний индекс — для значений непосредственно перед ударом и верхний индекс + для значений непосредственно после удара: например, скорости шайбы и конца пина в точке соприкосновения до удара — \mathbf{v}_p^- и \mathbf{s}_s^- соответственно, после удара — \mathbf{v}_p^+ и \mathbf{s}_s^+ . Верхний индекс \pm будет использован в соотношениях, имеющих место как до, так и после удара.

Будем считать, что возможные состояния контактной пары после удара — либо скольжение, либо залипание. Определим касательную составляющую импульса следующим образом:

$$\mathbf{P}_p^\perp = -f P_p^n \boldsymbol{\tau}_p, \quad \boldsymbol{\tau}_p \equiv \underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p \cdot \boldsymbol{\tau}_p^-, \quad \boldsymbol{\tau}_p^- \equiv \frac{\underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp \cdot \mathbf{v}_r^-}{\left| \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp \cdot \mathbf{v}_r^- \right|}, \quad \mathbf{v}_r^- \equiv \mathbf{v}_p^- - \mathbf{v}_s^-. \quad (1.300)$$

Тензор $\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p$ лежит в касательной плоскости к поверхности шайбы в точке контакта, то есть $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p = \underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp = \underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p$. Кроме того, если после удара пин скользит по шайбе, принимается, что $\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp$, а если после удара происходит залипание, то $\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p$ — симметричный положительно полуопределённый тензор, и его собственные числа не превышают 1. Свойства $\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p$ гарантируют, что в случае перехода к скольжению после удара $\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}_p^-$, а в случае залипания выполняются

неравенства

$$|\boldsymbol{\tau}_p| \leq 1, \quad \boldsymbol{\tau}_p \cdot \boldsymbol{\tau}_p^- \geq 0. \quad (1.301)$$

Причина, обуславливающая указанное определение \mathbf{P}_p^\perp , в его аналогии с силой кулонова трения. В случае скольжения импульс \mathbf{P}_p^\perp аналогичен силе трения скольжения и направлен противоположно вектору относительной скорости до удара, $\boldsymbol{\tau}_p^-$. В случае залипания \mathbf{P}_p^\perp аналогичен силе трения покоя и поэтому не должен превышать трение скольжения — первое из неравенств (1.301). Второе неравенство следует из того, что работа силы трения должна быть отрицательной.

Рассмотрим связь импульсов и моментов импульсов (относительно фиксированной точки $\mathbf{r}^{shaft,\perp}$ на оси вала) с обобщёнными скоростями в момент удара. Согласно (1.67), (1.69), импульс \mathbf{P}_p^\pm и момент импульса \mathbf{L}_p^\pm пина равны

$$\mathbf{P}_p^\pm = \underline{\underline{\mathbf{m}}}_p \cdot \mathbf{v}_p^\pm, \quad \mathbf{L}_p^\pm = \boldsymbol{\rho}_p \times \mathbf{P}_p^\pm, \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}}_p \equiv m_p \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \frac{2}{3} \mathbf{k} \mathbf{k} \right), \quad \boldsymbol{\rho}_p \equiv \mathbf{u}_p - \mathbf{r}^{shaft,\perp}. \quad (1.302)$$

Для шайбы, согласно (1.222), имеем импульс \mathbf{P}_s^\pm и момент импульса \mathbf{L}_s^\pm в следующем виде:

$$\mathbf{P}_s^\pm = m \dot{z} \mathbf{k}, \quad \mathbf{L}_s^\pm = J \dot{\phi} \mathbf{k}. \quad (1.303)$$

Поскольку движение шайбы подчинено связям — она может лишь поступательно перемещаться вдоль \mathbf{k} и вращаться вокруг \mathbf{k} , — в момент удара должны сохраняться лишь проекции векторов импульса и момента импульса на \mathbf{k} :

$$(\mathbf{P}_p^+ + \mathbf{P}_s^+) \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{P}_p^- + \mathbf{P}_s^-) \cdot \mathbf{k}, \quad (\mathbf{L}_p^+ + \mathbf{L}_s^+) \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{L}_p^- + \mathbf{L}_s^-) \cdot \mathbf{k}.$$

Исходя из этих законов сохранения, соотношения $\mathbf{P}_p^+ - \mathbf{P}_p^- = \mathbf{P}_p$ и формул (1.302), (1.303), (1.225), можно вычислить скорости после удара:

$$\mathbf{v}_p^+ = \mathbf{v}_p^- + \underline{\underline{\mathbf{m}}}_p^{-1} \cdot \mathbf{P}_p, \quad \mathbf{v}_s^+ = \mathbf{v}_s^- - [m^{-1} \mathbf{k} \mathbf{k} + J^{-1} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_p) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_p)] \cdot \mathbf{P}_p;$$

тогда относительная скорость после удара

$$\mathbf{v}_r^+ = \mathbf{v}_r^- + \underline{\underline{\mathbf{A}}}_p \cdot \mathbf{P}_p, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_p \equiv \underline{\underline{\mathbf{m}}}_p^{-1} + m^{-1} \mathbf{k} \mathbf{k} + J^{-1} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_p) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_p). \quad (1.304)$$

Отметим, что $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_p$ — симметричный положительно определённый тензор. Поскольку после удара точка находится на поверхности шайбы, должно иметь место соотношение $\mathbf{v}_r^+ \cdot \mathbf{n}_p = 0$. С учётом (1.299) и определяющего соотношения (1.300), можно отсюда выразить нормальную составляющую импульса:

$$P_p^n = \frac{-\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{v}_r^-}{\mathbf{n}_p \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}_p \cdot (\mathbf{n}_p - f \underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p \cdot \boldsymbol{\tau}_p^-)}. \quad (1.305)$$

Если теперь считать, что после удара пин скользит по шайбе, то $\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}}_p = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp$, и искомый импульс \mathbf{P}_p полностью найден, так как $\mathbf{P}_p = P_p^n (\mathbf{n}_p - f \boldsymbol{\tau}_p^-)$. Однако может оказаться, что после удара пин находится в состоянии залипания. В последнем случае, по определению залипания, $\mathbf{v}_r^+ = 0$, и из (1.304) следует, что $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}_p^{stick} \equiv -\underline{\underline{\mathbf{A}}}_p^{-1} \cdot \mathbf{v}_r^-$ — импульс полностью найден и в этом случае. Остаётся определить, какое из двух состояний — скольжение или залипание — в действительности реализуется после удара. Мы считаем, что залипание произойдёт, если только это возможно, то есть если не нарушены неравенства (1.301). В противном случае будет иметь место скольжение. Для проверки указанных неравенств производятся следующие вычисления:

$$P_p^{n,stick} = \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{P}_p^{stick}, \quad P_p^{\perp,stick} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_p^\perp \cdot \mathbf{P}_p^{stick}, \quad \boldsymbol{\tau}_p^{stick} = -\frac{\mathbf{P}_p^{\perp,stick}}{f P_p^{n,stick}};$$

далее проверяются неравенства (1.301) для $\boldsymbol{\tau}_p = \boldsymbol{\tau}_p^{stick}$. Если оба они выполнены, тогда считается, что после удара происходит залипание, и поэтому $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}_p^{stick}$. Если хотя бы одно неравенство нарушено, то считается, что после удара пин скользит по шайбе, импульс \mathbf{P}_p вычисляется по формулам (1.305) и (1.300).

Отметим в заключение, что модель ударного взаимодействия без учёта возможности залипания пина (то есть если принять, что после удара возможно лишь скольжение пина по шайбе) имеет серьёзный изъян. Чтобы его проиллюстрировать, рассмотрим вместо шайбы неподвижную плоскость $x_3 = 0$, а вместо пина — материальную точку массы m_p . Будем также считать, что точка движется в плоскости Ox_1x_3 :

$$\mathbf{v}_p^- = \mathbf{v}_r^- = v(-\mathbf{k} \cos \vartheta + \mathbf{i} \sin \vartheta),$$

где v — модуль скорости, а ϑ — угол падения ($0 < \vartheta < \pi/2$). Найдя импульс в предположении, что после удара точка будет скользить по плоскости и вычислив скорость точки после удара, получим

$$\mathbf{v}_p^+ = v (\sin \vartheta - f \cos \vartheta) \mathbf{i}.$$

Если угол падения ϑ больше, чем угол самоторможения $\vartheta_* = \arctg f$, точка будет скользить по плоскости с положительной скоростью в направлении \mathbf{i} — это ожидаемый естественный результат, так как до удара проекция скорости на \mathbf{i} положительна. Однако при $\vartheta < \vartheta_*$ оказывается, что после удара она движется с отрицательной скоростью в направлении \mathbf{i} , что представляется нефизичным. Можно сказать, что точка должна была остановиться, но, поскольку в модели это не было предусмотрено, подействовавший на неё касательный импульс оказался слишком сильным. Таким образом, учёт возможности залипания после удара важен.

1.5.3.3. Контактное взаимодействие по Герцу

Упругое взаимодействие точки с поверхностью. Рассмотренные ранее модели контактного взаимодействия пинов с шайбами довольно сложны в реализации, потому что при изменении состояния контактной пары меняется число степеней свободы в системе (см. п. 1.5.2.1), а также требуется решать систему линейных алгебраических уравнений (1.296) для нахождения нормальных реакций. Значительное упрощение дают модели контактного взаимодействия, не стесняющие движение системы какими-либо связями. В таких моделях вводится рассмотрение *податливости* взаимодействующих контактных поверхностей. Вместе с регуляризованным законом трения (см. с. 163) это позволяет отказаться от связей.

Поскольку контактные поверхности пина и шайбы двояковыпуклые, контактное взаимодействие локализовано в окрестности некоторой точки и поэтому может быть описано контактной теорией Герца [68, гл. 4], [69, гл. 13]. Согласно

этой теории, нормальная сила N при локальном контактном взаимодействии связана с величиной контактной деформации Δ соотношением

$$N = c\Delta^{3/2}, \quad (1.306)$$

где c — *контактная жёсткость*, величина которой зависит от свойств материалов контактирующих тел, а также формы и взаимной ориентации контактных поверхностей. В качестве величины деформации принимают величину сближения между двумя точками контактирующих тел, выбранными произвольно, но достаточно далеко от зоны контакта (считается, что при контактном взаимодействии деформации тел за пределами небольшого участка — зоны контакта — пренебрежимо малы и, кроме того, одно из тел движется относительно другого поступательно).

Поскольку для глобальной динамики трансмиссии деформированное состояние, обусловленное контактным взаимодействием, не представляет интереса, в рамках предлагаемой здесь модели считается, что контактные поверхности остаются жёсткими, однако возможно взаимопроникновение контактирующих тел. Этот подход позволяет определить контактную деформацию Δ как «глубину взаимопроникновения» и далее вычислять нормальную силу по формуле (1.306). В следующем разделе (п. 1.5.3.4) эта идея реализована в полной мере, а в этом мы будем пока считать, что точка контакта находится на конце оси пина и, таким образом, контактная деформация определяется глубиной проникновения этой точки в тело шайбы (рис. 1.52). Определим сначала глубину проникновения как расстояние между точкой \mathbf{R}^{pin} на конце оси пина и её проекцией \mathbf{R}^{surf} на контактную поверхность шайбы вдоль направления нормали \mathbf{n} . Говоря о направлении нормали, следует указать конкретную точку поверхности; эта точка должна быть выбрана таким образом, чтобы разность $\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf}$ была параллельна нормали \mathbf{n} :

$$(\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf}) \times \mathbf{n} = 0. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf} = -\mathbf{n}\Delta. \quad (1.307)$$

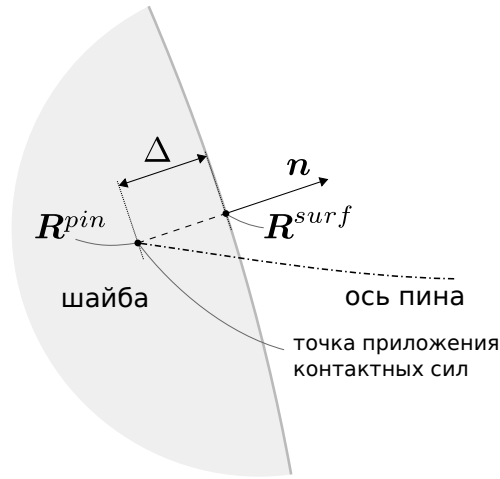


Рис. 1.52. Упругий контакт пина с шайбой, упрощённая модель

Данное условие несколько затрудняет поиск точки \mathbf{R}^{surf} ; мы от него вскоре откажемся в пользу более простого и в то же время не наносящего сколько-нибудь заметный ущерб корректности модели.

Силы контактного взаимодействия, как и прежде, считаются сосредоточенными в некоторой точке. В рамках модели, рассматриваемой в этом разделе, эта точка находится на конце пина.

Итак, нормальная сила упругого контактного взаимодействия, примененная к пину, имеет вид $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, где скаляр N определяется соотношением (1.306), а \mathbf{n} — нормаль к контактной поверхности шайбы в точке \mathbf{R}^{surf} , удовлетворяющей условию (1.307). Возможны два подхода к вычислению обобщённых сил, обусловленных силой \mathbf{N} . Один из них основан на вычислении работы этой силы на виртуальных перемещениях, второй — с введением потенциальной энергии (упругие силы должны иметь потенциал). Рассмотрим эти два подхода подробнее.

Вычисляя работу нормальной силы, заметим, что на шайбу действует сила $-\mathbf{N}$, примененная в точке $\mathbf{R}^{pul} = \mathbf{R}^{pin}$. Работа нормальной силы на виртуальных перемещениях равна

$$\delta W^N = \mathbf{N} \cdot (\delta \mathbf{R}^{pin} - \delta \mathbf{R}^{pul}). \quad (1.308)$$

Хотя положения точек \mathbf{R}^{pin} и \mathbf{R}^{pul} совпадают, их виртуальные перемещения

различны: первая связана с пином, вторая — с шайбой. Виртуальные перемещения последней вычисляются по формулам кинематики твёрдого тела, поскольку шайба считается абсолютно твёрдым телом во всех рассматриваемых моделях (пп. 1.5.2.1, 1.5.2.3). Считая, что \mathbf{R}^c — положение центра масс шайбы, а $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ — её поворот, и $\delta\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta\mathbf{o} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}}$, будем иметь, в частности

$$\delta\mathbf{R}^{pul} = \delta\mathbf{R}^c + \delta\mathbf{o} \times (\mathbf{R}^{pul} - \mathbf{R}^c), \quad \delta\mathbf{R}^{surf} = \delta\mathbf{R}^c + \delta\mathbf{o} \times (\mathbf{R}^{surf} - \mathbf{R}^c); \quad (1.309)$$

отсюда с учётом (1.307) получается

$$\delta\mathbf{R}^{pul} = \delta\mathbf{R}^{surf} - \Delta\delta\mathbf{o} \times \mathbf{n}. \quad (1.310)$$

Теперь работу силы \mathbf{N} можно записать так:

$$\delta W^N = N\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{R}^{pin} - \delta\mathbf{R}^{surf} + \delta\mathbf{o} \times \mathbf{n}\Delta).$$

Смешанное произведение $\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{o} \times \mathbf{n})$ равно нулю и окончательно находим

$$\begin{aligned} \delta W^N &= N\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{R}^{pin} - \delta\mathbf{R}^{surf}) = \\ &= N\mathbf{n} \cdot \delta[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf})] - N\delta\mathbf{n} \cdot (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf}) = -N\delta\Delta. \end{aligned} \quad (1.311)$$

Слагаемое с $\delta\mathbf{n}$ исчезло с учётом (1.307) и того обстоятельства, что

$$\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

Согласно (1.311), обобщённая сила Q_i^N , обусловленная нормальной силой \mathbf{N} , для обобщённой координаты q_i вычисляется по формуле

$$Q_i^N = -N \frac{\partial \Delta}{\partial q_i} \quad (1.312)$$

Тот же результат вместе с формулой (1.306) можно получить, рассматривая потенциальную энергию упругого взаимодействия

$$\Pi^N = c \frac{2}{5} \Delta^{5/2} \quad (1.313)$$

и приняв контактную жёсткость c постоянной.

Упрощённое определение контактной деформации. Для отыскания положения точки \mathbf{R}^{surf} требуется решить нелинейное уравнение (1.307). Практически в этом нет необходимости: ввиду малости контактной деформации \mathbf{R}^{surf} можно определить как проекцию \mathbf{R}^{pin} на поверхность шайбы вдоль орта \mathbf{k} фиксированной оси Ox_3 (рис. 1.53). Этот подход оправдан тем, что угол между \mathbf{n} и

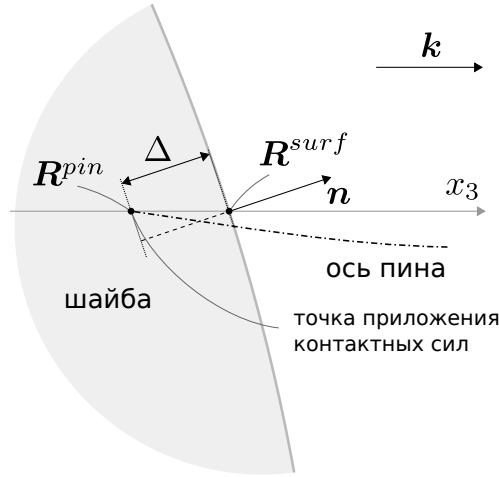


Рис. 1.53. К упрощённому определению контактной деформации

\mathbf{k} невелик и составляет около 10° . Тогда по-прежнему $\Delta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{R}^{surf} - \mathbf{R}^{pin})$, но (1.307) уже не имеет места, оно заменяется соотношением

$$\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf} = -\mathbf{k}\alpha\Delta, \quad \alpha \equiv (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^{-1}. \quad (1.314)$$

Вместо (1.310) получится

$$\delta\mathbf{R}^{pul} = \delta\mathbf{R}^{surf} - \alpha\Delta\delta\mathbf{o} \times \mathbf{k}.$$

Далее, работа нормальной силы такова:

$$\begin{aligned} \delta W^N &= N\mathbf{n} \cdot (\delta\mathbf{R}^{pin} - \delta\mathbf{R}^{surf} + \alpha\Delta\delta\mathbf{o} \times \mathbf{k}) = \\ &= -N\delta\Delta - N\delta\mathbf{n} \cdot (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{surf}) + N\mathbf{n} \cdot \alpha\Delta\delta\mathbf{o} \times \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых взаимно уничтожаются, если первое из них записать с учётом (1.314), а также того, что в твёрдом теле (шайбе) $\delta\mathbf{n} = \delta\mathbf{o} \times \mathbf{n}$. Таким образом, и в этом случае имеем $\delta W^N = -N\delta\Delta$. Очевидно, потенциальная энергия (1.313) позволяет получить тот же результат быстрее.

Вычисление контактной деформации и обобщённых сил. Будем рассматривать модель шайбы, допускающую её произвольное перемещение и поворот $\underline{\underline{P}}$ вида (1.254) — см. п. 1.5.2.3. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{shaft,\perp} + \mathbf{r}^\perp + z\mathbf{k}$ — отсчётное положение произвольной точки шайбы (не обязательно на поверхности), \mathbf{R} — её актуальное положение; $\mathbf{r}^c = \mathbf{r}^{shaft,\perp} + z^c\mathbf{k}$ и \mathbf{R}^c — соответственно отсчётное и актуальное положения центра масс шайбы. Поскольку шайба является твёрдым телом, актуальное и отсчётное положения связаны соотношением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^c + \underline{\underline{P}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}^c), \quad (1.315)$$

откуда следует

$$\underline{\underline{P}}_\vartheta^T \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^c) = \underline{\underline{P}}_\varphi \cdot (\mathbf{r}^\perp + (z - z^c)\mathbf{k}) = \underline{\underline{P}}_\varphi \cdot \mathbf{r}^\perp + (z - z^c)\mathbf{k}. \quad (1.316)$$

Рассматривая проекции этого векторного соотношения на плоскость Ox_1x_2 и ось Ox_3 и учитывая, что действие поворота на вектор не меняет его длину, получим

$$r \equiv |\mathbf{r}^\perp| = \left| \underline{\underline{P}}_\varphi \cdot \mathbf{r}^\perp \right| = \left| (\underline{\underline{E}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \underline{\underline{P}}_\vartheta^T \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^c) \right|, \quad (1.317)$$

$$z - z^c = \mathbf{k} \cdot \underline{\underline{P}}_\vartheta^T \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}^c) \quad (1.318)$$

В случае $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{surf}$ (точка на контактной поверхности шайбы, являющейся поверхностью вращения) координата z^{surf} в отсчётном положении функционально зависит от радиуса r^{surf} : примем, что

$$z^{surf} - z^c = f(r^{surf}); \quad (1.319)$$

осевое отсчётное положение z^c центра масс шайбы — константа. Вычисляя градиент от $z - f(r)$, найдём нормаль \mathbf{n}^0 к поверхности шайбы в отсчётном положении:

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (z - f(r))}{\left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (z - f(r)) \right|} \Bigg|_{r=r^{surf}} = \frac{\mathbf{k} - f'\mathbf{e}^\perp}{|\mathbf{k} - f'\mathbf{e}^\perp|} \Bigg|_{r=r^{surf}}, \quad \mathbf{e}^\perp \equiv \frac{\mathbf{r}^\perp}{r}; \quad (1.320)$$

Чтобы найти контактную деформацию при заданном положении \mathbf{R}^{pin} , можно использовать (1.314); однако туда входит не вычисленный пока радиус-вектор \mathbf{R}^{surf} . Для его вычисления с достаточной точностью заметим, что радиусы r^{surf} и r^{pin} , определённые по формуле (1.317) при $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{surf}$ и $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{pin}$ соответственно, отличаются на величину $O(\Delta|\boldsymbol{\vartheta}|)$, которой можно пренебречь как величиной второго порядка малости. Действительно,

$$\begin{aligned} r^{surf} &= |(\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\boldsymbol{\vartheta}}^T \cdot (\mathbf{R}^{pin} + \mathbf{k}\alpha\Delta - \mathbf{R}^c)| = \\ &= |[(\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\boldsymbol{\vartheta}}^T \cdot (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^c) + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}\alpha\Delta + O(|\boldsymbol{\vartheta}|^2\Delta)]| = \\ &= r^{pin} + O(\Delta|\boldsymbol{\vartheta}|), \end{aligned}$$

так что можно считать $r^{surf} = r^{pin}$. Далее, из (1.314) с учётом этого, а также (1.319) и (1.318) получим

$$\alpha\Delta = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}^{surf} - \mathbf{R}^{pin}) = f(r^{pin}) + z^c - z^{pin} + O(\Delta|\boldsymbol{\vartheta}| + |\boldsymbol{\vartheta}|^2).$$

Наконец, найдём α :

$$\alpha^{-1} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \underline{\mathbf{P}}_{\varphi} \cdot \mathbf{n}^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}^0 + O(|\boldsymbol{\vartheta}|) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(r^{pin}))^2}} + O(|\boldsymbol{\vartheta}|).$$

Как уже отмечалось на стр. 172, угол между \mathbf{n}^0 и \mathbf{k} составляет около 10° , что соответствует $\alpha \approx 1,015$; для конических шайб это постоянная величина, для тороидальных она слабо зависит от r . Поэтому нет практического смысла в усложнении формулы для контактной деформации Δ наличием множителя α (если только мы не собираемся на основании упрощённой формулы вычислять $\delta\Delta$ для нахождения обобщённых сил) — его можно положить равным единице. Тогда контактная деформация может быть вычислена следующим образом: при заданном положении \mathbf{R}^{pin} точки на конце оси пина вычисляются r^{pin} и z^{pin} по формулам (1.317) и (1.318) соответственно, и далее

$$\Delta = f(r^{pin}) + z^c - z^{pin} \quad (1.321)$$

(опущены слагаемые $O(\Delta|\boldsymbol{\vartheta}| + |\boldsymbol{\vartheta}|^2)$ и считается, что $\alpha = 1$).

Для вычисления обобщённых сил, обусловленных нормальной силой N , будем использовать формулу (1.308). Обобщённые силы для пина таковы:

$$Q_{p,i\beta}^N = N\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.322)$$

Здесь p — номер пина; $\beta = 1$, если пин контактирует с шайбой «дальним» концом, и $\beta = 2$, если «ближним». Таким образом, $Q_{p,i\beta}^N$ соответствует обобщённой координате $u_{p,i\beta}$ цепи (см. стр. 87). Для шайбы (см. п. 1.5.2.3) обобщённой координате u_i (перемещение центра масс вдоль i -той оси) соответствует обобщённая сила

$$Q_{u,i}^N = -N\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.323)$$

Кроме того, как легко усмотреть из (1.309) на шайбу действует момент

$$- (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^c) \times N\mathbf{n}$$

— обобщённым координатам ϑ_1, ϑ_2 соответствуют обобщённые силы

$$Q_{\vartheta,\gamma}^N = [- (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^c) \times N\mathbf{n}] \cdot \mathbf{e}_\gamma, \quad \gamma = 1, 2. \quad (1.324)$$

Отметим, что крутящий момент от нормальной силы отсутствует: если вычислить обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате φ шайбы, она окажется равной нулю. Чтобы показать это, заметим, что, поскольку поворот шайбы $\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{P}}_\vartheta \cdot \underline{\mathbf{P}}_\varphi$, вектор $\delta\mathbf{o}$ в (1.309) равен

$$\delta\mathbf{o} = \delta\vartheta + \underline{\mathbf{P}}_\vartheta \cdot \mathbf{k}\delta\varphi,$$

а векторы $(\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^c)$, \mathbf{n} и $\underline{\mathbf{P}}_\vartheta \cdot \mathbf{k}$ компланарны.

Выбор контактной жёсткости. Контактная жёсткость c в (1.306) зависит от свойств материалов контактирующих тел, формы поверхностей и их взаимной ориентации. Как уже говорилось, она вычисляется по формулам, полученным в рамках контактной теории Герца [68; 69]; здесь эти формулы приведены

без вывода. Пусть k_{11} , k_{12} — главные кривизны одной из контактных поверхностей в точке контакта в отсутствие деформации (например, поверхности пина), k_{21} , k_{22} — другой поверхности (например, поверхности шайбы), причём $k_{11} > 0$, $k_{11} \geq k_{12} \geq 0$ и $k_{21} > 0$, $k_{21} \geq k_{22} \geq 0$. Направим ось z вдоль общей нормали в точке контакта. Указанные кривизны — это кривизны *главных нормальных сечений* поверхностей, — кривых, лежащих в плоскостях, содержащих ось z . Пусть ω — угол между плоскостями главных нормальных сечений с кривизнами k_{11} и k_{22} , $|\omega| \leq \pi/2$ (рис. 1.54). В рамках контактной теории Герца жёсткость

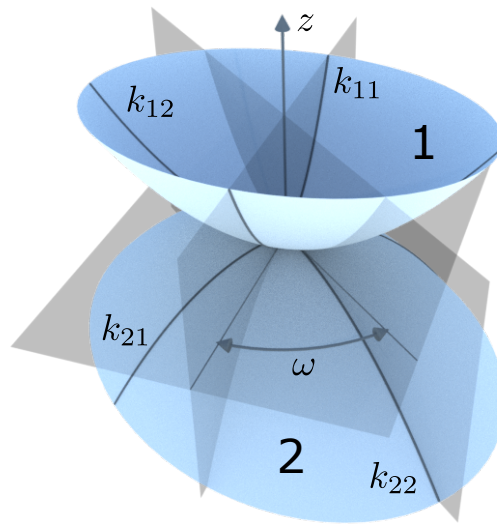


Рис. 1.54. Контакт в общем случае поверхностей двойкой кривизны

c вычисляется следующим образом:

$$c = \left[\left(\frac{1}{2} n_{\Delta} \right)^{3/2} \frac{3}{2} \eta \sqrt{\Sigma k} \right]^{-1}, \quad (1.325)$$

$$\eta \equiv \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad \Sigma k \equiv k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}.$$

Здесь E_1 , ν_1 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона первого тела, E_2 , ν_2 — второго тела (материалы считаются изотропными). Безразмерный коэффициент n_{Δ} зависит от главных кривизн и угла ω ; в аналитическом выражении этой зависимости присутствуют эллиптические функции, аргумент которых — эксцентриситет эллипса, являющегося проекцией площадки контакта на кас-

тельную плоскость. В [69] также дана табличная зависимость n_Δ от параметра

$$\Omega \equiv \frac{\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}}{\Sigma k};$$

её график представлен на рис. 1.55. Отметим, что случай $\Omega = 1$ соответствует

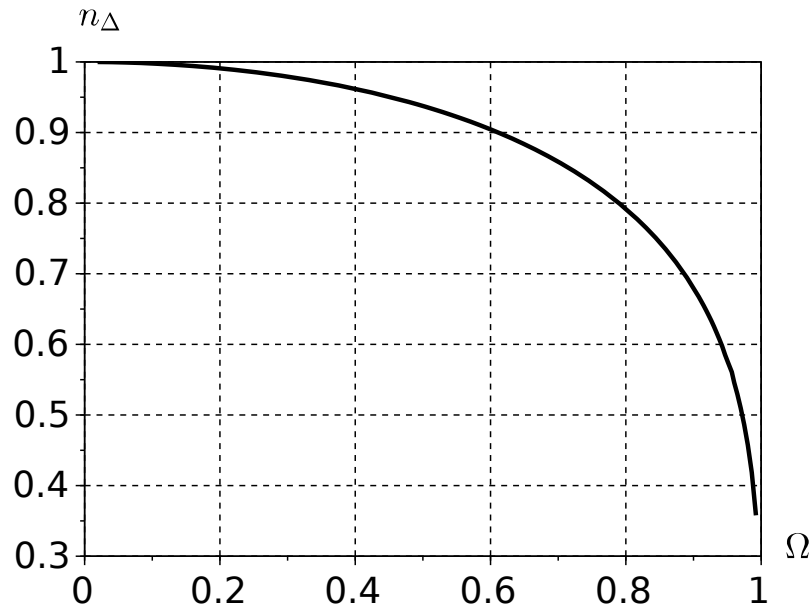


Рис. 1.55. Зависимость n_Δ от параметра Ω

контакту двух цилиндров с параллельными осями. При этом контактная жёсткость становится бесконечной, а вместо точки контакта имеется линия контакта. Такой контакт никогда не реализуется в паре пин — шайба; обычно значение параметра Ω близко к нулю.

Несмотря на то, что контактная жёсткость не остаётся постоянной в процессе движения — хотя бы потому, что изменяется угол ω — её изменения незначительны, и в расчётах значение c считается постоянным, вычисленном при $\omega = 0$ и радиусе контакта при передаточном числе $i_{var} = 1$ (от радиуса контакта зависят главные кривизны шайбы k_{21}, k_{22}).

Кроме контактной жёсткости, в рамках контактной теории Герца доступны другие параметры, характеризующие напряжённо-деформированное состояние при контакте. В первую очередь это большая a и малая b полуоси эллипса — проекции площадки контакта на плоскость, перпендикулярную общей нормали,

а также максимальное контактное давление p_{\max} . Полуоси «эллипса контакта» равны

$$a = n_a X, \quad b = n_b X, \quad X \equiv \sqrt[3]{\frac{3\eta N}{2\Sigma k}}, \quad (1.326)$$

а максимальное давление вычисляется по формуле

$$p_{\max} = \frac{3N}{2ab} = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\Sigma k}{\eta}\right)^2}, \quad n_p \equiv \frac{1}{n_a n_b}. \quad (1.327)$$

Графики зависимости безразмерных коэффициентов n_a , n_b , n_p от параметра Ω представлены на рис. 1.56.

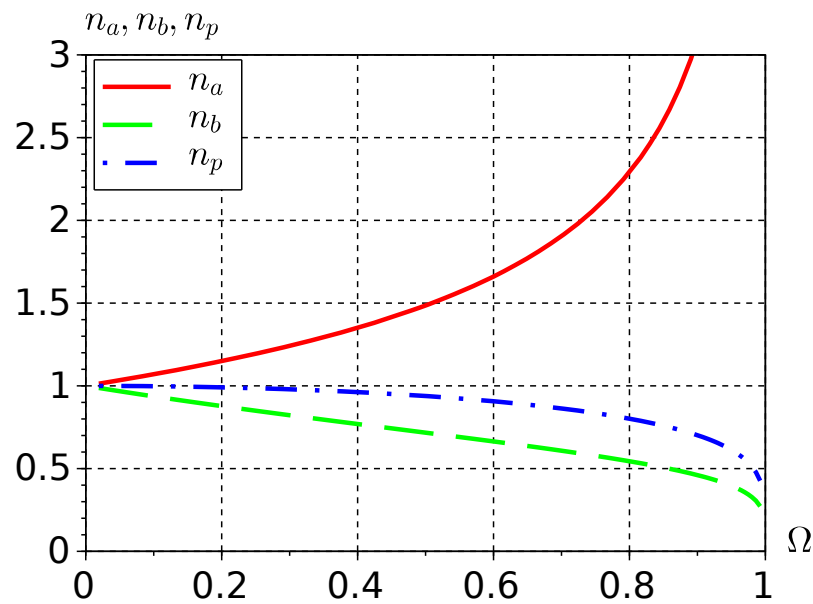


Рис. 1.56. Зависимость n_a , n_b , n_p от параметра Ω

Учёт сил трения. Силы трения (здесь обозначаются \mathbf{F} , а не \mathbf{R} , во избежание путаницы) при контакте пина с шайбой, благодаря которым передаётся крутящий момент, вводятся соотношением (1.291). При этом рассматривается «регуляризованное» трение в том смысле, что коэффициент трения непрерывно зависит от скорости проскальзывания и обращается в нуль при нулевой скорости — см. стр. 163.

$$\mathbf{F} = -f(v_r)N\boldsymbol{\tau}$$

Скорость проскальзывания v_r и вектор её направления $\boldsymbol{\tau}$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &\equiv (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}^{pin} - \mathbf{v}^{pul}), & v_r &= |\mathbf{v}_r|, & \boldsymbol{\tau} &= v_r^{-1} \mathbf{v}_r, \\ \mathbf{v}^{pin} &= \dot{\mathbf{R}}^{pin}, & \mathbf{v}^{pul} &= \dot{\mathbf{R}}^c + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}^{pul} - \mathbf{R}^c), & \mathbf{R}^{pul} &= \mathbf{R}^{pin}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{R}^{pin} — радиус-вектор точки на конце оси пина, \mathbf{R}^c — радиус-вектор центра масс шайбы, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шайбы; последнюю можно вычислять, удерживая в (1.261) слагаемые степеней не выше λ .

Обобщённые силы, обусловленные силой трения при контакте p -го пина с шайбой, вычисляются на основании выражения их работы на виртуальных перемещениях

$$\delta W^F = \mathbf{F} \cdot (\delta \mathbf{R}^{pin} - \delta \mathbf{R}^{pul}), \quad (1.328)$$

аналогичного (1.308). Их вид аналогичен (1.322), (1.323), (1.324), но крутящий момент, действующий на шайбу (Q_φ^F), на этот раз, конечно, есть:

$$\begin{aligned} Q_{p,i\beta}^F &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i, & i &= 1, 2, 3, \\ Q_{u,i}^F &= -\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i, & i &= 1, 2, 3, \\ Q_{\vartheta,\gamma}^F &= [- (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^c) \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{e}_\gamma, & \gamma &= 1, 2, \\ Q_\varphi^F &= [- (\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^c) \times \mathbf{F}] \cdot (\mathbf{k} + \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1.329)$$

1.5.3.4. Уточнённая кинематика контакта

В рамках предложенной в предыдущем разделе модели мы, хотя и руководствовались упругой характеристикой контакта (1.306) в соответствии с теорией Герца, ограничились весьма упрощённым рассмотрением кинематики, предположив по существу, что силы контактного взаимодействия приложены в известной точке — на конце оси пина. Более близкой к реальности была бы модель, в которой положение точки контакта определялось бы взаимным расположением контактных поверхностей пина и шайбы. Такая модель корректно описывает внецентренное сжатие пина и позволяет учесть важный эффект про-

тиводействия перекоосу цепи, упомянутый в п. 1.5.1.3 (см. рис. 1.27). Именно такая модель и предложена в данном разделе.

Определение контактной деформации и точки контакта. В дальнейших построениях геометрия контактных поверхностей задаётся зависимостью $z(\mathbf{x})$, где z — координата вдоль оси Ox_3 , а $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ — вектор в плоскости Ox_1x_2 (рис. 1.57). Точки с радиус-векторами $\mathbf{R} = \mathbf{x} + \mathbf{k}z(x)$ лежат на

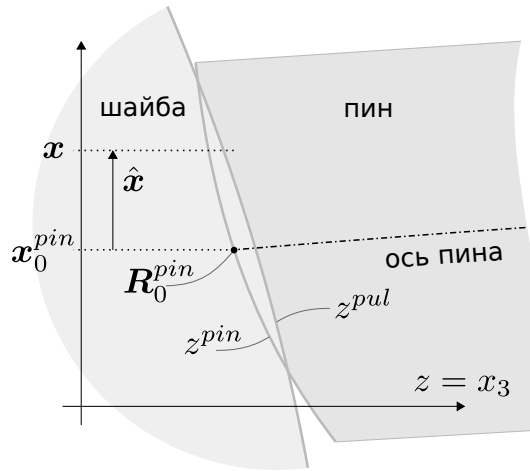


Рис. 1.57. Контактные поверхности пина и шайбы

поверхности; уравнение поверхности можно записать и так:

$$F(\mathbf{R}) \equiv x_3 - z(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} + \mathbf{k}x_3, \quad \mathbf{x} = (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{R} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

(по повторяющимся индексам, обозначенным греческими буквами, производится суммирование от 1 до 2). Отсюда очевидно, что нормаль к поверхности параллельна направлению \mathbf{N} ,

$$\mathbf{N} = \nabla F(\mathbf{R}) = \mathbf{k} - \nabla_\perp z, \quad \nabla = \mathbf{k}\partial_3 + \nabla_\perp, \quad \nabla_\perp = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.330)$$

Положение точки контакта локализовано в небольшой области, ограниченной торцевой контактной поверхностью пина. В этой области допустимо заменить точные зависимости $z(\mathbf{x})$ их квадратичными аппроксимациями. Последние можно получить, разлагая z в ряд Тейлора в окрестности точки \mathbf{x}_0^{pin} —

проекция радиус-вектора \mathbf{R}_0^{pin} точки на конце оси пина на плоскость Ox_1x_2 :

$$\begin{aligned} z^{pul} &= a + \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + O(|\hat{\mathbf{x}}|^3), \quad \mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \underline{\mathbf{a}} = a_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \\ z^{pin} &= b + \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + O(|\hat{\mathbf{x}}|^3), \quad \mathbf{b} = b_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \underline{\mathbf{b}} = b_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \\ \hat{\mathbf{x}} &\equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0^{pin}, \quad \mathbf{x}_0^{pin} \equiv (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{R}^{pin}. \end{aligned} \tag{1.331}$$

Тензоры $\underline{\mathbf{a}}$ и $\underline{\mathbf{b}}$ симметричны, поскольку

$$a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta z^{pul} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{pin}}, \quad b_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta z^{pin} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{pin}}.$$

Характер выпуклости контактных поверхностей таков, что тензор $\underline{\mathbf{a}}$ — отрицательно полуопределённый, а $\underline{\mathbf{b}}$ — положительно полуопределённый, то есть

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{x}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \leq 0, \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{x}} \geq 0.$$

В случае тороидальных шайб $\hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{x}} < 0$ при $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$; торцевые поверхности пинов цилиндрические или двояковыпуклые (в последнем случае $\hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{x}} > 0$ при $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$). Более того, мы всегда будем считать, что $\hat{\mathbf{x}} \cdot (\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}) \cdot \hat{\mathbf{x}} < 0$ при $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$ (например, в случае конических шайб и цилиндрических торцов пинов нулевым кривизнам соответствуют почти перпендикулярные главные оси тензоров $\underline{\mathbf{a}}$ и $\underline{\mathbf{b}}$). В дальнейшем будем для удобства считать, что z^{pin} и z^{pul} — функции от $\hat{\mathbf{x}}$, а не от \mathbf{x} . Члены порядка $|\hat{\mathbf{x}}|^3$ и выше в тейлоровских разложениях (1.331) будем отбрасывать.

Нормируя вектор \mathbf{N} , вычисленный по формуле (1.330), и придавая результату желаемый знак, определим единичные векторы «внешних» нормалей к поверхностям пина и шайбы:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{pin} &= -\frac{\mathbf{N}^{pin}}{|\mathbf{N}^{pin}|}, \quad \mathbf{n}^{pul} = \frac{\mathbf{N}^{pul}}{|\mathbf{N}^{pul}|}, \\ \mathbf{N}^{pin} &= \mathbf{k} - \mathbf{a} - \underline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{N}^{pul} = \mathbf{k} - \mathbf{b} - \underline{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{1.332}$$

Чтобы определить контактную деформацию и точку контакта, рассмотрим вначале случай касания поверхностей в одной точке (характер выпуклости поверхностей и их взаимная ориентация гарантируют возможность касания в

точке, а не по линии). В точке касания нормали к поверхностям параллельны (точнее, $\mathbf{n}^{pin} = -\mathbf{n}^{pul}$), иначе поверхности пересекались бы. Естественно считать точку касания поверхностей точкой контакта. Следующий шаг — определить точку контакта в случае, когда взаимная конфигурация поверхностей близка к уже рассмотренной, но отличается от неё (поверхности либо не имеют общих точек, либо пересекаются — рис. 1.58). Рассмотрим однопараметрическое семейство конфигураций, зависящее от параметра γ : при $\gamma = 0$ имеет место касание, при $\gamma < 0$ поверхности не имеют общих точек, и, наконец, при $\gamma > 0$ они пересекаются. Будем считать $a, \mathbf{a}, \underline{a}, b, \mathbf{b}, \underline{b}$ непрерывными функциями параметра γ . Необходимо предложить некоторое «естественное» определение точки контакта и контактной деформации. Обязательные требования к точке контакта — непрерывная зависимость её положения от γ , совпадение с точкой касания при $\gamma = 0$, к контактной деформации — непрерывная зависимость от γ , равенство нулю при $\gamma = 0$, тот же знак, что и у γ .

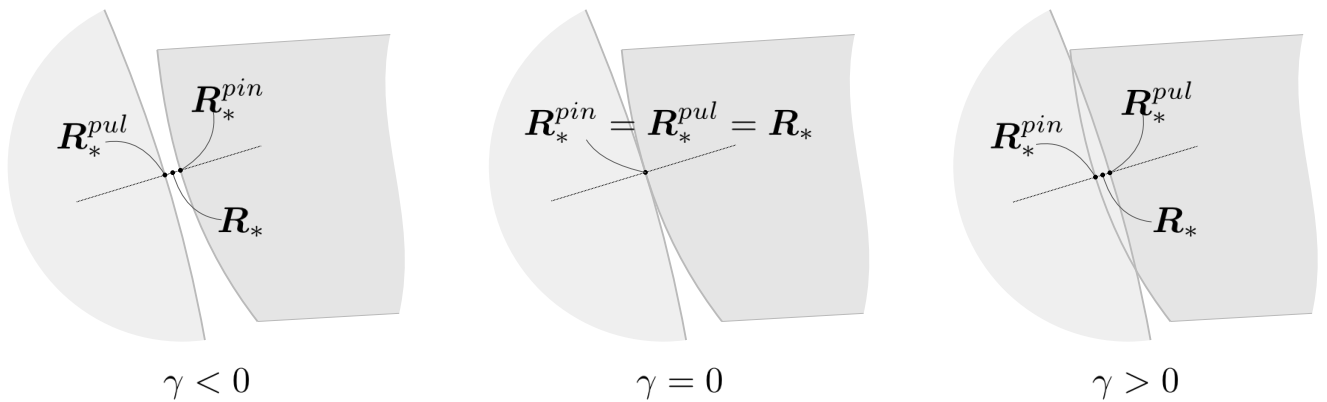


Рис. 1.58. К определению контактной деформации и точек контакта

Вначале рассмотрим случай $\gamma < 0$ — поверхности не пересекаются. Определим контактную деформацию как минимальное расстояние между точками двух поверхностей, взятое со знаком «минус»:

$$\Delta = - \min_{\substack{\mathbf{R}^{pin} \in \Gamma^{pin}, \\ \mathbf{R}^{pul} \in \Gamma^{pul}}} |\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{pul}| \quad (1.333)$$

(здесь Γ^{pin} — поверхность пина, Γ^{pul} — поверхность шайбы). Учитывая, что

$$\mathbf{R}^{pin} = \mathbf{x}^{pin} + \mathbf{k}z^{pin}(\mathbf{x}^{pin}), \quad \mathbf{R}^{pul} = \mathbf{x}^{pul} + \mathbf{k}z^{pul}(\mathbf{x}^{pul}),$$

минимизируемая функция фактически зависит от двух векторных аргументов, \mathbf{x}^{pin} и \mathbf{x}^{pul} , на которые не наложены какие-либо ограничения. Приравнивая нулю её производные по этим аргументам, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\perp + v_3 \nabla_\perp z^{pin} &= 0, & \mathbf{v}_\perp + v_3 \nabla_\perp z^{pul} &= 0, \\ \mathbf{v} \equiv \mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{pul} &= \mathbf{v}_\perp + v_3 \mathbf{k}, & \mathbf{v}_\perp &\equiv (\underline{\mathbf{E}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.334)$$

Если теперь вычислить векторные произведения $\mathbf{N}^{pin} \times \mathbf{v}$ и $\mathbf{N}^{pul} \times \mathbf{v}$, используя для направления нормали формулу (1.330), то получим

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{pin} \times \mathbf{v} &= \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_\perp + v_3 \nabla_\perp z^{pin}) - \nabla_\perp z^{pin} \times \mathbf{v}_\perp, \\ \mathbf{N}^{pul} \times \mathbf{v} &= \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_\perp + v_3 \nabla_\perp z^{pul}) - \nabla_\perp z^{pul} \times \mathbf{v}_\perp. \end{aligned}$$

Выполнение соотношений (1.334) обращает указанные векторные произведения в нуль. Это означает, что минимальное расстояние между поверхностями — расстояние между точками, нормали к поверхностям в которых параллельны друг другу, а также вектору, соединяющему эти точки. Обозначим последние \mathbf{R}_*^{pin} и \mathbf{R}_*^{pul} , а их проекции на плоскость Ox_1x_2 — \mathbf{x}_*^{pin} и \mathbf{x}_*^{pul} соответственно. В качестве точки контакта возьмём точку \mathbf{R}_* посередине между \mathbf{R}_*^{pin} и \mathbf{R}_*^{pul} , в итоге

$$|\Delta| = |\mathbf{R}_*^{pin} - \mathbf{R}_*^{pul}|, \quad \mathbf{R}_* = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_*^{pin} + \mathbf{R}_*^{pul}). \quad (1.335)$$

С учётом указанного свойства точек \mathbf{R}_*^{pin} и \mathbf{R}_*^{pul} можно сформулировать задачу (1.333) для поиска точки контакта и так:

$$\Delta = - \min_{\substack{\mathbf{R}^{pin} \in \Gamma^{pin}, \\ \mathbf{R}^{pul} \in \Gamma^{pul}, \\ \mathbf{n}^{pin} = -\mathbf{n}^{pul}}} |\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{pul}| \quad (1.336)$$

В случае $\gamma > 0$ поверхности пересекаются, поэтому минимальное расстояние между ними становится равным нулю. Но уже понятно, что теперь следует

сформулировать задачу для поиска точки контакта в виде, аналогичном (1.336):

$$\Delta = \min_{\substack{\mathbf{R}^{pin} \in \Gamma^{pin}, \\ \mathbf{R}^{pul} \in \Gamma^{pul}, \\ \mathbf{n}^{pin} = -\mathbf{n}^{pul}}} |\mathbf{R}^{pin} - \mathbf{R}^{pul}| \quad (1.337)$$

Контактная деформация — в некотором смысле максимальная глубина взаимопроникновения пересекающихся поверхностей, несмотря на то, что ищется минимум. Соотношения (1.334), (1.335) при этом остаются в силе.

Очевидно, предложенные зависимости Δ и \mathbf{R}_* непрерывны по параметру γ и удовлетворяют прочим предъявленным к ним требованиям.

Вычисление контактной деформации и точки контакта. Из соотношений (1.334) легко установить, что для искомых точек на контактных поверхностях должно выполняться соотношение

$$\nabla_{\perp} z^{pin} = \nabla_{\perp} z^{pul},$$

которое с учётом (1.331) имеет вид

$$\mathbf{a} + \underline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_*^{pin} = \mathbf{b} + \underline{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_*^{pul}. \quad (1.338)$$

Сами уравнения — первые два равенства в (1.331) — можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_*^{pin} - \hat{\mathbf{x}}_*^{pul} &= -v_3 \nabla_{\perp} z^{pin} = -v_3 \nabla_{\perp} z^{pul}, \\ v_3 &= z^{pin}(\hat{\mathbf{x}}_*^{pin}) - z^{pul}(\hat{\mathbf{x}}_*^{pul}). \end{aligned}$$

В компонентах это четыре кубических уравнения относительно четырёх координат $\hat{\mathbf{x}}_*^{pin}$, $\hat{\mathbf{x}}_*^{pul}$. Их аналитическое решение затруднительно, поэтому остаётся либо решать их каким-нибудь итерационным методом, либо заменить упрощёнными соотношениями. Сочтя первое неоправданно трудоёмким при расчётах, предпочтём второе. Идея упрощения опять опирается на то, что угол между направлениями нормалей к поверхностям и вектором \mathbf{k} невелик. Поэтому мы будем считать, что $\hat{\mathbf{x}}_*^{pin} = \hat{\mathbf{x}}_*^{pul}$, а вместо (1.334) используем их следствие —

соотношение (1.338). Теперь поиск точки контакта становится очень простой задачей, потому что требуется всего лишь решить систему двух линейных алгебраических уравнений:

$$(\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_* = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \hat{\mathbf{x}}_*^{pin} = \hat{\mathbf{x}}_*^{pul} = \hat{\mathbf{x}}_*.$$

Она всегда имеет решение, поскольку тензор $\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}$ с самого начала предполагается отрицательно определённым ($\mathbf{x} \cdot (\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{x} < 0$ при $\mathbf{x} = x_\alpha \mathbf{e}_\alpha \neq 0$). Контактная деформация и точка контакта (в которой приложены нормальная и касательная силы) вычисляются далее по формулам (1.335).

Квадратичная аппроксимация контактных поверхностей. В этом параграфе мы вычислим параметры $a, \mathbf{a}, \underline{\mathbf{a}}, b, \mathbf{b}, \underline{\mathbf{b}}$ в (1.331), определяющие квадратичную аппроксимацию контактных поверхностей. Вначале рассмотрим контактную поверхность шайбы в некоторой отсчётной конфигурации, в которой её уравнение имеет вид

$$\zeta(\boldsymbol{\xi}) = f(r), \quad r(\boldsymbol{\xi}) \equiv |\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \equiv \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

поскольку это поверхность вращения. Поверхности принадлежат точки с радиус-векторами $\boldsymbol{\xi} + \mathbf{k}\zeta(r(\boldsymbol{\xi}))$. Пусть требуется аппроксимировать поверхность квадратичной функцией в окрестности точки $\boldsymbol{\xi}_0$:

$$\hat{\zeta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \beta + \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{\xi}}, \quad \hat{\boldsymbol{\xi}} \equiv \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0, \quad \hat{\zeta}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \zeta(\boldsymbol{\xi}) + O(|\hat{\boldsymbol{\xi}}|^3) \quad (1.339)$$

Это отрезок ряда Тейлора, поэтому коэффициенты — производные от ζ по $\boldsymbol{\xi}$ в точке $\boldsymbol{\xi}_0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= f_0 \equiv f(r_0), \quad r_0 \equiv r(\boldsymbol{\xi}_0), \\ \boldsymbol{\alpha} &= \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \zeta \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0} = f'_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad f'_0 \equiv \frac{df}{dr} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 \equiv r_0^{-1} \boldsymbol{\xi}_0 \quad (|\boldsymbol{\varepsilon}_0| = 1), \\ \underline{\boldsymbol{\alpha}} &= \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \zeta \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0} = f''_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 + r_0^{-1} f'_0 \boldsymbol{\nu}_0 \boldsymbol{\nu}_0, \quad f''_0 \equiv \frac{d^2 f}{dr^2} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0}, \quad \boldsymbol{\nu}_0 \equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_0. \end{aligned} \quad (1.340)$$

Отметим следующее. Во-первых, для любых шайб f всегда убывает с ростом r , поэтому $f'_0 < 0$. Во-вторых, для конических шайб зависимость $f(r)$ линейна, и, следовательно, $f''_0 = 0$, и тензор $\underline{\alpha}$ — отрицательно полуопределённый. В-третьих, для тороидальных шайб всегда $f''_0 < 0$, и тогда $\underline{\alpha}$ определён отрицательно.

Для пинов можно считать, что аппроксимация в отсчётной конфигурации, аналогичная (1.339), но с параметрами $\beta, \underline{\beta}, \underline{\underline{\beta}}$, задана.

Следующий шаг — переход к актуальной конфигурации, в которой (1.339) примет вид (1.331). Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{x} + \mathbf{k}x_3$ — радиус-вектор точки на поверхности шайбы в актуальном положении, $\mathbf{R}^c = \mathbf{x}^c + \mathbf{k}x_3^c$ радиус-вектор её центра масс. Обозначим $\tilde{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R} - \mathbf{R}^c = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{k}\tilde{x}_3$. Из формул (1.316), (1.318), (1.319) вытекает следующая связь между $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\boldsymbol{\xi}, \zeta$:

$$\boldsymbol{\xi} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi \cdot \mathbf{r}^\perp = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi^T \cdot \tilde{\mathbf{R}}, \quad \zeta(\boldsymbol{\xi}) = z - z^c = \mathbf{k} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi^T \cdot \tilde{\mathbf{R}}.$$

Эти соотношения представляют собой систему уравнений относительно неизвестных $\boldsymbol{\xi}$ и \tilde{x}_3 . Попробуем решить её в линейном по вектору малого поворота $\boldsymbol{\vartheta}$ приближении. При этом поворот $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi$ аппроксимируется выражением $\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \boldsymbol{\vartheta} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}$, и уравнения принимают вид

$$\boldsymbol{\xi} = \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{x}_3\boldsymbol{\gamma}, \quad \zeta(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{x}_3 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{k}.$$

В силу второго из этих уравнений в первом из них можно заменить \tilde{x}_3 на $\zeta(\boldsymbol{\xi})$ — правая часть при этом изменится на величину $O(|\boldsymbol{\gamma}|^2)$, которой можно пренебречь. Останутся соотношения

$$\boldsymbol{\xi} = \tilde{\mathbf{x}} - \zeta(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\gamma}, \quad \tilde{x}_3 = \zeta(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \tilde{\mathbf{x}}. \quad (1.341)$$

Нас интересует квадратичная аппроксимация поверхности в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Введём векторы

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_0 &\equiv \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^c, & \boldsymbol{\xi}_0 &\equiv \tilde{\mathbf{x}}_0 - \zeta(\boldsymbol{\xi}_0)\boldsymbol{\gamma} = \tilde{\mathbf{x}}_0 - \alpha\boldsymbol{\gamma}, \\ \hat{\mathbf{x}} &\equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}_0, & \hat{\boldsymbol{\xi}} &\equiv \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0. \end{aligned}$$

Тогда, если ещё перейти от ζ к $\hat{\zeta}$, первое уравнение в (1.341) примет вид

$$\hat{\xi} = \hat{x} - \hat{\zeta}(\hat{\xi})\gamma. \quad (1.342)$$

Поскольку это уравнение надо решить с точностью до $O(|\gamma|)$ включительно, конструктивен метод последовательных приближений:

$$\hat{\xi} = \hat{x} - \hat{\zeta}(\hat{x})\gamma + O(|\gamma|^2).$$

Теперь второе из уравнений (1.341) позволяет получить выражение x_3 через \hat{x} с требуемой точностью:

$$x_3 = x_3^c + \hat{\zeta}(\hat{\xi}) = \hat{\zeta}(\hat{x} - \hat{\zeta}(\hat{x})\gamma) + O(|\gamma|^2).$$

Проделав выкладки и отбросив члены порядка $|\gamma|^2$, а также порядка $|\hat{x}|^3$ и выше, получим окончательно

$$\begin{aligned} x_3 &\equiv z^{pul} = a + \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{a}}} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \\ a &= x_3^c + \alpha - \gamma \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{a} = \underline{\underline{\alpha}}(1 - \gamma \cdot \underline{\underline{\alpha}}) - \gamma, \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}} &= \underline{\underline{\alpha}}(1 - \gamma \cdot \underline{\underline{\alpha}}) - \gamma \cdot \underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\alpha}} \cdot \gamma. \end{aligned} \quad (1.343)$$

Для пинов расчёт коэффициентов $b, \mathbf{b}, \underline{\underline{\mathbf{b}}}$ в (1.331) аналогичен проделанному для шайбы; роль вектора γ играет наклон оси пина на конце, находящемся в контакте с шайбой, роль \mathbf{R}^c — радиус-вектор точки на конце оси пина. Кроме того, поскольку контактная поверхность на торце пина не является фигурой вращения, нельзя проигнорировать поворот пина вокруг своей оси $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi$ подобно тому, как мы это сделали для шайбы. Вместо (1.341) получим следующие соотношения:

$$\xi = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi \cdot (\tilde{\mathbf{x}} - \zeta(\xi)\gamma), \quad \tilde{x}_3 = \zeta(\xi) - \gamma \cdot \tilde{\mathbf{x}}. \quad (1.344)$$

Повторяя далее все рассуждения, сделанные для шайбы, получим следующие коэффициенты квадратичной аппроксимации контактной поверхности пина:

$$\begin{aligned} x_3 &\equiv z^{pin} = b + \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{b}}} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \\ b &= x_3^c + \beta - \gamma \cdot \tilde{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{b} = \underline{\underline{\beta}}_\varphi(1 - \gamma \cdot \underline{\underline{\beta}}_\varphi) - \gamma, \quad \underline{\underline{\beta}}_\varphi \equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi \cdot \underline{\underline{\beta}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{b}}} &= \underline{\underline{\beta}}_\varphi(1 - \gamma \cdot \underline{\underline{\beta}}_\varphi) - \gamma \cdot \underline{\underline{\beta}}_\varphi \underline{\underline{\beta}}_\varphi - \underline{\underline{\beta}}_\varphi \underline{\underline{\beta}}_\varphi \cdot \gamma, \quad \underline{\underline{\beta}}_\varphi \equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi \cdot \underline{\underline{\beta}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_\varphi^T. \end{aligned} \quad (1.345)$$

Обобщённые силы. Обобщённые силы, соответствующие обобщённым координатам шайбы, вычисляются по формулам (1.323) (1.324) (1.329), в которых следует заменить \mathbf{R}^{pin} на \mathbf{R}_* . А вот обобщённые силы для цепи содержат слагаемые, оказывающие существенное влияние на её динамику, в том числе, благодаря появлению обратной связи, препятствующей перекосу. Найдём виртуальное перемещение точки пина с радиус-вектором \mathbf{R}_* . При этом будем исходить из кинематики твёрдого тела:

$$\delta \mathbf{R}_* = \delta \mathbf{R}^{pin} + \delta \mathbf{o} \times \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} \equiv (\mathbf{R}_* - \mathbf{R}^{pin}). \quad (1.346)$$

Вектор $\delta \mathbf{o}$ связан с тензором поворота контактной поверхности пина; этот тензор принимается в виде $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\vartheta} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\varphi}$, где $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\varphi} \equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}(\varphi \mathbf{k})$ — поворот пина вокруг своей оси, а $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\vartheta} \equiv \underline{\underline{\mathbf{P}}}(\vartheta)$ определяется вектором малого поворота ϑ , лежащим в плоскости Ox_1x_2 . Таким образом,

$$\delta \mathbf{o} = \delta \vartheta + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\vartheta} \cdot \mathbf{k} \delta \varphi. \quad (1.347)$$

Выразим вариации $\delta \vartheta$, $\delta \varphi$ через вариации обобщённых координат цепи. С учётом того, что изгиб пинов рассматривается в рамках модели Бернулли — Эйлера, вектор малого поворота ϑ определяется наклоном оси пина. Пусть для определённости рассматривается модель цепи с цельными пинами или же со связанными половинками пинов, пин имеет номер p и контактирует с шайбой своим «дальним» концом, тогда наклон оси есть вектор $\mathbf{u}'_p \equiv u'_{p,\alpha 1} \mathbf{e}_\alpha$ (см. рис. 1.30), и

$$\vartheta = \mathbf{k} \times \mathbf{u}'_p. \quad (1.348)$$

Угол φ определяется направлениями звеньев, содержащих p -тый пин. За его определение можно взять, например, соотношение $\boldsymbol{\tau}_p^\perp = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1$. Вектор $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$ определяет ориентацию пина и вычисляется по формуле (1.103), а входящие в эту формулу векторы направлений звеньев — по формуле (1.138). Вариация $\delta \varphi$

вычисляется по формуле, аналогичной (1.116):

$$\delta\varphi = \frac{\mathbf{n}_p^\perp \cdot (\delta\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \delta\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp)}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|}, \quad \mathbf{n}_p^\perp \equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_p^\perp, \quad \delta\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp = \frac{\delta\mathbf{u}_{p+1,0}^\perp - \delta\mathbf{u}_{p,0}^\perp}{L_{p,p+1}}. \quad (1.349)$$

В модели цепи с цельными пинами следует принять, что $\mathbf{R}^{pin} = \mathbf{u}_p \equiv u_{p,\alpha} \mathbf{e}_\alpha$; в модели со связанными половинками пинов (см. стр. 119), согласно (1.210), $\mathbf{R}^{pin} = \mathbf{u}_p \pm h\boldsymbol{\tau}_p^\perp$ (знак ‘+’ или ‘-’ выбирается в зависимости от половинки пина, на которой находится рассматриваемая контактная поверхность). В последнем случае в $\delta\mathbf{R}^{pin}$ войдёт слагаемое $\pm h\delta\boldsymbol{\tau}_p^\perp = \pm h\mathbf{n}_p^\perp \delta\varphi$. Чтобы охватить все рассматриваемые случаи, введём величину H , равную нулю в модели цепи с цельными пирами и $\pm h$ в модели с зависимыми половинками пинов. Формула (1.346) тогда принимает следующий вид (слагаемые порядка $|\boldsymbol{\vartheta}|^2$ и выше отброшены):

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}_* &= \delta\mathbf{u}_p + (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{u}'_p) \times \boldsymbol{\rho} + [(\mathbf{k} + \mathbf{u}'_p) \times \boldsymbol{\rho} + H\mathbf{n}_p^\perp] \delta\varphi, \\ \delta\varphi &= \frac{\mathbf{n}_p^\perp}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|} \cdot [-L_{p-1,p}^{-1} \delta\mathbf{u}_{p-1,0} + (L_{p-1,p}^{-1} - L_{p,p+1}^{-1}) \delta\mathbf{u}_{p,0} + L_{p,p+1}^{-1} \delta\mathbf{u}_{p+1,0}]. \end{aligned} \quad (1.350)$$

Обобщённые силы для цепи, обусловленные силой контактного взаимодействия \mathbf{F} (куда входит нормальная сила и сила трения) удобно сгруппировать в следующие комбинации: \mathbf{Q}_p соответствует \mathbf{u}_p , $\mathbf{Q}'_p - \mathbf{u}'_p$, $\mathbf{Q}_{p,0} - \mathbf{u}_{p,0}$:

$$\delta W^{F,chain} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{R}_* = \mathbf{Q}_p \cdot \delta\mathbf{u}_p + \mathbf{Q}'_p \cdot \delta\mathbf{u}'_p + \mathbf{Q}_{p-1,0} \cdot \delta\mathbf{u}_{p-1,0} + \mathbf{Q}_{p,0} \cdot \delta\mathbf{u}_{p,0} + \mathbf{Q}_{p+1,0} \cdot \delta\mathbf{u}_{p+1,0}.$$

Подставляя сюда (1.350), получим выражения указанных комбинаций обобщённых сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p &= \mathbf{F}, \quad \mathbf{Q}'_p = (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{Q}_{p-1,0} &= -L_{p-1,p}^{-1} \mathbf{F} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{Q}_{p,0} = (L_{p-1,p}^{-1} - L_{p,p+1}^{-1}) \mathbf{F} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \\ \mathbf{Q}_{p+1,0} &= L_{p,p+1}^{-1} \mathbf{F} \cdot \underline{\mathbf{A}}, \quad \underline{\mathbf{A}} \equiv \frac{[(\mathbf{k} + \mathbf{u}'_p) \times \boldsymbol{\rho} + H\mathbf{n}_p^\perp] \mathbf{n}_p^\perp}{|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p-1,p}^\perp + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{p,p+1}^\perp|}. \end{aligned} \quad (1.351)$$

В предыдущей модели контактного взаимодействия пина с шайбой была лишь сила \mathbf{Q}_p , которая допускает естественную интерпретацию — это сила, приложен-

ная на конце оси пина. Появившиеся здесь новые обобщённые силы обеспечивают «приложение момента», обусловленного смещением точки контакта от оси пина: Q'_p соответствует моменту, изгибающему пин, а $Q_{p-1,0}$, $Q_{p,0}$ и $Q_{p+1,0}$ — крутящему. Поскольку отдельный пин не обладает свободой вращения вокруг оси, крутящий момент превращается в обобщённые силы для тройки пинов. Учёт Q'_p в сочетании с уточнённой кинематикой контакта моделирует эффект устранения перекоса цепи, заложенный конструкторами.

В модели цепи с независимыми половинками пинов обобщённые силы вычисляются аналогично; однако, поскольку в этой модели ориентация каждой половинки пина определяется ориентацией одного звена, соотношение (1.349) не имеет места и крутящий момент прикладывается несколько иначе. Пусть для определённости рассматривается контактная поверхность половинки p^- (см. рис. 1.41). Ориентация этой половинки определяется звеном $(p, p+1)$, поэтому имеем

$$\delta \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp = \mathbf{n}_{p,p+1}^\perp \delta \varphi, \quad \mathbf{n}_{p,p+1}^\perp \equiv \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp.$$

Вектор направления звена $\boldsymbol{\tau}_{p,p+1}^\perp$ вычисляется по формуле (1.215); вычисляя $\delta \varphi$, получим

$$\delta \varphi = \frac{\mathbf{n}_{p,p+1}^\perp}{|\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp|} \cdot \delta \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp, \quad \Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp \equiv \mathbf{u}_{p+1,0}^{\perp+} - \mathbf{u}_{p,0}^{\perp-}.$$

Таким образом, обобщённые силы, связанные с $\delta \varphi$, в модели цепи с независимыми половинками пинов действуют не на три, а на два пина, и имеют следующий вид.

$$\mathbf{Q}_{p+1,0}^+ = -\mathbf{Q}_{p,0}^- = \mathbf{F} \cdot \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{u}_p^{-'}) \times \rho \mathbf{n}_{p,p+1}^\perp}{|\Delta \mathbf{u}_{p,p+1,0}^\perp|} \quad (1.352)$$

(в этой модели цепи $\mathbf{R}^{pin} = \mathbf{u}_p^-$ и $H = 0$).

1.6. Системы стабилизации угловых скоростей

1.6.1. Постановка задачи управления

Режим работы бесступенчатой трансмиссии характеризуется рядом параметров, в первую очередь — следующими:

- скоростью вращения ведущего вала, ω_1 ;
- передаточным числом $i_{var} = \omega_1/\omega_2$, где ω_2 — скорость вращения ведомого вала;
- передаваемым крутящим моментом (M_1 на ведущем валу или M_2 на ведомом);
- Осевыми силами, сжимающими шайбы (F_1 на ведущем валу и F_2 на ведомом);

Разработанные математические модели трансмиссии предусматривают возможность задания моментов M_1 , M_2 и сил F_1 , F_2 как внешних воздействий — они могут быть произвольными функциями времени. Кроме того, можно, например, задавать момент M_2 как момент сопротивления, пропорциональный скорости вращения: $M_2 = -b_2\omega_2$ (коэффициент b_2 считается заданной функцией времени).

Передаточное число трансмиссии и скорости вращения валов полностью определяются приложенными силами и моментами в том смысле, что история изменения $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ полностью определяется историей воздействий $F_1(t)$, $F_2(t)$, $M_1(t)$, $M_2(t)$. Вместе с тем, невозможно указать конкретные значения этих воздействий, при которых угловые скорости вращения оказались бы равны заданным или оставались бы достаточно близки к ним по прошествии некоторого времени. Возникает классическая задача управления, состоящая в том, что при помощи двух управляющих параметров (обычно F_1 и M_2) требуется обеспечить достаточную близость угловых скоростей вращения $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ заданным

желаемым $\omega_1^d(t), \omega_2^d(t)$. При этом желаемые значения чаще всего постоянны, но допускается их (не слишком быстрая) зависимость от времени.

Рассматриваемая здесь задача управления далека от задачи полноценного управления бесступенчатыми трансмиссиями, которую требуется решать при их практическом использовании — см., например, работы [1; 70–72].

Большая часть расчётов связана с исследованиями стационарных режимов (все воздействия и угловые скорости не зависят от времени) — не строго математически, а приближённо, так как уравнения моделей, учитывающих дискретную структуру цепи, не допускают настоящих стационарных решений. Интересующие нас решения скорее можно назвать квазипериодическими — в этом смысле и будем далее использовать термин *стационарный режим*.

Чтобы численно получить состояние стационарного режима трансмиссии, решается задача Коши на некотором временном отрезке $[0, T]$ и с некоторым начальным состоянием. Как правило, начальное состояние приходится генерировать, стремясь сделать его как можно ближе к требуемому режиму. Процедура постановки начальных условий довольно сложна и содержит в себе некоторые итерационные алгоритмы. Она позволяет расставить пины цепи так, чтобы обеспечить заданное отношение радиусов контакта на ведущих и ведомых шайбах, заданное начальное натяжение цепи, отсутствие слишком больших контактных деформаций в контактных парах пин — шайба, наконец, обеспечить заданную скорость продольного движения цепи и скорости вращения валов. Сгенерированное начальное состояние всё ещё далеко от состояния стационарного режима, поэтому при решении задачи Коши наблюдается переходный процесс. Длина T временного интервала должна быть больше, чем характерное время T_m этого переходного процесса. При этом время T_m следует считать некоторой константой модели; по-видимому, не существует возможности уменьшить его. Обычно T_m составляет несколько десятых секунды.

С другой стороны, чтобы при решении задачи Коши получился требуемый стационарный режим, как уже говорилось, воздействия должны содержать

управляющие добавки. Они создаются системами стабилизации угловых скоростей, уравнения которых добавляются к уравнениям модели. Следует иметь в виду, что при наличии системы управления время переходного процесса изменится; оно будет зависеть, в том числе, от коэффициентов обратных связей, и в итоге составит некоторую величину T_c . Систему управления следует делать такой, чтобы время T_c не было значительно больше, чем T_m или хотя бы не превышало некоторого значения T_0 , равного, например, одной секунде. В противном случае машинное время, требуемое для расчёта переходного процесса, становится неприемлемо большим. Ещё одно практическое требование к системе управления — возможность расчёта режимов, отличных от стационарных, в которых воздействия меняются не слишком быстро.

Ниже рассматриваются две независимые подсистемы, составляющие вместе систему стабилизации угловых скоростей. Первая из них обеспечивает стабилизацию передаточного числа, вторая — стабилизацию скорости вращения ведомого вала.

1.6.2. Сглаженные угловые скорости

Наблюдаемыми параметрами для системы стабилизации угловых скоростей являются скорости вращения ведущего (ω_1) и ведомого (ω_2) валов. Эти величины доступны непосредственно в виде обобщённых скоростей в модели жёстких валов с шайбами (п. 1.5.2.1). В модели с упругими валами (п. 1.5.2.2) и шайбами как абсолютно твёрдыми телами (п. 1.5.2.3), прикреплёнными к валам жёстко или упругими элементами (п. 1.5.2.5), понятие угловой скорости вращения вала вместе с шайбами требует определения, так как благодаря кручению вала каждое его сечение и каждая из двух шайб имеют свою угловую скорость вращения вокруг оси. Определения могут быть разными; здесь отдано предпочтение варианту, когда угловой скоростью вала с шайбами считается средняя

скорость вращения пары шайб:

$$\omega_k = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_{k, near} + \dot{\varphi}_{k, far}), \quad k = 1, 2$$

(индекс k идентифицирует вал, *near* и *far* — каждую из двух шайб на валу). Опыт показал, что из-за высокочастотных осцилляций угловых скоростей их использование непосредственно в качестве наблюдаемых параметров нежелательно. Система стабилизации даёт лучшие результаты, если скорости вращения сглаживать по времени. Для этого можно использовать следующее аperiodическое звено [73]:

$$\tau_\omega \dot{\tilde{\omega}}_k + \tilde{\omega}_k = \omega_k, \quad \tilde{\omega}_k|_{t=0} = \omega_k|_{t=0}, \quad k = 1, 2. \quad (1.353)$$

Постоянная τ_ω должна быть, с одной стороны, не слишком мала, чтобы обеспечивать сглаживание осцилляций, и, с другой стороны, не слишком велика, чтобы приносимое в систему запаздывание не сделало систему стабилизации неустойчивой. Типичное значение τ_ω составляет 0,002 с. Системы стабилизации угловых скоростей, рассмотренные в следующих подразделах, получают $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$ в качестве наблюдаемых величин.

1.6.3. Система стабилизации передаточного числа

Эта система стабилизации обеспечивает близость передаточного числа трансмиссии к заданному $i_{var}^d(t)$. Управляющим воздействием является добавка к силе F_1 , сжимающей шайбы ведущего вала. Наблюдаемой величиной является \tilde{i}_{var} — оценка актуального передаточного числа трансмиссии, вычисляемая по известным $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$. Прежде, чем определить её, введём *операцию ограничения до заданного диапазона*:

$$\text{clamp}(x, a, b) \equiv \max\{a, \min\{b, x\}\} = \begin{cases} a & \text{при } x < a, \\ x & \text{при } a \leq x \leq b, \\ b & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (1.354)$$

С использованием этой операции определим \tilde{i}_{var} следующим образом:

$$\tilde{i}_{var} = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tilde{\omega}_2| < \varepsilon, \\ \text{clamp}(\tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_2, i_{\min}, i_{\max}) & \text{при } |\tilde{\omega}_2| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Величины ε , i_{\min} , i_{\max} входят сюда как параметры и имеют следующие фиксированные значения: $\varepsilon = 10^{-5}$ рад/с; $i_{\min} = 0,1$; $i_{\max} = 10$. Меры предосторожности в вычислении \tilde{i}_{var} играют существенную роль, в частности, при расчёте разгона от нулевых скоростей вращения.

При численных расчётах задаются некоторые сжимающие силы $F_1^{appl}(t)$ и $F_2^{appl}(t)$, обеспечивающие передачу крутящего момента, также заданного — см. (1.13). При наличии системы стабилизации передаточного числа силы F_1 и F_2 рассчитываются следующим образом:

$$F_1 = F_1^{appl} + F_1^{st}, \quad F_2 = F_2^{appl},$$

то есть к заданной сжимающей силе на ведущем валу система стабилизации прибавляет управляющую добавку F_1^{st} . Эта добавка имеет вид

$$\begin{aligned} F_1^{st} &= \text{clamp}(F_{1,\Sigma}^{st}, F_1^{\min}, F_1^{\max}), & F_{1,\Sigma}^{st} &\equiv F_{1,0}^{st} + F_{1,1}^{st} \\ F_1^{\min} &= (k_{sat}^{-1} - 1) F_1^{appl}, & F_1^{\max} &= (k_{sat} - 1) F_1^{appl}. \end{aligned}$$

Параметр $k_{sat} > 1$ называется *коэффициентом насыщения*; его значение обычно выбирают из диапазона [2, 3]. Необходимость ограничения управляющей добавки F_1^{st} продиктована опытом использования системы стабилизации в большом количестве расчётов. Слишком большие силы, сформированные системой стабилизации, очень быстро уводят состояние системы далеко от желаемого режима.

Система стабилизации состоит из двух подсистем — статической системы управления, формирующей величину $F_{1,0}^{st}$, и астатической, формирующей $F_{1,1}^{st}$. Статическая система подобна упругой пружине в том смысле, что формируемое ей управляющее воздействие пропорционально отклонению актуального передаточного числа от желаемого:

$$F_{1,0}^{st} = c_f 0 (\tilde{i}_{var} - i_{var}^d).$$

Очевидно, эта система сама по себе неспособна обеспечить большую точность, если только не задавать очень большой коэффициент обратной связи c_{f_0} . При выборе этого коэффициента следует исходить из того, чтобы, с одной стороны, в стационарном режиме управляющая сила $F_{1,0}^{st}$ могла обеспечить точность по передаточному числу в несколько процентов, и, с другой стороны, неизбежные естественные осцилляции \tilde{i}_{var} (из-за дискретной структуры движущейся цепи) и вызванные этим колебания $F_{1,0}^{st}$ не исказили бы существенным образом поведение модели трансмиссии в стационарном режиме. Типичное значение коэффициента c_{f_0} составляет 200 КН (при этом сами силы F_1 и F_2 составляют десятки килоньютон). Основное преимущество статической системы стабилизации — её высокое быстродействие; недостаток, как уже было указано, — невысокая точность.

Астатическая система стабилизации формирует управляющую силу $F_{1,1}^{st}$ следующим образом:

$$\dot{F}_{1,1}^{st} = \begin{cases} f_1 & \text{в обычном режиме} \\ 0 & \text{в режиме насыщения} \end{cases}, \quad f_1 \equiv c_{f_1} (\tilde{i}_{var} - i_{var}^d), \quad F_{1,1}^{st}|_{t=0} = 0.$$

Система стабилизации передаточного числа всегда находится в одном из двух упомянутых здесь режимов — обычном и режиме насыщения. Режим насыщения определяется тем, что одновременно выполняются условия $F_{1,\Sigma}^{st} < F_1^{\min}$ и $f_1 < 0$, или же условия $F_{1,\Sigma}^{st} > F_1^{\max}$ и $f_1 > 0$. Во всех остальных случаях режим считается обычным. Именно такую логику приходится реализовывать в астатической системе стабилизации, добиваясь её адекватной работы в сочетании с ограничением на стабилизирующее воздействие. Она гарантирует отсутствие неограниченного роста $|F_{1,1}^{st}|$. Коэффициент обратной связи c_{f_1} выбирается из соображений быстродействия и устойчивости, с учётом значения параметра τ_ω в (1.353). Его типичное значение составляет 10^6 Н/с.

1.6.4. Система стабилизации угловой скорости ведомого вала

Представим себе, что передаточное число трансмиссии \tilde{i}_{var} уже стабилизировано при помощи системы стабилизации передаточного числа и равно i_{var}^d . Чтобы трансмиссия работала в желаемом стационарном режиме, требуется ещё стабилизировать скорость вращения ведущего или ведомого (неважно, какого именно) вала. Будем считать, что требуется обеспечить близость $\tilde{\omega}_2$ к ω_2^d .

В стационарном режиме имеет место баланс входной и выходной мощностей: без учёта потерь, считая угловые скорости и моменты постоянными, имеем

$$M_1\tilde{\omega}_1 + M_2\tilde{\omega}_2 = 0.$$

Так как $i_{var}^d = \tilde{i}_{var} = \tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_2$, получаем отсюда

$$M_2 = -M_1 i_{var}^d.$$

Будем формировать момент на ведомом валу как момент сопротивления, пропорциональный скорости вращения и коэффициенту сопротивления b_2 :

$$M_2 = -b_2\tilde{\omega}_2.$$

В условиях желаемого стационарного режима, без учёта потерь, коэффициент сопротивления имеет значение $b_{2,0}$:

$$b_{2,0} = -\frac{M_2}{\tilde{\omega}_2^d} = \frac{M_1 i_{var}^d}{\tilde{\omega}_2^d}. \quad (1.355)$$

Из-за потерь коэффициент сопротивления, обеспечивающий желаемый стационарный режим, будет меньше, чем $b_{2,0}$. Система стабилизации угловой скорости ведомого вала формирует добавку к $b_{2,0}$, так что коэффициент сопротивления b_2 имеет следующий вид:

$$b_2 = b_{2,0} + b_2^{st} \quad (1.356)$$

Логика построения управляющей добавки b_2^{st} аналогична логике построения F_1^{st} в системе стабилизации передаточного числа (п. 1.6.3):

$$b_2^{st} = \text{clamp}(b_{2,\Sigma}^{st}, \Delta b_2^{\min}, \Delta b_2^{\max}), \quad b_{2,\Sigma}^{st} \equiv b_{2,0}^{st} + b_{2,1}^s t, \\ \Delta b_2^{\min} = (c_{sat}^{-1} - 1) b_{2,0}, \quad \Delta b_2^{\max} = (c_{sat} - 1) b_{2,0}.$$

Параметр $c_{sat} > 1$ — коэффициент насыщения, ограничивающий управляющее воздействие, чтобы оно не вызвало быстрый уход режима далеко от желаемого. Слагаемое $b_{2,0}^{st}$ формируется статической подсистемой и пропорционально отклонению угловой скорости $\tilde{\omega}_2$ от желаемого значения ω_2^d :

$$b_{2,0}^{st} = c_{b0} (\tilde{\omega}_2 - \omega_2^d).$$

Слагаемое $b_{2,1}^{st}$ формируется астатической подсистемой:

$$i_{2,1}^{st} = \begin{cases} g_1 & \text{в обычном режиме} \\ 0 & \text{в режиме насыщения} \end{cases}, \quad g_1 \equiv c_{b1} (\tilde{\omega}_2 - \omega_2^d), \quad b_{2,1}^{st}|_{t=0} = 0.$$

Режим насыщения имеет место при одновременном выполнении условий $b_{2,\Sigma}^{st} < \Delta b_2^{\min}$ и $g_1 < 0$ или условий $b_{2,\Sigma}^{st} > \Delta b_2^{\max}$ и $g_1 > 0$. Остальные случаи соответствуют обычному режиму. В режиме насыщения астатическое слагаемое $b_{2,1}^{st}$ остаётся постоянным.

Коэффициенты обратных связей c_{b0} и c_{b1} рассчитываются по формулам

$$c_{b0} = \frac{2J_\Sigma/\tau - b_{2,0}}{\omega_2^d}, \quad c_{b1} = \frac{J_\Sigma}{(\tau\nu)^2\omega_2^d},$$

где J_Σ — приведённый момент инерции (относительно ведомого вала) трансмиссии при желаемом передаточном числе i_{var}^d ; τ — желаемое характерное время переходного процесса, ν — желаемый уровень относительного демпфирования в $b_{2,1}^s t(t)$ (при обычном режиме). Значения этих параметров назначаются следующим образом.

$$J_\Sigma = J_1 (i_{var}^d)^2 + J_2 + m_{ch} r_2^2,$$

где J_1 — момент инерции ведущего вала с шайбами, J_2 — момент инерции ведомого вала с шайбами, m_{ch} — масса цепи, r_2 — радиус контакта цепи на ведомых шайбах. Далее, значение параметра τ должно превышать постоянную τ_ω в (1.353) хотя бы в 2–3 раза — этого требуют соображения устойчивости. Наконец, параметр ν обычно имеет значение 0,8.

Опыт показывает, что для надёжной работы системы стабилизации угловых скоростей не требуется предварительная стабилизация передаточного числа. Обе системы стабилизации можно использовать с самого начала переходного процесса, ведущего к стационарному режиму. Кроме того, обе системы стабилизации хорошо работают при медленном (на протяжении секунд) изменении параметров режима.

Отметим в заключение, что все угловые скорости и момент M_1 предполагаются положительными.

1.7. Примеры расчётов

В этом разделе в качестве краткой иллюстрации возможностей моделей, описанных в разделе 1.5, приведены примеры величин, которые можно анализировать, проведя расчёт динамики бесступенчатой трансмиссии в рамках этих моделей.

Стационарный режим. Рассматривается стационарный режим со следующими параметрами: скорость вращения ведущего вала 3500 об/мин. (366,5 рад/с); крутящий момент на ведущем валу $M_1 = 200$ Нм; передаточное число $i_{var} = 2,4$ (при этом скорость ведомого вала без учёта проскальзывания цепи равна 1458 об/мин. или 152,7 рад/с). Приводятся некоторые результаты расчёта этого режима по разным моделям трансмиссии: варьировались модели пинов и пластинок цепи, контакта пин — шайба и валов с шайбами. Список рассмотренных моделей приведён в табл 1.1.

При расчётах стационарных и переходных режимов работы бесступенчатой трансмиссии значения осевых сил, сжимающих шайбы, задаются на основе оценки (1.13): в качестве значения силы берётся правая часть неравенства, умноженная на коэффициент запаса. Практика показывает, что отсутствие большого проскальзывания цепи обычно обеспечивается при значениях коэффициента запаса 1,1 и выше.

Длительность расчёта стационарного режима составляет 1 с — это время необходимо для его установления.

На рис. 1.59 показана история изменения глобальных параметров, характеризующих режим (скорости вращения валов и передаточное число), а также КПД. Из графиков следует, что системы стабилизации (п. 1.6) действительно позволяют получить стационарный режим. Кроме того, из графика КПД видно, что его расчётное значение в стационарном режиме существенно зависит от трёх факторов: учёта податливости валов и опор шайб; учёта независимо-

Таблица 1.1. Модели трансмиссии, использованные для расчётов

обозн.	модель пина	контакт пин — пластинка	контакт пин — шайба	валы с шайбами
(а)	цельный пин (рис. 1.30)	пластинки образуют однородный упругий слой (1.153)	уточнённая модель (п. 1.5.3.4)	жёсткие валы с шайбами (п. 1.5.2.1)
(б)	— // —	— // —	— // —	упругие валы, опоры (пп. 1.5.2.2, 1.5.2.3, 1.5.2.4, 1.5.2.5)
(в)	пин со связанными половинками (рис. 1.39)	— // —	— // —	— // —
(г)	— // —	пластинки жёстко связаны с пинами (1.170), $\zeta_\alpha = \psi_\alpha$	— // —	— // —
(д)	— // —	уточнённая модель (рис. 1.36)	— // —	— // —
(е)	пин с независимыми половинками (рис. 1.40)	— // —	— // —	— // —
(ж)	— // —	— // —	контакт в точке на оси пина (рис. 1.52)	— // —

го движения половинок пинов (при этом появляется возможность продольного проскальзывания половинок пина друг по другу, а также пластинок вдоль осей пинов, что увеличивает потери в цепи и снижает КПД); от того, используется ли модель контакта пин — шайба с уточнённой кинематикой. От последнего обстоятельства существенно зависит уровень потерь на трение в контакте пин — шайба (см. также рис. 1.66).

На рис. 1.60–1.65 представлены графики некоторых величин в звеньях, пластинках или пинах цепи в зависимости от времени за один оборот цепи. На этих графиках в начале временного интервала рассматриваемое звено, пластинка или пин находится в середине ведущей (более сильно натянутой) ветви цепи; затем попадает на ведущий вал; на ведомую (менее сильно натянутую) ветвь цепи; на ведомый вал; наконец, в конце временного интервала снова оказывается

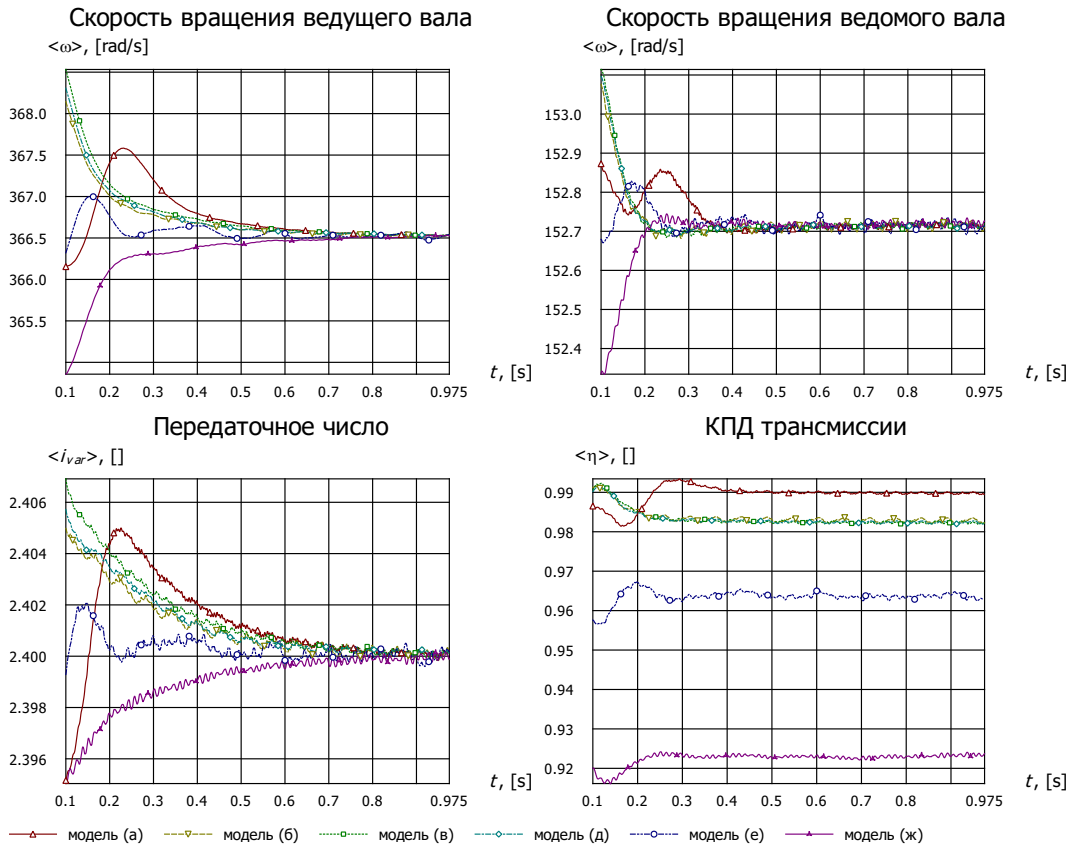


Рис. 1.59. Параметры стационарного режима; КПД (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,05 с).

в середине ведущей ветви цепи.

На рис. 1.60 слева — графики суммарного натяжения в некотором звене цепи. Видно, что для всех рассмотренных моделей характер изменения этой величины один и тот же, хотя уровень натяжения несколько различается: для модели (а) натяжение наименьшее, для моделей (б), (в), (д) — наибольшее. Справа на том же рисунке — графики максимального давления в контакте пин — шайба. Для моделей с половинками пинов выбирается максимум значений в левой и правой половинках. Во всех случаях рассмотрен лишь один конец пина. Из этих графиков следует, что в моделях с половинками пинов (зависимыми или независимыми) контактное давление выше, чем в моделях с цельными пинами. Это объясняется тем, что для моделей с цельными пинами контактные поверхности пинов считались цилиндрическими, а для моделей с половинками — двояковыпуклыми; из-за этого размеры пятен контакта и максимальное кон-

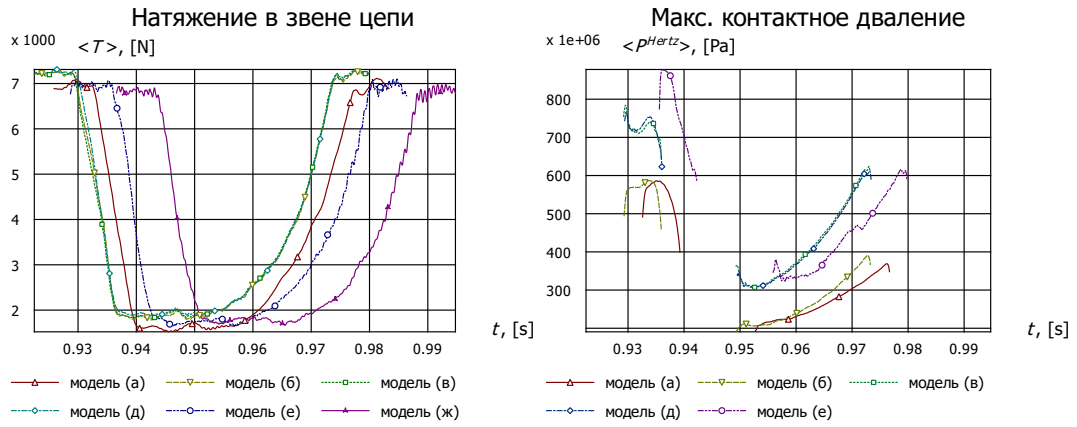


Рис. 1.60. Натяжение в звене и максимальное контактное давление в контакте пин — шайба за один оборот цепи в стационарном режиме (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

Также контактное давление существенно различаются. Максимальное давление в модели (е) с независимыми половинками пинов при входе на ведущий вал оказывается выше, чем в других моделях. Это связано тем, что нагрузка распределена

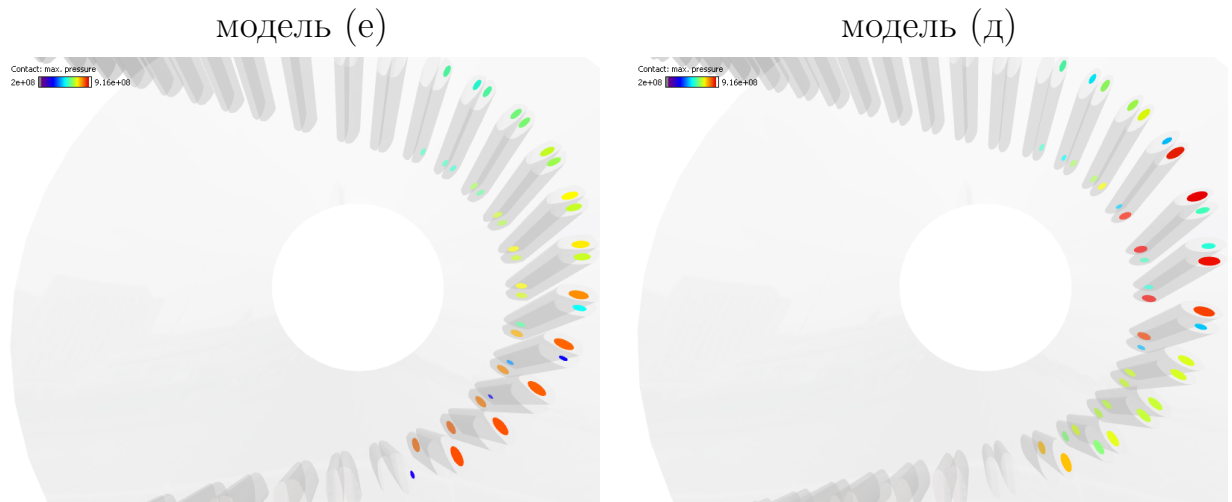


Рис. 1.61. Контакт пинов с шайбами ведущего вала

по половинкам пина неравномерно: во время хода по прямой ветви цепи независимые половинки пина успевают сместиться друг относительно друга в осевом направлении, в результате чего при входе в контакт с шайбами ведущего вала одна половинка начинает контактировать с ближней шайбой, другая — с дальней шайбой. По мере движения по шайбам половинки выравниваются друг относительно друга в осевом направлении. Описанное явление подтверждается

рис. 1.61; оно невозможно в рамках модели со связанными половинками пинов.

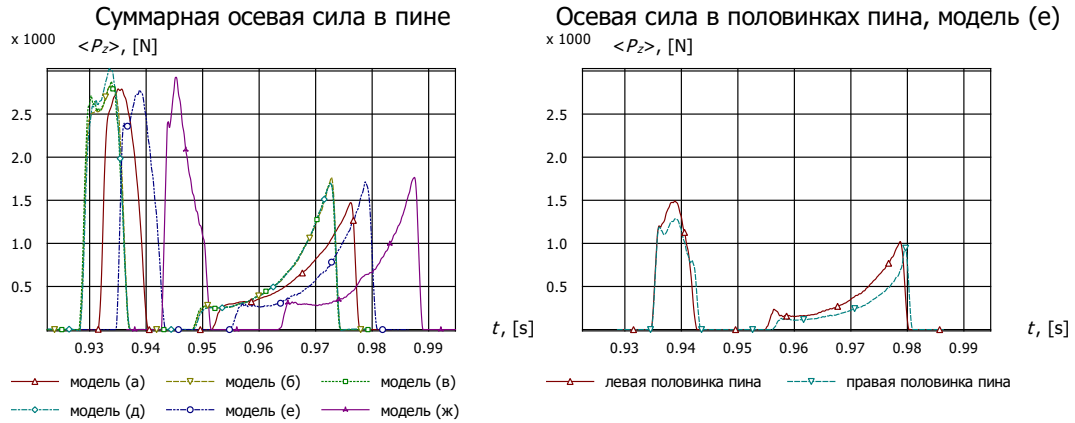


Рис. 1.62. Осевые силы в пинах и половинках пинов за один оборот цепи в стационарном режиме (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

На рис. 1.62 представлены графики суммарной осевой силы в пине (слева) и осевых сил в левой и правой половинках пина для модели (е) (справа) за один оборот цепи в стационарном режиме. Все модели дают похожие результаты для суммарной осевой силы; однако для модели (а) с жёсткими валами максимальное значение силы при контакте с ведомыми шайбами несколько ниже, чем для других моделей — это объясняется влиянием поворота малого поворота шайбы, отсутствующего в модели (а), на распределение сил по дуге контакта. Примерно то же самое можно сказать об окружных компонентах сил трения в контакте пин — шайба (рис. 1.63, слева). Распределение радиальных компонент сил трения (справа на том же рисунке) зависит от выбора модели более сложным образом, элементарное объяснение этого затруднительно.

На рис. 1.64 изображены графики изменения радиусов контакта (для ближнего конца пина, в случае моделей с половинками пинов — в левой половинке пина) за один оборот цепи. В разных моделях наблюдается различный характер этих кривых. Наиболее выделяется кривая для модели (а), радиус контакта на ведомом валу (с большими радиусами); это связано, конечно, с малым наклоном оси шайбы, который есть во всех моделях, кроме модели (а). На первый взгляд, эта кривая противоречит соответствующей кривой для радиальной компоненты силы трения (рис. 1.63, справа): радиальная сила трения положительна — это

Сила трения пин - шайба

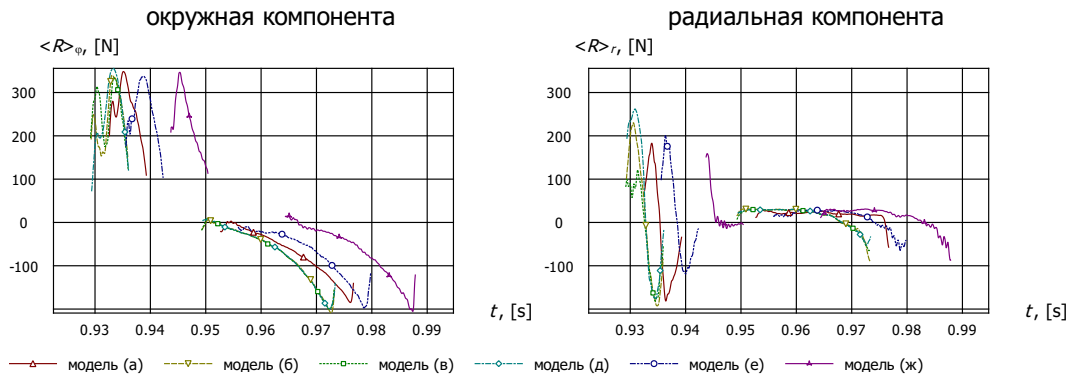


Рис. 1.63. Сила трения в контакте пин — шайба за один оборот в стационарном режиме (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

Радиус контакта пина

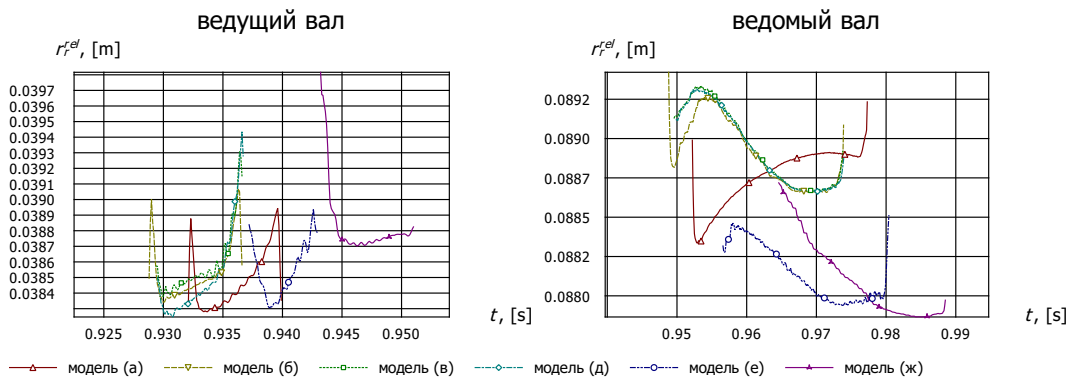


Рис. 1.64. Радиус контакта пина за один оборот цепи в стационарном режиме (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

означает, что радиальная скорость проскальзывания пина относительно шайбы положительна, и можно подумать, что поэтому радиус контакта должен уменьшаться. На самом деле он увеличивается из-за того, что точка контакта перемещается по контактной поверхности пина, то есть имеет место одновременное скольжение и качение. Для моделей (б), (в), (д), (е) радиусы контакта близки; в модели (е) радиус контакта на ведомом валу несколько меньше, что связано с небольшим уменьшением длины цепи, когда она принимает форму окружности, по сравнению с длиной прямой цепи; этот эффект есть только в моделях цепи с независимыми половинками пинов, обкатывающимися друг по другу. Кривые для модели (ж) отличаются от кривых для моделей (б), (в), (д), (е) из-за того, что в модели (ж) при контакте пинов с шайбами отсутствует

момент, препятствующий перекоосу цепи (см. рис. 1.29). В модели (ж) кручение и сдвиг цепи в целом значительно больше, чем в любой модели с уточнённой кинематикой контакта пин — шайба (см. также рис. 1.66).

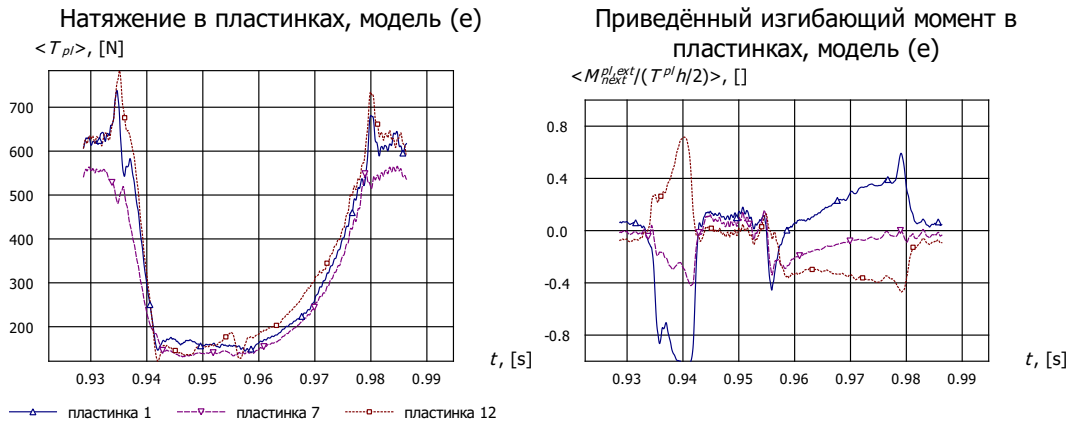


Рис. 1.65. Натяжение и приведённый изгибающий момент в пластинках звена цепи за один оборот в стационарном режиме (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

Для модели (е) на рис. 1.65 представлены графики изменения сил натяжения в пластинках (слева) и приведённого изгибающего момента в точке соединения пластинки с одним из пинов (справа). Приведённый момент является безразмерной величиной, вычисляемой по формуле

$$m = \frac{2M}{hT}, \quad (1.357)$$

где h — толщина пластинки, M — изгибающий момент, T — натяжение пластинки. При уточнённом моделировании пластинок цепи (см. с. 103) имеет место неравенство $m \leq 1$, причём равенство означает, что угол δ_2 отличен от нуля — см. рис. 1.36, (1.168), рис. 1.37. По этим графикам можно судить о характере распределения натяжения по пластинкам и о состоянии контакта пинов — пластинок. Рассмотрено звено из 12 пластинок, пластинки 1 и 12 находятся на краях, пластинка 7 — ближе к середине. Из графика справа очевидно, что состояния контакта пинов — шайба, отличные от $\delta_2 = 0$, реализуются в рассмотренном стационарном режиме редко и только в крайних пластинках. Распределение сил натяжения пластинок по ширине цепи близко к равномерному.

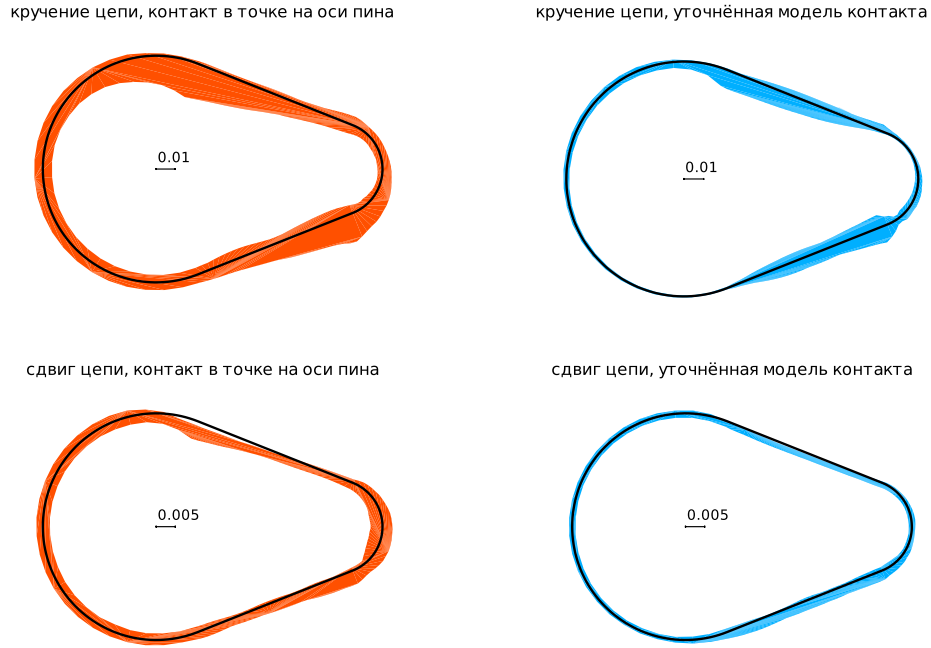


Рис. 1.66. Минимум и максимум по времени от параметров кручения t_τ (сверху) и сдвига t_n (снизу) цепи в стационарном режиме, модели (ж) (слева) и (е) (справа).

Рис. 1.66 иллюстрирует параметры перекоса цепи в моделях (ж) (слева) и (е) (справа). Эти параметры — две величины, t_n и t_τ , определяющие соответственно сдвиг и кручение цепи (рис. 1.67). Они вычисляются по формулам

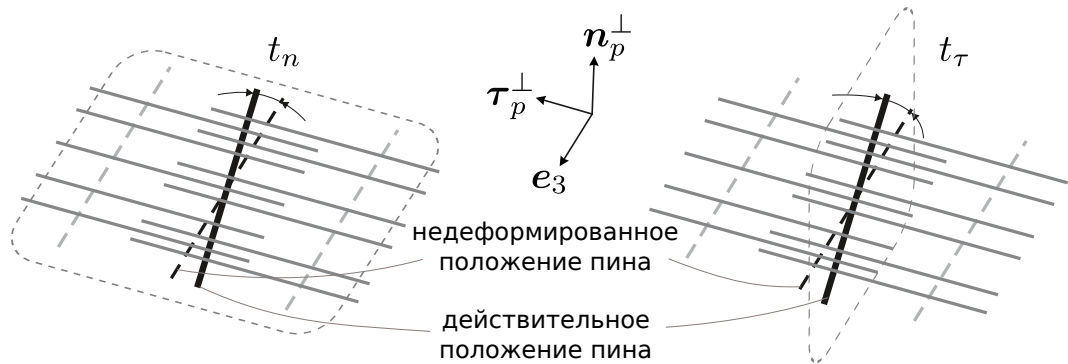


Рис. 1.67. К определению параметров кручения и сдвига цепи.

$$t_n = \mathbf{u}_{p,1}^\perp \cdot \boldsymbol{\tau}_p^\perp, \quad t_\tau = \mathbf{u}_{p,1}^\perp \cdot \mathbf{n}_p^\perp;$$

величина $\mathbf{u}_{p,1}^\perp$ введена формулой (1.133); вектор $\boldsymbol{\tau}_p^\perp$ определяет направление цепи; вектор \mathbf{n}_p^\perp перпендикулярен ему; оба вектора лежат в плоскости Ox_1x_2 ; они введены формулами (1.103). Вычисленные таким образом t_n и t_τ относят-

ся к пину; однако, используя линейную интерполяцию, можно вычислить их в произвольном сечении цепи. Далее, можно выбрать достаточно много сечений

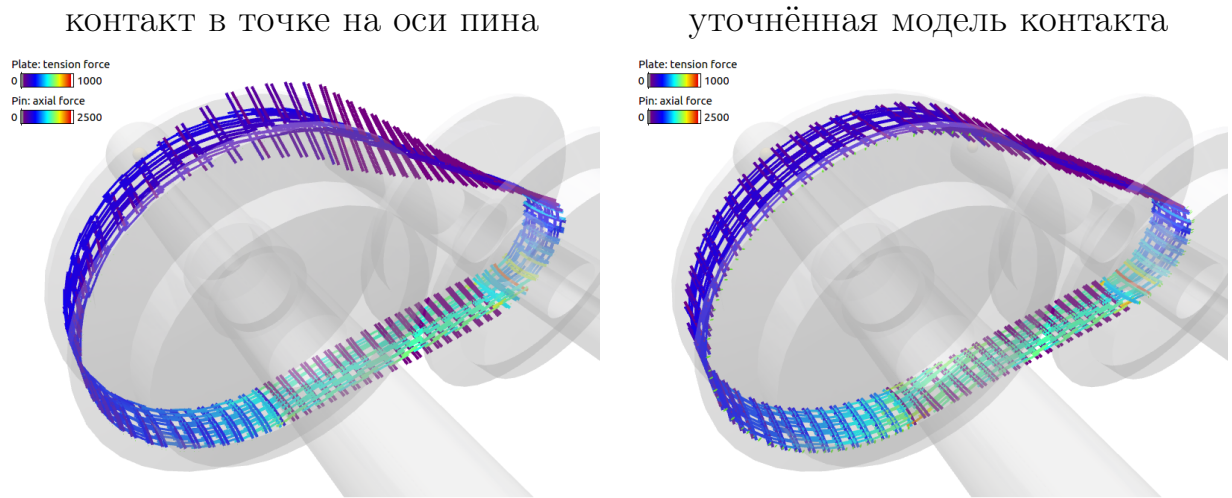


Рис. 1.68. Деформированная цепь (деформации преувеличены в 50 раз); распределение сил натяжения по пластинкам и осевых сил по пинам, модели (ж) (слева) и (е) (справа).

цепи и в каждом из них проследить за изменением величин в некотором временном интервале — в частности, найти минимум, максимум, среднее значение. На рис. 1.66 изображён недеформированный контур цепи на фоне полоски, показывающей минимумы и максимумы t_τ (сверху) и t_n (снизу) за последние 0,2 с расчёта. При этом отрицательные значения находятся внутри контура цепи, положительные — снаружи. Масштаб величин указан отрезком, нарисованным внутри контура. Из рисунка непосредственно видно, что в модели (е) перекося цепи значительно уменьшается при движении цепи по шайбам, а в модели (ж) этот эффект не наблюдается. Данные о перекося цепи дополнительно иллюстрирует рис. 1.68, где показана деформированная цепь в типичных для стационарного режима состояниях (но не стоит забывать, что параметры перекося колеблются во времени). Как уже отмечалось, различия поведения перекося цепи в моделях (е) и (ж) ожидаемы и связаны с моментом, препятствующим перекося цепи в модели (е) (см. рис. 1.29); в модели (ж) он отсутствует.

Все величины, относящиеся к пину или звену цепи, можно при помощи интерполяции отнести к фиксированным сечениям цепи и применить способ об-

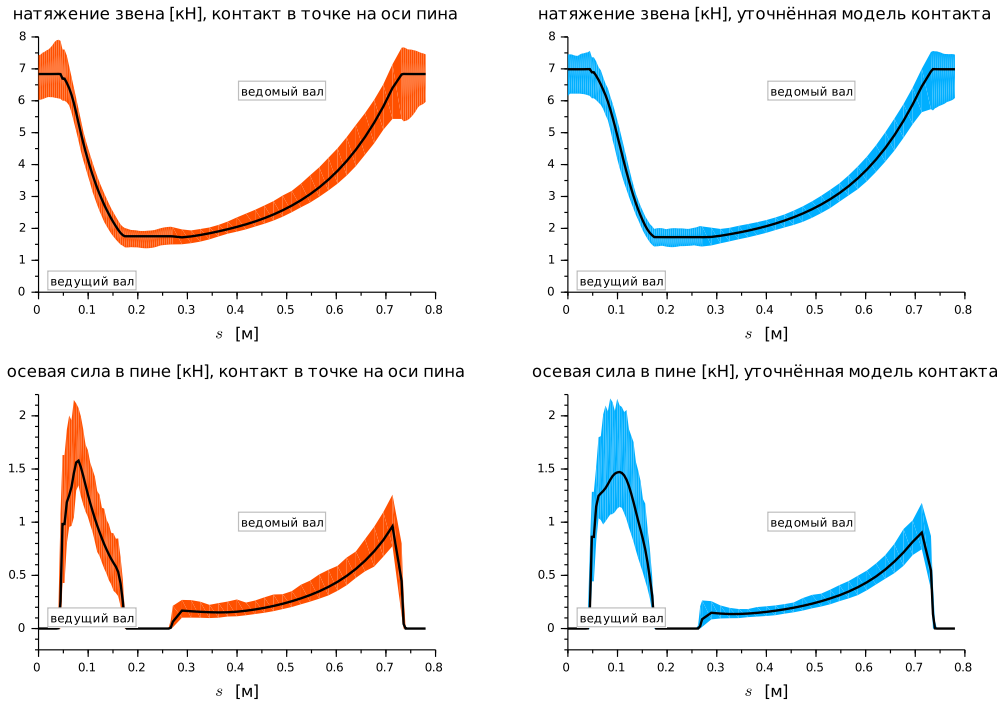


Рис. 1.69. Среднее значение, минимум и максимум по времени сил в цепи в стационарном режиме, модели (ж) (слева) и (е) (справа).

работки, описанный выше. Это даёт возможность получить данные, в частности, о распределениях по длине цепи средних по времени значений, минимумов и максимумов, что позволяет судить о размахе колебаний. Результаты такой обработки для натяжения звена и осевой силы в пине даны на рис. 1.69, для максимальных по модулю значений компонент изгибающего момента в пине — на рис. 1.70, для контактного давления — на рис. 1.71. Все эти данные приведены для моделей (е) и (ж); контактное давление — только для модели (е).

Следующая часть численных экспериментов посвящена исследованию того, как результаты расчётов зависят от модели пластинок в цепи при наличии перекоса, обусловленного изменением осевого положения одной из неподвижных шайб. Это позволяет судить о том, насколько целесообразно использовать те или иные модели пластинок. Рассмотрены три модели — (в), (г) и (д), см. табл. 1.1. Для каждой из них рассчитывался стационарный режим работы трансмиссии, описанный выше (200). При этом задавались различные отклонения d_0 осевого положения ведущей дальней шайбы (она неподвижна) от

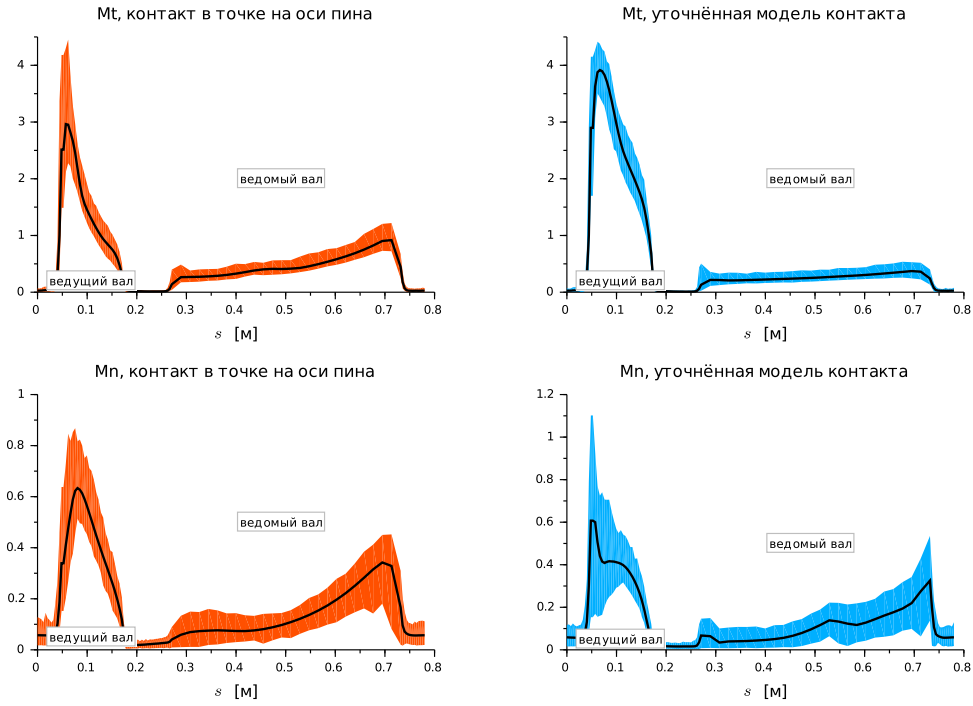


Рис. 1.70. Среднее значение, минимум и максимум по времени максимальных изгибающих моментов в пине в стационарном режиме, модели (ж) (слева) и (е) (справа).

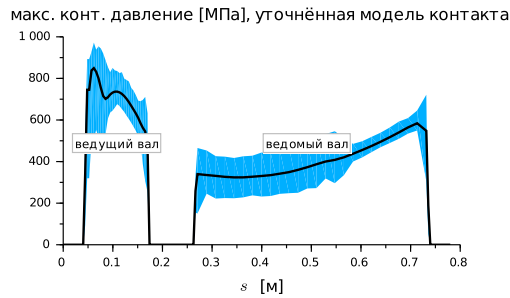


Рис. 1.71. Среднее значение, минимум и максимум по времени давления в контакте пин — шайба в стационарном режиме, модели (ж) (слева) и (е) (справа).

значения, обеспечивающего отсутствие перекоса — 0, 1 мм, 2 мм и 3 мм. Сравнились численно полученные глобальные параметры, характеризующие режим в целом, а также история изменения некоторых величин за один оборот цепи.

На рис. 1.72 показаны графики зависимости от d_0 сил натяжения в ведущей и ведомой ветвях цепи; силы, действующей со стороны цепи на шайбы ведомого вала в осевом направлении; КПД. Из их вида можно заключить, что с ростом перекоса натяжение цепи незначительно уменьшается; КПД также незначительно уменьшается; осевая сила, действующая на ведомые шайбы со стороны цепи

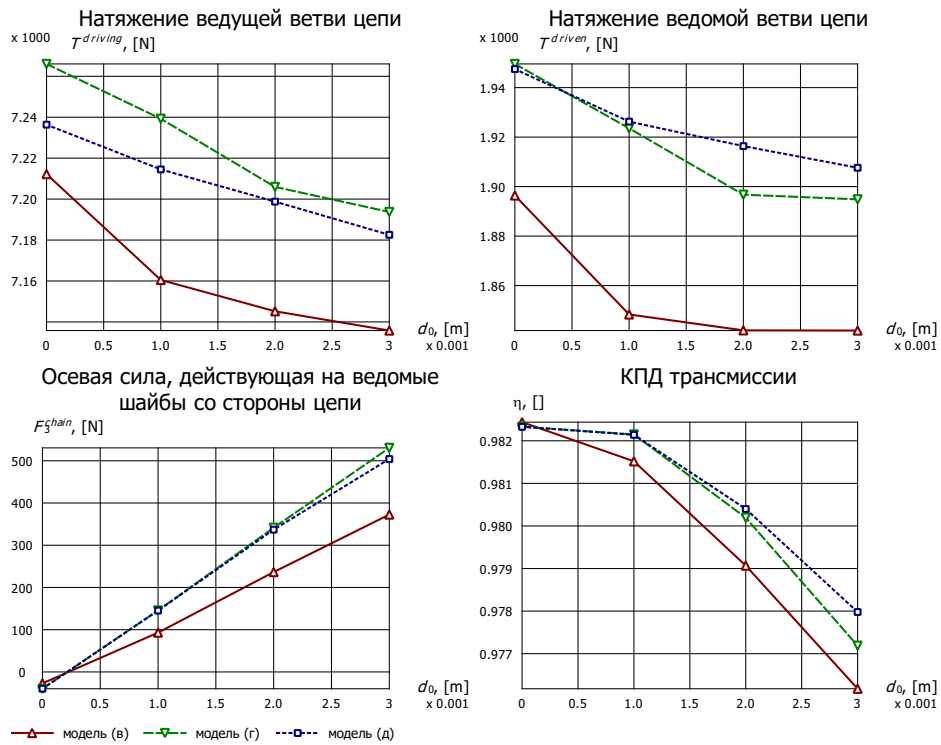


Рис. 1.72. Зависимость некоторых параметров стационарного режима от перекоса цепи для разных моделей пластинок.

увеличивается пропорционально величине перекоса. Также видно, что наиболее слабо эта сила меняется для модели (в), а наиболее сильно — для модели (г); в моделях (г) и (д) она меняется почти одинаково. Таким образом, цепь в модели (а) оказывается наименее жёсткой на сдвиг, что можно объяснить пренебрежением зависимости потенциальной энергии изгиба пластинки $\Pi_{p,p+1}^{link, shear}$ от деформации $\delta_{p,p+1}$ (см. стр. 96) в этой модели. В модели (д), как и ожидалось, жёсткость цепи на сдвиг оказалась меньше, чем в модели (в) из-за ограничения (1.172) на максимальный изгибающий момент в пластинке, однако разница с моделью (г) очень незначительна.

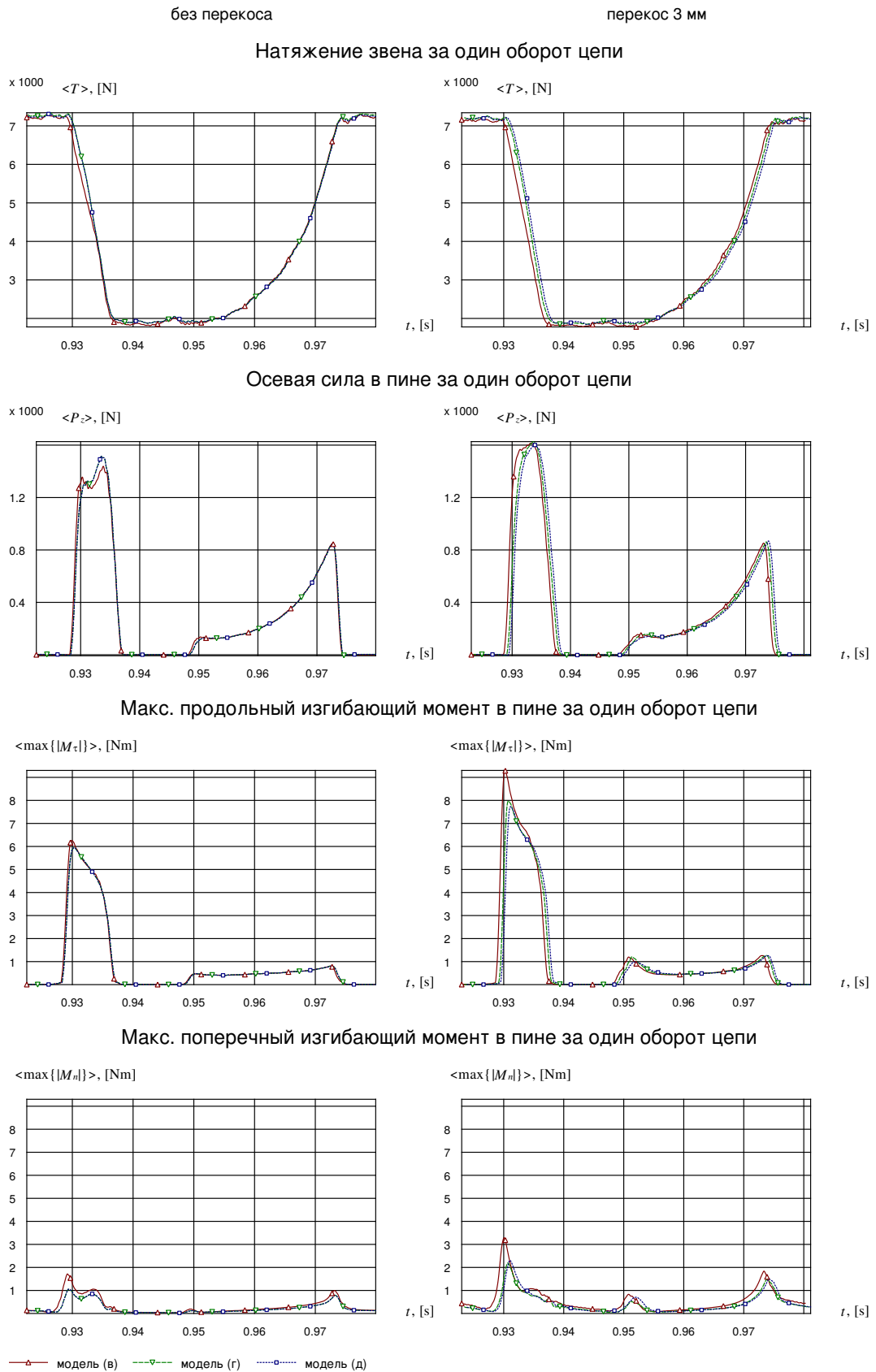


Рис. 1.73. Натяжение звена, осевая сила и макс. изгибающий момент в пине за один оборот в стационарном режиме для разных моделей пластинок (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

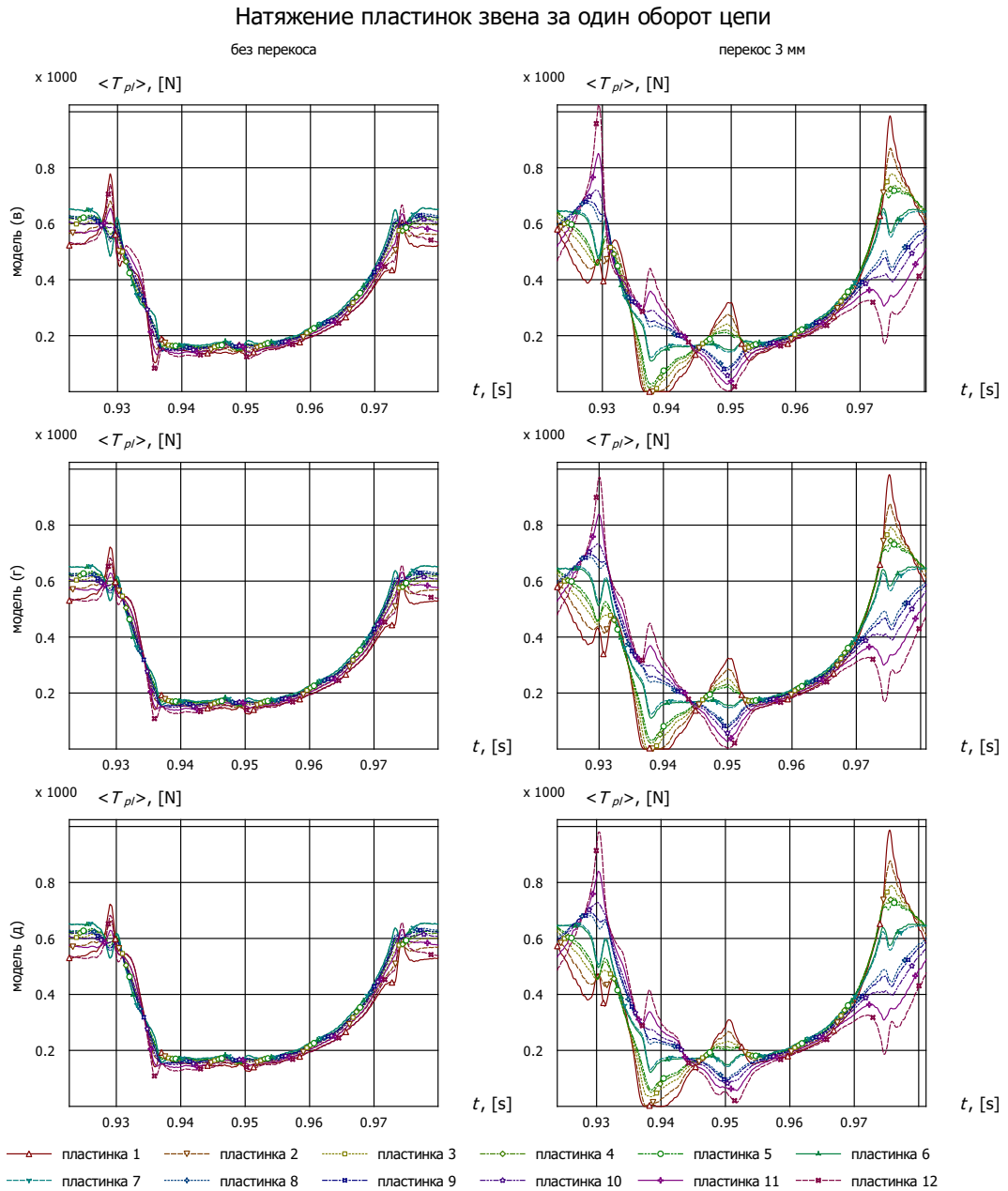


Рис. 1.74. Натяжение в пластинках звена цепи за один оборот в стационарном режиме для разных моделей пластинок и двух значений перекоса цепи (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

Далее, на рис. 1.73 показаны графики изменения величин в пине или звене цепи за один её оборот. Эти величины — натяжение звена, осевая сила в пине, максимальные по модулю компоненты изгибающего момента в пине. Слева — расчёты без перекоса ($d = 0$), справа — с перекосом $d_0 = 3$ мм. Результаты расчётов по всем моделям близки, как в отсутствие перекоса, так и при его наличии. Изгибающие моменты в пине для модели (в) несколько выше, чем

для моделей (г) и (д), независимо от перекоса.

На рис. 1.74 показано распределение сил натяжения по пластинкам звена; для каждой пластинки некоторого звена приводится график изменения натяжения в ней за один оборот цепи. Слева — расчёты без перекоса ($d = 0$), справа — с перекосом $d_0 = 3$ мм. Результаты для всех моделей похожи; для модели (в) натяжение пластинок чуть выше. Распределение сил натяжения по пластинкам цепи существенным образом зависит от величины перекоса d_0 , в отличие от натяжения всего звена.

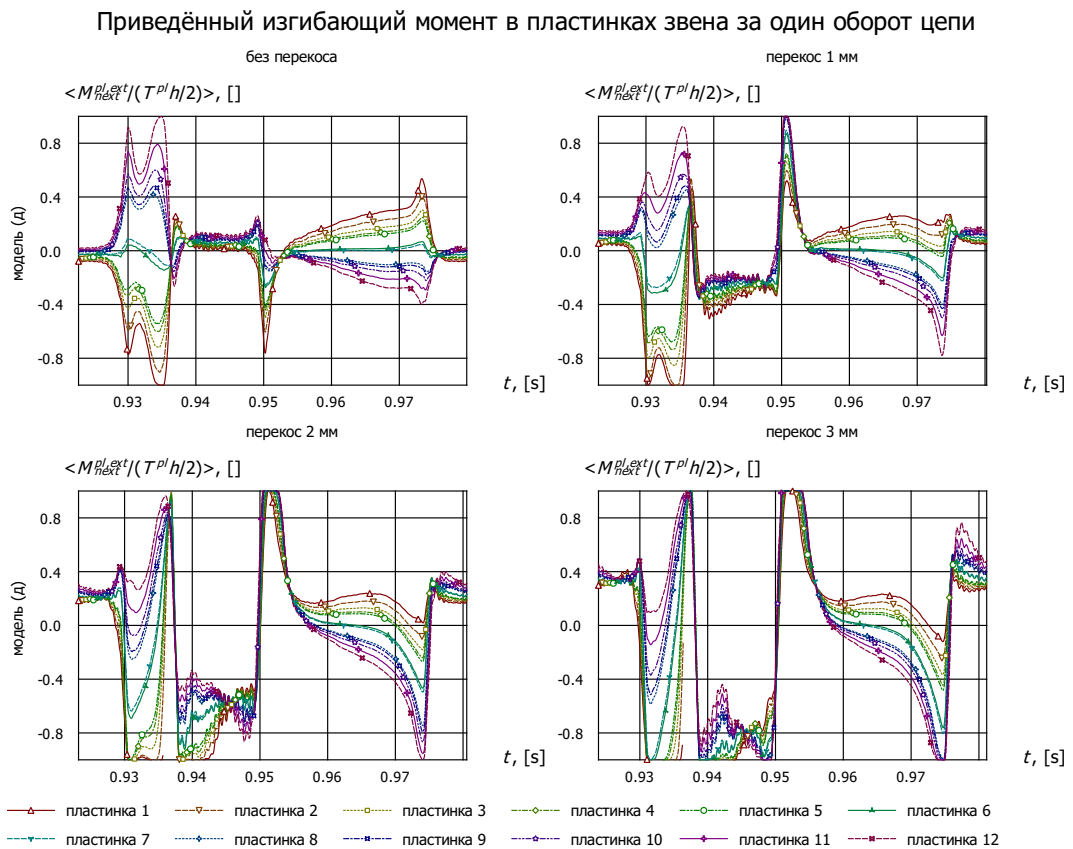


Рис. 1.75. Приведённый изгибающий момент в пластинках звена цепи за один оборот в стационарном режиме для разных значений перекоса цепи (скользящее среднее по времени, ширина окна 0,001 с).

На рис. 1.75 показаны графики приведённого изгибающего момента m (1.357) в пластинках звена цепи (изменение за один оборот цепи) для модели (д), для разных значений перекоса d_0 . Из них видно, что состояние контакта пластинки с одним из пинов некоторое время отличается от $\delta_2 = 0$ (см. стр. 1.36).

Чем больше перекося цепи, тем дольше и для бóльшего числа пластинок $\delta_2 \neq 0$. Более наглядную картину состояния пластинок в некотором типичном состоянии цепи при различных значениях перекося даёт рис. 1.76 — на нём каждая половинка пластинки имеет цвет, показывающий её состояние контакта с соответствующим пином (синий — $\delta = 0$, зелёный — $\delta > 0$ красный — $\delta < 0$). При увеличении перекося увеличивается число пластинок, состояние контакта с пинами у которых отличается от $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

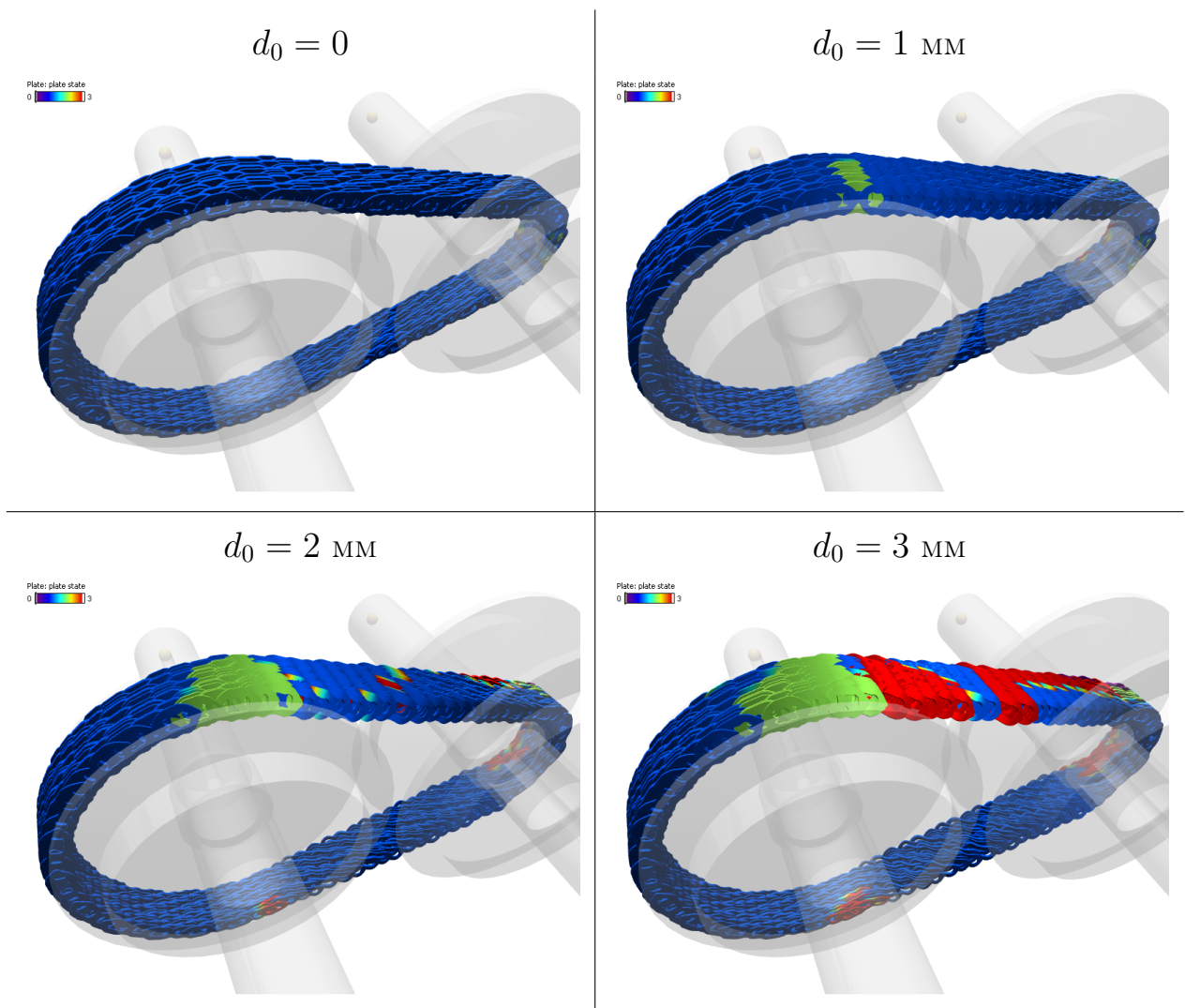


Рис. 1.76. Деформированные пластинки цепи и состояние контакта пин — пластинка для разных значений перекося цепи, модель (д).

В целом следует отметить, что целесообразность применения наиболее сложной модели контакта пин — пластинка в рассматриваемом режиме под вопросом, так как более простая модель с пластинками, прикреплёнными к пинам

жёстко, даёт близкие результаты. Не исключено, однако, что для других режимов (значительно менее нагруженных) результаты расчётов по моделям (г) и (д) будут отличаться сильнее.

Нестационарные режимы. Рассматриваемые здесь нестационарные режимы отличаются от стационарных тем, что желаемое значение одного из трёх основных параметров (крутящий момент M_1 на ведомом валу, скорость вращения n_1 ведущего вала или передаточное число i_{var}) линейно изменяется во времени, в то время как остальные два параметра постоянны. Системы стабилизации передаточного числа и угловой скорости ведомого вала обеспечивают близость актуальных значений этих параметров к желаемым в процессе расчёта динамики. В таблице 1.2 приведены данные режимов.

Таблица 1.2. Нестационарные режимы

название	M_1 , Нм	n_1 , об/мин.	i_{var}	длительность, с	модели трансмиссии
А	150–380	4000	0,45	2	(б), (е)
Б	200	1000–6000	0,45	2	(б), (е)
В	200	3000	0,45–2,4	5	(б)

Только в первом из этих переходных режимов (с изменением момента M_1) скорости вращения валов остаются близкими к постоянным номинальным значениям. Поэтому кинетическая энергия системы тоже колеблется вблизи постоянного значения, что делает возможным по результатам расчёта оценивать КПД трансмиссии как отношение выходной мощности ко входной. В других переходных режимах кинетическая энергия сильно меняется, и для расчёта КПД требуются формулы, учитывающие это.

Основной интерес при расчётах переходных режимов представляет уровень потерь в системе за счёт диссипации (в первую очередь, от действия сил трения в контакте пин — шайба), а также акустические характеристики, опре-

деляющие шум в диапазоне 0–5 кГц. Последние оценивают по спектрограммам интенсивности радиальных сил в опорах валов. Не останавливаясь здесь на анализе потерь (он будет рассмотрен в п. 1.8.1), рассмотрим примеры спектрограмм.

Спектрограммой функции $x(t)$ мы называем растровое графическое изображение из n строк и m столбцов, в котором каждый (i -й) столбец описывает интенсивность колебаний на разных частотах в определённый момент времени t_i , а каждая (j -я) строка — историю изменения интенсивности колебаний на определённой частоте f_j (в Герцах). Цвет пикселя обозначает величину интенсивности. Каждый столбец вычисляется при помощи быстрого преобразования Фурье [74], выполненного над функцией $x(t)$ на отрезке $t \in T_i \equiv [t_i - T/2, t_i + T/2]$. Ширина окна T определяет разрешение по частоте: $f_{j+1} = f_j + T^{-1}$. Шаг дискретизации выборки временного интервала T_i определяет наивысшую частоту, которую можно получить в преобразовании Фурье.

Предварительно сделаем важное для акустики замечание: звенья цепи имеют разные длины — цепь определённым образом *рандомизирована*. Если бы все звенья были одной длины, при постоянной скорости движения возникала бы возбуждающая колебания частота f^{link} , равная обратной величине времени поступательного движения цепи на длину звена (400–6000 Гц, как указано в п. 1.3.4). Цель рандомизации состоит в том, чтобы эту частоту исключить. При этом, конечно, появляется возбуждающая частота f^{chain} , равная обратной величине времени оборота всей цепи (5–70 Гц) — это более предпочтительно, так как спектр частот колебаний в акустическом диапазоне в итоге становится ближе к непрерывному, и интенсивность колебаний на каждой отдельной частоте снижается. Чтобы показать влияние рандомизации цепи на акустику, расчёты по модели (б) проделаны как для рандомизированной цепи, так и для однородной (с одинаковыми звеньями) цепи; расчёты по модели (е) делались лишь для рандомизированной цепи.

Спектрограммы интенсивности радиальных сил здесь приводятся лишь

для одной из опор (в целях экономии места; качественные различия между спектрограммами в разных опорах отсутствуют) — была выбрана дальняя опора ведомого вала.

Чтобы осознать и адекватно интерпретировать данные, полученные на спектрограммах, были построены диаграммы, аналогичные диаграммам Кэмпбелла [75]. На них изображены частоты собственных колебаний валов с шайбами, а также частота возбуждения (f^{chain} для рандомизированной цепи и f^{link} для однородной) и другие частоты, связанные с последней целочисленными соотношениями (вида $k f^{chain}$ для рандомизированной цепи и вида $\frac{k}{3} f^{link}$ для однородной, с целым k); кроме того, для рандомизированной цепи, содержащей звенья двух типов (длинные и короткие) приводятся частоты $f^{link,long}$, $f^{link,short}$ и f^{link} . Наличие частоты возбуждения $\frac{1}{3} f^{link}$ в однородной цепи обусловлено следующим обстоятельством. Звенья однородной цепи, хоть и имеют одинаковые длины, всё же различаются между собой: дело в том, что координаты пластинок $\xi_{p,p+1}^k$ (см. стр. 72) в разных звеньях разные. Количество звеньев в цепи кратно трём, это связано с тем, что «узор плетения» цепи имеет период 3, то есть $\xi_{p,p+1}^k = \xi_{p+3,p+4}^k$ — отсюда и возникает частота $\frac{1}{3} f^{link}$ (рис. 1.77).

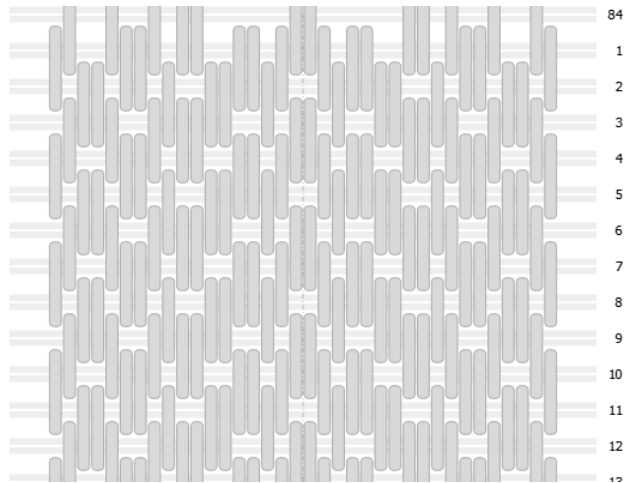


Рис. 1.77. Расположение пластинок в звеньях цепи.

Поясним методику расчёта собственных частот, изображённых на диаграммах. Система ОДУ динамики трансмиссии, записанная в нормальной форме,

имеет вид

$$\dot{X} = F(t, X),$$

где X — столбец, составленный из обобщённых координат и скоростей цепи, валов, шайб; в него также входят переменные состояния системы стабилизации. Переупорядочив элементы X так, что в его начале находятся обобщённые координаты и скорости валов и шайб, а далее идут все остальные переменные, систему ОДУ можно переписать и так:

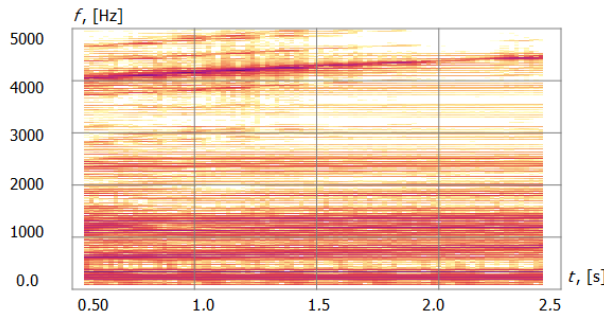
$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(t, X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 &= F_2(t, X_1, X_2) \end{aligned}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}.$$

Обобщённые координаты валов и шайб являются элементами столбца X_1 , все остальные переменные входят в X_2 . Собственные частоты колебаний валов понимаются здесь как собственные частоты колебаний линеаризованной около некоторого состояния системы ОДУ для X_1 , при этом t и X_2 считаются постоянными. Таким образом, для определения частот имеем следующую проблему собственных значений:

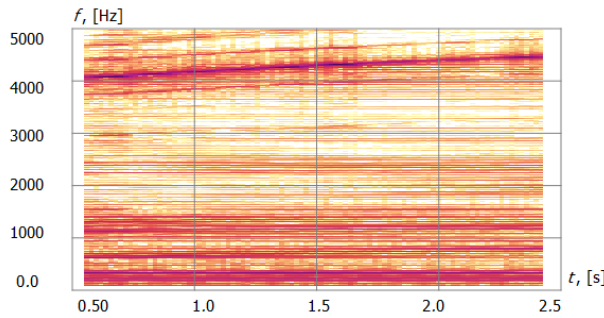
$$\lambda X_1 = J_{11} X_1, \quad J_{11} \equiv \frac{DF_1}{DX_1}. \quad (1.358)$$

Исходное состояние для расчёта частот берётся из решения динамической задачи для переходного режима. В выбранные моменты времени $t^{(i)}$ вычисляются собственные числа $\lambda_k^{(i)}$ якобиана J_{11} . В качестве частот (в Герцах) берутся $f_k^{(i)} = |\operatorname{Im} \lambda_k^{(i)}| / (2\pi)$, при этом рассматриваются лишь собственные числа с ненулевыми мнимыми частями. Таким образом, можно трактовать колебания валов и шайб как вынужденные, вынуждающим фактором является цепь. Как следует из приведённых ниже рисунков, весьма сложные колебательные процессы в самой цепи можно игнорировать при объяснении спектрограмм сил в опорах.

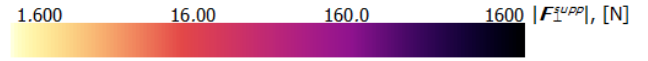
На рис. 1.78 изображены спектрограммы интенсивности радиальной силы в дальней опоре ведомого вала для режима А: сверху слева — расчёт по модели (б), снизу слева — расчёт по модели (е). Справа на том же рисунке изображена диаграмма Кэмпбелла, вычисленная по указанной выше методике. Спектро-



Спектрограмма, модель (б)



Спектрограмма, модель (е)



Масштаб интенсивности

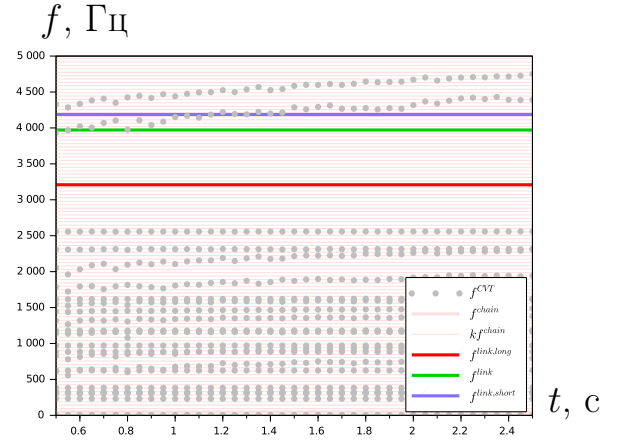


Диаграмма Кэмпбелла, модель (б)

Рис. 1.78. Спектрограммы интенсивности радиальной силы в опоре CVT и диаграмма Кэмпбелла, режим А, рандомизированная цепь.

граммы и диаграмма Кэмпбелла хорошо согласуются между собой. Области высокой интенсивности колебаний наблюдаются на частотах, близких к собственным частотам валов с шайбами. Благодаря проделанному анализу частот и форм колебаний, то есть решению задачи (1.358), легко идентифицировать формы колебаний валов, соответствующие частотам с высокой интенсивностью. Например, первые формы изгибных колебаний валов, а также некоторые другие, в частности, форма, соответствующая частоте, меняющейся от 4 до 4,5 кГц, изображены на рис. 1.79 (все вычислены при $t = 0,5$ с). Отметим также, что спектрограммы сил в опорах валов, рассчитанные по моделям (б) и (е) отличаются незначительно, хотя и видно, что интенсивности на частотах 1–1,5 кГц несколько ниже в случае модели (е). Поэтому оправдано использование более простой модели (б) для расчётов динамики с целью оценки шума по спектрограммам (модель (е) требует в несколько раз больше времени при расчёте ди-

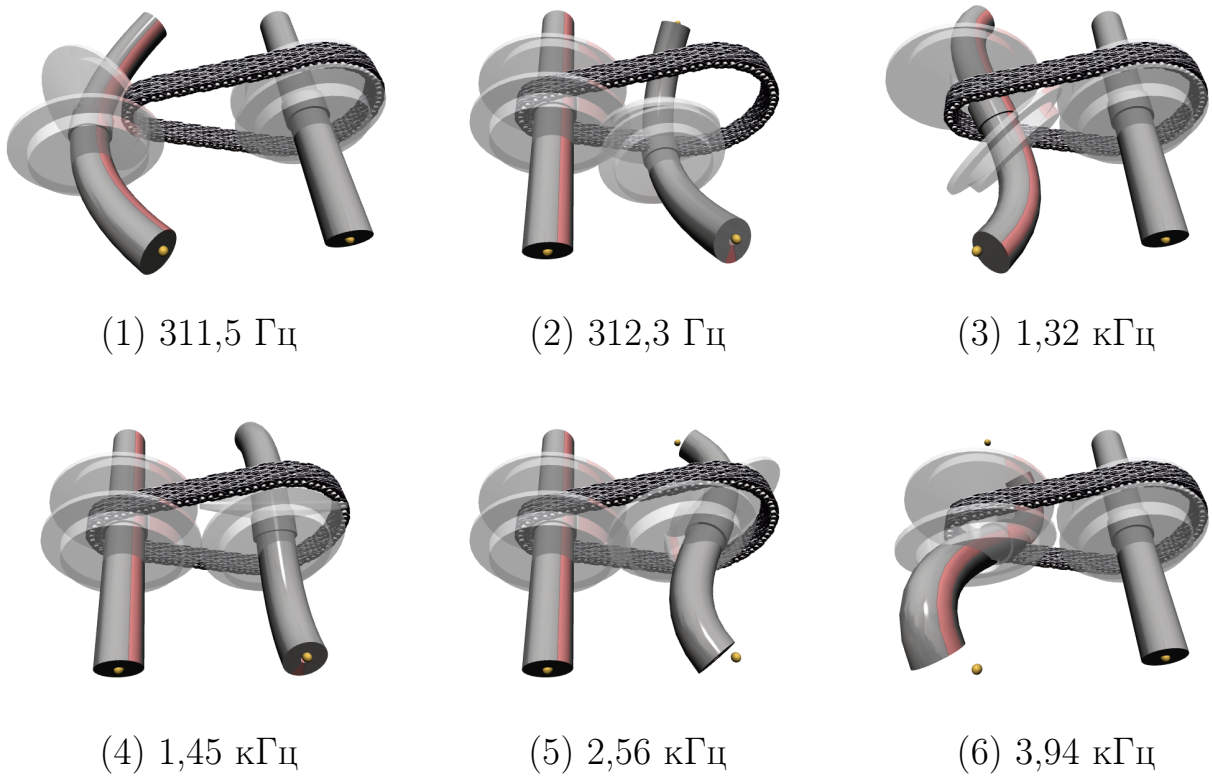


Рис. 1.79. Некоторые формы колебаний валов с шайбами (начало режима А).

намики).

В расчёте режима А с однородной цепью спектрограммы совершенно иные: как уже говорилось, возбуждающие частоты значительно выше. В диапазон 1–5 кГц из них попадают лишь частоты $\frac{1}{3}f^{link}$, $\frac{2}{3}f^{link}$, f^{link} . На этих частотах и колеблются опоры валов (рис. 1.80). При этом частота f^{link} в начале режима оказывается очень близкой к собственной частоте валов с шайбами 3,94 кГц, а частота $\frac{1}{3}f^{link}$ близка к собственной частоте 1,32 кГц; ближайшая к возбуждающей частоте $\frac{2}{3}f^{link}$ собственная (2,56 кГц) находится несколько дальше, чем для двух других возбуждающих частот, и, как видно из спектрограммы, интенсивность колебаний на ней не так велика, как на двух других частотах. Формы колебаний, соответствующие этим частотам в начале режима, изображены на рис. 1.79.

Спектрограммы интенсивности радиальных сил в опорах для режимов Б (рис. 1.81, 1.82) и В (рис. 1.83, 1.84) могут быть поняты при помощи диаграмм Кэмпбелла аналогично тому, как это сделано для режима А. Во всех случаях

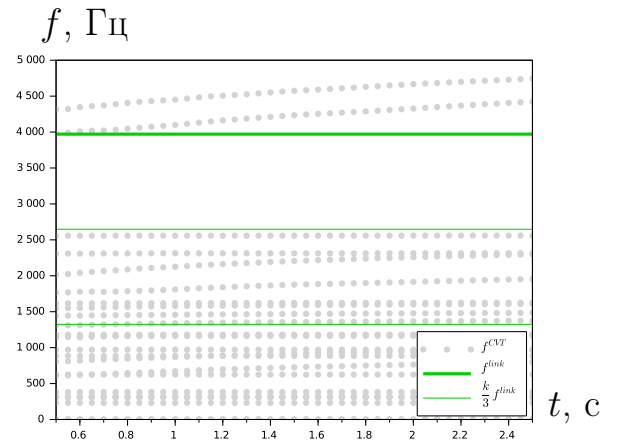
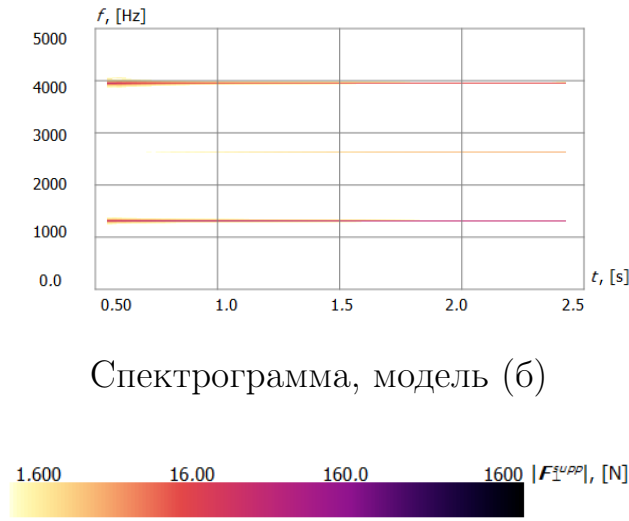
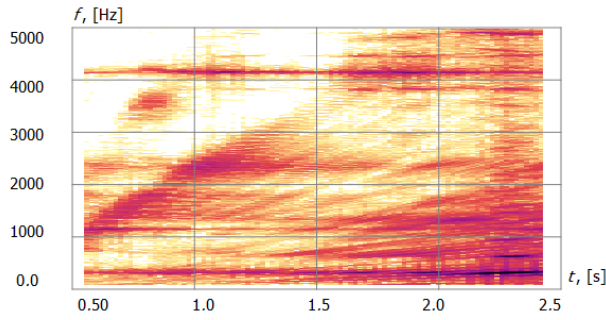
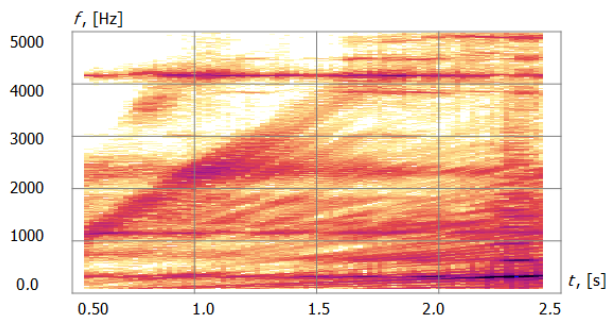


Рис. 1.80. Спектрограммы интенсивности радиальной силы в опоре CVT и диаграмма Кэмпбелла, режим А, однородная цепь.

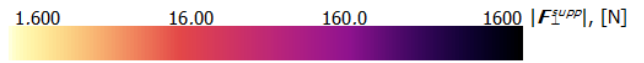
возбуждающие частоты пропорциональны скорости поступательного движения цепи. Последняя в режиме Б линейно возрастает, а в режиме В убывает по некоторому закону — его можно приближённо найти, например, выразив радиус контакта ведущего вала через передаточное число при помощи соотношений (1.36).



Спектрограмма, модель (б)



Спектрограмма, модель (е)



Масштаб интенсивности

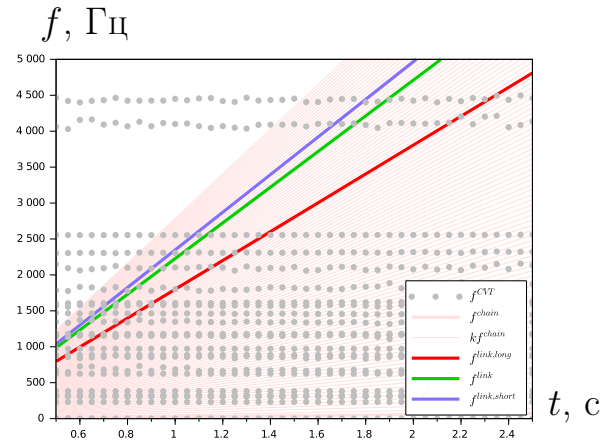
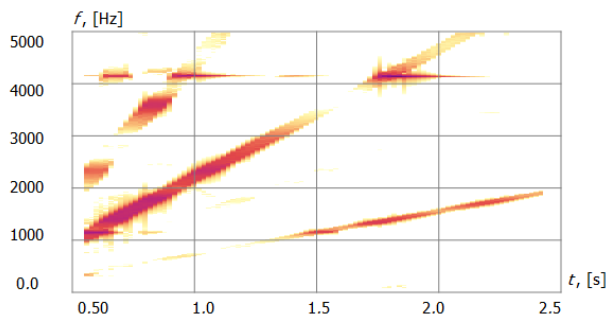
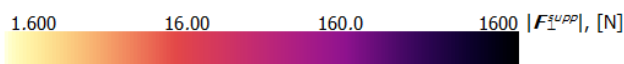


Диаграмма Кэмпбелла, модель (б)

Рис. 1.81. Спектрограммы интенсивности радиальной силы в опоре CVT и диаграмма Кэмпбелла, режим Б, рандомизированная цепь.



Спектрограмма, модель (б)



Масштаб интенсивности

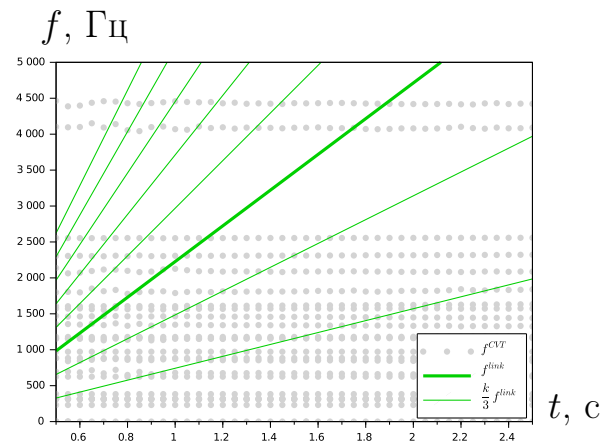


Диаграмма Кэмпбелла

Рис. 1.82. Спектрограммы интенсивности радиальной силы в опоре CVT и диаграмма Кэмпбелла, режим Б, однородная цепь.

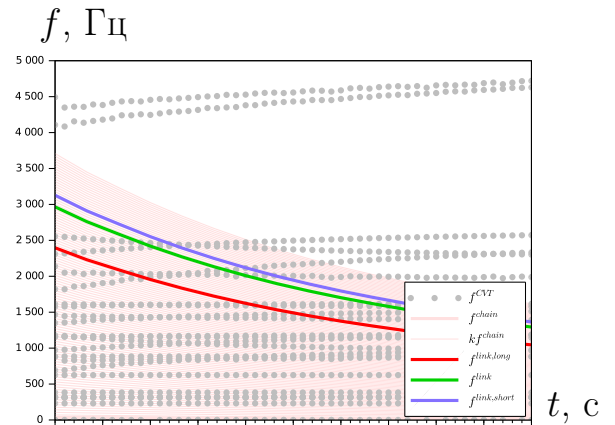
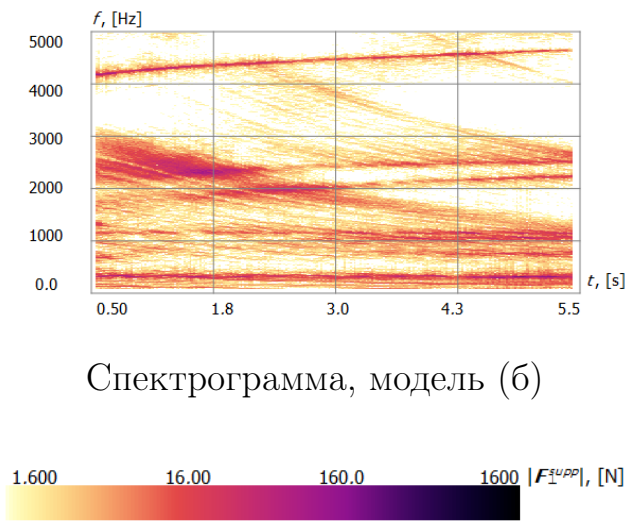


Рис. 1.83. Спектрограммы интенсивности радиальной силы в опоре CVT и диаграмма Кэмпбелла, режим В, рандомизированная цепь.

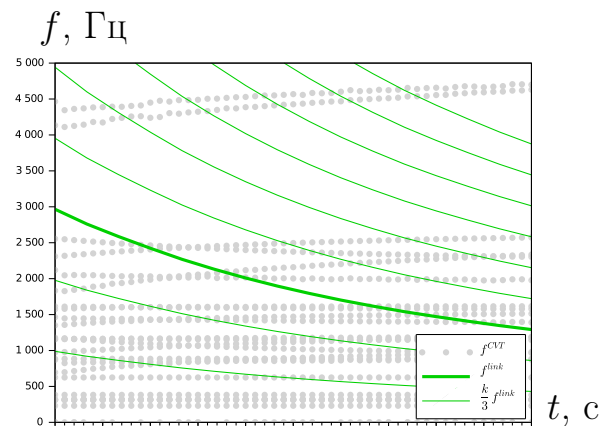
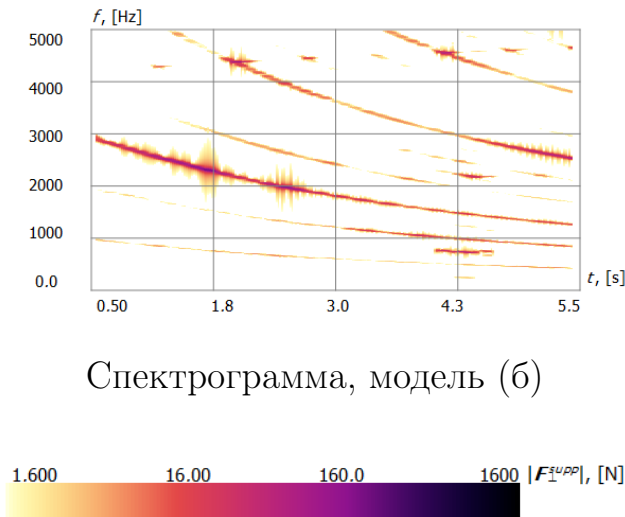


Рис. 1.84. Спектрограммы интенсивности радиальной силы в опоре CVT и диаграмма Кэмпбелла, режим В, однородная цепь.

Из сопоставления спектрограмм с диаграммами Кэмпбелла видно, что подход к оценке частот колебаний в опорах валов на основе решения задачи (1.358) является плодотворным, хотя и не лишённым недостатков. Если сравнить решения этой задачи с решением другой, в которой все участвуют все обобщённые переменные, то есть с задачей

$$\mu X = JX, \quad J \equiv \frac{DF}{DX}, \quad (1.359)$$

то спектры, разумеется, будут разными. Размерность задачи (1.359) выше, и в спектр μ войдут частоты колебаний всей системы в целом, включая цепь, а в спектре λ должны оказаться частоты и формы, далёкие от каких-либо решений (1.359) — например, те, в которых формы содержат осевое движение шайб. Представляется, что задача (1.359) более точно описывает картину колебаний, но есть две трудности. Во-первых, о собственном векторе этой задачи трудно сказать, что это форма колебаний вала или цепи: соотношения амплитуд таковы, что, как правило, кажется, что колеблется в основном цепь, тогда как фактически вполне может оказаться, что собственные колебания на данной частоте возможны именно благодаря валу. Чтобы в этом убедиться, надо найти в спектре λ близкое к заданному μ значение и сравнить соответствующие собственные векторы. Вторая трудность связана с тем, что цепь движется в поступательном направлении. Оценки показывают, что волновая скорость при низкочастотных колебаниях цепи (например, поперечных) лишь незначительно превосходит максимальную скорость её поступательного движения. Поэтому для таких колебаний существенен эффект Доплера [76; 77], что ставит под сомнение ценность содержащихся в спектре μ частот и соответствующих форм колебаний. Всё же можно найти собственные частоты различных колебаний цепи и, с учётом доплеровского смещения, добавить их на диаграмму Кэмпбелла, чтобы трактовать эти частоты как возбуждающие. Например, если известно, что имеются колебания цепи с частотой f (в Герцах) и длиной волны l , то следует считать, что возбуждающие частоты для шайб равны $|f \pm v^{chain}/l|$, где v^{chain} — скорость

движения цепи. На рис. 1.85 показаны частоты колебаний цепи в режиме А — решалась задача (1.358), но в X_1 на этот раз входили обобщённые координаты и скорости цепи. На этом рисунке частоты даны без учёта доплеровского

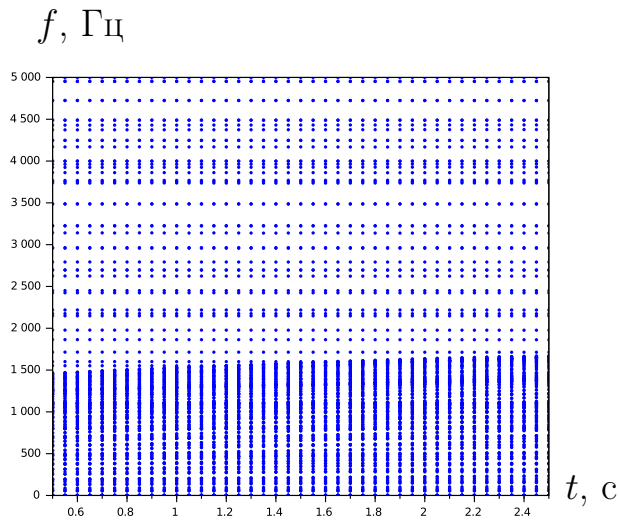


Рис. 1.85. Собственные частоты колебаний цепи, модель (а), режим А

смещения, так как найти длину волны для каждого из этих примерно 190 колебаний в каждый из 41 рассмотренных моментов времени было затруднительно. Всё же отметим, что в режиме А низшая частота поперечных колебаний цепи меняется от 130 до 169 Гц на прямолинейном участке с большим натяжением и от 105 до 118 Гц на участке с меньшим натяжением. Считая длину волны равной удвоенной длине прямолинейного участка (0,39 м), при скорости цепи 37 м/с получаем доплеровское смещение частоты 96 Гц. Вообще же формы собственных колебаний цепи разнообразны, соответствующие собственные частоты занимают широкий диапазон; некоторые формы представлены на рис. 1.86. Попытки использовать информацию о собственных колебаниях цепи указанным выше способом едва ли позволяют получить более ясную картину, чем получается при использовании диаграмм Кэмпбелла с возбуждающими частотами, обусловленными дискретной структурой цепи.

Вместо задачи (1.358) для построения диаграмм Кэмпбелла можно также попытаться рассмотреть частоты и формы колебаний валов с шайбами в отсут-

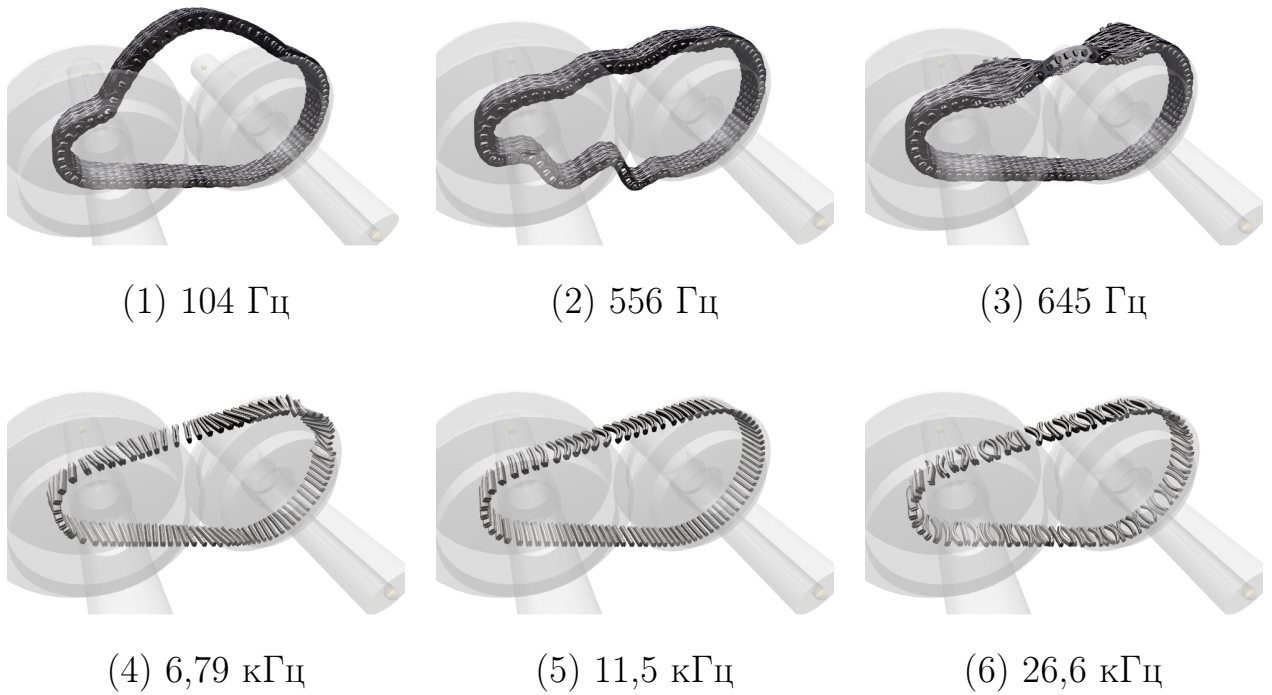


Рис. 1.86. Некоторые формы колебаний цепи (начало режима А).

ствие цепи. Для этого достаточно решать ту же задачу, но перед вычислениям якобиана J_{11} положить контактную жёсткость пин — шайба равной нулю. Такой подход, однако, не позволяет проследить за изменением собственных частот в процессе переходного режима: эти изменения, по-видимому, связаны преимущественно с нелинейностью упругой характеристики контактного взаимодействия между пином и шайбой.

1.8. Сопоставление численных и экспериментальных данных

Доступные автору экспериментальные данные по работе бесступенчатой трансмиссии оказались весьма скудными. Они относятся к измерениям КПД трансмиссии и её шума в диапазоне до 5 кГц. В целях верификации разработанных математических моделей трансмиссии эти данные были, насколько возможно, сопоставлены с результатами численных экспериментов. Следующие подразделы посвящены этому сопоставлению. Все имеющиеся эксперименталь-

ные данные относятся к двум конструкциям, отличающимся лишь формой контактных поверхностей шайб: в одном случае эти поверхности конические, в другом — тороидальные.

1.8.1. КПД трансмиссии

В натурном эксперименте были реализованы переходные режимы движения трансмиссии. В каждом из режимов передаточное число и скорость вращения ведущего вала были фиксированы, а крутящий момент M_1 на ведущем валу линейно изменялся от 20 до 450 Нм в течение 30 с. Во всех режимах скорость вращения ведущего вала составляла 3000 об/мин. Режимы отличались друг от друга значением передаточного числа i_{var} — оно менялось от 0,45 до 2,3. В каждом режиме измерялся КПД. Проведены две серии экспериментов — для конических и тороидальных шайб. Полученные данные позволили построить КПД трансмиссии как функцию крутящего момента M_1 и передаточного числа i_{var} . Кроме того, из экспериментов известны усилия F_1 и F_2 , сжимающие шайбы на ведущем и ведомом валах соответственно. Их отношение F_1/F_2 тоже можно представить как функцию M_1 и i_{var} . Указанные экспериментальные данные представлены на рис. 1.87 (КПД) и рис. 1.88 (отношение сил, сжимающих шайбы).

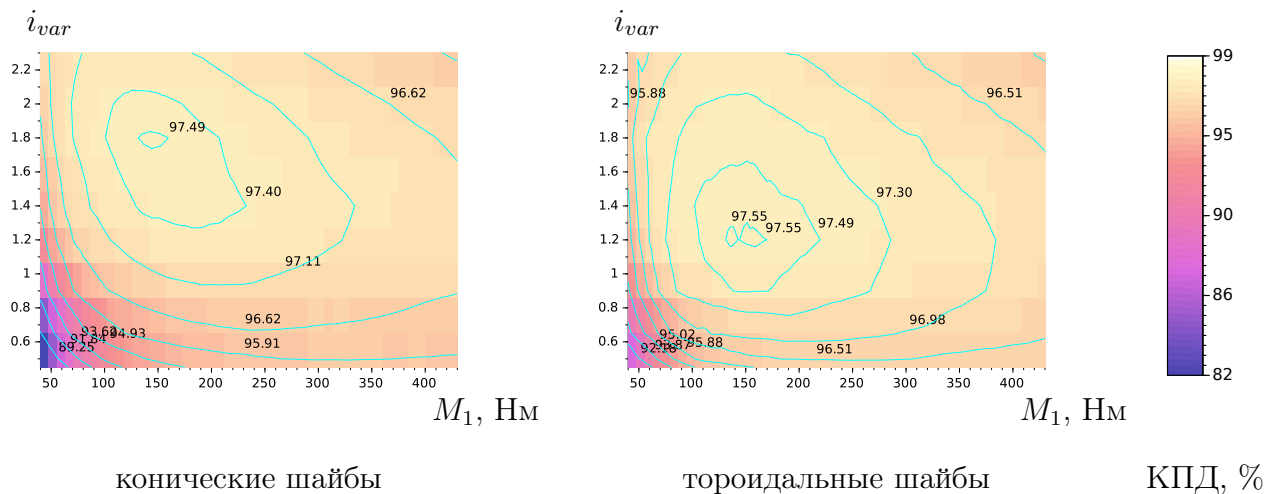


Рис. 1.87. Экспериментально измеренный КПД бесступенчатой трансмиссии.

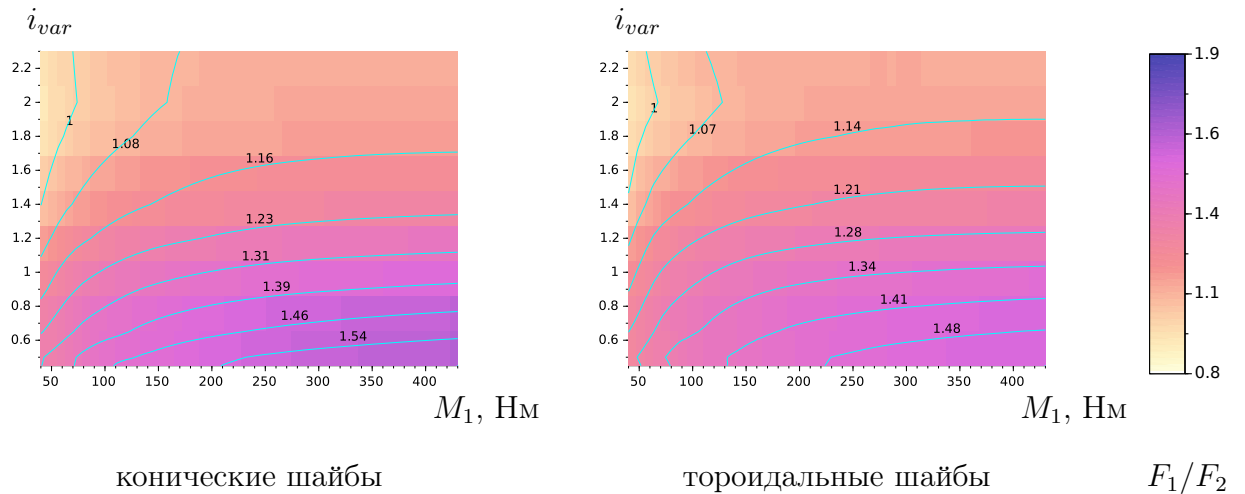


Рис. 1.88. Экспериментально измеренное отношение сил, сжимающих шайбы.

Аналогичные данные были получены в численных экспериментах. Для сокращения времени счёта длительность переходного режима в них составила 10 с (вместо 30 с в натурном эксперименте); в остальном численный эксперимент повторял натурный, насколько это возможно. Была рассмотрена модель модель (д) трансмиссии — см. табл. 1.1 (в частности, в этой модели каждый пин в цепи состоит из двух связанных половинок). Полученные КПД и отношение сил, сжимающих шайбы, представлены на рис. 1.89 и рис. 1.90 соответственно.

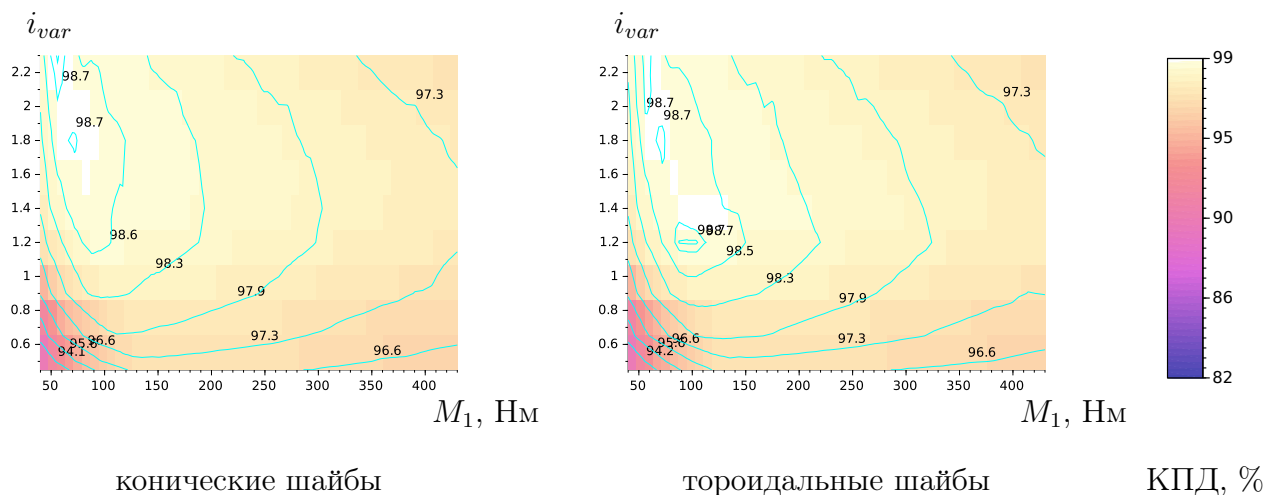


Рис. 1.89. КПД бесступенчатой трансмиссии в численных экспериментах по модели (д).

Сравнивая экспериментальные и численно полученные для модели (д) значения КПД на рис. 1.87 и рис. 1.89, отметим следующее.

- Уровень значений КПД, измеренных в эксперименте и полученных чис-

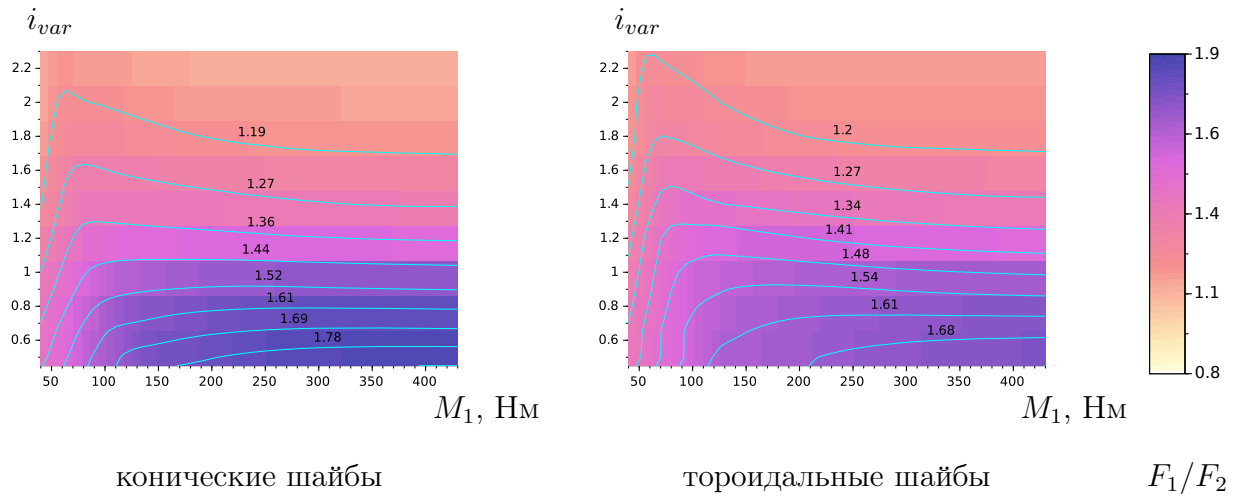


Рис. 1.90. Отношение сил, сжимающих шайбы, в численных экспериментах по модели (д).

ленно, один и тот же. Максимальный КПД в численных экспериментах равен 98,7%, в натуральных — 97,5%. Различие максимумов естественно объяснить неучтёнными в математической модели факторами демпфирования.

- Характер изменения КПД во всех случаях один и тот же: на плоскости $M_1 - i_{var}$ имеется один максимум.
- И в натурном, и в численном экспериментах максимальное значение КПД в конструкции с тороидальными шайбами несколько выше, чем в конструкции с коническими. Различие составляет 0,06% в натурном эксперименте и 0,11% в численном.
- И в натурном, и в численном экспериментах максимальное значение КПД достигается при передаточном числе 1,8 в конструкции с коническими шайбами и 1,2 в конструкции с тороидальными шайбами.
- В численном эксперименте максимальное значение КПД достигается при меньших значениях крутящего момента M_1 , чем в натурном: в натурном эксперименте для обеих конструкций максимум находится на уровне $M_1 = 150$ Нм, в численном — 65 Нм для конических шайб и 110 Нм для тороидальных.

Сравнивая отношения сил, сжимающих шайбы, в натурном эксперименте (рис. 1.88) и в расчётах по модели (д) (рис. 1.90), обнаруживаем следующее.

- Характер изменения отношения F_1/F_2 похож в натурном и численном экспериментах; однако в натуральных экспериментах при фиксированном i_{var} всегда наблюдается рост F_1/F_2 с ростом M_1 , а в численных — лишь при маленьких моментах или маленьких передаточных числах.
- И в натурном, и в численном экспериментах отношение F_1/F_2 меняется для конструкции с коническими шайбами в более широком диапазоне, чем для конструкции с тороидальными шайбами. Это согласуется с исследованием устойчивости равновесия в п. 1.4.1: конструкция с коническими шайбами более устойчивая, а с тороидальными — более управляемая.
- В численном эксперименте отношение F_1/F_2 всегда несколько больше, чем в натурном.

Различие между численными и экспериментальными значениями осевых сил, сжимающих шайбы, требует дальнейшего исследования. Возможными причинами этого могут быть неправильно вычисленные по давлениям в гидравлических камерах экспериментальные значения сил, не вполне соответствующий действительности закон трения в контакте пин — шайба или каких-либо параметров модели, неучёт какого-либо существенного фактора, например, деформации шайб.

1.8.2. Акустика трансмиссии

В натурном эксперименте был реализован переходный режим с изменением передаточного числа i_{var} : оно менялось линейно от 2,38 до 0,43 в течение 30 с. Другие основные параметры режима были фиксированы: крутящий момент на ведущем валу $M_1 = 100$ Нм, скорость вращения ведущего вала $n_1 = 3000$ об/мин. Измерялся спектр акустических колебаний воздуха вблизи

работающей трансмиссии в диапазоне 20–5000 Гц (подробности методики измерений автору неизвестны). По результатам натурального эксперимента представлены спектрограммы интенсивности акустических колебаний, а также графики усреднённой по времени интенсивности в зависимости от частоты, отнесённой к частоте оборота цепи f^{chain} (см. стр. 217).

Экспериментальные данные представлены на рис. 1.91.

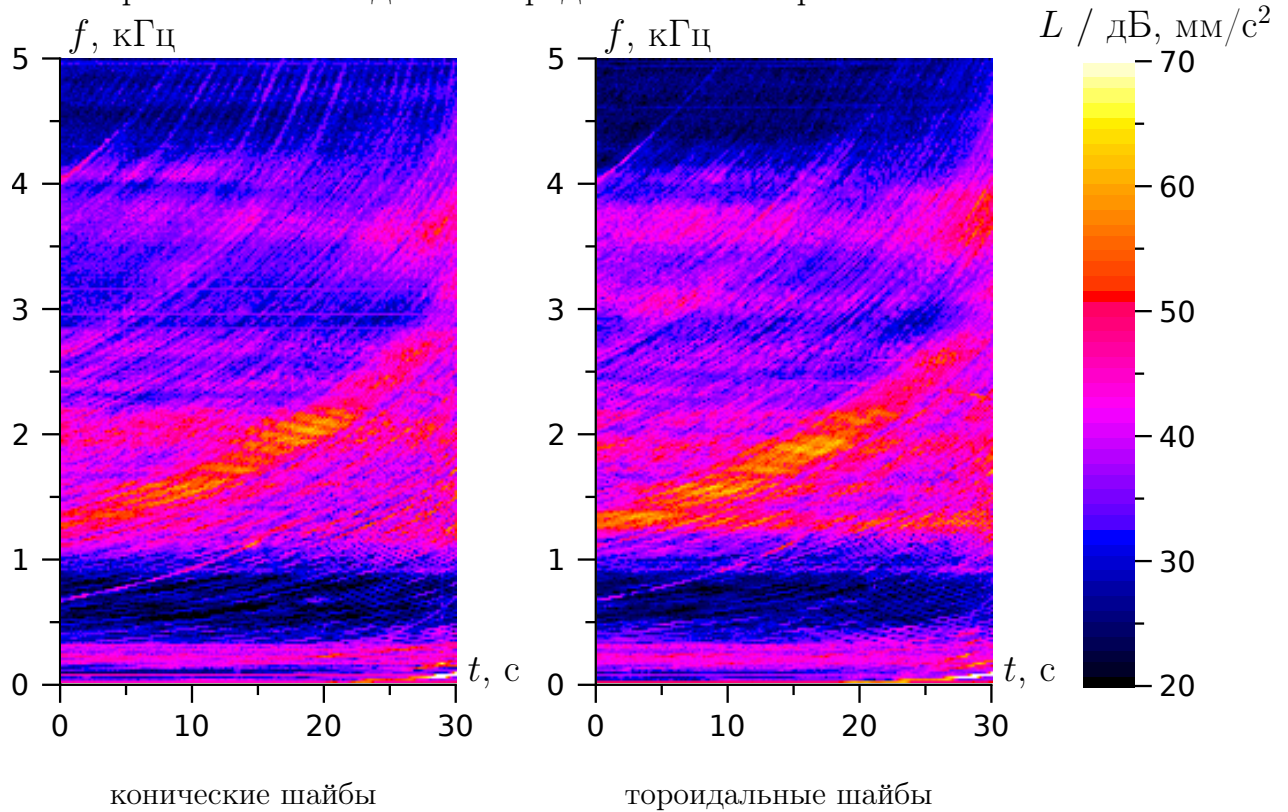


Рис. 1.91. Спектрограммы акустических колебаний, вызванных бесступенчатой трансмиссией (натурный эксперимент).

В численном эксперименте были воспроизведены условия натурального эксперимента. Использовалась модель (е) — см. табл. 1.1. Акустические колебания воздуха, конечно, не рассчитывались. Считая, что шум определяется в основном колебаниями в опорах валов, мы приводим здесь спектрограммы радиальных сил в них, а также усреднённые по времени интенсивности на частотах, отнесённых к частоте оборота цепи.

Сравнивая экспериментальные (рис. 1.91, 1.92) и расчётные (рис. 1.93, 1.94) данные, отметим следующее.

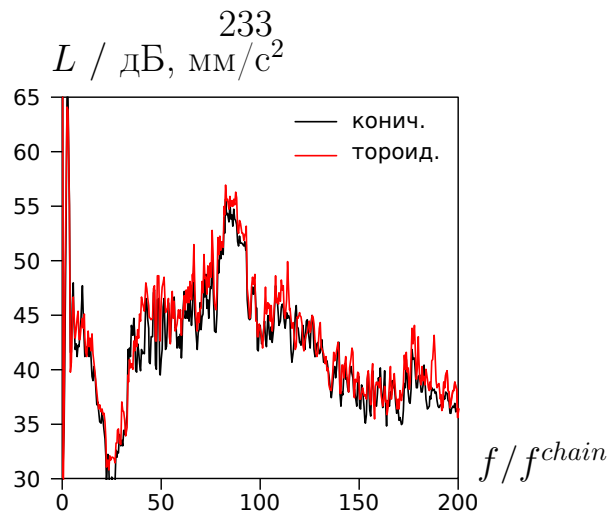


Рис. 1.92. Усреднённая интенсивность колебаний на частотах, отнесённых к частоте оборота цепи f^{chain} (натурный эксперимент).

- Во всех случаях на спектрограммах отчётливо видны полосы на частотах, кратных частоте оборота цепи f^{chain} (эти частоты возрастают во времени, так как передаточное число уменьшается, а скорость ведущего вала постоянна; возрастание более быстрое, чем линейное). Как было установлено в п. 1.7, в случае рандомизированной цепи частоты $k f^{chain}$ (k — целое число) можно считать частотами возбуждения по отношению к валам с шайбами.
- И в эксперименте, и в расчёте на спектрограммах наблюдаются области (узкие и широкие горизонтальные полосы) повышенной интенсивности на частотах до 500 Гц. Отметим, что низшие частоты собственных колебаний валов с шайбами составляют около 300 Гц (см. рис. 1.79, 1.83). Примерно в этом же диапазоне находятся низшие частоты поперечных колебаний цепи.
- И в эксперименте, и в расчёте на спектрограммах наблюдаются области повышенной интенсивности в диапазоне 1–3 кГц. При этом в численном эксперименте более отчётливо видны собственные частоты валов с шайбами (на них увеличивается интенсивность колебаний), а в измеренной спектрограмме эти частоты, хоть и видны, но очень смутно, так как интенсивности распределены по частотам более равномерно.

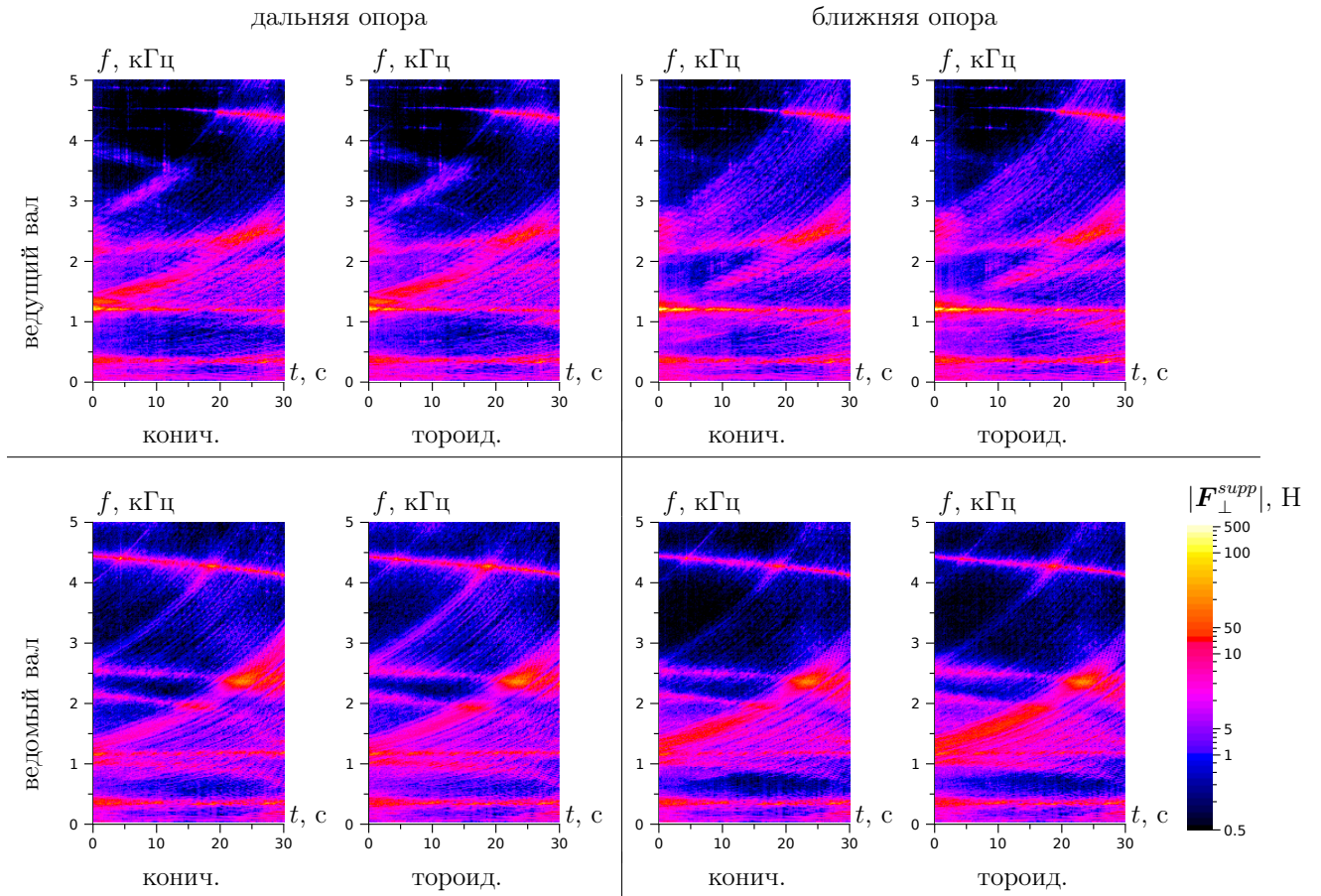


Рис. 1.93. Спектрограммы радиальных сил в опорах валов (численный эксперимент).

- То же самое можно сказать о диапазонах частот 3–4 кГц, 4–5 кГц. Собственные частоты валов отчётливо видны на спектрограммах, полученных численно, и очень смутно — на измеренных.
- На графиках усреднённых по времени интенсивностей колебаний на частотах, отнесённых к частоте оборота цепи f^{chain} , сходства — в наличии максимумов при $f/f^{chain} \approx 80$ и минимумов при $f/f^{chain} \approx 25$. Однако в численном эксперименте интенсивности быстро убывают при увеличении f/f^{chain} от 80, а в натурном эксперименте убывание выражено более слабо.
- В целом в экспериментальных данных распределение по частотам выглядит равномернее, чем в численных.

Отметим также, что расчёты спектрограмм и графиков проводились не

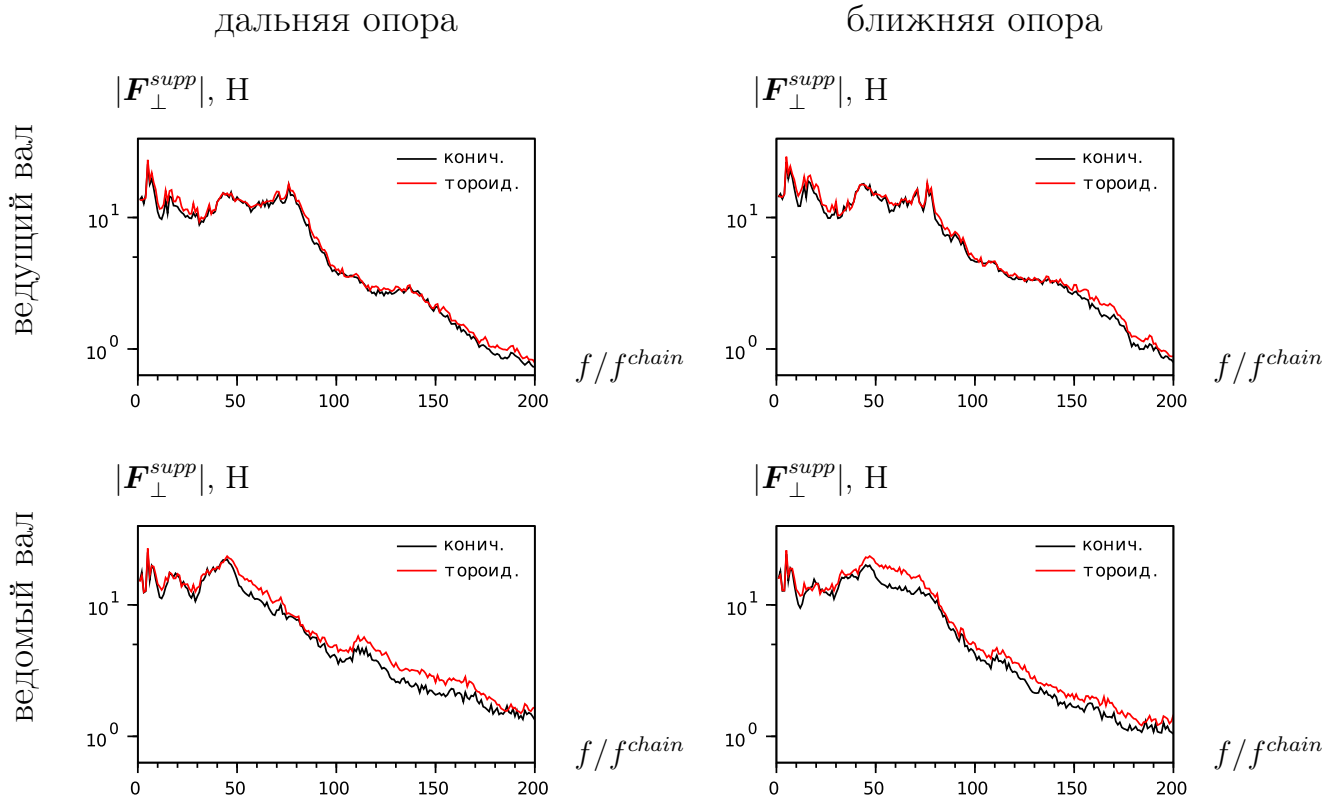


Рис. 1.94. Усреднённая интенсивность колебаний на частотах, отнесённых к частоте оборота цепи f^{chain} (численный эксперимент).

только по модели (е), но и по модели (д) (табл. 1.1). Результаты расчётов по этим двум моделям мало различаются между собой, поэтому здесь они приведены лишь для модели (е).

1.9. Выводы к первой главе

В первой главе представлены математические модели бесступенчатой трансмиссии. Среди них как модели малой размерности (п. 1.4), насчитывающие от одной до нескольких десятков степеней свободы, так и более детальные (п. 1.5), с числом степеней свободы порядка тысячи. Модель с одной степенью свободы позволяет судить об устойчивости положения равновесия трансмиссии в отсутствие вращения. Установлено, что устойчивость зависит от формы контактных поверхностей шайб. Другие модели малой размерности предназначены для расчёта глобальной динамики трансмиссии в реальном времени или быстрее. Цепь

в них считается нерастяжимой однородной лентой. При этом модель с $6+2n$ степенями свободы позволяет воспроизвести детали распределения сил, действующих в контакте пин — шайба, по дугам контакта. Большие модели трансмиссии позволяют производить расчёты динамики, в результате которых становятся доступными детали напряжённо-деформированного состояния в отдельных элементах цепи, валах, опорах.

В п. 1.7 продемонстрированы возможности разработанных математических моделей. Представлены примеры расчётов стационарных и переходных режимов с использованием разных моделей, дано сравнение полученных в них численных результатов — КПД, сил в пластинках и пинах цепи, спектрограмм сил в опорах и др. Это сравнение, в том числе, обосновывает целесообразность разработки более сложных моделей. В примерах расчётов нестационарных режимов показано влияние рандомизации цепи на акустические свойства трансмиссии.

Произведено сравнение доступных автору экспериментальных данных с расчётными, проученными в численных экспериментах. В целом данные неплохо согласуются, что является аргументом в пользу достоверности численных результатов, получаемых при расчётах с использованием предложенных моделей трансмиссии. Вместе с тем, имеется ряд различий (например, различие осевых сил, сжимающих шайбы, в натурном и численном экспериментах), причина которых пока не вполне ясна.

Глава 2

Применение численных методов к решению задачи динамики

2.1. Введение

2.1.1. Система ОДУ динамики

Система ОДУ динамики бесступенчатой трансмиссии получается в рамках лагранжева формализма и потому имеет вид (1.8). При этом лагранжиан системы и её кинетическая энергия имеют вид

$$L = T - \Pi(q), \quad q = [q_1, \dots, q_n]^T, \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \quad (2.1)$$

(здесь q — столбец n обобщённых координат). Систему ОДУ можно также записать в виде

$$A\ddot{q} = -\dot{A}\dot{q} - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q^d + \tilde{Q}, \quad Q^d \equiv \begin{bmatrix} Q_1^d \\ \vdots \\ Q_n^d \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Столбец Q_k^d содержит диссипативные силы и силы трения; в столбце \tilde{Q} — внешние воздействия и добавки к ним, сформированные системами стабилизации угловых скоростей (п. 1.6). Изменение внутреннего состояния этих систем стабилизации определяется уравнениями первого порядка, которым можно придать вид

$$\dot{z} = F_z(t, q, \dot{q}, z), \quad z \equiv [z_1, \dots, z_m]^T, \quad (2.3)$$

где z — столбец m переменных, определяющих внутреннее состояние систем стабилизации. Общая система ОДУ, составленная из уравнений (2.2) и (2.3) и пред-

ставленная в нормальной форме, имеет вид

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x \equiv \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix}, \quad u \equiv q, \quad v \equiv \dot{q}, \quad F(t, x) = \begin{bmatrix} v \\ F_v(t, u, v, z) \\ F_z(t, u, v, z) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$F_v = A^{-1} \left(-\dot{A}\dot{v} - \frac{\partial \Pi}{\partial u} + Q^d + \tilde{Q} \right).$$

Настоящая глава посвящена численному решению начальной задачи для системы ОДУ (2.4).

2.1.2. Описание дискретного состояния

Динамическое описание модели бесступенчатой трансмиссии не исчерпывается системой ОДУ (2.4): наличие контактных взаимодействий требует хранения в каждый момент времени некоторого *дискретного состояния*. В нашем случае для каждой контактной пары (в первую очередь для пары контактных поверхностей пина и шайбы) необходимо знать, имеет ли место контактное взаимодействие в данный момент. Набор значений логического типа и есть дискретное состояние системы. В процессе движения оно может изменяться; однако это изменение возможно лишь в некоторые моменты времени, когда происходят соответствующие *события* (начало контакта, окончание контакта). Система ОДУ при наличии дискретного состояния может быть описана в следующем виде.

$$\dot{x} = F(t, x, \phi), \quad x|_{t=t_0} = x_0, \quad \phi|_{t=t_0} = \phi_0, \quad (2.5)$$

где $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_m]^T$ — столбец, состоящий из m переменных дискретного состояния. Каждая из переменных ϕ_k может изменяться лишь при наступлении событий, которые определяются соотношениями

$$e_k(t, x) = 0, \quad k = 1, \dots, m; \quad (2.6)$$

функции e_k называют *индикаторами событий*. Как именно изменяются компоненты ϕ при наступлении события, определяется некоторым конечным автома-

том, определяемым для каждой конкретной системы наряду с уравнениями движения и индикаторами событий. Подробности описания систем с дискретным состоянием рассмотрены в [78]. Рис. 2.1 иллюстрирует изменение переменных x и ϕ во времени.

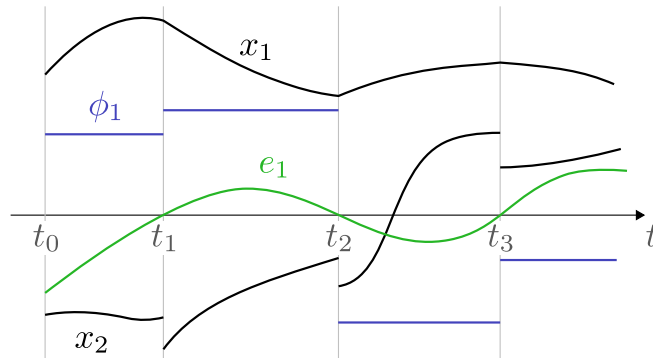


Рис. 2.1. История изменения переменных состояния в системе ОДУ с дискретными переменными.

При решении системы ОДУ с дискретным состоянием возникает необходимость находить моменты наступления событий и вызывать процедуру изменения дискретного состояния. При численном интегрировании одношаговыми методами поступают следующим образом. В текущем состоянии запоминают значения индикаторов событий. Далее выполняется шаг интегрирования, при этом дискретное состояние не меняется. В новом состоянии вновь вычисляются индикаторы событий. Если их знаки не изменились, то считается, что событий на шаге не произошло, и выполняется следующий шаг. Если же знак каких-либо индикаторов событий изменился, находят момент наступления t_* самого раннего события. Вычислив переменные состояния x в этот момент времени, выполняют процедуру изменения дискретного состояния. Следующий шаг интегрирования начинается с момента t_* . Таким образом, если на шаге интегрирования происходит событие, то шаг усекается.

Для нахождения момента времени t_* требуется решать те из уравнений (2.6), для которых индикатор события изменил знак на шаге. Некоторые решатели (например, CVODE [79]) используют для этого метод Ньютона и находят

t_* с заданной точностью. Опыт численного решения задач динамики бесступенчатой трансмиссии показывает, что в нашем случае достаточно линейной интерполяции — как для нахождения t_* , так и для вычисления $x(t_*)$ — по крайней мере, на шагах интегрирования до $5 \cdot 10^{-6}$ с.

2.2. Варианты модели и параметры режима

Во всех численных экспериментах использовалась модель (е) из табл. 1.1. При этом рассматривались два закона трения, участвующих в контактных взаимодействиях пин — шайба, пин — пластинка и между половинками пина. Первый вариант — кусочно-линейная зависимость $f(v_r)$, определяемая вторым из равенств (1.298); второй вариант — аналогичная зависимость, но сглаженная участком параболы, так что $f \in C^2$ (дважды непрерывно дифференцируема по v_r). Рассматривая модификацию модели с этим законом трения, мы ставили цель исследовать влияние негладкости правой части системы ОДУ, обусловленной негладкостью $f(v_r)$, на поведение численных методов. Предпочтение было отдано варианту с участком параболы, а не арктангенсу — первое из равенств (1.298) — из-за того, что в последнем случае обусловленность матрицы Якоби значительно отличается (в меньшую сторону) от её обусловленности в случае кусочно-линейной зависимости, что делает сравнение численных методов для двух модификаций законов трения не вполне корректным. Законы трения, использованные рассматриваемых вариантах модели представлены в табл. 2.1.

Во всех расчётах рассматривался стационарный (в смысле п. 1.6.1, стр. 192) режим с параметрами $M_1 = 150$ Нм, $n_1 = 2000$ об/мин., $i_{var} = 0,45$.

2.3. Собственные числа матрицы Якоби системы ОДУ

Поведение численных методов решения задачи Коши и возможность их использования во многом определяется собственными числами матрицы Якоби

Таблица 2.1. Модификации закона трения в моделях трансмиссии, использованных при исследовании численных методов

обозн.	зависимость $f(v_r)$	график $f(v_r)$
nonsmooth	$f(v_r) = \begin{cases} \frac{f_0}{v_0} v_r, & v_r < v_0, \\ f_0, & v_r \geq v_0. \end{cases}$	
smooth	$f(v_r) = \begin{cases} \frac{f_0}{v_0} v_r, & v_r < v_0(1 - \varepsilon), \\ \tilde{f}(v_r), & \frac{v_r}{v_0} \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon], \\ f_0, & v_r \geq v_0(1 + \varepsilon). \end{cases}$ $\tilde{f}(v_r) \equiv f_0 \left[1 + \varepsilon \varphi \left(\frac{v_r - (1 - \varepsilon)v_0}{2\varepsilon v_0} \right) \right],$ $\varphi(\xi) \equiv -1 + 2\xi - \xi^2.$	

рассматриваемой системы ОДУ. В частности, представляет интерес произведение максимального по модулю собственного числа этой матрицы λ_* и характерного интервала времени H , на котором нас интересует изменение решения. Величина H — это время между двумя соседними состояниями системы, которые мы хотим видеть в численном решении, то есть некоторый “шаг вывода”. По произведению $H|\lambda_*|$ можно судить о том, сколько шагов потребуется тому или иному численному методу, чтобы, начав интегрирование с момента времени t , достичь времени $t + H$. Относительно шага вывода можно сразу сказать, что в нашем случае он составляет 10^{-5} – 10^{-3} с, в зависимости от задач дальнейшей обработки численного решения.

Собственные числа матрицы Якоби $J = \partial F / \partial x$ можно оценить по порядку величины, рассматривая колебания отдельных элементов модели — пинов, валов. Например, частота осевых колебаний пина составляет около 160 кГц,

что соответствует чисто мнимым собственным числам, равным по величине примерно $\pm 10^6 i$. Менее очевидно влияние трения (между пином и шайбой, между пином и пластинками, между половинками пинов) на собственные числа J . Оказывается, оно вызывает появление больших по величине отрицательных собственных чисел порядка -10^8 с^{-1} (значения зависят от параметров модели и нагрузок). На рис. 2.2 приведены диаграммы, на которых изображены собственные числа J , вычисленные в некотором состоянии стационарного режима (см. п. 2.2). Слева используется линейный масштаб, справа — в некотором смысле логарифмический.

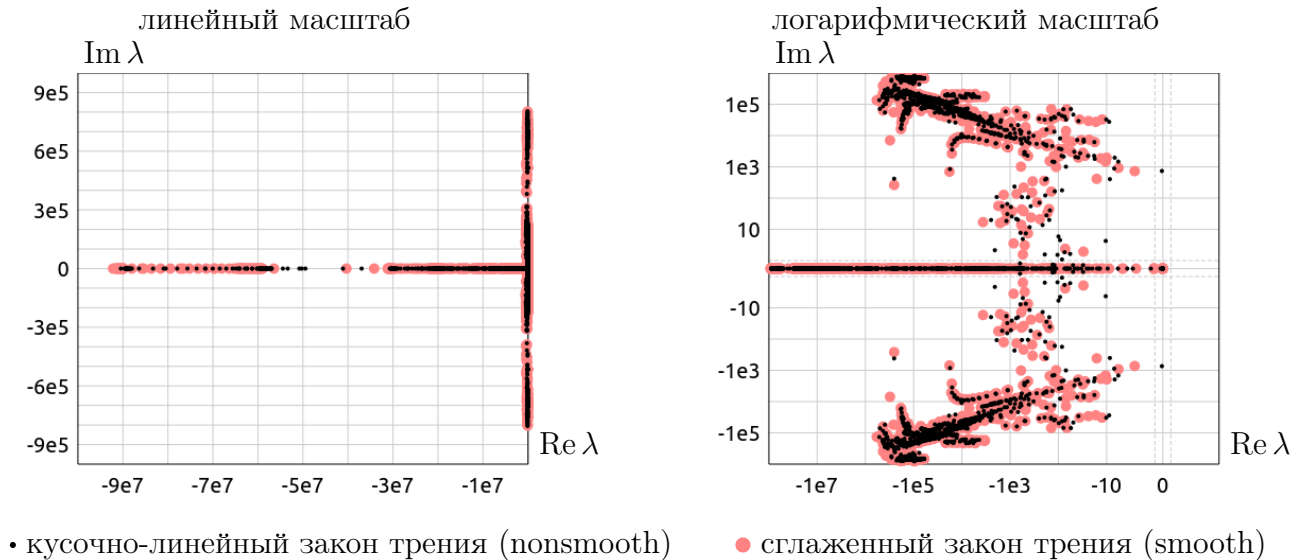


Рис. 2.2. Собственные числа матрицы Якоби.

Поясним, как построена правая диаграмма на рис. 2.2. Пусть требуется изобразить в масштабе, похожим на логарифмический, значения x_k , то есть найти координаты $\tilde{x}_k(x_k)$, изменяющиеся пропорционально декартовой координате в плоскости диаграммы. Значения величин x_k могут быть любыми — отрицательными, положительными и нулевыми, поэтому использование обычного логарифмического масштаба ($\tilde{x}_k = c \ln x$) невозможно. Однако возможно

построить следующее непрерывное отображение:

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} \tilde{x}_* \frac{x_k}{x_*} & \text{при } |x_k| \leq x_*, \\ \tilde{x}_* + c \ln \frac{x_k}{x_*} & \text{при } x_k > x_*, \\ -\tilde{x}_* - c \ln \frac{-x_k}{x_*} & \text{при } x_k < -x_*. \end{cases}$$

Параметры x_* , c , \tilde{x}_* — некоторые положительные константы. Мало интересующая нас область $|x| \leq x_*$ линейно отображается на $|\tilde{x}| < \tilde{x}_*$ (ограничена пунктирными линиями на рисунках); в то же время, отображение осуществляет логарифмическое масштабирование области $|x| > x_*$, позволяя разглядеть разные масштабы. В дальнейшем предпочтём это отображение при построении диаграмм на комплексной плоскости и будем для краткости называть его логарифмическим.

Из рис. 2.2 видно, что матрица Якоби системы ОДУ имеет комплексные собственные числа с преобладающей мнимой частью, соответствующие различным затухающим колебаниям; максимальные значения мнимых частей достигают примерно 10^6 с^{-1} (соответствующие формы собственных колебаний, как уже говорилось, содержат осевые перемещения концов половинок пинов). Также имеются вещественные отрицательные собственные числа, обусловленные в основном трением. Максимальное по модулю вещественное собственное число достигает в рассмотренном состоянии примерно 10^8 с^{-1} . Как вскоре будет показано, оно накладывает ограничение на размер шага всех явных методов численного интегрирования.

Чтобы показать, что самые большие по модулю вещественные отрицательные собственные числа вызваны трением, был проделан следующий численный эксперимент. “Регуляризованный” закон трения (табл. 2.1) используется при описании контактных взаимодействий между пином и шайбой, между пином и пластинками, между половинками пина. В него входит параметр v_0 — скорость насыщения. Собственные числа матрицы J , обусловленные трением, должны существенно зависеть от v_0 , если относительная скорость меньше скорости насы-

щения, то есть рабочая точка в законе трения находится на линейном участке. Численный эксперимент состоял в том, что параметр v_0 был в 10 раз уменьшен (для одного из трёх упомянутых типов контактных взаимодействий или для комбинации нескольких), после чего были вычислены собственные числа матрицы J (при тех же самых значениях обобщённых координат и скоростей, что и ранее). Его результаты представлены на рис. 2.3.

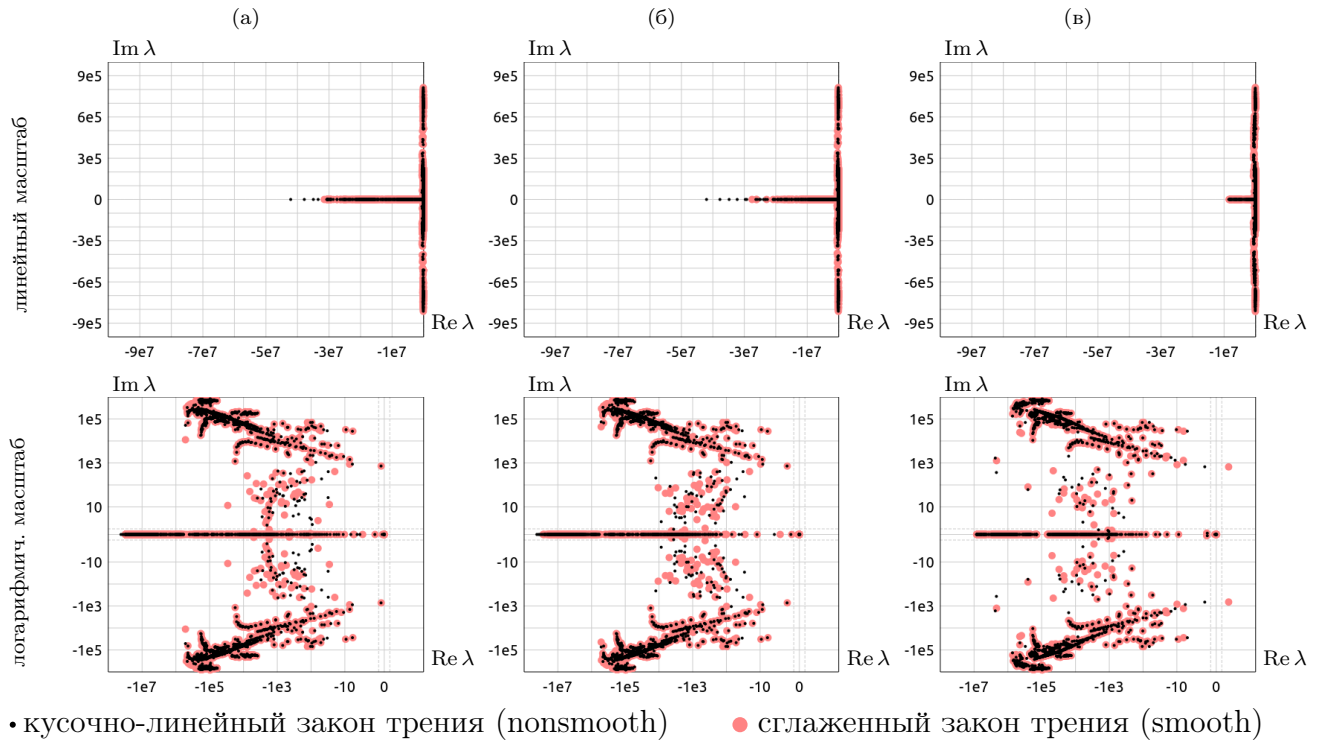


Рис. 2.3. Собственные числа матрицы Якоби при уменьшении в 10 раз скорости насыщения v_0 в законе трения (табл. 2.1).

В первом столбце (а) расчёты, в которых параметр v_0 уменьшен лишь для трения между половинками пина. Во втором столбце (б) параметр v_0 уменьшен для трения между половинками пинов, а также между пином и пластинками. Наконец, в третьем столбце (в) параметр v_0 уменьшен для всех трёх видов трения (первые два, как в варианте (б), а также трение между пином и шайбой). Диаграммы позволяют сделать вывод о том, что в рассмотренном состоянии максимальные по модулю вещественные собственные числа обусловлены трением между половинками пина. Следует также ожидать, что они пропорциональны максимальному натяжению цепи, так как сила трения имеет вид (1.291) —

она пропорциональна нормальной реакции N , роль которой в случае контакта половинок пина играет сила натяжения цепи.

По итогам исследования собственных чисел матрицы J можно заключить, что система ОДУ, описывающая динамическую модель бесступенчатой трансмиссии является *умеренно жёсткой* [80]. Это следует иметь в виду при выборе численного метода.

В следующих подразделах рассмотрены результаты применения некоторых численных методов к решению начальной задачи для системы (2.4). При этом в качестве теста всегда рассматривался режим, указанный выше.

2.4. Классические явные методы Рунге – Кутты

На протяжении долгого времени для расчёта динамики бесступенчатой трансмиссии использовался хорошо известный классический явный метод Рунге – Кутты четвёртого порядка точности [81, с. 144] (далее RK4). Как известно, этот метод, наряду с другими явными методами, предъявляет требование к шагу интегрирования h : устойчивость обеспечена при попадании величин $h\lambda_k$ в область устойчивости, где λ_k — собственные числа якобиана системы ОДУ. Для явных методов область устойчивости всегда ограничена, отсюда и ограничение на размер шага.¹ Опыт показывает, что приемлемые численные решения задачи Коши для уравнений динамики (2.4) могут быть получены при значениях шага интегрирования 10^{-8} – 10^{-7} с, в зависимости от параметров, а в ряде случаев (например, при большом натяжении цепи) шаг должен быть ещё меньше. Поэтому расчёты методом RK4 занимают много времени.

В этом разделе представлены результаты применения следующих классических явных схем Рунге – Кутты к решению начальной задачи для системы (2.4).

¹ Отметим, что ограничение на шаг, обусловленное требованием точности, в нашем случае более слабое, и почти во всех рассмотренных численных методах оно отходит на второй план.

- Явный метод Эйлера (Euler) — только для сравнения с другими методами;
- метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности (RK4);
- вложенные схемы Дормана – Принса с возможностью контроля точности порядков 4(5), 5(6), 7(8). Здесь первое число — порядок точности решателя, в второе (в скобках) — порядок точности оценщика ошибок. В дальнейшем для названий этих схем используются сокращения DOPRI45, DOPRI56, DOPRI78 соответственно.

Таблицы Бутчера этих методов можно найти в [81, гл. II].

Кроме того, рассматривались численные методы, получающиеся при помощи экстраполяции по Ричардсону, описанные там же. При этом для приведённых здесь результатов использовалась гармоническая последовательность шагов, а в качестве опорного метода использовался либо метод Грэгга, что даёт метод Грэгга – Булирша – Штера (ГБШ), либо явный метод Эйлера. В первом случае рассматривались варианты со сглаживающим шагом и без него. Для экстраполяционных схем далее используются обозначения EULER- Xp (экстраполяция порядка p с явным методом Эйлера в качестве опорного), GBS p (ГБШ, экстраполяция порядка p), GBS ps (ГБШ со сглаживающим шагом, экстраполяция порядка p).

Области устойчивости всех рассмотренных в этом подразделе методов представлены на рис. 2.4 (в линейном масштабе) и рис. 2.5 (в логарифмическом масштабе). Они вычислены методом “грубой силы”: каждый пиксель на диаграмме получен путём численного интегрирования уравнения $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$ (x, λ — комплексные) с начальным условием $x(0) = 1$. Сделав один шаг заданным методом при $h = 1$, находим $x(1)$. Пиксель окрашивается в чёрный цвет (устойчивость), если $|x(1)| \leq 1$, и в белый (неустойчивость) в противном случае. На рис. 2.5 сплошным линиям сетки соответствуют значения ± 1 , пунктирным (ближайшим к нулю, они разделяют области с линейным и логарифмическим масштабами) — значения $\pm 10^{-3}$, линиям из точек — другие значения, кратные 10^k .

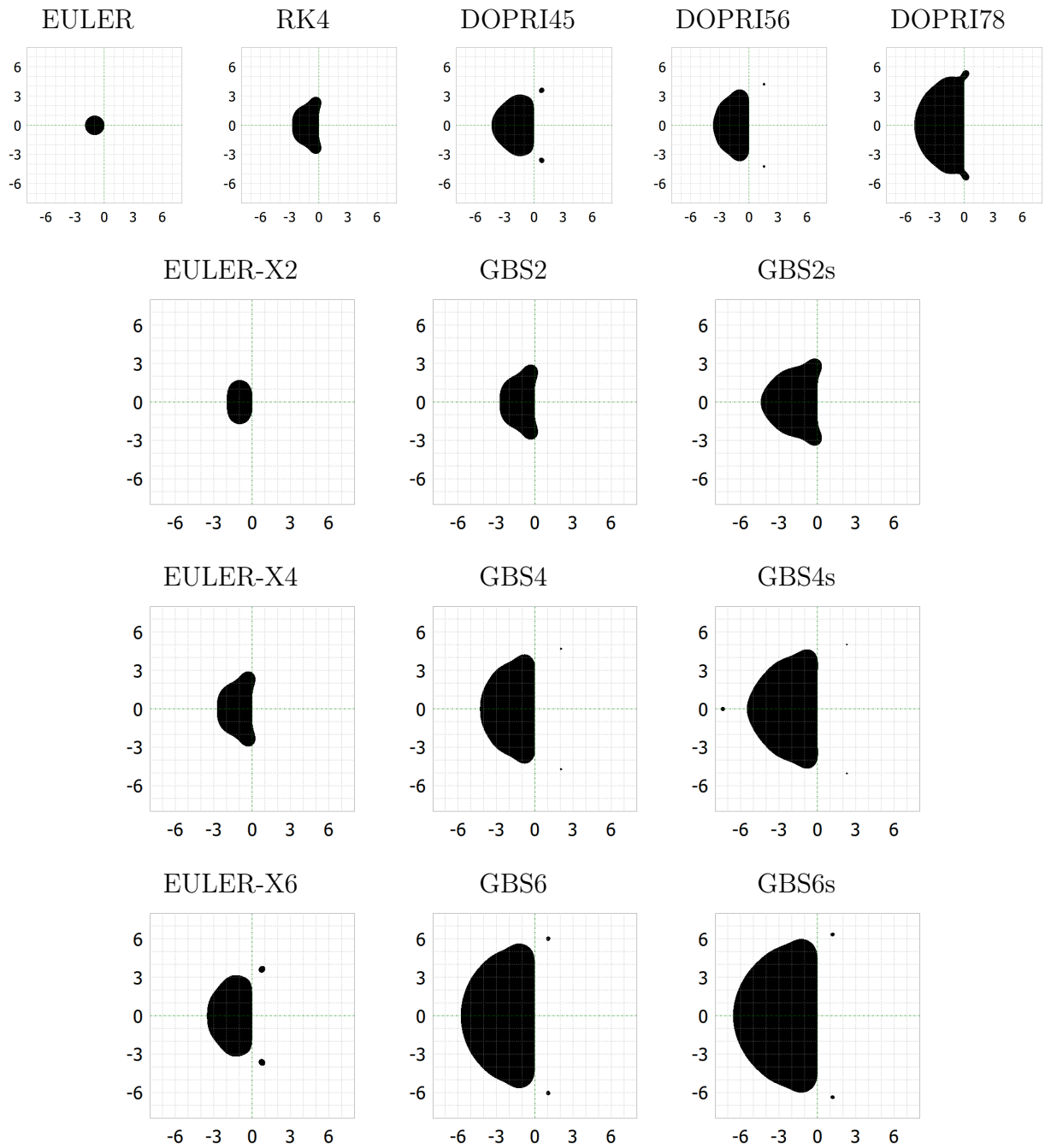


Рис. 2.4. Области устойчивости классических явных методов Рунге – Кутты, метода ГБШ и экстраполированного метода Эйлера на комплексной плоскости $h\lambda$ в линейном масштабе.

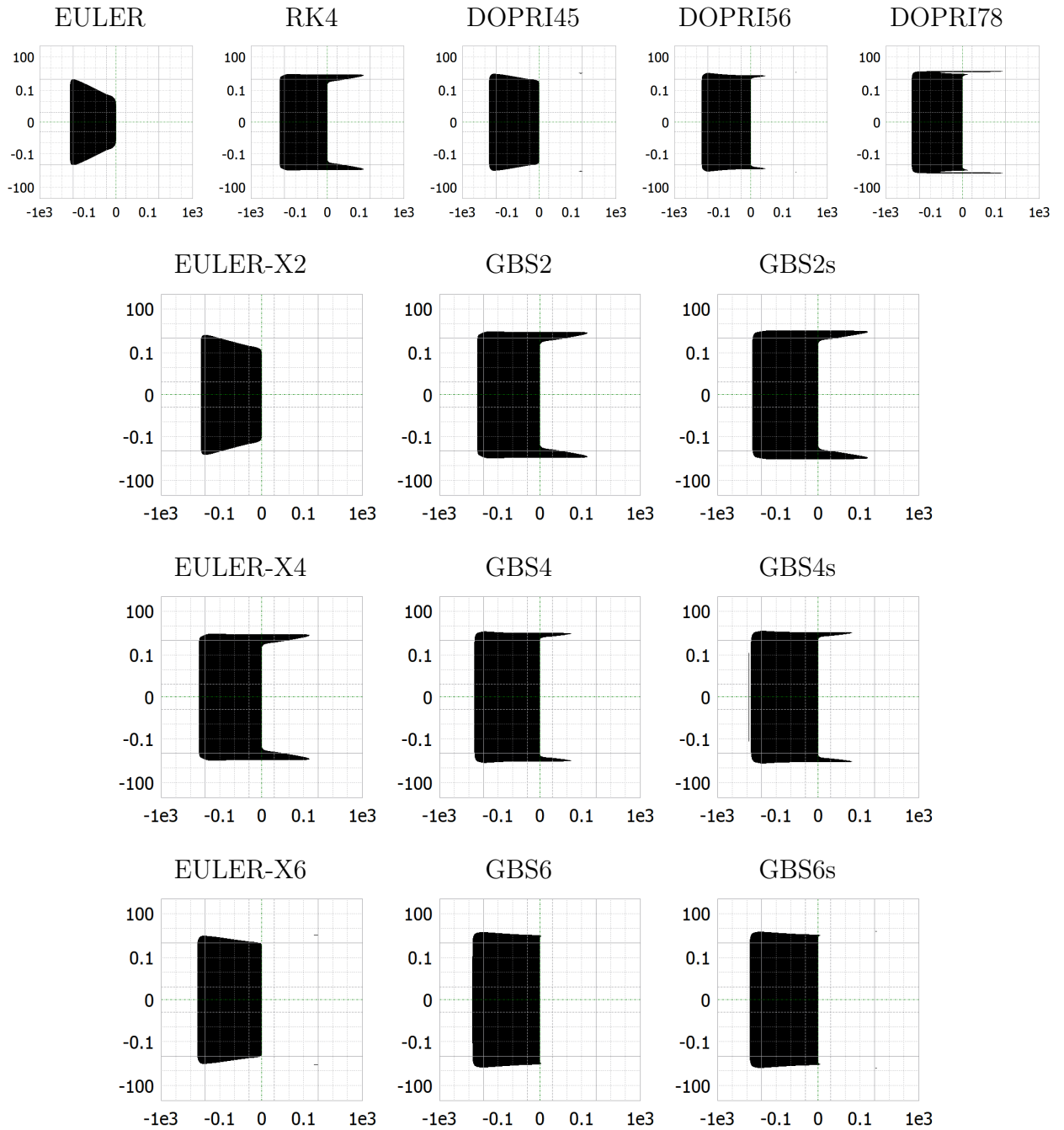


Рис. 2.5. Области устойчивости классических явных методов Рунге – Кутты, метода ГБШ и экстраполированного метода Эйлера на плоскости $h\lambda$ в логарифмическом масштабе.

Попытки получить сколько-нибудь заметный выигрыш в быстродействии при помощи классических явных методов не увенчались успехом — этого и следовало ожидать, исходя из вида их областей устойчивости. Всё же рассмотрим подробнее методику численных экспериментов.

В рамках численного эксперимента с каждым методом выполнялись два теста. В первом из них оценивалась зависимость нормы ошибки на шаге от длины

шага. Ошибка вычислялась путём сравнения численного решения с “точным”; в качестве последнего использовалось численное решение методом РК4 с очень малым ($5 \cdot 10^{-9}$ с) шагом. Этот тест можно использовать, в частности, для проверки порядка точности метода. Метод порядка p имеет оценку локальной погрешности на шаге [81, с. 167]

$$e \leq Ch^{p+1}, \quad (2.7)$$

где $e \equiv \|x(t_0 + h) - x_1\|$ — норма ошибки на шаге, C — постоянная, h — шаг интегрирования. Зависимости $e(h)$, полученные в численном эксперименте, в логарифмическом масштабе часто имеют прямолинейные участки. На таких участках ошибка ведёт себя так, как если бы в (2.7) вместо неравенства было равенство². Считая, что тангенс угла наклона на прямолинейном участке должен быть равен $p+1$, можно вычислить “актуальный” порядок точности метода \tilde{p} по формуле

$$\tilde{p} \equiv \frac{d \ln e}{d \ln h} - 1 \quad (2.8)$$

и сравнивать \tilde{p} с p . Производная находится численно, путём вычисления конечной разности; выборки $\ln h$ и $\ln e$ может понадобиться предварительно усреднить при помощи алгоритма скользящего среднего.

Во втором тесте производился расчёт динамики в течение 0,005 с и выводилась история изменения осевой силы в половинке пина при входе в контакт с шайбами ведущего вала. Эта кривая даёт более наглядное представление о достоверности численного решения, чем норма вектора глобальной ошибки. Результаты разных расчётов сравниваются с эталонной кривой, рассчитанной методом РК4 с шагом 10^{-8} с. В тестах управление длиной шага и порядком экстраполяции были отключены.

Результаты первого теста для явных методов — зависимости нормы вектора ошибки e на шаге и “эффективного порядка” метода \tilde{p} , вычисленного по

² Именно на это предположение опираются оценщики ошибок вложенных схем с автоматическим выбором шага.

формуле (2.8), от размера шага h , — представлены на рис. 2.6 и рис. 2.7 соответственно. Из первого рисунка видно, что на шагах в диапазоне $2 \cdot 10^{-7} - 10^{-6}$ с

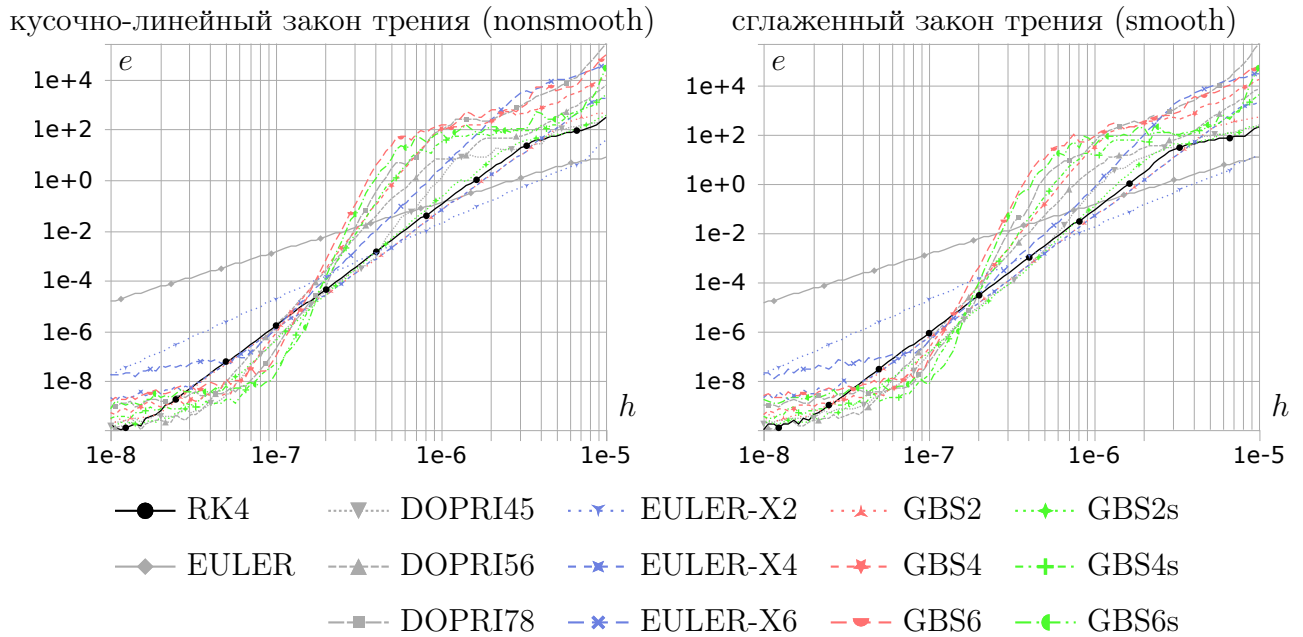


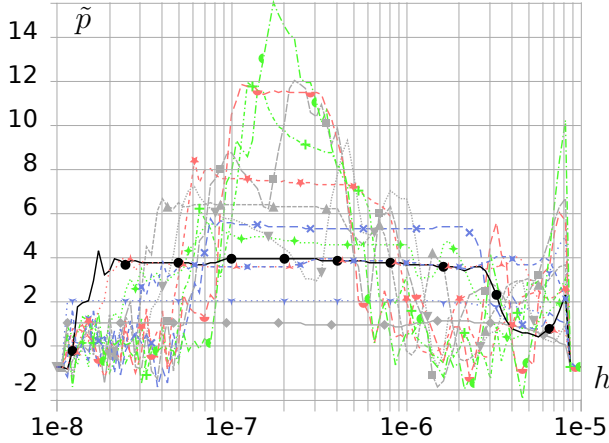
Рис. 2.6. Зависимость нормы e вектора ошибки на шаге от размера шага h — явные методы.

лишь два из рассмотренных методов превосходят метод RK4 по точности — это GBS2 и EULER-X4, в диапазоне шагов $4 \cdot 10^{-8} - 1.5 \cdot 10^{-7}$ с это почти все методы (за исключением EULER, EULER-X2, EULER-X6). Однако не стоит забывать, что требование точности в нашей задаче не является определяющим.

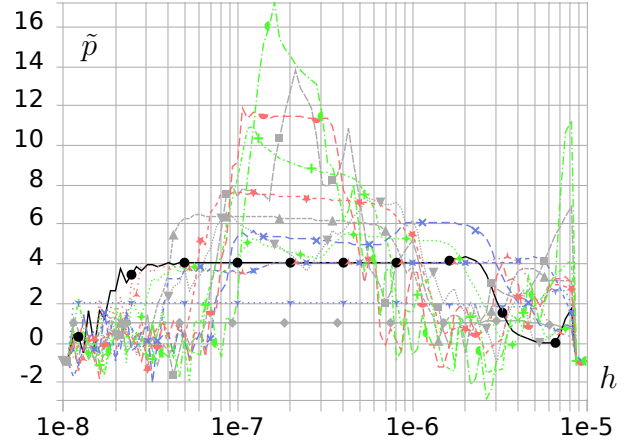
Из рис. 2.7 видно, что большинство методов ведут себя в соответствии с их порядком точности в некотором диапазоне шагов, своём для каждого метода. Исключение составляют методы DOPRI45 (на графике не видно горизонтального участка), DOPRI56 (шестой порядок вместо пятого), DOPRI78 (в диапазоне шагов $9 \cdot 10^{-8} - 6 \cdot 10^{-7}$ порядок \tilde{p} ближе к восьмому, чем к седьмому), а также ГБШ со сглаживающим шагом. Отметим очевидное преимущество метода ГБШ по точности, связанное с симметричностью опорного метода — метода Грэгга [81, п. II.9, с. 239]: при двукратной экстраполяции получается схема порядка 4, при четырёхкратной — порядка 8, при шестикратной — порядка 12 (численно полученные \tilde{p} немного ниже этих значений).

Отметим также, что расчёты первого теста показали низкую чувствитель-

кусочно-линейный закон трения (nonsmooth)

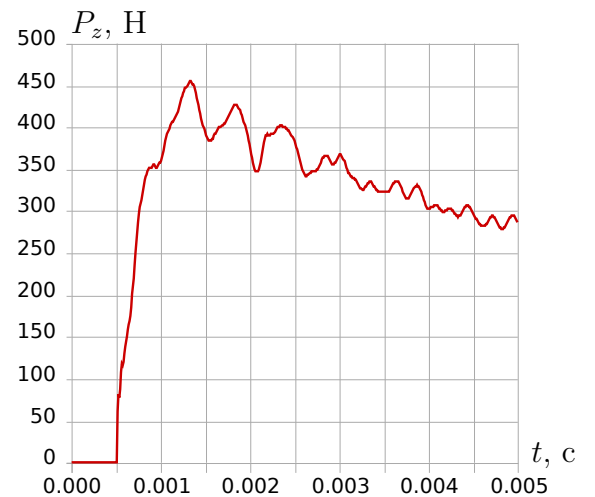
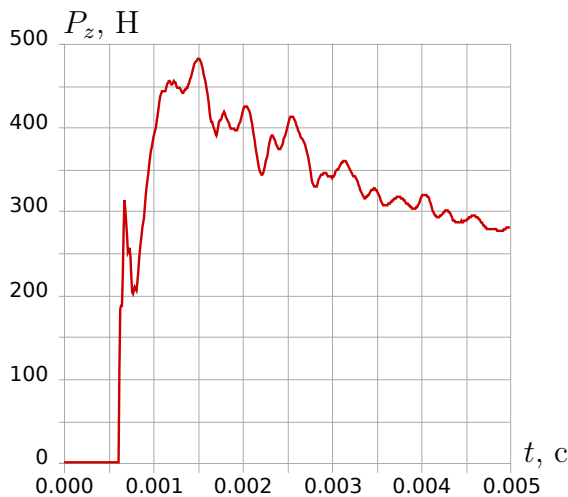


сглаженный закон трения (smooth)

Рис. 2.7. Эффективный порядок точности \tilde{p} , вычисленный по формуле (2.8) — явные методы.

ность явных методов к гладкости или негладкости закона трения.

Во втором тесте рассматривалась история изменения осевой силы $P_z(t)$ в половинке некоторого пина при входе на шайбы ведущего вала. Эталонные кривые, полученные из расчётов методом RK4 с шагом 10^{-8} с, представлены на рис. 2.8. Начало кривой (первые 0,006 с в случае негладкого закона трения



кусочно-линейный закон трения (nonsmooth)

сглаженный закон трения (smooth)

Рис. 2.8. Осевая сила в половинке пина при входе на шайбы ведущего вала (эталон).

и первые 0,005 с в случае сглаженного) соответствует движению пина в преде-

лах наиболее натянутого прямолинейного участка цепи; при этом осевая сила близка к нулю. Далее начинается контакт с шайбами, поэтому осевая сила возрастает, вначале очень резко. Сравнивая эту кривую, полученную из разных численных решений, с эталонной, можно судить о том, насколько достоверны эти численные решения. При оценке глобальных ошибок, полученных тем или иным методом, мы ограничились вычислением величины

$$E \equiv \frac{\max_{t \in [t_1, t_2]} |P_z(t) - P_z^*(t)|}{\max_{t \in [t_1, t_2]} |P_z^*(t)|}, \quad (2.9)$$

где $P_z^*(t)$ — эталонная кривая, $P_z(t)$ — кривая, полученная численным методом, глобальная ошибка которого оценивается, $t_1 = 0,001$ с, $t_2 = 0,005$ с. Мы исключили из рассмотрения отрезок $0 \leq t < t_1$, потому что при быстром возрастании P_z в момент начала контакта разность $|P_z(t) - P_z^*(t)|$ может оказаться достаточно большой просто из-за того, что момент начала контакта немного отличается от эталонного. При этом может получаться удовлетворительное решение, поэтому учёт указанной большой разности нежелателен. Удовлетворительным можно считать численное решение, для которого $E \leq 0,05$. Как показывают расчёты, с течением времени глобальная ошибка может накапливаться в основном из-за увеличивающегося сдвига по времени между $P_z(t)$ и $P_z^*(t)$, что не критично.

Кривые $P_z(t)$, полученные разными методами при разных шагах, приведены вместе с эталонной кривой на рис. 2.9; глобальная относительная ошибка для $P_z(t)$, вычисленная по формуле (2.9) — на рис. 2.10. На основе этих данных можно сделать следующие выводы.

- Метод RK4 для гладкого закона трения на шаге $5 \cdot 10^{-8}$ с выдаёт худшее решение ($E = 0,048$), чем для негладкого ($E = 0,019$). Аналогично ведёт себя GBS2; для остальных методов ситуация обратная, по крайней мере, на малых шагах.
- Ни один из рассмотренных явных методов не даёт приемлемое решение на шаге $h = 2 \cdot 10^{-7}$ с.

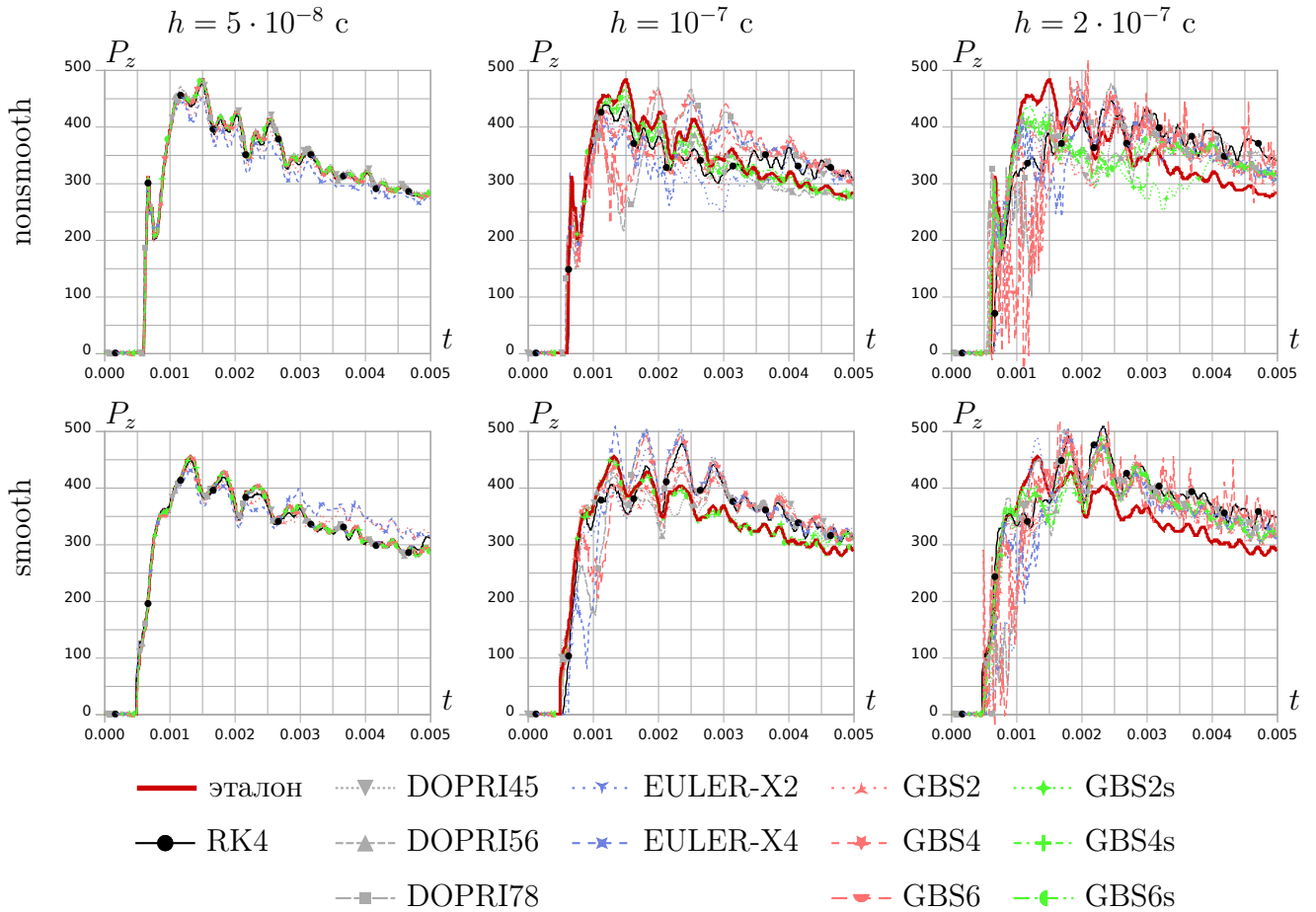
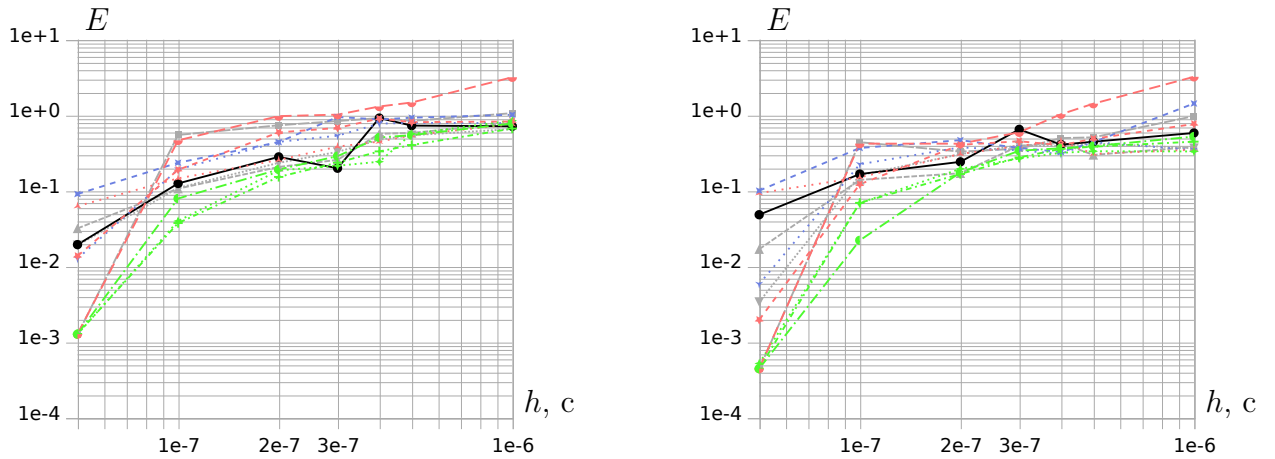


Рис. 2.9. Осевая сила в половинке пина, сравнение с эталонной кривой — явные методы.



кусочно-линейный закон трения (nonsmooth)

сглаженный закон трения (smooth)

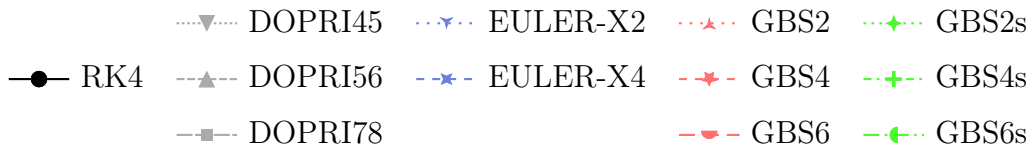


Рис. 2.10. Глобальная относительная ошибка для $P_z(t)$, вычисленная по формуле (2.9) — явные методы.

- Для негладкого закона трения на шаге $h = 5 \cdot 10^{-8}$ с методы GBS2s, GBS4s, GBS6, SBS6s дают существенно меньшую относительную глобальную ошибку, чем RK4 (примерно 10^{-3} против 0,02). Самым простым из них является GBS2s, вычисляющий правую часть системы ОДУ шесть раз на шаге (в то время как RK4 — 4 раза на шаге). Этот же метод даёт меньшую ошибку, чем все остальные, на шаге $h = 10^{-7}$ с; она равна 0,04. Метод EULER-X2 на шаге $h = 5 \cdot 10^{-8}$ с также выдаёт приемлемое решение ($E = 0.013$). Так как он требует всего трёх вычислений правой части на шаге, время его работы сравнимо с GBS2s на вдвое большем шаге. Во всех остальных расчётах решение нельзя считать приемлемым.
- Для сглаженного закона трения картина похожая, но приемлемое решение получено в бóльшем количестве расчётов: на шаге $h = 5 \cdot 10^{-8}$ с — методами EULER-X2, GBS2s, GBS4s, GBS6, SBS6s (как и для негладкого трения), а также методами GBS4, DOPRI45, DOPRI56, DOPRI78; на шаге $h = 10^{-7}$ с — методом GBS6s. Метод GBS6 сравнительно трудоёмок (42 вычисления правой части на шаге), DOPRI45 вычисляет правую часть 5 раз на шаге, поэтому здесь следует отдать предпочтение методу EULER-X2 (3 вычисления правой части на шаге).
- Метод ГБШ со сглаживающим шагом во всех случаях даёт меньшую ошибку, чем без сглаживающего шага, при одном и том же порядке экстраполяции.

Итак, по результатам исследования выяснилось, что метод RK4 — не лучший из рассмотренных. Метод GBS2s превосходит его в том смысле, что позволяет получать приемлемые решения в разы быстрее. Этого следовало ожидать, исходя из вычислительной сложности этих методов и их областей устойчивости (рис. 2.4). Интересно, что в рассмотренном примере даже более простой, чем RK4, метод EULER-X2 выдал решение лучше, чем RK4 (на шаге $5 \cdot 10^{-8}$ с), хотя его область устойчивости и меньше.

2.5. Линейно неявные методы типа Розенброка

Классические явные методы не позволяют использовать достаточно большие шаги интегрирования из-за требований устойчивости. Поэтому логично рассмотреть неявные методы — для них областью устойчивости обычно является вся комплексная плоскость $h\lambda$, за исключением небольшой ограниченной области в правой полуплоскости. В частности, классический метод трапеций рассмотрен в п. 2.6. Здесь же предпринята попытка применить вычислительно более простые методы — так называемые W-методы, являющиеся линейно-неявными методами типа Розенброка.

В работе [82] по существу предложен подход (изложенный также в [80, п. IV.7]), в котором предлагается рассмотреть какой-либо неявный s -стадийный метод Рунге – Кутты — например, диагонально-неявный (ДНРК), имеющий для автономной системы $\dot{x} = F(x)$ вид

$$\begin{aligned} k_i &= hF \left(x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + a_{ii}k_i \right), \quad i = 1, \dots, s, \\ x_1 &= x_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

и линеаризовать соотношения для столбцов k_i , чтобы избежать необходимости решать нелинейную систему уравнений на шаге. Для ДНРК (2.10) при этом получим

$$k_i = hF(g_i) + hJ(g_i)a_{ii}k_i, \quad g_i = x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j, \quad J \equiv \frac{DF}{Dx}. \quad (2.11)$$

Соотношения (2.11) вместе с последним из равенств (2.10) и определяют метод Розенброка. Можно вывести условия порядка, ограничивающие выбор коэффициентов a_{ij} , b_j и получить таким образом численный метод заданного порядка. Для нахождения k_i , очевидно, требуется решить систему с матрицей $E - hJ(g_i)a_{ii}$ (здесь E — единичная матрица). Дальнейшие усовершенствования состояли в том, что вместо матриц $J(g_i)$ рассматривалась $J(x_0)$, а коэф-

фициенты a_{ii} выбирались одинаковыми, $a_{ii} = d$. Благодаря этому все s систем линейных уравнений для k_i имеют одну и ту же матрицу $E - hdJ(x_0)$.

В этом случае метод требует вычисления матрицы Якоби $J(x_0)$ один раз на каждом шаге. При большом числе переменных это приводит к большим вычислительным затратам, поэтому и появились W -методы [83]. Такой метод тоже представляет собой линейно неявный метод, но вместо матрицы Якоби можно взять вообще любую матрицу (далее она обозначается A), и это никак не влияет на порядок точности метода. Можно ожидать устойчивости, если A будет в каком-то смысле близка к матрице Якоби. Таким образом, при использовании W -метода время от времени вычисляют $A = J$, $W = E - hdA$ и используют одну и ту же матрицу W на большом числе шагов. При этом линейные системы уравнений для k_i удобно решать с использованием LU-разложения, так как достаточно сделать его лишь один раз на каждое вычисление W .

В работе [83] предложено семейство методов, дающее вложенную схему порядка 2 с оценщиком ошибки порядка 4. Семейство параметризуется значением $d \in (0, 1]$ (определено выше). Далее будем называть элементы этого семейства $SW24-d$. Метод выглядит следующим образом (рассматривается неавтономная система ОДУ $\dot{x} = F(t, x)$; далее t_0 и x_0 — соответственно время и состояние в начале шага, $t_1 = t_0 + h$ и x_1 — в конце шага). Для численной схемы второго порядка имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2), \quad Wk_1 = F(t_0, x_0), \quad W \equiv E - hdA, \\ Wk_2 &= F\left(t_0 + \frac{2}{3}h, x_0 + \frac{2}{3}hk_1\right) - \frac{4}{3}hdAk_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для оценки локальной погрешности e с точностью $O(h^3)$ делается ещё две стадии (в статье отмечается, что трёхстадийного W -метода 3-го порядка не существует):

$$\begin{aligned} e &= \frac{h}{8}(k_1 - 5k_2 + 5k_3 - k_4) + O(h^4), \\ Wk_3 &= F(t_1, x_1), \quad Wk_4 = F\left(t_1 + \frac{2}{3}h, x_1 + \frac{2}{3}hk_3\right) + hdA\left(\frac{2}{3}k_1 + 6k_2\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассмотрим также семейство W -методов первого порядка (снова с пара-

метром d) — назовём его $W1-d$:

$$x_1 = x_0 + hk_1, \quad Wk_1 = F(t_0, x_0), \quad W \equiv E - hdA. \quad (2.14)$$

Очевидно, это методы первого порядка при любом выборе d , A . При решении задачи динамики трансмиссии они были использованы не непосредственно, а лишь в качестве опорных методов для экстраполяции по Ричардсону — эту идею можно найти в [84, п. 6.4.2].

В тестах с линейно-неявными методами использовались значения d 0,25, 0,5, 1 для обоих рассмотренных семейств методов. Для методов $W1-d$ использовалась экстраполяция порядков 2, 4, 6 с гармонической последовательностью шагов; соответствующие схемы обозначим $W1-d-Xp$, где p — порядок экстраполяции. Таким образом, рассмотрены следующие схемы: SW24-0.25, SW24-0.5, SW24-1, W1-0.25-X2, W1-0.5-X2, W1-1-X2, W1-0.25-X4, W1-0.5-X4, W1-1-X4, W1-0.25-X6, W1-0.5-X6, W1-1-X6. Их области устойчивости, полученные так же, как для явных методов (стр. 246), представлены на рис. 2.11, рис. 2.12. Однако, как отмечено в [80, с. 137], при непостоянной матрице Якоби анализ устойчивости W -методов гораздо сложнее и построенные области устойчивости могут не отражать реальную картину. Это связано с тем, что при $A \neq J$ матрицы A и J не могут быть диагонализированы одновременно, поэтому рассмотрение уравнения $\dot{x} = \lambda x$ для анализа устойчивости становится неправомерным.

Отметим, что области устойчивости рассмотренных линейно неявных методов содержат всю левую полуплоскость $h\lambda$ при $d = 1$; для схем W1-0.5, SW24-0.25 и SW24-0.5 левая полуплоскость совпадает с областью устойчивости. При экстраполяции схемы W1-0.5 область устойчивости получается ограниченной.

На рис. 2.13, 2.14 представлены результаты первого теста для линейно неявных методов — зависимости локальной ошибки и “эффективного порядка”, вычисленного по формуле (2.8), от шага интегрирования.

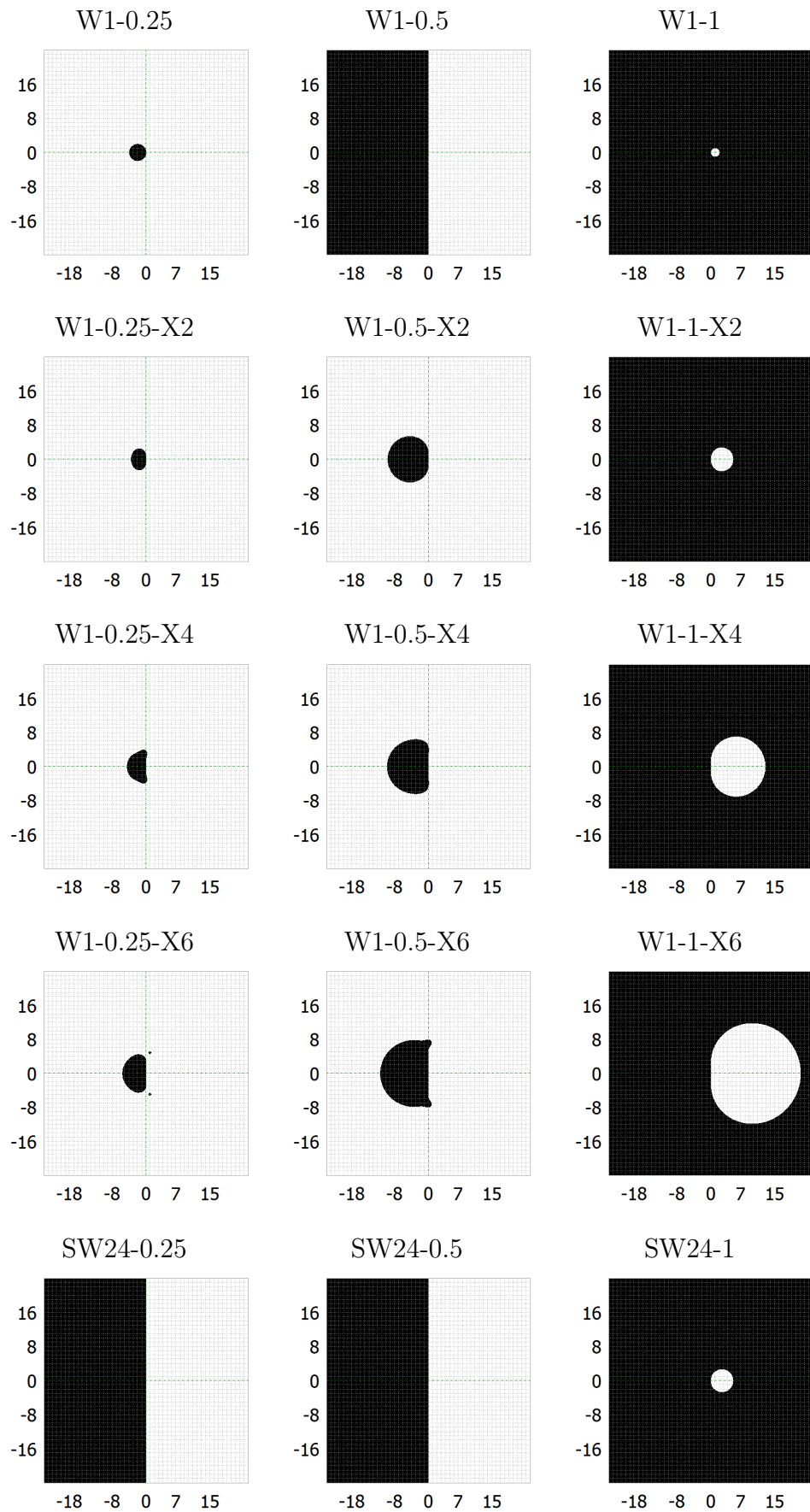


Рис. 2.11. Области устойчивости линейно неявных методов на комплексной плоскости $h\lambda$ в линейном масштабе.

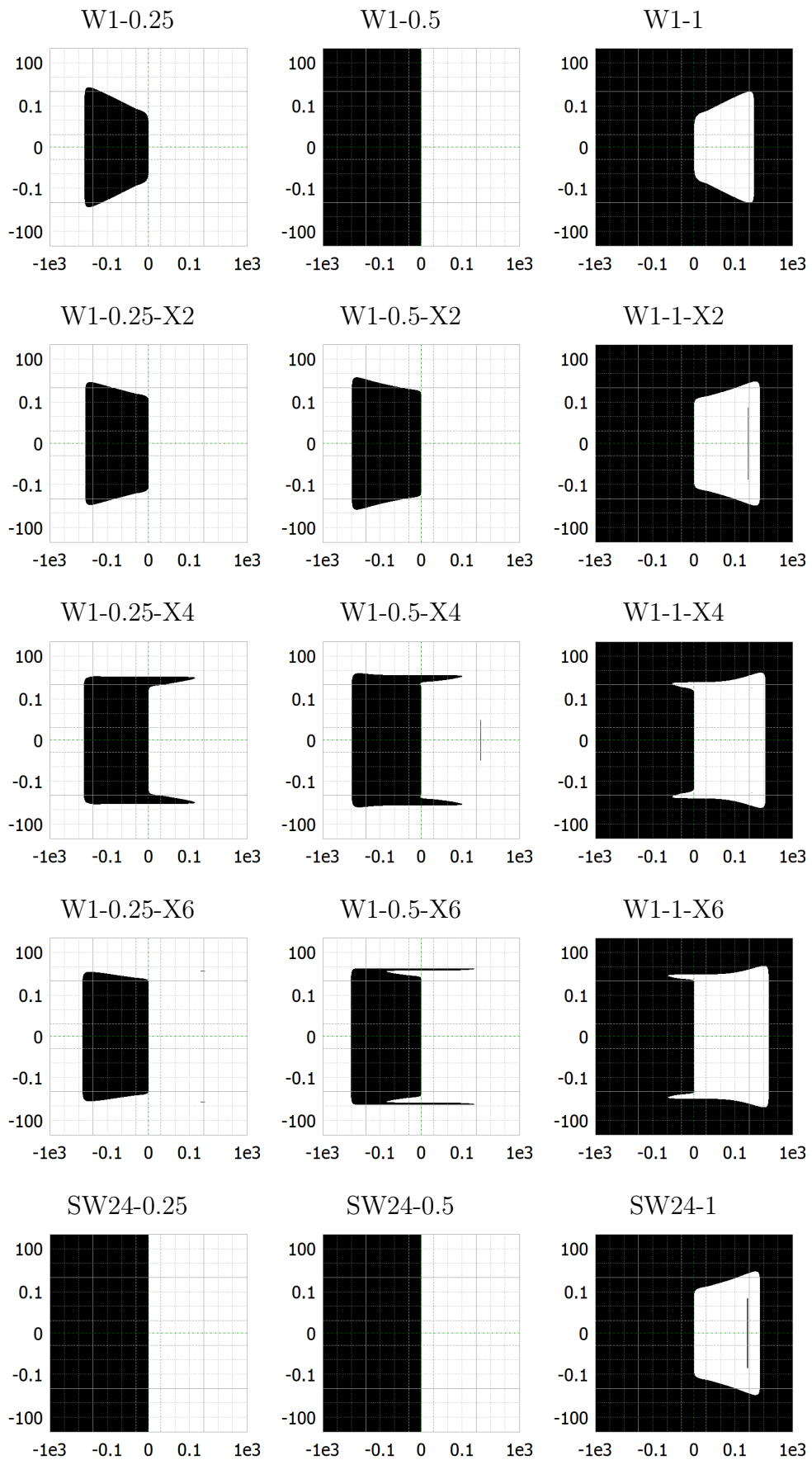


Рис. 2.12. Области устойчивости линейно неявных методов на комплексной плоскости $h\lambda$ в логарифмическом масштабе.

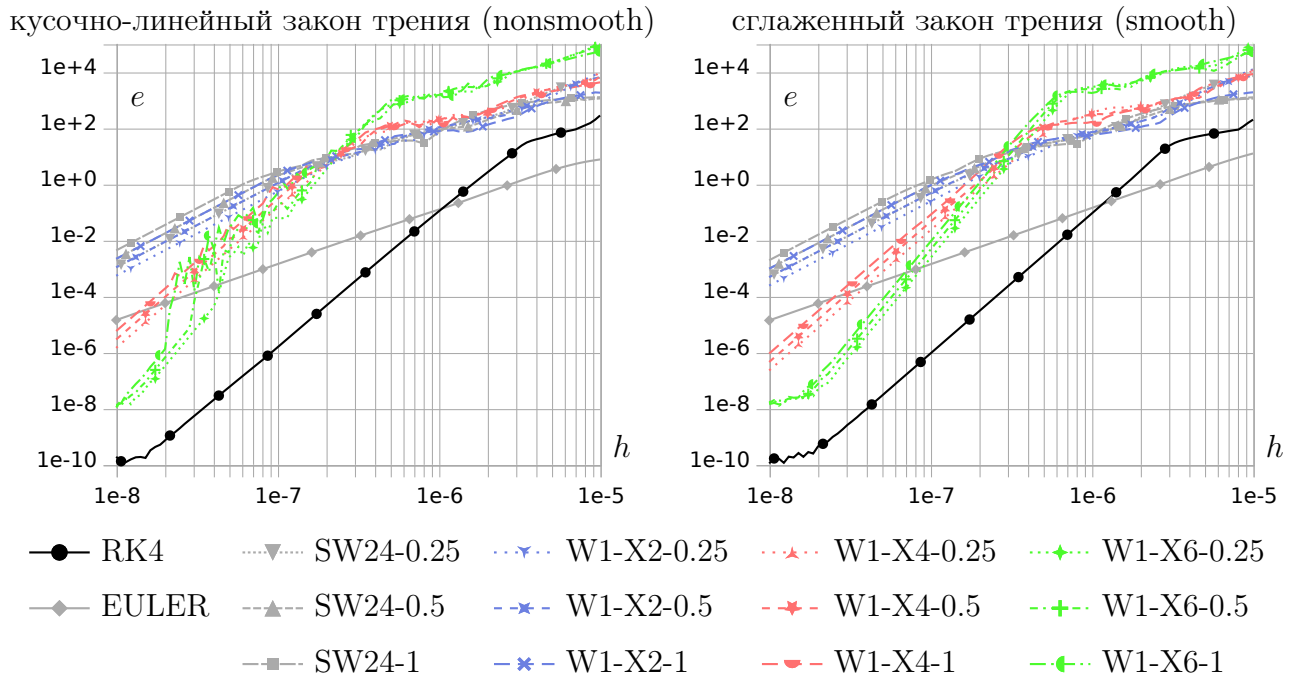


Рис. 2.13. Зависимость нормы e вектора ошибки метода на шаге от размера шага h — линейно неявные методы в сравнении с RK4, EULER.

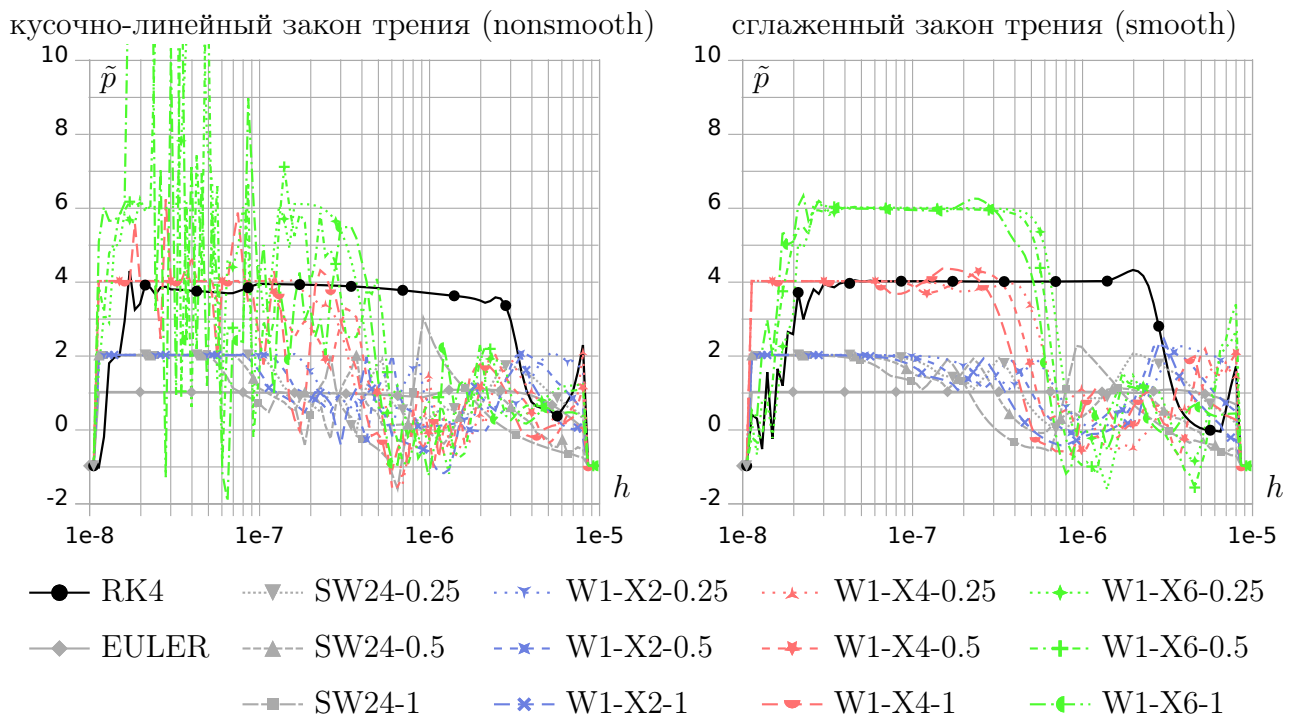


Рис. 2.14. Эффективный порядок точности метода \tilde{p} , вычисленный по формуле (2.8) — линейно неявные методы в сравнении с RK4, EULER.

На рис. 2.13 обращает на себя внимание прежде всего очень большая локальная ошибка, продемонстрированная линейно неявными методами в нашей задаче: для всех методов второго порядка (SW24- d , W1-X2- d) она порядка 10^{-3} уже на шаге $h = 10^{-8}$ с, тогда как даже для явного метода Эйлера ошибка на таком шаге порядка 10^{-5} , а для явных схем второго порядка EULER-X2 и GBS2s (см. рис. 2.6) — порядка 10^{-8} и 10^{-9} соответственно. Тем не менее, рис. 2.14 показывает, что эффективные порядки точности \tilde{p} всех методов соответствуют ожидаемым — особенно хорошо это видно для сглаженного закона трения. Для негладкого закона трения экстраполяционные схемы W1-X4- d и W1-X6- d выдают сильно осциллирующие кривые $\tilde{p}(h)$.

Большая локальная ошибка на шаге и высокая чувствительность рассмотренных линейно неявных методов к гладкости закона трения вызывают сомнения в том, что они могут быть успешно применены в задаче численного интегрирования уравнений (2.4). Результаты второго теста лишь подтверждают это. На рис. 2.15 показаны графики относительной глобальной ошибки для кривой

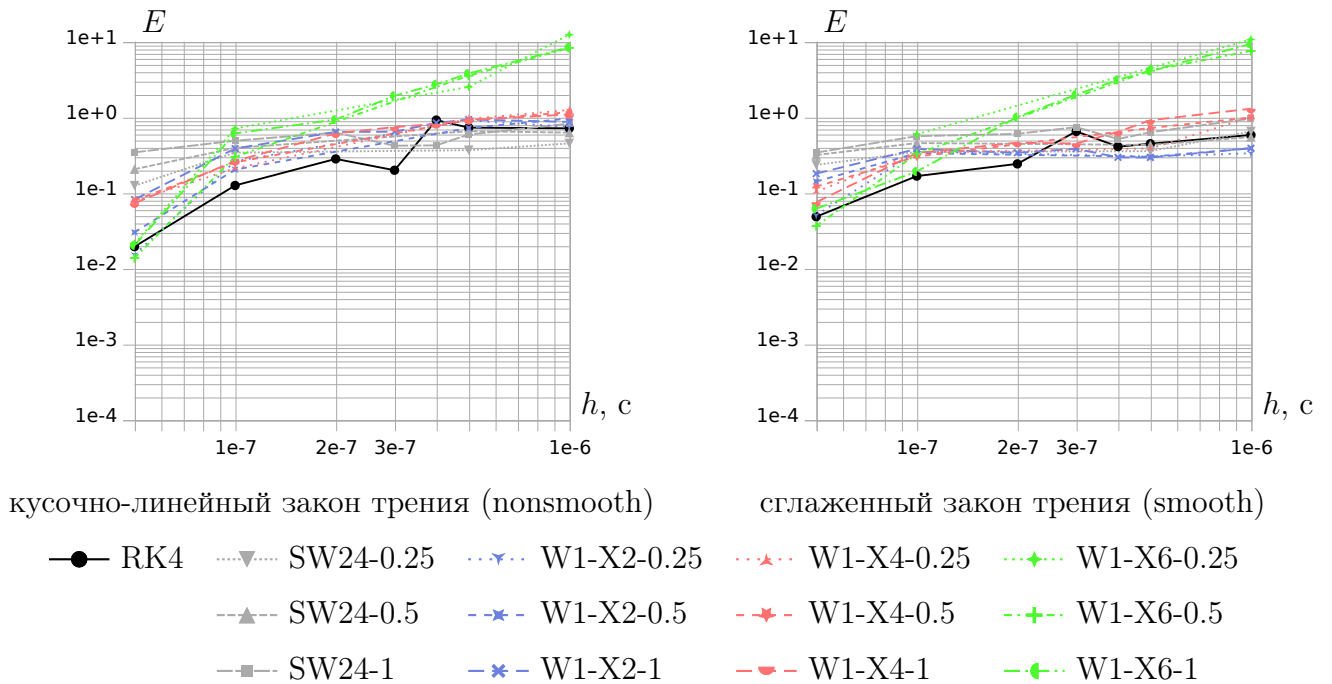


Рис. 2.15. Глобальная относительная ошибка для $P_z(t)$, вычисленная по формуле (2.9) — линейно неявные методы в сравнении с RK4.

$P_z(t)$. Видно, что приемлемые численные решения не получены ни одним из линейно неявных методов на шагах 10^{-7} с и больше: все они на этом шаге выдают бóльшие ошибки, чем RK4. При этом вычислительные затраты схем SW24- d , W1-X2- d и RK4 сопоставимы: указанные линейно неявные схемы требуют двух (SW24- d без оценки ошибки) и трёх (W1-X2- d) вычислений правой части системы ОДУ на шаге, RK4 — четырёх; однако каждая стадия линейно неявной схемы требует решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей W , что в случае её постоянства означает необходимость выполнения прямого и обратного ходов при решении СЛАУ $LUa = b$, где $LU = W$ есть LU-разложение матрицы W . Время выполнения прямого и обратного ходов в несколько (до 10) раз меньше времени вычисления правой части, если вычисления производятся одним потоком выполнения. К сожалению, схемы SW24- d выдают худший результат, чем RK4, даже при шаге $5 \cdot 10^{-8}$, когда RK4 уже выдаёт приемлемое численное решение. Поэтому от применения этих линейно-неявных схем в нашей задаче придётся отказаться. Из схем W1-X2- d лишь W1-X2-0.25 выдаёт ошибку несколько меньше, чем RK4 (при негладком законе трения) или почти такую же, как RK4 (при сглаженном законе трения) — на шаге $h = 5 \cdot 10^{-8}$ с. Таким образом, сколько-нибудь заметный выигрыш в скорости по сравнению с RK4 эти схемы не позволяют получить в нашей задаче. Другие рассмотренные схемы (W1-X4- d , W1-X6- d) выдают ошибку больше, чем RK4, при этом их вычислительная сложность значительно выше (10 вычислений правой части и 10 решений $LUa = b$ на шаге W1-X4- d , по 21 — для W1-X6- d). И от этих схем пришлось отказаться.

Надежда на то, что благодаря хорошим свойствам устойчивости W-методы будут работать на значительно бóльших шагах, чем явные методы, совершенно не оправдалась.

2.6. Метод трапеций

Следующий рассмотренный метод численного интегрирования — неявный *метод трапеций* [81, п. II.7]. Его схему в обозначениях п. 2.5 можно записать в виде

$$x_1 = x_0 + \frac{h}{2} [F(t_0, x_0) + F(t_1, x_1)], \quad t_1 \equiv t_0 + h; \quad (2.15)$$

таблица Бутчера для метода трапеций имеет вид

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Метод имеет второй порядок точности; его область устойчивости — левая полуплоскость комплексной плоскости $h\lambda$, поэтому можно ожидать приемлемых численных решений на сравнительно больших шагах.

Соотношение (2.15) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно x_1 . Типичная размерность этой системы для задач динамики трансмиссии в случае модели (е) (табл. 1.1) — более 3500 (например, состояние цепи из 84 пинов описывается 1764 обобщёнными координатами и таким же количеством обобщённых скоростей; также в модели присутствуют обобщённые координаты и скорости валов с шайбами и переменные состояния систем стабилизации). При численном решении (2.15) имеет смысл уменьшить число уравнений — это возможно сделать, так как почти половина уравнений — элементарные линейные соотношения $\dot{u} = v$ — см. (2.4). В соответствии со схемой метода (2.15) для них получаем

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2} (v_0 + v_1), \quad (2.16)$$

что позволяет исключить u_1 и представить систему алгебраических уравнений,

решаемых на шаге, в виде

$$G(y_1) = 0, \quad y \equiv \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$G(y) \equiv y - y_0 - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} F_v(t_0, u_0, v_0, z_0) + F_v(t_1, u_0 + \frac{h}{2}(v_0 + v_1), y_1, z_1) \\ F_z(t_0, u_0, v_0, z_0) + F_z(t_1, u_0 + \frac{h}{2}(v_0 + v_1), y_1, z_1) \end{bmatrix}.$$

Её решение y_1 содержит скорости v_1 и состояние систем стабилизации z_1 в конце шага интегрирования; затем по формуле (2.16) находятся координаты u_1 в конце шага.

Для решения уравнения (2.17) использовались различные методы типа метода Ньютона. В качестве начального приближения $y_1^{(0)}$ рассматривалось либо состояние в начале шага, y_0 , либо предсказание \tilde{y}_1 , найденное каким-нибудь явным методом. Рассмотрим подробнее методы ньютоновского типа.

2.6.1. Решение систем алгебраических уравнений методами ньютоновского типа

В этом подразделе будем придерживаться следующих обозначений: x — столбец неизвестных,

$$f(x) = 0 \quad (2.18)$$

— решаемая система уравнений, x_0 — начальное приближение, x_k — приближение, полученное на k -той итерации. Очередное приближение решения получается по формуле [85; 86]

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad B_k d_k = -f(x_k), \quad (2.19)$$

где B_k — некоторая аппроксимация матрицы Якоби $J \equiv Df/Dx$, d_k — *направление поиска*, $\alpha_k \in (0, 1]$ — скалярная величина, значение которой определяется при помощи алгоритма поиска вдоль направления d_k .

Выбор матриц B_k . Отметим, что разложение $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности x_k с удержанием не более чем линейных членов даёт классический метод Ньютона — (2.19) с $\alpha_k = 1$, $B_k = J(x_k)$; в таких случаях будем далее говорить, что используется точная матрица Якоби и обозначать соответствующие модификации метода Ньютона словом **exact**.

При большом числе переменных классический метод Ньютона становится трудоёмким — главным образом из-за необходимости вычислять J на каждой итерации. В качестве альтернативы вычисления матрицы Якоби на каждой итерации часто рассматривают её обновление на каждой итерации. Например, Бройден [87] предложил, в частности, добавлять на каждой итерации следующее слагаемое ранга 1:

$$B_k = B_{k-1} + \frac{r_k s_k^T}{s_k^T s_k}, \quad s_k \equiv x_k - x_{k-1}, \quad r_k \equiv y_k - B_{k-1} s_k, \quad y_k \equiv f(x_k) - f(x_{k-1}). \quad (2.20)$$

Модификации метода Ньютона, использующие эту процедуру, будем обозначать словом **broyden**. Отметим, однако, следующее обстоятельство. Матрица Якоби $J(x)$ в нашей задаче имеет редкозаполненную структуру. Желательно, чтобы матрицы B_k в (2.19) также имели такую структуру, так как её учёт очень сильно сказывается на времени решения СЛАУ (2.19) на каждой итерации метода. К сожалению, применение формулы (2.20) делает A_k полностью заполненной матрицей. Поэтому рассматривались и другие варианты обновления матриц B_k . В частности, мы пробовали использовать формулу (2.20), модифицированную следующим образом: если элемент $B_{k,ij}$ матрицы B_k равен нулю, то элемент $B_{k+1,ij}$ матрицы B_{k+1} также полагается равным нулю; в противном случае он вычисляется по формуле (2.20) — такие модификации метода Ньютона далее обозначаются как **fake-broyden**.

Еще один вариант предложен в работе [88]. Имея в виду, что на итерации решается СЛАУ с матрицей B_k и при этом используется LU-разложение $B_k = L_k U_k$, авторы предложили формулы, по которым вносятся изменения

непосредственно в L_k и U_k , причём нулевые элементы в L_k , U_k остаются нулевыми в L_{k+1} , U_{k+1} . Это позволяет сэкономить значительное время на LU-разложении. Соответствующие модификации метода Ньютона будем обозначать словом **hart** (по имени первого автора).

Наконец, рассматривались варианты, когда в качестве матриц B_k рассматривается одна и та же матрица B_0 . При этом число итераций может значительно возрасти, но зато сами итерации значительно быстрее, так как факторизация B_k на каждой итерации не требуется. Эта модификация далее обозначается словом **const**.

Отметим также следующую простую идею, позволившую несколько ускорить решение СЛАУ на итерации. Матрица B_k — редкозаполненная, бóльшая часть её элементов — нули. LU разложение делается с учётом профиля. Профиль матрицы из n строк и n столбцов характеризуется $2n$ целыми числами p_i — количеством нулевых элементов в начале i -й строки, q_j — количеством нулевых элементов в начале j -го столбца. Левая унитреугольная матрица L имеет те же p_i , что и исходная матрица, правая треугольная U — те же q_j , что исходная матрица. Чем уже профиль, тем быстрее декомпозиция, прямой ход и обратный ход. До некоторой степени профиль можно уменьшить, перенумеровав переменные специальным образом [89]. Другая идея, о которой здесь идёт речь, состоит в том, чтобы в матрице B_k положить некоторые элементы равными нулю с целью уменьшить ширину её профиля. Опыт показывает, что на этом пути можно добиться увеличения быстродействия, но необходимо тщательно подобрать ширину профиля и алгоритм его уменьшения с учётом специфики задачи. Если чрезмерно сузить профиль, количество итераций в методе Ньютона резко возрастает. Модификации метода Ньютона, в которых искусственно уменьшалась ширина профиля, будем обозначать словом **trim**.

Алгоритм поиска вдоль направления d_k . Выбор скаляра α_k на итерации производился следующим образом. В качестве кандидатов для α_k рассматрива-

лись значения

$$\alpha_{k,i} : \quad \alpha_{k,0} = 1, \quad \alpha_{k,i+1} = c\alpha_{k,i}, \quad c = 1/2, \quad i = 0, \dots, n_\alpha \quad (2.21)$$

Для этих значений, начиная с $\alpha_{k,0}$, вычислялось отношение

$$\eta_{k,i} \equiv \frac{\|f(x_k)\|^2}{\|f(x_k + \alpha_{k,i}d_k)\|^2}. \quad (2.22)$$

Если для некоторого i оно оказывалось не более, чем $\eta_* = 0,8$, процесс прекращался и полагалось $\alpha_k = \alpha_{k,i}$ (это сделано для уменьшения количества вычислений $f(x)$ на итерации). Если оказывалось, что все $\eta_{k,i} \geq 1$, итерационный процесс метода Ньютона считался расходящимся. Если же были обнаружены $\eta_{k,i} < 1$, то полагалось

$$\alpha_k = \alpha_{k,i_*}, \quad i_* = \arg \min_{i=0, \dots, n_\alpha} \eta_{k,i},$$

то есть параметр α_k выбирался таким образом, чтобы скорость сходимости была по возможности наибольшей.

Прекращение итераций. Условием прекращения итераций в наших численных экспериментах было одновременное выполнение неравенств

$$\|f(x_k)\| < \varepsilon^{abs}, \quad \|x_k - x_{k-1}\| < \varepsilon^{rel} \|x_k\|. \quad (2.23)$$

Допустимые абсолютная невязка ε^{abs} относительная ошибка ε^{rel} были фиксированы, их значения подобраны в численных экспериментах: $\varepsilon^{abs} = 10^{-4}$, $\varepsilon^{rel} = 10^{-6}$, хотя было бы более правильно прекращать итерации, когда невязка $f(x_k)$ становится сопоставимой с локальной погрешностью численного метода решения системы ОДУ.

Вычисление матрицы Якоби. Для модификаций `exact` матрица Якоби вычисляется на каждой итерации. Во всех остальных модификациях $B_k \neq J(x_k)$, поэтому требуется уточнить, при каких обстоятельствах она вычисляется.

При численном интегрировании ОДУ динамики (2.4) уравнение (2.18) решается многократно, при этом на каждом шаге функция $f(x)$ меняется. При этом матрица B_0 на первой итерации метода Ньютона не обязательно вычисляется как $J(x_0)$, поскольку это вычисление трудоёмко. Так происходит либо в модификациях **exact**, либо на самом первом шаге, когда матрица Якоби ещё ни разу не вычислялась. В остальных случаях B_0 инициализируется значением, которое она имела на последней итерации предыдущего шага.

В процессе ньютоновских итераций может быть обнаружено отсутствие сходимости. Это событие возникает либо в случае, когда на очередной итерации не удаётся подобрать скаляр α_k , либо если количество итераций достигает некоторого порогового значения N и при этом условия (2.23) завершения итераций не выполняются. Отсутствие сходимости обычно свидетельствует о “деградации” аппроксимации матрицы Якоби; если оно происходит на k -той итерации, мы полагаем $B_k = J(x_k)$; после этого итерации продолжают. Если, однако, сразу после вычисления матрицы Якоби не удаётся сделать ни одной итерации из-за невозможности выбрать α_k , считается, что попытка решения уравнения (2.18) потерпела неудачу.

2.6.2. Численные эксперименты с методом трапеций

В численных экспериментах рассматривались те же два теста, что и для остальных численных методов (см. с. 248). В первом тесте мы рассмотрели лишь модификацию **exact**, так как интерес в нём представляет зависимость локальной ошибки от длины шага, а не быстродействие. Результат теста представлен на рис. 2.16. Видно, что метод трапеций ведёт себя как метод второго порядка, по крайней мере на шагах до $2 \cdot 10^{-7}$ с. Локальная ошибка больше, чем у RK4, на шагах примерно до $1,5 \cdot 10^{-7}$ с, далее меньше, чем у RK4. Для гладкого закона трения ошибка несколько меньше, чем для негладкого, как и у метода RK4.

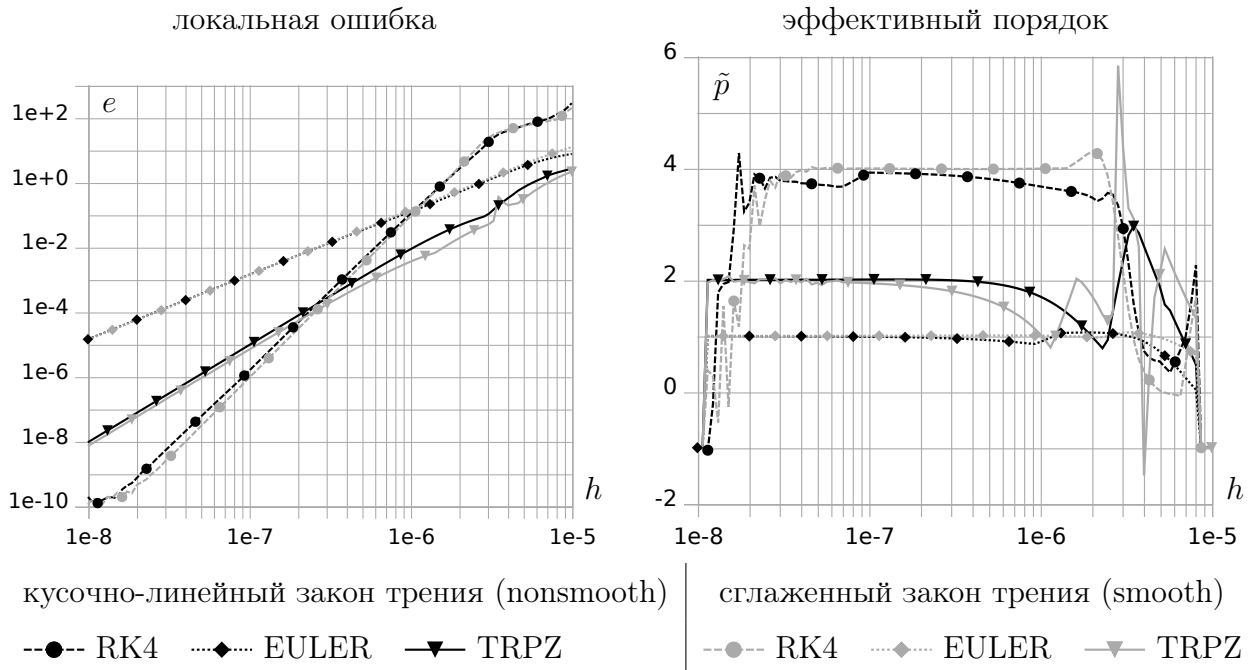


Рис. 2.16. Зависимости нормы e вектора ошибки метода на шаге и эффективного порядка точности метода \tilde{p} , вычисленного по формуле (2.8), от размера шага h (метод трапеций в сравнении с RK4 и явным методом Эйлера).

Во втором тесте (расчёт динамики) рассматривается метод трапеций с различными модификациями метода Ньютона: `exact`, `fake-broyden`, `const`. Сразу отметим, что ни одна из модификаций `hart` не позволила получить численное решение на шагах $2 \cdot 10^{-7}$ с и больше (не помогало даже вычисление матрицы Якоби при отсутствии сходимости), в то время как для остальных модификаций численное решение получено на шагах до $2 \cdot 10^{-6}$ с хотя бы для одного из двух рассмотренных законов трения. Эта модификация далее не рассматривается, хотя на более простых тестовых уравнениях она работала значительно быстрее других. Модификация `broyden` также не рассматривается, поскольку матрицы B_k в методе Ньютона получаются полностью заполненными.

Во втором тесте нас интересует, во-первых, глобальная ошибка решения (точнее, её оценка для кривой $P_z(t)$ по формуле (2.9)) и, во-вторых, ряд параметров (относящихся ко всему расчёту), определяющих быстродействие и позволяющих оценить перспективы использования метода трапеций в нашей задаче. К этим параметрам мы отнесли следующие: n_{it} — среднее количество ньюто-

новских итераций на шаге интегрирования; n_f — общее количество вычислений $f(x)$ в методе Ньютона; $n_{f,J}$ — количество вычислений $f(x)$ в методе Ньютона, сделанных для вычисления матрицы Якоби; $n_{f,*} \equiv n_f - n_{f,J}$; n_J — общее количество вычислений матрицы Якоби; n_{LU} — общее количество количество LU-факторизаций; n_{lin} общее количество решений СЛАУ.

Отметим ещё, что в качестве предиктора был использован явный метод Эйлера: начальное приближение для метода Ньютона, полученное с его помощью, позволяет несколько снизить количество итераций на каждом шаге. Выбор именно метода Эйлера обусловлен его простотой, а также медленным ростом локальной ошибки с шагом интегрирования, так как это метод первого порядка точности.

Каждая из трёх рассмотренных модификаций метода Ньютона позволила получить численное решение на шаге $2 \cdot 10^{-6}$ с хотя бы для одного из двух законов трения; модификация **exact** также позволила получить численное решение на шаге $3 \cdot 10^{-7}$ с, но только для сглаженного закона трения. Значения относительной глобальной ошибки полученных численных решений приведены в табл. 2.2. Они настолько малы, что кривая $P_z(t)$ не отличается от эталонной

Таблица 2.2. Глобальная относительная ошибка $P_z(t)$ в численных решениях, полученных методом трапеций

	$h = 2 \cdot 10^{-6}$ с		$h = 3 \cdot 10^{-6}$ с	
метод \ модель	nonsmooth	smooth	nonsmooth	smooth
exact	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-4}$	-	$1,0 \cdot 10^{-3}$
fake-broyden	$1,5 \cdot 10^{-3}$	-	-	-
const	$5,6 \cdot 10^{-4}$	-	-	-

(рис. 2.8) на глаз. Таким образом, при постоянном шаге интегрирования метод трапеций в нашей задаче либо выдаёт приемлемое численное решение, либо не выдаёт его вообще из-за расходимости ньютоновских итераций.

В табл. 2.3 приведены значения параметров, определяющих быстродействие метода трапеций, а также полное время расчёта T . Отметим, что каждой модификацией метода было выполнено несколько расчётов, отличающихся значениями ε^{abs} и ε^{rel} в критерии останова итераций (2.23). Назначить их заранее не представлялось возможным. В численных экспериментах ε^{abs} менялось от 10^{-5} до 10^{-1} , а ε^{rel} — от 10^{-6} до 10^{-3} . При этом глобальная ошибка, приведённая в табл. 2.2, практически не менялась. От параметров ε^{abs} и ε^{rel} зависело (но не очень сильно) число итераций и, следовательно, время расчёта. Например, для негладкого закона трения модификация **exact** выполняет в среднем 2,86 итераций на шаг при $\varepsilon^{abs} = 10^{-5}$, $\varepsilon^{rel} = 10^{-6}$ и 2,09 итераций при $\varepsilon^{abs} = 10^{-3}$, $\varepsilon^{rel} = 10^{-3}$. С другой стороны, при $\varepsilon^{rel} \geq 10^{-5}$ модификация **fake-broyden** не позволила получить ни одного численного решения — итерационный процесс расходился на каком-нибудь временном шаге. Поэтому для сравнения модификаций метода Ньютона мы остановились на значении $\varepsilon^{rel} = 10^{-6}$.

Таблица 2.3. Параметры, определяющие быстродействие метода трапеций

метод	ε^{abs}	n_{it}	n_f , млн	$n_{f,J}$, млн	$n_{f,*}$	n_J	n_{LU}	n_{lin}	T , с
кусочно-линейный закон трения (nonsmooth), $h = 2 \cdot 10^{-6}$ с									
exact	10^{-5}	2,860	14,62	14,60	18792	8030	8030	8030	11711
exact	10^{-3}	2,859	14,61	14,59	18783	8026	8026	8026	11701
exact	10^{-1}	2,851	14,57	14,55	18730	8003	8003	8003	11986
fake-broyden	10^{-5}	16,60	0,148	0,038	109503	21	46607	46607	2278
fake-broyden	10^{-1}	12,85	0,135	0,42	92775	23	36064	36064	1820
сглаженный закон трения (smooth), $h = 2 \cdot 10^{-6}$ с									
exact	10^{-3}	2,677	13,88	13,87	16177	7627	7627	7627	11325
exact	10^{-1}	2,677	13,88	13,87	16177	7627	7627	7627	11278
const	10^{-5}	28,05	1,113	0,878	234578	483	483	79913	1044
const	10^{-4}	24,18	1,131	0,854	277394	470	470	68896	1015
сглаженный закон трения (smooth), $h = 3 \cdot 10^{-6}$ с									
exact	10^{-1}	3,389	12,48	12,47	13531	6859	6859	6859	9495

Видно, что для модификации **exact** итерации сходятся очень быстро (ме-

нее трёх итераций на шаге $2 \cdot 10^{-6}$); однако она тратит огромное время на вычисление матрицы Якоби и потому сильно проигрывает в быстродействии модификациям `fake-broyden` и `const`, для которых количество итераций значительно больше. Более того, модификация `const` работает быстрее, чем `fake-broyden`, несмотря на почти вдвое большее среднее число итераций, за счёт того, что требует значительно меньшего числа LU-факторизаций.

Для сравнения отметим, что для эталонных решений с негладким и сглаженным законами трения, полученных методом RK4 с шагом 10^{-8} с, время расчёта и количество вычислений правой части системы ОДУ составляют соответственно $T = 1529$ с, $n_f = n_{f,*} = 2$ млн. Таким образом, однопоточная реализация метода трапеций не может конкурировать с RK4 по быстродействию, если только не ускорить вычисление матрицы Якоби. Подход, позволяющий уменьшить количество вычислений $f(x)$ для вычисления $J = Df/Dx$ в случае редкозаполненной матрицы J , описан в [90]. По оценкам, это позволит уменьшить n_J примерно в три раза. Но и это не даёт возможности реализовать однопоточный решатель, превосходящий RK4 по быстродействию. С другой стороны, в методе трапеций есть потенциал для распараллеливания: каждый столбец матрицы Якоби в методе Ньютона можно вычислять в отдельном потоке, что, по грубой оценке, позволит ускорить модификацию `exact` примерно в 100 раз; однако для этого требуется около 1800 процессорных ядер или, в случае применения методики [90], около 600 ядер.

2.7. Стабилизированный явный метод

Характер расположения собственных чисел матрицы Якоби системы ОДУ (2.4) на комплексной плоскости (рис. 2.2) подталкивает к рассмотрению *стабилизированных явных методов* [80, п. IV.2] для численного интегрирования. Эти методы отличаются тем, что область устойчивости на плоскости $h\lambda$ сильно вытянута вдоль вещественной оси в сторону отрицательных значений благода-

ря специальному выбору корней многочлена устойчивости $R_s(h\lambda)$. Здесь s — степень многочлена, совпадающая с числом стадий метода. Ширина области устойчивости $R_s(h\lambda) < 1$ пропорциональна s^2 , поэтому возможно значительное уменьшение вычислительных затрат при решении жёстких задач стабилизированным явным методом по сравнению с классическими явными методами.

В данной работе был выбран метод DUMKAZ [91] третьего порядка точности; этот выбор был обусловлен публичной доступностью программной реализации метода на языке C. Отметим также работы [92; 93], посвященные стабилизированным явным методам, и работу [94], посвящённую многочленам устойчивости.

Решатель DUMKAZ реализует набор s -стадийных одношаговых схем Рунге – Кутты для различных степеней s многочлена устойчивости — от 3 до 324. Всего реализовано 14 многочленов устойчивости, которые мы пронумеруем индексом $k = 0, \dots, 13$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
s	3	6	9	15	21	27	36	48	63	81	135	189	243	324

Кроме того, реализован алгоритм управления размером шага интегрирования h , использующий оценку локальной ошибки на шаге, и алгоритм выбора номера k многочлена устойчивости, основанный на оценке спектрального радиуса матрицы Якоби системы ОДУ. Обе эти опции в наших тестах были отключены, так как представляло интерес поведение каждой отдельно взятой схемы Рунге – Кутты при фиксированном шаге. Заметим, однако, что при включённых опциях управления быстродействие решателя DUMKAZ в нашей задаче далеко от наилучшего: алгоритм управления номером многочлена устойчивости увеличивает k , выбирая многочлен бóльшей степени, основываясь на значении спектрального радиуса. Однако дальнейшее увеличение шага невозможно, потому что при этом значения $h\lambda$ для комплексных собственных чисел λ матрицы Якоби, соответствующих высокочастотным колебаниям, выходят из области устойчивости.

Фактически получается, что встроенные алгоритмы управления решателя выбирают слишком высокую степень многочлена устойчивости, имеющую больше стадий, чем необходимо при данном шаге.

Далее схема Рунге – Кутты решателя DUMКАЗ, соответствующая индексу k , обозначается DUMКАЗ-Р k . Области устойчивости всех схем приведены на рис. 2.17 (в линейном масштабе; для каждой схемы масштаб свой, одинаковый вдоль вещественной и мнимой осей), рис. 2.18 (в логарифмическом масштабе). Бросается в глаза, что области устойчивости схем для $k = 0, \dots, 8$ выглядят иначе, чем для больших k ; кроме того, область устойчивости схемы DUMКАЗ-Р13 несвязна. По-видимому, многочлен устойчивости для неё вычислен авторами решателя с ошибкой.

В численных экспериментах с системой ОДУ (2.4) рассматривались схемы DUMКАЗ-Р4 ($s = 21$), DUMКАЗ-Р5 ($s = 27$), DUMКАЗ-Р6 ($s = 36$), DUMКАЗ-Р7 ($s = 48$), DUMКАЗ-Р8 ($s = 63$), DUMКАЗ-Р9 ($s = 81$). Для схем с $k \leq 4$ область устойчивости слишком мала в направлении $-\text{Re}(h\lambda)$, а для схем с $k \geq 9$ — в направлениях $\pm \text{Im}(h\lambda)$. Сказанное иллюстрируется рис. 2.19, где изображены области устойчивости схем DUMКАЗ (в логарифмическом масштабе), а также величины $h_{\max}\lambda$, где λ — собственные числа матрицы Якоби в некотором выбранном состоянии (см. п. 2.3) для негладкого закона трения, а h_{\max} — максимальный размер шага интегрирования, при котором $h_{\max}\lambda$ находятся в области устойчивости. Максимальный шаг в каждом случае был подобран методом половинного деления. На рис. 2.20 слева представлен график зависимости найденного таким образом h_{\max} от номера схемы k . При $k > 7$ максимальный шаг не растёт и даже несколько уменьшается.

Имея данные о максимальном шаге интегрирования для каждой из схем DUMКАЗ, легко указать ту из них, которая обеспечит наибольшее быстродействие — это схема, для которой отношение s/h_{\max} (число стадий на расчёт одной секунды) минимально. Как следует из графика на рис. 2.20, справа, в нашем случае такой схемой является DUMКАЗ-Р6.

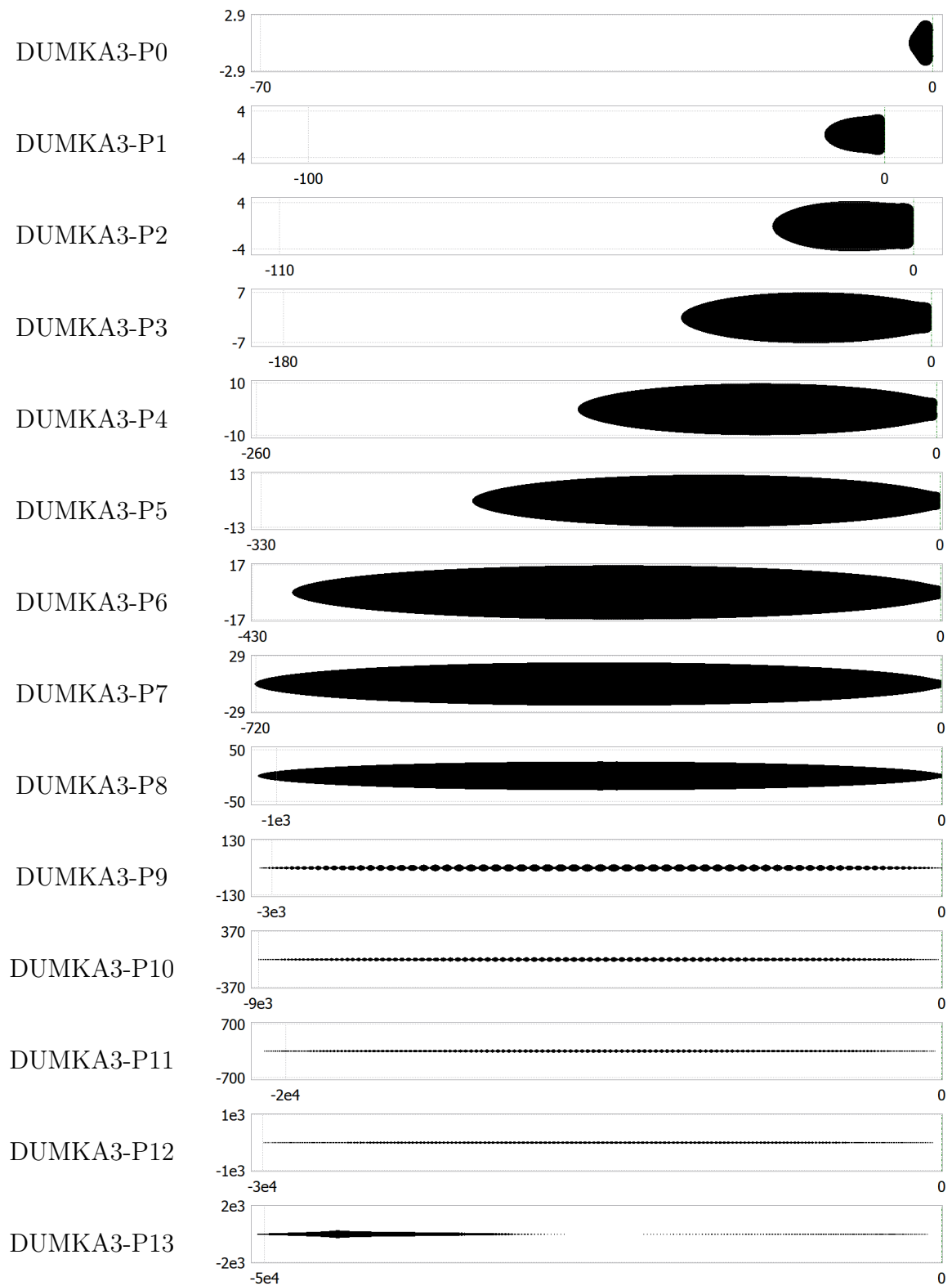


Рис. 2.17. Области устойчивости схем решателя DUMKA3 на комплексной плоскости $h\lambda$ в линейном масштабе.

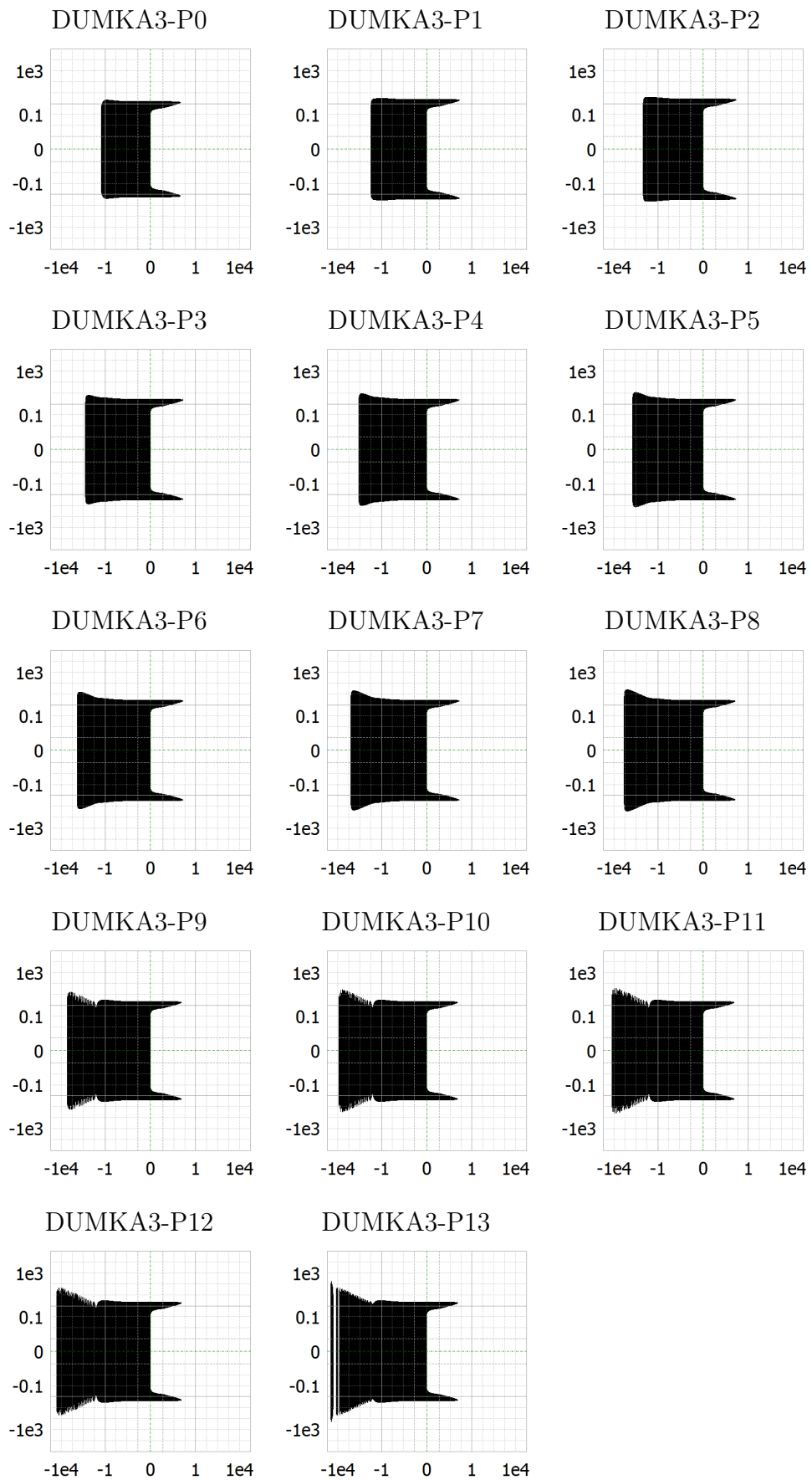


Рис. 2.18. Области устойчивости схем решателя DUMKA3 на комплексной плоскости $h\lambda$ в логарифмическом масштабе.

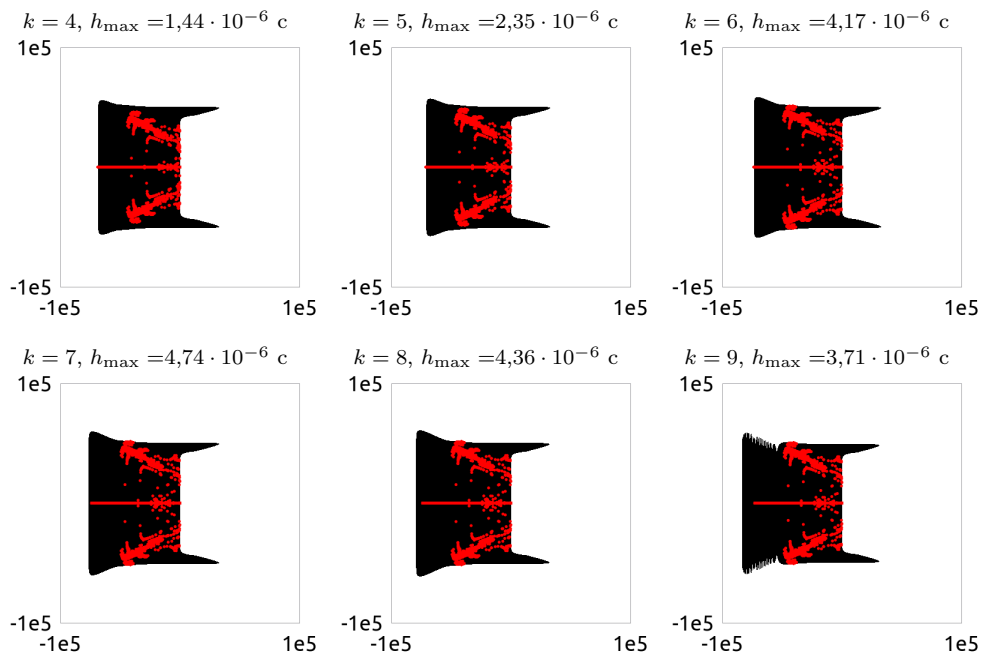


Рис. 2.19. К выбору максимального шага для схем решателя DUMKAZ.

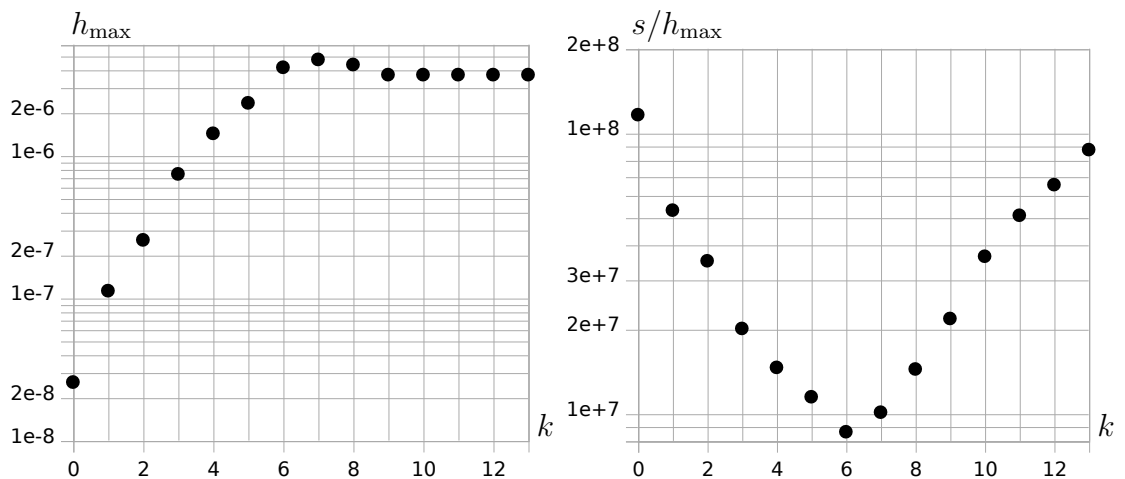


Рис. 2.20. К выбору наиболее быстродействующей для данной задачи схемы решателя DUMKAZ.

Однако окончательный вывод можно сделать по результатам теста расчёта динамики, рассмотренного ниже.

Результаты первого из двух тестов, описанных на стр. 248, представлены на рис. 2.21. Зависимость ошибки на шаге интегрирования от величины шага

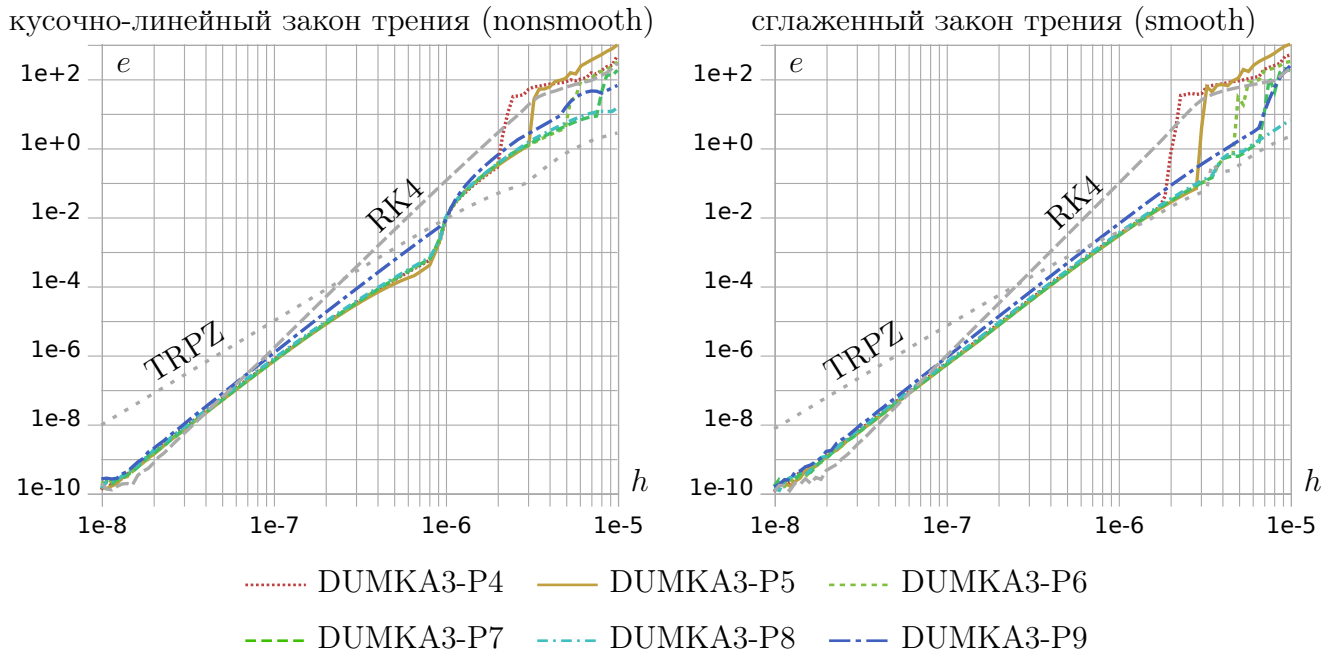


Рис. 2.21. Зависимость нормы e вектора ошибки метода на шаге от размера шага h — DUMKA3 в сравнении с RK4, TRPZ.

приведена для схем DUMKA3-P4 – DUMKA3-P9, а также для методов RK4, TRPZ (как было установлено в п. 2.6, метод трапеций позволяет получить приемлемое решение на шаге $2 \cdot 10^{-6}$ с). При шагах интегрирования примерно от $2 \cdot 10^{-6}$ на графиках локальной ошибки схем DUMKA3 наблюдается резкий скачок вверх; для каждой из схем это происходит при своём значении шага, которое тем больше, чем выше порядок многочлена устойчивости. Кроме того, для негладкого закона трения рассмотренные схемы DUMKA3 демонстрируют увеличение скорости роста ошибки на шагах $8 \cdot 10^{-7}$ – 10^{-6} с. При больших шагах интегрирования ($h > 10^{-6}$) локальная ошибка схем DUMKA3 примерно такая же, как для метода трапеций, в случае сглаженного закона трения; для негладкого закона трения метод трапеций выдаёт меньшую локальную ошибку на больших шагах. Локальная ошибка для схем DUMKA3 значительно меньше,

чем для RK4, на больших шагах (не менее, чем на порядок — при шагах от 10^{-6} с).

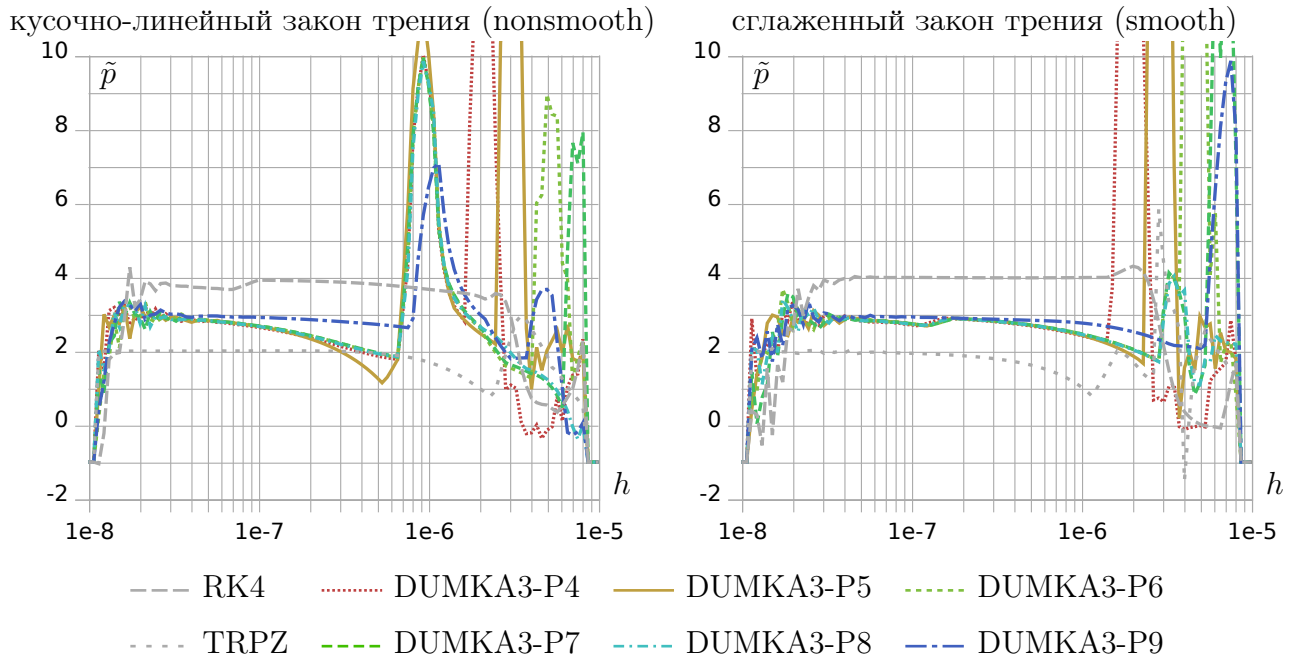


Рис. 2.22. Эффективный порядок точности метода \tilde{p} , вычисленный по формуле (2.8) — DUMKA3 в сравнении с RK4, TRPZ.

Графики эффективного порядка точности \tilde{p} , вычисленного по формуле (2.8) для схем DUMKA3, представлены на рис. 2.22. Видно, что схемы ведут себя как схемы 3-го порядка точности лишь на небольших шагах. Поэтому нельзя исключить, что при использовании шагов больше 10^{-6} с управление длиной шага будет работать некорректно.

Второй тест, в котором рассматривалось поведение глобальной ошибки при расчёте динамики, выдал обнадеживающие результаты для некоторых из рассмотренных схем. Графики глобальной ошибки для кривой $P_z(t)$ (рис. 2.8) представлены на рис. 2.23. Из этих графиков следует, что для схем DUMKA3-P5 — DUMKA3-P8 глобальная ошибка очень мала ($E < 2 \cdot 10^{-3}$) на шаге $2 \cdot 10^{-6}$ с; схемы DUMKA3-P6, DUMKA3-P7 и DUMKA3-P8 выдают приемлемое численное решение на шаге $3 \cdot 10^{-6}$ с, DUMKA3-P8 — на шаге $4 \cdot 10^{-6}$ с.

Вопрос о быстродействии схем DUMKA3 по сравнению с RK4 проясняет табл. 2.4, где приведены величины n_F — количество вычислений правой части

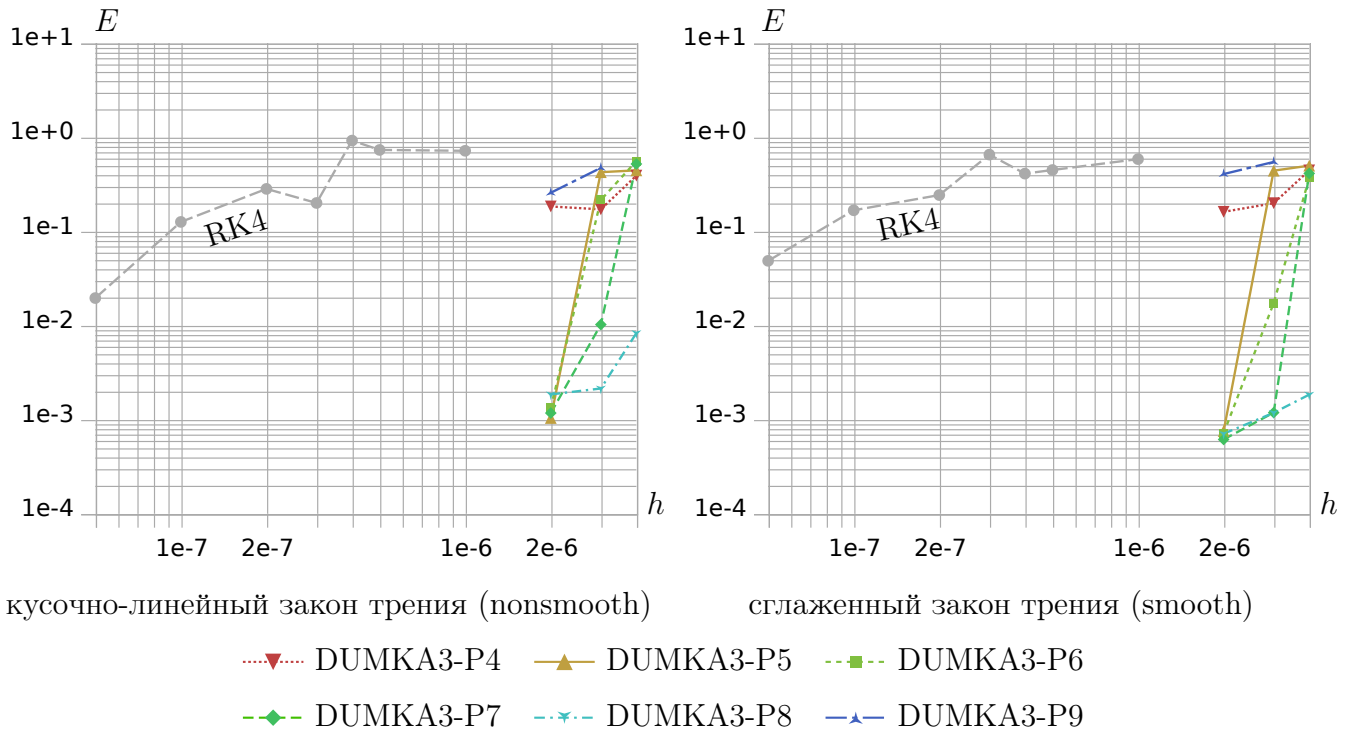


Рис. 2.23. Глобальная относительная ошибка для $P_z(t)$, вычисленная по формуле (2.9) — схемы решателя DUMKA3 в сравнении с RK4.

Таблица 2.4. Быстродействие схем DUMKA3 по сравнению с RK4 (негладкий закон трения)

scheme	h, c	n_F	E	ускорение по сравнению с RK4 при $h = 5 \cdot 10^{-8}$
RK4	$5 \cdot 10^{-8}$	400824	0,0195	1
DUMKA-P5	$2 \cdot 10^{-6}$	75817	0,00104	5,9
DUMKA-P7	$3 \cdot 10^{-6}$	95425	0,0102	4,7
DUMKA-P8	$4 \cdot 10^{-6}$	104821	0,00827	4,4

системы ОДУ (2.4), относительная глобальная ошибка E и ускорение по сравнению с расчётом методом RK4 с шагом $5 \cdot 10^{-8}$ с (оно непосредственно измерено при расчетах). Таким образом, схема DUMKA-P5 с шагом $2 \cdot 10^{-6}$ с в тестах показала наилучшее ускорение 5,9, при этом относительная глобальная ошибка почти в 20 раз меньше, чем в численном решении методом RK4 с шагом $5 \cdot 10^{-8}$ с.

Можно сделать вывод о том, что стабилизированные явные методы — подходящий выбор для численного интегрирования ОДУ динамики бесступенчатой трансмиссии. Вместе с тем, нельзя не отметить, что в схемах решателя

DUMKAZ области устойчивости для больших k недостаточно хороши для нашей задачи, поэтому имеет смысл рассмотреть другие стабилизированные явные методы, в основном те, для которых область устойчивости охватывает больший отрезок мнимой оси. Такие методы описаны в работах [92; 93], но пока не рассмотрены автором.

2.8. Выводы ко второй главе

Во введении ко второй главе описаны особенности системы ОДУ, описывающей динамику моделей бесступенчатой трансмиссии, предложенных в гл. 1. В частности, отмечены особенности процедуры численного интегрирования систем ОДУ при наличии дискретного состояния. Исследован спектр матрицы Якоби правой части системы ОДУ; установлено, что рассматриваемая система ОДУ является умеренно жёсткой.

В следующих подразделах рассмотрены несколько классов одношаговых методов численного интегрирования к системе ОДУ динамики трансмиссии с целью найти среди них те, которые могли бы позволить сократить время и объём расчётов — в том числе, за счёт параллелизации программного кода.

В п. 2.4 обнаружено, что классические явные методы не позволяют существенно увеличить быстродействие по сравнению с методом RK4, хотя некоторые из них (например, GBS2s) лучше, чем RK4.

В п. 2.5 рассмотрены линейно- неявные методы (так называемые W-методы, являющиеся методами типа Розенброка). Несмотря на то, что формально они обладают лучшими свойствами устойчивости, чем явные методы, в нашей задаче рассмотренные W-методы зарекомендовали себя плохо: локальная ошибка на шаге и глобальная ошибка в тестовом расчёте оказались значительно выше, чем для явного метода RK4, при одних и тех же значениях шага интегрирования. W-методы не позволили получить какой-либо выигрыш в быстродействии по сравнению с RK4.

В п. 2.6 рассмотрен метод трапеций. Поскольку он неявный, на шаге интегрирования требуется решать систему алгебраических уравнений; в нашем случае она нелинейна. Рассматривались несколько модификаций метода трапеций, отличающиеся реализацией итерационного метода ньютоновского типа для решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Установлено, что метод трапеций позволяет использовать значительно бóльшие шаги интегрирования, чем RK4, и при этом получать более точные численные решения. Однако выигрыш в быстродействии (примерно в 100 раз) по сравнению с RK4 возможен лишь при условии быстрого вычисления матрицы Якоби системы алгебраических уравнений на каждой итерации. Этого можно достичь путём распараллеливания вычисления матрицы Якоби и использования специальных подходов, учитывающих её редкозаполненную структуру. Заметим, что объём вычислений по сравнению с RK4 при этом возрастает.

В п. 2.7 рассмотрен стабилизированный явный метод DUMKA3. Установлено, что он позволяет значительно ускорить расчёты и уменьшить объём вычислений по сравнению с RK4. Распараллеливание кода для этого не требуется. Если дополнительно распараллелить вычисление правой части системы ОДУ, можно ожидать увеличения скорости расчёта по сравнению с RK4 в несколько десятков раз. Не исключено, что другие, пока не рассмотренные автором стабилизированные явные методы могут обеспечить большее быстродействие и меньший объём вычислений, чем DUMKA3.

Глава 3

Программный комплекс для расчёта динамики гетерогенных систем

Для расчёта динамики бесступенчатой трансмиссии необходим специализированный программный комплекс, в котором реализованы модели, предложенные в гл. 1, средства для автоматизированной сборки системы ОДУ (2.4) и численные методы, рассмотренные в гл. 2. Кроме того, программная система должна иметь развитые средства для обработки (в том числе, визуализации) численных решений, а также интерактивного взаимодействия с пользователем. Наконец, как показывает опыт, для проведения многовариантных расчётов сложных систем, описываемых десятками моделей отдельных элементов и сотнями параметров, крайне затруднительно обойтись без языка сценариев, облегчающего выполнение множества рутинных задач.

В данной главе описан программный комплекс, созданный небольшой командой разработчиков (на разных этапах в его создании принимали участие от одного до трёх человек), который является результатом многолетней эволюции, начавшейся с небольшого приложения с графическим пользовательским интерфейсом. Отметим, что разработанный программный комплекс может использоваться для подготовки данных, численного решения и обработки результатов множества разных задач, а не только динамики бесступенчатой трансмиссии. Его проблемная ориентированность возникает в основном за счёт наполнения конкретными моделями подсистем рассматриваемой системы. При необходимости решения других задач того же типа (в первую очередь — динамики) можно использовать всю имеющуюся инфраструктуру для других моделей (такой опыт имеется). Поэтому мы считаем, что создан набор технологий, позволяющий маленькой команде разработчиков быстро создать проблемно-ориентированную систему, являющуюся полноценным программным продуктом.

3.1. Состав комплекса и обзор его возможностей

Программный комплекс состоит примерно из 80 модулей; технологически каждый из них представляет собой динамическую библиотеку — dynamically linked library в операционной системе (ОС) MS Windows, shared object в ОС Linux, а также двух исполняемых программ, использующих эти модули. Упрощённая схема комплекса представлена на рис. 3.1. На схеме стрелки, изобража-



Рис. 3.1. Состав программного комплекса (упрощённая схема).

жённые сплошными линиями, показывают откуда и куда отправляются управляющие команды; стрелки, изображённые пунктирными линиями, показывают потоки данных. Это деление до некоторой степени условно; кроме того, картина, изображённая на схеме, не полна в силу упрощённости схемы. Например,

часть с общей инфраструктурой и вспомогательными библиотеками не соединена с другими частями — на самом деле следовало бы соединить её со всеми остальными частями стрелками обоих типов в обе стороны, но это загромождало бы схему.

В программном комплексе можно выделить следующие крупные части.

Общая инфраструктура. Эта часть состоит из нескольких модулей, представляющих *модель составного объекта, свойства и методы* объектов, механизм *сериализации* свойств, механизм *синхронных сообщений* и другую функциональность. Общая инфраструктура обеспечивает возможность создания больших программных комплексов и решает ряд задач общего характера. Подробности описаны в п. 3.3.

Решатели. Эта часть реализует все численные методы, использующиеся при решении задачи Коши и задач на собственные значения. Для решения задач на собственные значения используется сторонняя библиотека. Подробнее о решателях сказано на стр. 314.

Динамические модели. Здесь реализованы модели, предложенные в гл. 1. Эта часть программного комплекса делает его специализированным для расчётов именно задач динамики бесступенчатой трансмиссии. Отметим также, что в других частях могут присутствовать специфичные для данной области модули — например, двумерная и трёхмерная визуализация моделей; специализированные элементы графического пользовательского интерфейса.

Сборка системы ОДУ, расчёты, обработка численного решения. Эта часть отвечает за основную общую функциональность, необходимую для составления ОДУ динамики и численного интегрирования начальных задач. Она взаимодействует с компонентами, реализующими модели, через специально разработанные интерфейсы, позволяющие абстрагироваться от конкретных дета-

лей, специфичных для моделей. Эта часть также отвечает за общие средства обработки полученных численных решений — в частности, построение графиков зависимостей всех доступных величин от времени или другого параметра; дополнительно возможно применение к данным таких алгоритмов обработки как быстрое преобразование Фурье (БПФ), скользящее среднее, скользящий минимум/максимум. Для вычисления БПФ используется сторонняя библиотека.

Язык сценариев. В настоящий момент в разработанном программном комплексе в качестве языка сценариев используется JavaScript. Мы встроили реализацию V8¹ этого языка. Почти всё, что программный комплекс позволяет сделать конечному пользователю, можно сделать с помощью сценариев на JavaScript. Язык сценариев доступен пользователю. Сценариям видны имеющиеся объекты с их свойствами и методами (см. выше). Все действия пользователя в графическом приложении приводят к генерации команд; команды объединяются в *журнал*, который представляет собой запись всех действий пользователя. Его можно при необходимости исправлять и запускать на выполнение вновь. Полноценность языка JavaScript позволяет пользователю создавать сложные программы — например, оптимизационные. Полезность языка сценариев трудно переоценить. Например, журнал может естественным образом использоваться для удалённого взаимодействия по сети (хотя нам это обычно не требовалось).

Двумерная визуализация. К двумерной визуализации можно отнести некоторые интерфейсы, предусматривающие возможность отрисовки слоя двумерной графики. В эту же часть следует отнести специфичные для моделей бесступенчатой трансмиссии двумерные визуализаторы (они объединены в отдельный модуль). На рис. 3.2 представлены примеры двумерной визуализации модели бесступенчатой трансмиссии.

¹ Google V8 — JavaScript-движок, представляющий собой библиотеку с открытым исходным кодом. <https://developers.google.com/v8/>

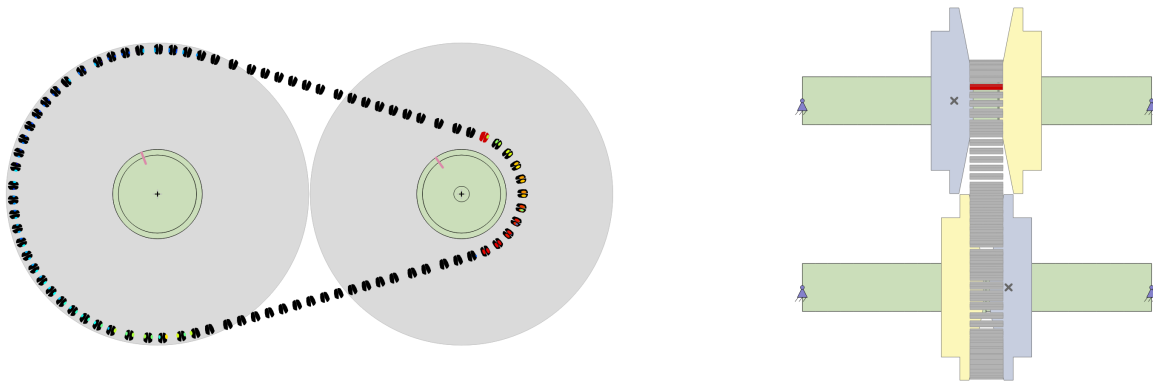


Рис. 3.2. Примеры двумерной визуализации модели бесступенчатой трансмиссии.

Трёхмерная визуализация. Сказанное о двумерной визуализации можно повторить и о трёхмерной. Добавим, что трёхмерная визуализация основана на технологии OpenGL 3.0, а набор интерфейсов несколько шире, чем в двумерном случае. Отметим также, что предусмотрена визуализация деформируемых тел при помощи вершинных шейдеров (один из них описан в [22]); фрагментные шейдеры для расчёта цвета материала с учётом освещения, текстур и текстур окружения; некоторые средства, упрощающие визуализацию скалярных полей при помощи цветов. На рис. 3.3 представлены примеры трёхмерной визуализации модели бесступенчатой трансмиссии. См. также рис. 1.61, 1.68, 1.76, 1.79, 1.86 в разд. 1.7.

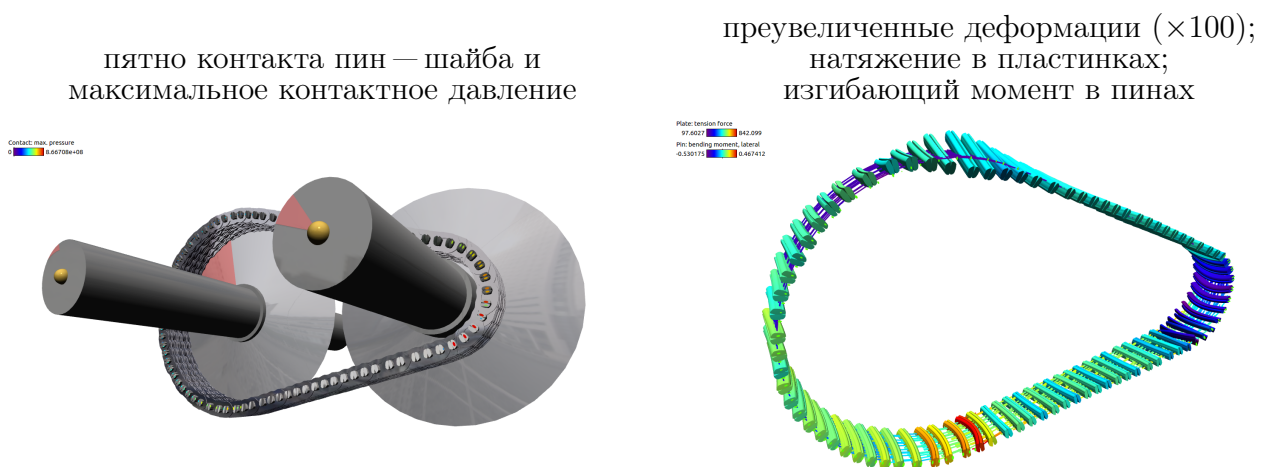


Рис. 3.3. Примеры трёхмерной визуализации модели бесступенчатой трансмиссии.

Компоновка сцен. Компоновщик сцен позволяет представить набор вложенных друг в друга прямоугольных областей в виде дерева, каждым листом которого является узел, в котором изображается набор слоёв (рис. 3.4). Пользователь имеет широкие возможности для визуализации именно того, что он хочет увидеть, благодаря тому, что можно произвольно выбирать расположение областей и визуализаторы слоёв.

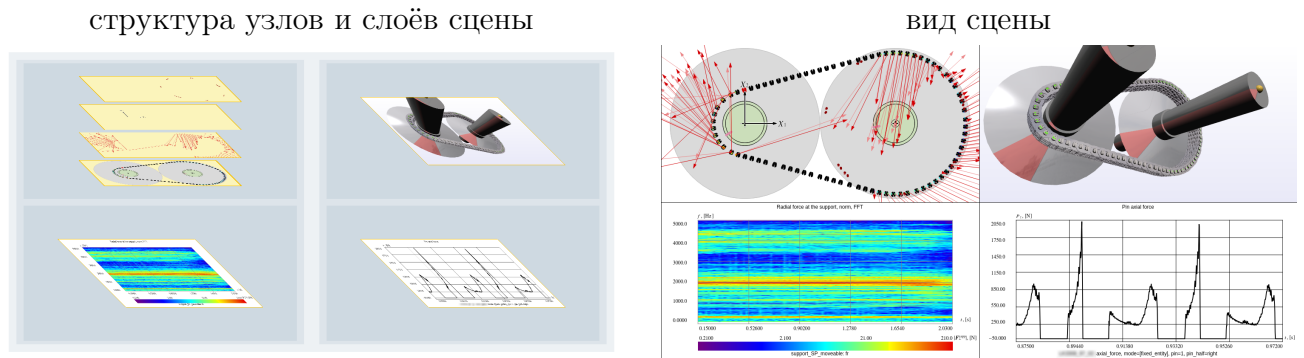


Рис. 3.4. Пример компоновки сцены.

Графический интерфейс поддерживает работу с интерактивными слоями; такие слои должны реализовывать специальный программный интерфейс.

Графический пользовательский интерфейс — программа chain. Это программа (frontend), предназначенная для конечного пользователя. Она позволяет создавать в памяти экземпляры объектов, редактировать их свойства, вызывать методы; выполнять любые команды на JavaScript с занесением их в текущий журнал; сохранять и открывать *документы*, хранящие информацию о созданных объектах и значениях их свойств; показывать различные специализированные графические виды; запускать один или несколько расчётов; анализировать численное решение с использованием двумерной и трёхмерной визуализации, в том числе строить графики и спектрограммы; создавать интерактивные анимации и сохранять их в видеоформатах; создавать отчёты по многовариантным расчётам в соответствии с заданным пользователем шаблоном.

Вид главного окна программы `chain` представлен на рис. 3.5. Слева находится интерактивный вид дерева свойств документа, предоставляющий полный набор средств для редактирования; справа — текущий графический вид. Для разных задач предусмотрены разные виды, несколько примеров — на рис. 3.6. В главном окне также имеется панель с консолью JavaScript, но на рис. 3.5 она не показана.

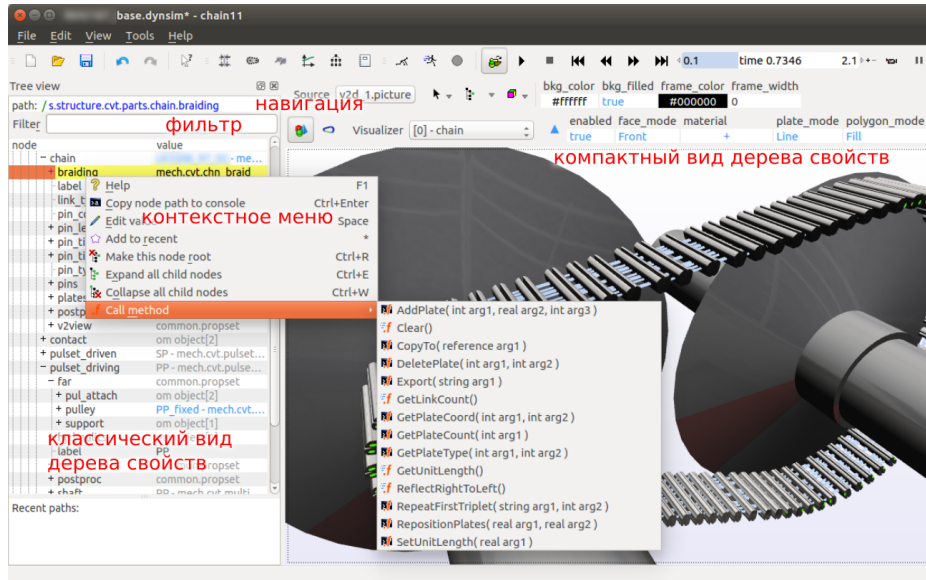


Рис. 3.5. Главное окно программы `chain`.

интерактивный вид модели

многовариантные расчёты

шаблон отчёта

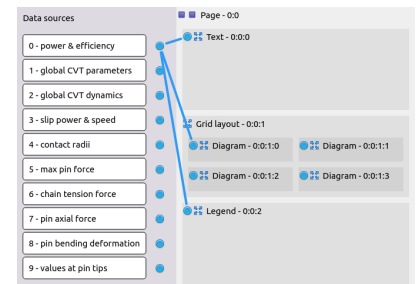
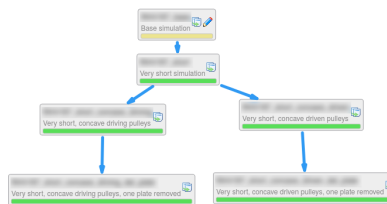
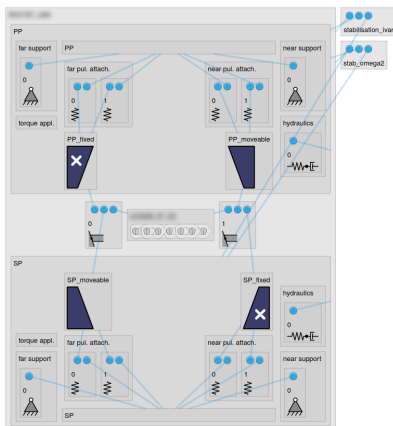


Рис. 3.6. Некоторые графические виды программы `chain`.

Интерфейс командной строки — программа `stmsmd`. Это ещё одна программа (frontend), обладающая всеми возможностями `chain`, за тем исключе-

нием, что графического интерфейса в ней нет, и, как следствие, визуализация с выводом на экран не поддерживается (однако возможен вывод в файлы графических форматов). Эта программа имеет дополнительную функциональность, предназначенную для конфигурирования программного комплекса, сборки документации пользователя, а также общую функциональность, обеспечивающую возможность выполнения заданий в автоматизированном пакетном режиме.

Программа `ctmcmd` выполняет *команды*, которые она получает либо в параметрах командной строки, либо из стандартного ввода. Набор доступных команд определяется загруженными *оснастками* — модулями, предоставляющими подмножества команд вместе с краткой документацией по ним. Список оснасток хранится в конфигурационном файле.

Конфигурационная оснастка. Этот модуль предоставляет набор команд для конфигурирования объектной модели и дерева типов, позволяя создавать соответствующие конфигурационные файлы для использования программным комплексом. В них содержится информация о доступных типах объектов и поддерживаемых ими интерфейсов. Подробнее этот вопрос рассмотрен в пп. 3.3.1.3, 3.4.1.

Генератор пользовательской документации. Этот модуль предоставляет оснастку для автоматизированной генерации документации пользователя. Подробности рассмотрены в п. 3.4.2.

Команды общего назначения. Модуль команд общего назначения позволяет выполнять различные файловые операции, а также операции с макроопределениями и списками. Обычно ни одно пакетное задание не обходится без команд этого модуля.

Вспомогательные библиотеки. К этой категории относятся библиотеки различного назначения. Часть из них предоставляет единый интерфейс к ре-

курсам ОС (MS Windows или Linux, в зависимости от целевой платформы), не охваченным стандартными библиотеками C и C++. Другая часть — прикладные библиотеки. Сюда же относятся некоторые сторонние библиотеки, например, для синтеза видео.

3.2. Технологические аспекты

Язык программирования. Программный комплекс разработан на языке C++; маленькая часть функциональности реализована на JavaScript.

Целевые платформы. Целевыми платформами для сборки и развёртывания программного комплекса являются ОС MS Windows и ОС Linux. При этом типична ситуация, когда в Linux не требуется графический пользовательский интерфейс и язык сценариев — например, если требуется лишь выполнять многочисленные расчёты на вычислительном кластере под управлением ОС Linux. В других ситуациях эти части комплекса могут понадобиться на каждой целевой платформе.

Зависимости. Программный код отдельных модулей зависит от сторонних библиотек. Две наиболее существенные зависимости — это Qt² и V8 (см. сноску на стр. 286). Ещё одна зависимость — библиотека QTFFmpegWrapper³, облегчающая синтез видео и зависящая в свою очередь от библиотек FFmpeg⁴.

Библиотека Qt используется всеми модулями, имеющими непосредственное отношение к графическому пользовательскому интерфейсу, некоторые модули для двумерной визуализации, а также модули трёхмерной визуализации (так как в них доступ к OpenGL осуществляется через интерфейсы Qt). В дру-

² Qt — кроссплатформенный фреймворк для разработки программного обеспечения на языке программирования C++. <https://www.qt.io/>

³ Классы-обёртки для библиотеки FFmpeg. <https://github.com/scribblemaniac/qtffmpegwrapper>

⁴ Набор библиотек для работы с видео. <https://www.ffmpeg.org/>

гих модулях она не используется (поэтому и понадобились библиотеки, абстрагирующие доступ к некоторым ресурсам ОС — см. стр. 290).

Библиотека V8 используется тремя модулями — библиотекой-обёрткой, обеспечивающей видимость объектов из JavaScript-сценариев и реализующей вспомогательные встроенные функции; модулями инициализации для графического интерфейса и для интерфейса командной строки.

Облегчённая конфигурация. Для сборки комплекса в полном составе необходимо установить на целевой машине все зависимости. Но, как уже сказано выше, полная функциональность нужна не всегда. Поэтому программный комплекс предусматривает возможность сборки облегчённой конфигурации, без всех вышеупомянутых зависимостей. Это существенно упрощает использование удалённых вычислительных ресурсов. В облегчённой конфигурации доступен лишь интерфейс командной строки с возможностью запуска заранее подготовленных расчётов.

3.3. Компоненты общей инфраструктуры

Рассмотрим подробнее компоненты общей инфраструктуры [23], играющие роль связующего звена между всеми частями программного комплекса.

3.3.1. Модель составного объекта

3.3.1.1. Составные объекты, компоненты и интерфейсы

Идея *модели составного объекта* возникла как альтернативный путь достижения высокого уровня повторного использования кода. В объектно-ориентированном программировании (ООП) на C++ для этой цели традиционно используются композиция, агрегирование, наследование и некоторые менее очевидные ассоциации, часто использующие шаблоны. Все эти подходы хорошо

работают в небольших системах, состоящих из одного модуля. Однако уже использование композиции и наследования в случае, когда классы реализованы в разных модулях, может встретить трудности, связанные (в случае использования MS C++ compiler в MS Windows) с необходимостью экспорта символов из модулей. Кроме того, относительно наследования замечено, что его чрезмерное использование порождает «слишком жёсткие», «неповоротливые» архитектуры.

Составной объект содержит один или более *компонентов*, образующих древовидный граф. Корень дерева назовём *первичным объектом* (primary object), а все остальные компоненты — *отрывными объектами* (tear-offs).

Компонент составного объекта является экземпляром класса C++; этот класс должен удовлетворять нескольким условиям. Он должен открыто наследовать (явно или неявно) один из двух базовых классов, определяющих тип компонента (первичный или отрывной). Кроме того, в классе должен быть объявлен числовой *идентификатор компонента*, уникальный для каждого класса компонента в системе. Вдобавок каждый компонент, как правило, реализует *интерфейсы*.

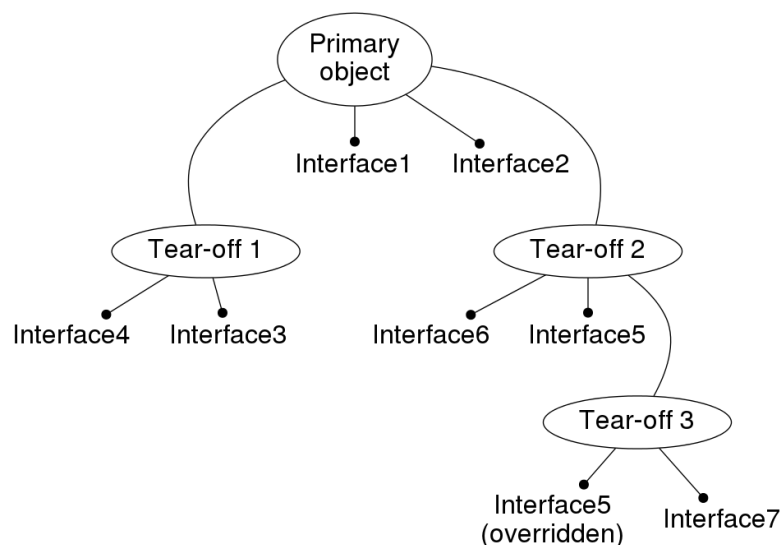


Рис. 3.7. Составной объект и его интерфейсы.

Составной объект может поддерживать набор *интерфейсов*. Мы будем называть интерфейсом класс C++, содержащий объявления чисто виртуальных

или встроенных (inline) методов; также в интерфейсах допускаются экземплярные (не статические) поля. Статические поля и методы (если последние не встроенные) не допускаются в интерфейсах, так как в нашей архитектуре модулей мы отказываемся от экспорта символов (см. п. 3.3.1.3). Кроме того, дизайн составного объекта требует от интерфейса виртуально открыто унаследовать некоторый базовый класс (общий для всех интерфейсов) и объявить числовой *идентификатор интерфейса*, уникальный в пределах системы.

Предусмотрены интерфейсы, относящиеся ко всему составному объекту (объектные интерфейсы, или просто интерфейсы), и интерфейсы, относящиеся к компоненту (компонентные интерфейсы). Модуль объектной модели предоставляет функциональность для преобразования любого интерфейсного указателя составного объекта к указателю на требуемый интерфейс. Имеется возможность *переопределить* реализацию интерфейса в составном объекте — для этого следует сделать отрывной объект с переопределённой реализацией дочерним по отношению к компоненту, интерфейс которого требуется переопределить (впрочем, эта возможность используется исключительно редко). На рис. 3.7 представлен пример составного объекта; отметим, что интерфейс `Interface5` переопределён компонентом `Tear-off 3`.

Считается, что компонент *поддерживает* интерфейс, если его класс открыто наследует класс интерфейса. Модуль объектной модели предоставляет функциональность преобразования интерфейсных указателей в пределах компонента.

Отметим, что функциональность преобразования интерфейсных указателя не опирается на RTTI⁵, что имеет место в случае `dynamic_cast` и, следовательно, свободна от ограничений RTTI в некоторых системах (иногда при наследовании классом класса из другого модуля `dynamic_cast` перестаёт работать).

Существенно, что компоненты составного объекта могут быть экземпляра-

⁵ RTTI — run-time type identification, идентификация типа во время выполнения

ми классов, реализованных в разных модулях.

3.3.1.2. Время жизни объекта, умные указатели и интерфейсные преобразования

Отрывные компоненты могут иметь различное время жизни. Некоторые из них (*постоянные*) могут создаваться и удаляться вместе с первичным объектом, другие (*временные*) создаются при необходимости, когда запрашивается интерфейсный указатель, и удаляются, когда завершается их использование.

Компоненты реализуют в своих базовых классах *подсчёт ссылок*, что является традиционным для C++ способом контроля времени жизни при разделяемом владении объектами. Счётчик ссылок является целым неотрицательным числом; он увеличивается на единицу всякий раз при добавлении владельца и уменьшается на единицу при удалении владельца. Если счётчик ссылок достигает нуля при уменьшении, компонент удаляется.

Постоянные отрывные объекты используют счётчик ссылок первичного объекта, временные — счётчик первичного объекта и свой собственный.

Роль *владельцев* компонентов играют специально разработанные *умные указатели* [95] — экземпляры класса-шаблона, параметризованного типом интерфейса. Для них, в отличие от `std::shared_ptr` или `boost::shared_ptr` [96], допускается инициализация любого владельца обычным указателем, так как счётчик ссылок реализован в компоненте. В этом смысле умные указатели аналогичны `boost::intrusive_ptr` [97].

Дополнительная функциональность умных указателей состоит в поддержке интерфейсных преобразований, реализованных в модуле объектной модели. Поэтому получение нужного интерфейса сводится к инициализации умного указателя подходящего типа указателем (умным или обычным) на любой интерфейс составного объекта, или к присваиванию. При этом код умного указателя вызывает функции модуля объектной модели, которые в свою очередь находят компонент составного объекта, реализующий требуемый интерфейс; при необ-

ходимости компонент создаётся, что может привести к загрузке модуля, реализующего этот компонент. Обо всех этих действиях разработчик, использующий умные указатели, может не задумываться.

Наконец, имеется поддержка *слабых указателей*, аналогичных `std::weak_ptr`. Их основная задача — узнавать об удалении компонента и в этот момент обнулять поле, в котором хранился указатель на компонент, предотвращая появление висячих указателей (dangling pointers). Слабые указатели не используют счётчики ссылок.

3.3.1.3. Фабрика экземпляров и конфигурация комплекса

Модуль объектной модели предусматривает всего одну фабрику. В её задачи входит создание экземпляров составных объектов в памяти процесса по заданным идентификаторам типов. При этом, как уже отмечалось, компоненты составных объектов реализованы в разных модулях (возможно, не загруженных в данный момент в оперативную память), информацию о которых необходимо передать фабрике, прежде чем станет возможным создавать экземпляры.

Автоматическая регистрация компонентов. Чтобы понять, как работает фабрика, рассмотрим возможности доступа к функциональности модуля (то есть, динамической библиотеки). Технически для этого имеется несколько способов. Первый из них состоит в том, что модуль *экспортирует* символы (например, функции), предоставляющие функциональность модуля. Чтобы использовать её, необходимо осуществить *связывание* с модулем. Оно бывает *ранним* (на этапе сборки модулей) и *поздним* (во время выполнения). Для позднего связывания модуль загружают в память процесса средствами ОС (`dlopen` в Linux, `LoadLibrary` в MS Windows), после чего находят адреса экспортированных символов, опять же средствами ОС. Подход с использованием экспортированных символов требует аккуратного распределения функциональности по модулям, — это следует делать таким образом, чтобы зависимостей между мо-

дулями было как можно меньше; обычно желательно, чтобы граф зависимостей был ациклическим.

Но есть и другой подход к использованию функциональности модуля — представляется, что он более предпочтителен для больших систем. Идея состоит в том, чтобы модуль при загрузке самостоятельно регистрировал свою функциональность в некотором *реестре*. Реестр в нашем случае предоставляется модулем объектной модели. Чтобы получить доступ к нему, каждый модуль осуществляет раннее связывание с модулем объектной модели. Использование реестра позволяет полностью отказаться от связывания с функциональным модулем. Отметим ещё, что в случае модулей, разработанных на языке C++, код регистрации функциональности размещается в конструкторах статических переменных. Так как функциональность предоставляется в виде компонентов, её регистрация сводится к регистрации *генераторов* компонентов в фабрике (генератором называется функция, создающая экземпляр компонента в памяти и возвращающая указатель на него). Это делается одинаково для всех компонентов. Задача решается, например, при помощи макросов.

Отметим ещё, что при втором подходе фактически мы используем виртуальные таблицы классов компонентов вместо экспортированных символов.

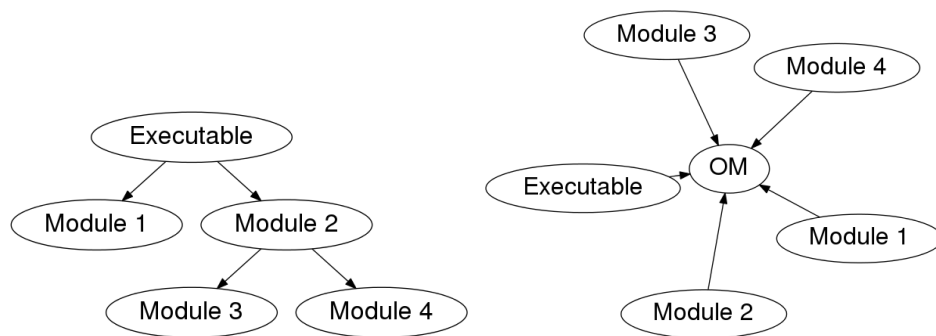


Рис. 3.8. Зависимости между модулями в случае подхода с экспортом символов (слева) и в случае автоматической регистрации при загрузке (справа).

При втором подходе все модули зависят лишь от модуля объектной модели, потому что он предоставляет реестр для регистрации компонентов. Зависимостей между модулями нет, и это существенно упрощает правила сборки всего

комплекса.

На рис. 3.8 изображены примеры зависимостей между модулями при первом и втором подходах. Модуль объектной модели (справа) называется *om*.

Конфигурация комплекса. Очевидно, в рамках изложенного выше подхода к осуществлению доступа к функциональности модулей, для функционирования фабрики требуется конфигурационный файл с необходимой информацией. В нём содержится список имён модулей; список идентификаторов компонентов, реализованных каждым модулем; список идентификаторов интерфейсов, реализованных каждым компонентом. Также в этом файле указана конфигурация каждого составного объекта: для первичных объектов необходимо указать, какие отрывные объекты могут входить в состав дерева компонентов, корнем которого является данный первичный объект; для отрывных объектов также указывается, должны ли они быть постоянными или временными.

Создание конфигурационного файла вручную для большой системы крайне затруднительно, поэтому разработана конфигурационная утилита, описанная в п. 3.4.1.

Алгоритм работы фабрики. Когда от фабрики требуется создать экземпляр компонента по идентификатору типа, производятся следующие действия.

1. В реестре ищется генератор компонента с данным идентификатором типа. Если он там есть, переход к шагу 3.
2. Отсутствие идентификатора в реестре означает, что модуль, реализующий компонент, не загружен. В этом случае в конфигурационном файле ищется модуль, реализующий данный компонент. Отсутствие идентификатора в конфигурационном файле означает ошибку (неизвестный идентификатор типа компонента). Если же идентификатор найден, загружается модуль, реализующий данный компонент. Далее снова происходит поиск в

реестре (отсутствие идентификатора там на этот раз — ошибка конфигурации).

3. Вызывается генератор компонента, найденный в реестре. Он возвращает экземпляр компонента.

Когда требуется создать экземпляр составного объекта по идентификатору типа первичного объекта, фабрика создаёт первичный объект, затем создаёт все постоянные отрывные объекты (согласно конфигурации составного объекта) и *присоединяет* их один за другим к частично созданному составному объекту (поначалу состоящему лишь из первичного объекта) таким образом, чтобы составной объект соответствовал конфигурации. Возвращается указатель на первичный объект.

Присоединение отрывного объекта может осуществляться не только фабрикой — эта функциональность доступна пользователям модуля объектной модели; она позволяет создавать произвольные составные объекты «на лету», хотя необходимость в этом возникает редко.

3.3.1.4. Глобально доступный пул объектов

Использование глобальных переменных как правило не рекомендуется и обоснованно считается дурным тоном. В то же время, часто возникает необходимость в глобально доступных объектах, которые можно найти по одному или нескольким идентификаторам. Глобальный пул в этом случае — хорошая альтернатива глобальным переменным.

Модуль объектной модели предоставляет функциональность *регистрации* и *отмены регистрации* составных объектов. При регистрации указывается идентификатор интерфейса и так называемый *сервисный идентификатор* (его смысл определяется пользователем; часто его можно положить равным нулю). По этим данным зарегистрированный объект можно потом найти. Для каждой пары идентификаторов зарегистрированные объекты образуют стек. Таким об-

разом, объекты, зарегистрированные раньше, *затеняются* объектами, зарегистрированными позже (конечно, при условии совпадения обоих регистрационных идентификаторов). Такое поведение естественно, особенно если регистрация и отмена регистрации производятся конструктором и деструктором некоторой автоматической переменной.

3.3.2. Синхронные сообщения

Концепция *уведомлений* чрезвычайно плодотворна в программировании. Она позволяет значительно уменьшить взаимосвязь между компонентами на этапе их проектирования и разработки, сделать компоненты более универсальными.

Например, в Qt [98] реализован механизм *сигналов* и *слотов*, которые можно соединять друг с другом, чтобы один объект мог отреагировать на те или иные действия, произошедшие в другом объекте.

Поскольку большая часть модулей не использует Qt, необходим независимый механизм, аналогичный сигналам и слотам. В нашей системе это механизм *синхронных сообщений*, напоминающих по форме сообщения в WinAPI: сообщение имеет идентификатор и два параметра.

Система синхронных сообщений предоставляет три интерфейса — *компонентный интерфейс адресата*, *объектный интерфейс адресата* и служба доставки. Первый из них предоставляет обработчики сообщений, второй передаётся в службу доставки в качестве *подписчика*; его стандартная реализация обеспечивает диспетчеризацию сообщений обработчикам. Интерфейс службы доставки имеет метод для получения сообщения; его реализация отправляет сообщение всем подписчикам. При подписке можно указать диапазон идентификаторов интересующих подписчика сообщений.

Существенно, что для объектного интерфейса адресата и интерфейса службы доставки достаточно по одной реализации, которые используются составными объектами путём включения этих реализаций в свою конфигурацию. Это

типичный пример повторного использования в рамках модели составного объекта.

Отметим также, что, зарегистрировав службу доставки сообщений в пуле глобально доступных объектов, получаем глобальную службу доставки, что в ряде случаев удобно, так как может упростить подписку.

3.3.3. Данные документа как дерево свойств

Выполняющаяся программа оперирует с данными в памяти; для пользователя важно иметь возможность сделать их *персистентными*, то есть сохранять, например, в файле на диске.⁶ Таким образом, возникает концепция *документа* — данных, которые описывают состояние всех созданных и отредактированных пользователем объектов и которые могут быть *сериализованы* в поток байтов, с возможностью *десериализации* в дальнейшем. Часто данные документа могут быть представлены в виде иерархической древовидной структуры, с листьями дерева в виде экземпляров атомарных типов (чисел, строк); в этом случае для сериализованных данных естественно использовать формат данных XML или JSON.

Для организации данных в виде дерева используется концепция представления данных объекта *набором свойств*; свойством является пара имя – значение (в нашем случае к имени добавляется целочисленный *идентификатор свойства*, уникальный в пределах всего комплекса; его роль станет ясна в п. 3.4.2). Эта концепция реализована при помощи трёх интерфейсов: *набор свойств*, *свойство* и *регистратор свойств* — вспомогательный компонентный интерфейс, через который компоненты регистрируют свойства составного объекта.

Значение свойства может иметь один из атомарных типов (число, строка, логический тип, ссылка на объект). В качестве значения также допускается одномерный массив однотипных объектов. Кроме того, значением свойства может

⁶ Здесь было бы уместным упомянуть базы данных, но в данном программном комплексе традиционные системы управления базами данных не используются.

быть объект (в свою очередь обычно являющийся набором свойств). Благодаря этому и становится возможной древовидная организация данных в виде дерева свойств.

Интерфейс набора свойств имеет универсальную реализацию, которая используется всеми составными объектами, имеющими свойства. Существенно, что он предоставляет возможность перебора всех свойств объекта, обеспечивая возможность *интроспекции* — имея объект, можно узнать всё о его свойствах.

3.3.4. Постоянное хранение

Данные документа в памяти представлены иначе, чем в потоке, в котором документ сериализован. Например, в памяти ссылки на объекты — это по существу указатели; сохранять их непосредственно в поток байтов, очевидно, не имеет смысла. Сериализовать в данном случае надо *идентификатор экземпляра*, а не указатель, так как идентификатор инвариантен относительно того места в памяти, где окажется объект, а указатель — нет. Ряд подобных проблем типичен для сериализации; все они так или иначе решены в общем виде.

Для поддержки постоянного хранения предусмотрены два интерфейса. Первый из них — интерфейс *потока иерархических данных* — предоставляет методы чтения и записи, часть из которых ориентирована на форматы хранения иерархических данных, таких как XML и JSON. Реализации интерфейса отвечают за конкретный формат данных. Второй — интерфейс *сериализации* объекта, содержащий методы сериализации объекта; в качестве параметра этим методам передаётся интерфейс потока.

Интерфейс сериализации имеет реализацию в виде отрывного объекта, предназначенную для сериализации произвольного набора свойств. В подавляющем большинстве составных объектов сериализуемое состояние определяется исключительно свойствами, поэтому такие объекты пользуются данной реализацией, включая соответствующий отрывной объект в свою конфигурацию.

3.3.5. Другие компоненты инфраструктуры

Рассмотрим ещё части общей инфраструктуры, имеющие отношение к интеграции с языком сценариев.

Методы. Представление объекта в виде набора свойств интуитивно понятно пользователю и естественным образом индуцирует такое же представление в объектно-ориентированном языке сценариев, таком как JavaScript или Python. Однако, например, в JavaScript любое свойство может быть функцией (в этом языке функции являются «полноправными гражданами» — это означает, что есть тип данных «функция», поэтому функции могут быть значениями свойств), что в нашей системе не предусмотрено. Тем не менее, объект нашей системы может объявить о своих методах через компонентный *интерфейс регистрации методов* и предоставить возможность их вызова через специальный *интерфейс вызова методов*. Эти два интерфейса аналогичны интерфейсам регистрации свойств и набора свойств соответственно (п. 3.3.3). С их помощью обёртка библиотеки V8, отвечающая за встраивание JavaScript, способна представить методы объекта в виде свойств прототипа соответствующего объекта JavaScript, как это принято делать для обычных экземплярных методов.

Интерфейс вызова метода имеет универсальную реализацию в виде отрывного объекта, она используется путём добавления этого объекта в конфигурацию составного объекта, предоставляющего методы.

Дерево типов Объекты программного комплекса реализованы на языке C++; их экземпляры могут быть созданы фабрикой (п. 3.3.1.3). Для обеспечения этой возможности в языке сценариев необходимо предоставить встроенные (native) функции — конструкторы объектов. Для удобства эти конструкторы представлены в языке сценариев листьями дерева типов, видимого как свойство глобального объекта. Таким образом, в языке сценариев каждому типу объекта программного комплекса, экземпляр которого можно создать, соответствует путь,

идентифицирующий конструктор в дереве типов.

3.3.6. Сравнение с другими системами

Инфраструктура компонентов, описанная выше, была создана по той причине, что на момент начала разработки (2001 г.) нам не удалось найти существующую подходящую по функциональности реализацию инфраструктуры с открытым исходным кодом и подходящей лицензией.

Пожалуй, наиболее интересной альтернативой, которую можно было бы рассмотреть, является библиотека Qt. Однако она стала свободно доступной на платформе MS Windows лишь в 2005 году, а подходящая нам лицензия LGPL⁷ для Qt появилась лишь в 2009 г. Возможно, если бы начинали разработку инфраструктуры сегодня, она бы опиралась на Qt.

Существуют и другие системы, которые можно рассматривать в качестве альтернатив нашей, хотя представляется, что они не вполне удовлетворяют нашим требованиям. К этим альтернативам относятся COM⁸ и CORBA⁹; эти технологии реализуют свои собственные объектные модели; однако эти системы созданы для обеспечения взаимодействия компонентов, разработанных на разных языках, и эти компоненты могут быть распределены по множеству компьютеров и асинхронно взаимодействовать через сеть. Использование одной из этих технологий сопряжено с накладными расходами — как с точки зрения быстродействия программного кода, так и с точек зрения сложности поддержки зависимости на каждой целевой платформе и сложности использования технологии.

Отметим также библиотеку MFC¹⁰ в связи с её функциональностью по поддержке динамического создания экземпляров и механизма сообщений. К

⁷ GNU LGPL — GNU Lesser General Public License. https://ru.wikipedia.org/wiki/GNU_Lesser_General_Public_License

⁸ COM — Component Object Model [99]

⁹ CORBA — Common Object Request Broker Architecture [100]

¹⁰ MFC — Microsoft Foundation Classes [101].

сожалению, перенос этой библиотеки на Linux проблематичен; кроме того, она не даёт эффективного решения для объектной модели.

В табл. 3.1 кратко представлено сравнение разработанной нами инфраструктуры (мы назвали её *om*) с другими системами.

Таблица 3.1. Сравнение разработанной инфраструктуры с другими системами.

Название системы	Для C++?	Достаточное быстродействие?	Возможны ли составные объекты?	Переносима?
<i>om</i>	да	да	да	Windows, Linux
Qt	да	да	нет	да
MFC	да	да	нет	только Windows
COM	нет	нет	потенциально да	частично
CORBA	нет	нет	потенциально да	да

Из таблицы видно, что среди рассмотренных нами систем, разработанных специально для C++, только *om* поддерживает составные объекты. Отметим также, что дизайн части Qt, обеспечивающей функциональность объектной модели, значительно отличается от нашего, поэтому их трудно сравнивать напрямую. Например, это относится к системе плагинов Qt.

Умные указатели реализованы во многих системах, включая Qt, boost [96] и др; с 2011 г. они стали частью стандарта C++. Однако все имеющиеся реализации отличаются от нашей в части преобразования интерфейсных указателей составного объекта и спецификой работы со счётчиком ссылок.

3.4. Некоторые модули оснастки интерфейса командной строки

В данном разделе представлены два наиболее интересных модуля оснастки интерфейса командной строки (см. стр. 289).

3.4.1. Конфигурационная оснастка

Как упоминалось в п. 3.3.1.3, для работы фабрики объектов необходим конфигурационный файл с информацией о модулях, компонентах, интерфейсах и составных объектах. Создание этого файла вручную затруднительно, поэтому предусмотрена конфигурационная оснастка интерфейса командной строки. Она позволяет сгенерировать требуемый файл при помощи относительно небольшого количества команд.

Во-первых, имеются команды для загрузки и выгрузки модуля. При загрузке модуля происходит автоматическая регистрация его компонентов в реестре фабрики. Модуль объектной модели предусматривает возможность установки пользовательских обработчиков различных событий, в том числе, регистрации компонентов. Благодаря этому команда загрузки модуля позволяет ассоциировать идентификаторы типа с именами модулей. Кроме того, имеется возможность перечисления идентификаторов интерфейсов компонента, если он создан в памяти. В итоге реализация команды загрузки модуля позволяет сгенерировать первую часть конфигурационного файла — всё, за исключением конфигурации составных объектов.

Во-вторых, ряд команд посвящён конфигурированию составных объектов. Связи от потомков к предкам в деревьях составных объектов формулируются для целых групп компонентов. Эти группы можно создавать, применяя развитые правила фильтрации. Например, можно объединить в группу объекты, компоненты которых поддерживают интерфейс регистрации свойств и сделать отрывной объект с универсальной реализацией набора свойств потомком первичного объекта в конфигурации каждого из всех найденных составных объектов. Затем можно найти все наборы свойств, не поддерживающие сериализацию, и добавить в конфигурацию найденных составных объектов универсальную реализацию интерфейса сериализации набора свойств.

В-третьих, удобно ассоциировать команды конфигурации составных объ-

ектов по модулям, а модули группировать в *уровни*. Тогда очень легко решается задача конфигурирования различных вариантов программного комплекса: для каждого варианта достаточно указать, какие уровни следует конфигурировать. Например, при наличии графического пользовательского интерфейса выполняется конфигурирование соответствующего уровня, а при отсутствии — нет.

После выполнения всех команд конфигурирования записывается результирующий файл, который далее может быть использован фабрикой объектов.

3.4.2. Интроспективный генератор пользовательской документации

Этот подраздел показывает, как при помощи компонентов общей инфраструктуры решается сложная задача — автоматизированное создание пользовательской документации. Он наглядно иллюстрирует, чем может быть полезна объектная модель и почему приняты те или иные проектные решения (например, идентификаторы свойств).

Создание качественной пользовательской документации — серьёзная задача, если только программный комплекс не слишком мал. Необходимо ответить на следующие вопросы. Как структурировать страницы документации? Как убедиться в том, что вся функциональность «покрыта» документацией? Как поддерживать документацию в актуальном состоянии по мере того, как в исходном коде происходят эволюционные изменения? И, главное, нельзя ли возложить как можно больше работы по созданию документации на компьютер, чтобы человек мог сосредоточиться лишь на содержательной части страниц документации?

Для нашего программного комплекса был создан и успешно использован *интроспективный генератор документации*, реализованный в виде модуля оснастки для интерфейса командной строки. Рассмотрим вкратце его устройство.

Пользовательская документация традиционно структурирована в виде дерева, узлами которого являются логические *страницы*. Задача разработанного нами генератора документации — в том, чтобы автоматически создать это дере-

во, руководствуясь некоторыми правилами, и автоматически наполнить страницы содержимым настолько, насколько это возможно. Кроме того, каждому узлу ставится в соответствие текстовый файл, в который при необходимости вручную добавляются содержимое. Оно верстается в справочную систему в процессе сборки наряду с автоматически сгенерированным содержимым.

Поскольку пользователь программного комплекса непосредственно работает с деревом типов, объектами, их свойствами, а часто и с методами, всё это необходимо документировать. Естественно также документировать и другие сущности — например, модули и историю их изменений от версии к версии, избранные интерфейсы и что-то ещё (возможно, специфичное для конкретного проблемно-ориентированного наполнения программного комплекса).

Функциональность генератора состоит из отдельных *плагинов*, которые при помощи команд оснастки как бы вставляются друг в друга перед запуском генератора, образуя иерархию. Каждый плагин отвечает за строго определённый аспект документации. Для плагинов можно задавать специфичные для них параметры.

Параметризацию плагинов и их соединение в единую систему можно назвать фазой конфигурации генератора документации. По её завершении генератор запускается. В качестве входных данных ему доступны все модули комплекса и их список; конфигурационный файл фабрики; дерево типов; содержимое, созданное ранее вручную. Выходными данными генератора являются страницы документации в текстовом формате, предназначенные для дальнейшей обработки системой Doxygen [102] и (если требуется) пустые файлы, в которое разработчик документации может добавить содержимое. После того, как генератор отработал, при помощи Doxygen верстаются HTML-страницы документации и создаются необходимые файлы для сборки справочной системы Qt Assistant.¹¹

В процессе работы генератора каждый плагин отвечает за (возможно, многократный) запуск непосредственно вложенных в него плагинов; при этом каж-

¹¹ Средство отображения интерактивной справочной системы, предоставляемое фреймворком Qt.

дому плагину при запуске даётся *контекст*, в частности, идентифицирующий узел справочной системы, документируемый в данный момент; возможна также передача других параметров. Имея эту входную информацию, плагин создаёт свою часть содержимого на текущей странице и, возможно, на страницах дочерних узлов дерева документации, создавая их при необходимости. Отметим, что на каждой странице содержимое группируется в *блоки* — в них плагины и записывают содержимое. На рис. 3.9 приведён пример конфигурации плагинов, специфичной для нашего программного комплекса.

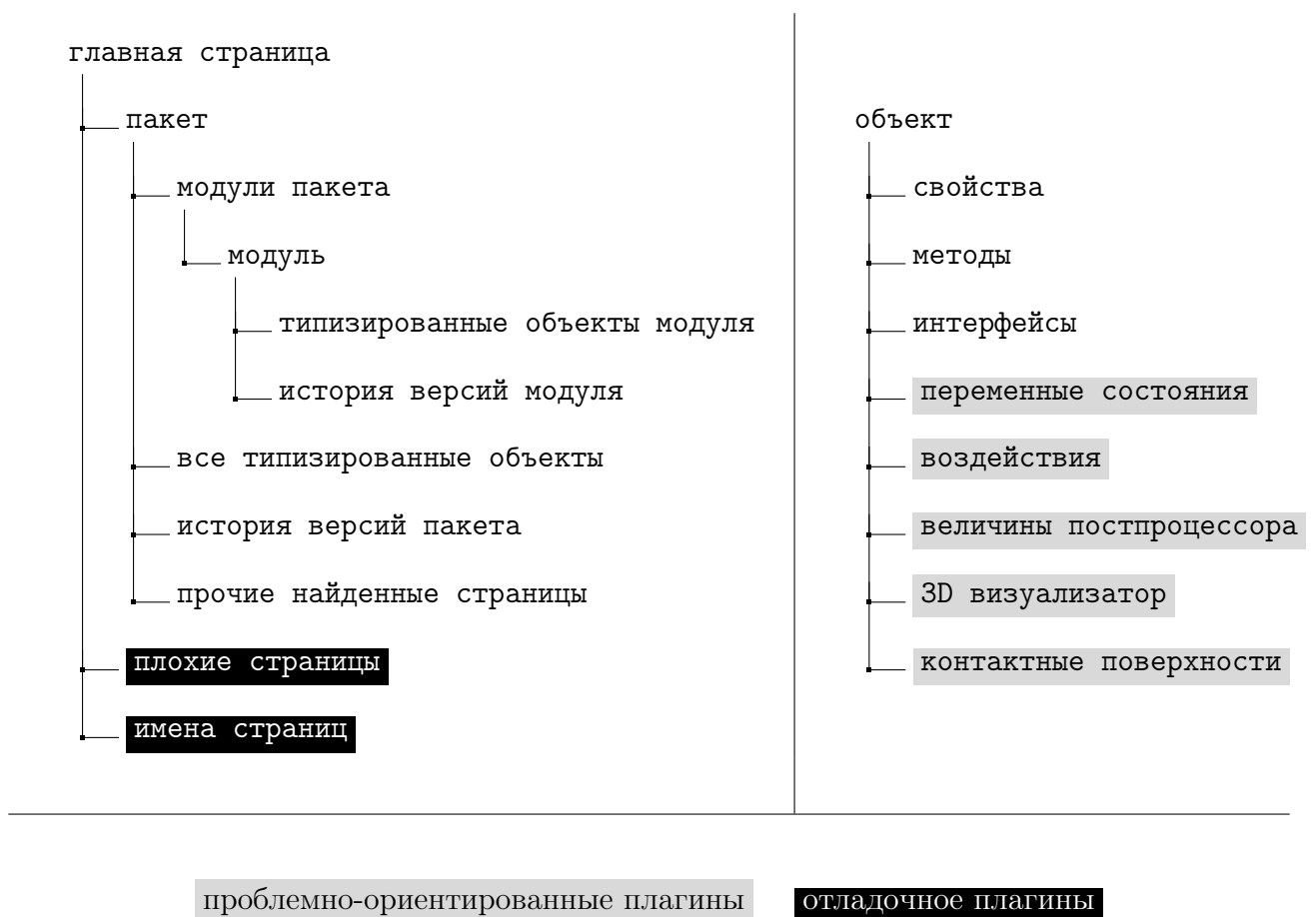


Рис. 3.9. Конфигурация плагинов генератора документации.

Рассмотрим некоторые плагины генератора документации. Плагин главной страницы отвечает лишь за создание корневого узла дерева документации и (как и любой другой) запуск вложенных плагинов. В случае этого плагина вложенные плагины вызываются однократно без дополнительных параметров.

Плагин пакета получает в фазе конфигурации список модулей, составляю-

щих пакет, в качестве параметра; также он получает ряд других параметров (в первую очередь — конфигурационный файл фабрики и дерево типов). При запуске плагин пакета инициализирует фабрику и загружает дерево типов; затем он однократно вызывает вложенные плагины в контексте главной страницы.

Плагин модулей пакета перебирает все модули из списка; для каждого модуля в контексте текущей страницы вызываются вложенные плагины. Из свойств контекста они могут узнать, какой модуль является текущим.

Плагин модуля создаёт страницу модуля и делает соответствующий узел дерева документации дочерним по отношению к текущему узлу контекста. На текущей странице в блок списка модулей добавляется ссылка на страницу описания модуля, снабжённая кратким (в одну строку) описанием. Здесь отметим, что краткие описания создаёт разработчик документации; они распределены по файлам, находящимся рядом с исходным кодом соответствующих модулей. Эти файлы генерируются при первом проходе генератора документации и обновляются при каждом следующем проходе. Разработчик документации, открывая эти файлы, понимает, что именно требуется описать. Краткие описания могут быть очень быстро сделаны разработчиком, и при этом уже только они придают справочной системе приемлемый (хотя и не законченный) вид. Далее плагин модуля вызывает вложенные плагины и добавляет созданное вручную содержимое (если соответствующий исходный файл отсутствует, он создаётся).

Плагины историй версий пакета и модуля читают информацию из специальных текстовых файлов, в которые разработчики кода записывают в понятном для пользователя виде историю изменений. Эта информация верстается на текущей странице в специальном блоке.

Плагины типизированных объектов модуля или пакета обходят соответственно все листы дерева типов или все листы, относящиеся к текущему модулю. Для каждого листа вызывается плагин документирования объекта.

Плагин объекта создает страницу документации объекта и размещает на текущей странице ссылку на неё. На новую страницу и в ссылку попадает крат-

кое описание, аналогичное описанию модуля. В контексте новой страницы вызываются вложенные плагины и добавляется созданное вручную содержимое. Отметим, что для содержимого, созданного вручную, предназначен файл, имя которого основано на литеральном значении перечислимого типа, которым объявлен идентификатор объекта. Поэтому разработчику документации, знакомому с исходным кодом, несложно разобраться, в каком файле что документировать.

Плагины свойств и методов создают для каждого свойства или метода страницу документации и размещают на текущей странице ссылку на неё. Для свойств имеется возможность узнать их типы и значения по умолчанию; они попадают на страницы документации. Для методов имеется возможность узнать сигнатуры всех перегрузок и написать об этом в документации. Также в документацию попадают краткие описания, аналогичные описаниям модулей и объектов. Отметим здесь роль уникальных идентификаторов свойств: они позволяют найти страницу документации заданного свойства; помогают адекватно назвать файл с созданным вручную содержимым; определить, что у разных объектов может быть одно и то же по смыслу свойство (с одним идентификатором) и документировать его один раз, а не много.

Плагин интерфейсов в фазе конфигурирования параметризуется списком идентификаторов интерфейсов, подлежащих документированию. В контексте каждого объекта плагин проверяет, какие из перечисленных интерфейсов поддерживаются. Если такой интерфейс найден, на странице документации появляется ссылка на страницу описания интерфейса, а на странице описания интерфейса — ссылка на страницу документации объекта.

Проблемно-ориентированные плагины собирают соответствующую информацию (например, об обобщённых координатах модели или о том, какие имеются контактные поверхности) и добавляют её на страницу документации в виде таблиц, списков, ссылок.

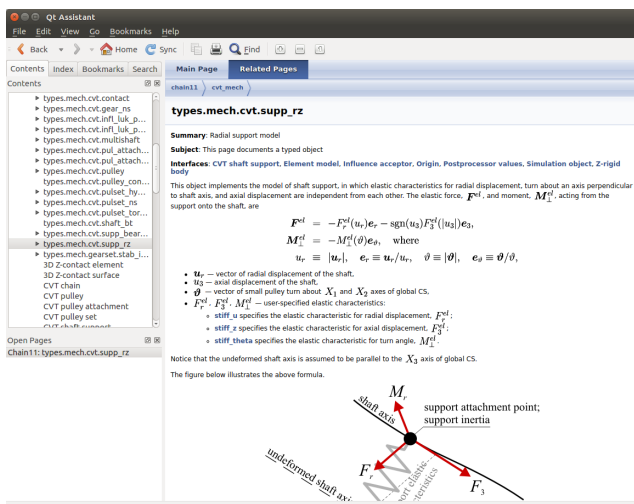
Наконец, отладочные плагины предназначены для разработчика. Напри-

мер, можно узнать, на каких страницах есть ведущие в никуда ссылки (они могут попасть туда из добавленного вручную содержимого), или на какие страницы невозможно попасть, перебирая дерево страниц от корня, или страницы, для которых не хватает краткого описания или добавленного вручную содержимого. Такая информация добавляется в виде отдельных страниц документации. Разработчик может воспринимать эти страницы как список своих дальнейших действий, что делает процесс документирования весьма конструктивным.

Отладочный плагин с именами страниц размещает на каждой странице дополнительную информацию, помогающую идентифицировать и быстро открыть в текстовом редакторе файл создаваемого вручную содержимого.

Из сказанного ясно, что генератор документации является *интроспективным*, так как при запуске он исследует реализованную функциональность и автоматически документирует именно то, что имеет место в действительности. Это очень важно, потому что при сборке комплекса его документация автоматически поддерживается в актуальном и полном состоянии (конечно, если не считать добавленного вручную содержимого).

объект



свойство

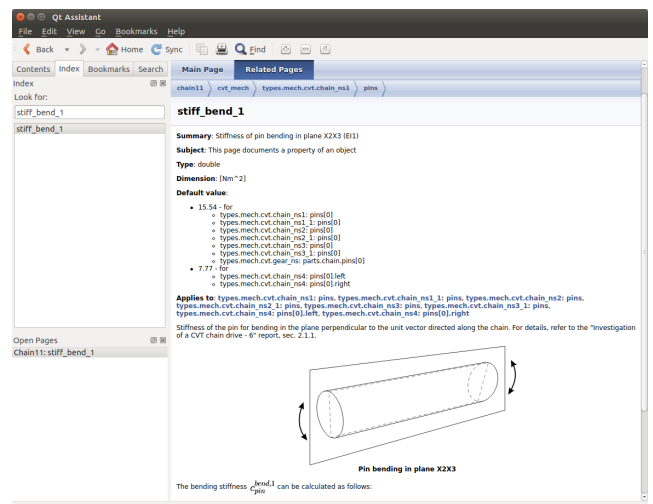


Рис. 3.10. Примеры страниц документации пользователя.

На рис. 3.10 приведены примеры страниц документации для типизированного объекта (слева) и свойства (справа).

3.5. Проблемно-ориентированные компоненты

Проблемно-ориентированные компоненты обеспечивают наполнение программного комплекса конкретной функциональностью, а некоторые из них расширяют инфраструктуру. Рассмотрим вкратце реализующие их модули.

Сборка системы ОДУ, расчёты и анализ численных решений. Эта часть реализована одним модулем, его название — `sim_dyn`.

Расчётная модель трансмиссии включает в себя множество моделей отдельных её частей. Каждая из них способна рассчитывать обобщённые силы при заданных воздействиях, а также вычислять матрицу инерции, соответствующую степеням свободы модели. Кроме того, интерфейс модели предоставляет возможность получить дополнительную информацию, в первую очередь — число степеней свободы, а также структуру заполнения матрицы инерции и, возможно, число байтов в дискретном состоянии.

При сборке расчётной модели происходит перебор моделей имеющихся частей, выясняется общее число степеней свободы и размер глобального массива дискретного состояния. Для каждой модели резервируются диапазоны номеров элементов в векторах глобального состояния и глобального дискретного состояния. Перед расчётом происходит инициализация моделей, а также, если требуется, при помощи специального интерфейса, поддерживаемого частью моделей, генерируется начальное состояние (для бесступенчатой трансмиссии это довольно нетривиальная задача из-за необходимости выбрать подходящие положения пинов цепи). После сборки системы ОДУ и задания начального состояния возможно вычисление правой части (2.4).

Модуль `sim_dyn` осуществляет управление процедурой численного решения — вышеописанной процедурой инициализации, вызовом решателя, сохранением состояний системы с заданным временным шагом в файле результатов. Кроме того, он отвечает за загрузку состояний из файла результатов — это про-

исходит при анализе численного решения. Как уже отмечалось (стр. 285), модуль предоставляет функциональность построения зависимостей всевозможных величин (функций состояния) от времени, а иногда от других параметров и обработку этих зависимостей (БПФ, скользящее среднее, скользящий минимум / максимум). Величины, доступные для анализа, поставляют модели через специальный интерфейс.

В модуле реализована и другая функциональность; её подробное описание было бы излишним. Не останавливаясь на ней, подчеркнём самое главное. Модуль определяет множество интерфейсов, которые при необходимости реализуются моделями подсистем, определёнными в других модулях. Всё взаимодействие с моделями происходит исключительно через эти абстрактные интерфейсы, поэтому данный модуль не является чем-то специфичным для динамики трансмиссий.

Динамические модели. Эта часть состоит из двух модулей. Один лишь определяет некоторые абстрактные интерфейсы, специфичные для трансмиссий вообще (их используют, например, системы стабилизации угловых скоростей — п. 1.6); другой содержит компоненты, реализующие все модели, описанные в гл. 1. Эти компоненты реализуют интерфейсы модуля `sim_dyn` и ряд других, в частности, обеспечивающих возможность взаимодействия модели контакта пин — шайба с моделями цепи и шайбы. Мы последовательно стараемся использовать настолько абстрактные интерфейсы, насколько возможно, так это позволяет сделать компоненты максимально независимыми и универсальными.

Решатели. Исследование применения численных методов к ОДУ динамики трансмиссии (гл. 2) привело к разработке отдельного фреймворка, описанного в гл. 4. В настоящее время методы численного интегрирования реализованы там; в прошлом использовался лишь метод RK4, он был реализован в модуле `sim_dyn`. Интерфейс решателя задачи Коши для системы ОДУ в нормальной

форме содержит методы, позволяющие задать правую часть; задать начальное состояние (в том числе, дискретное); задать параметры решателя; сделать один шаг (возможно, усечённый — при наступлении события, см. п. 2.1.2); прочитать текущее состояние (в том числе, дискретное). Отметим, что этот интерфейс использовался лишь для одношаговых методов, но, по-видимому, может использоваться и для многошаговых методов при грамотной инкапсуляции внутреннего состояния решателя.

Другие компоненты. В состав программного комплекса входит множество проблемно-ориентированных компонентов; степень их «проблемной ориентированности» различается. Многие из них расширяют общую инфраструктуру в том или ином направлении и определяют интерфейсы, которые должны быть реализованы узкоспециализированными компонентами. Например, для двумерной визуализации модели трансмиссии необходим набор интерфейсов, специфичных для двумерной визуализации, но не имеющих отношения к трансмиссиям: визуализатор объекта сцены, методы рисования, сцена. Это инфраструктурная часть. Реализации интерфейса визуализатора для моделей подсистем трансмиссии — узкоспециализированные компоненты.

Перечислим направления, которые в нашем программном комплексе представлены соответствующими интерфейсами и компонентами.

- Двумерная визуализация модели бесступенчатой трансмиссии (см. стр. 286).
- Трёхмерная визуализация модели бесступенчатой трансмиссии (см. стр. 287).
- Визуализация графиков. Инфраструктура состоит интерфейса поставщика данных для двумерной кривой и множества компонентов, реализующих визуализацию графиков. Узкоспециализированная часть состоит из компонентов, реализующих интерфейс поставщика данных.
- Генератор отчётов. Часто необходимо проделать множество расчётов, отличающихся значениями параметров модели, и сравнить результаты. Гра-

фический интерфейс пользователя предусматривает возможность построить для выбранного расчёта график выбранной величины в интерактивном режиме. Бывает, однако, что количество графиков исчисляется десятками, а то и сотнями. Выполнение множества рутинных действий в интерактивном режиме затруднительно и чревато ошибками. Предпочтительнее эту работу автоматизировать, что и достигается при помощи генератора отчётов. Модуль генератора отчётов определяет и реализует набор интерфейсов, позволяющих указать расположение диаграмм на страницах отчёта, распределение графиков по диаграммам, масштабы осей, различные заголовки и надписи, оформление и пр. Также в отчёте указываются расчёты — источники данных. При запуске генератор отчётов создаёт файлы изображений с диаграммами для отчёта и заголовками. Возможен вывод в L^AT_EX. Примерами использования генератора отчётов могут служить рисунки 1.59, 1.60, 1.62–1.65, 1.72–1.75 в разд. 1.7.

- Выполнение многовариантных расчётов. Эта часть позволяет сформулировать расчётное задание, в рамках которого должно быть сделано множество расчётов, отличающихся друг от друга параметрами. Модуль содержит функциональность, облегчающую подготовку входных файлов для расчётов: взяв один расчёт за основу, можно его многократно модифицировать, чтобы получить варианты расчёта; журналы на языке сценариев, полученные в процессе модификации, сохраняются в формулировке задания и применяются при его выполнении. В модуле также реализован планировщик задач; в данный момент он ориентирован на архитектуру Symmetric Multiprocessing (SMP); планируется реализация для распределённой вычислительной среды, например, кластера.

3.6. Выводы к третьей главе

Создан программный комплекс для подготовки, численного решения и анализа результатов задач динамики бесступенчатой трансмиссии. В основе программного комплекса лежит развитая инфраструктура, решающая ряд задач как общего характера, так и более узкоспециализированного (например, расчёт динамики, визуализация). Программный комплекс является полноценным программным продуктом. В частности, для него создана качественная документация пользователя.

Части программного комплекса, специфичные для моделей бесступенчатой трансмиссии, локализованы в нескольких модулях; взаимодействие с ними происходит через абстрактные интерфейсы. Поэтому большая часть программного комплекса «ничего не знает» о трансмиссиях, то есть является универсальной. Это означает, что программный комплекс может быть использован для многих других задач, в той или иной степени аналогичных задачам динамики трансмиссии. Отметим, что создано несколько других программных комплексов для решения других задач (динамика трансмиссии с двойным сцеплением, расчёт нестационарной теплопроводности паровых турбин, динамика роторов), основанных на той же самой инфраструктуре.

Таким образом, универсальная часть программного комплекса предоставляет набор технологий, в принципе позволяющих маленькой команде разработчиков быстро создать узкоспециализированный программный продукт для компьютерного моделирования.

Игровая площадка для разработчика численных методов решения ОДУ

4.1. Введение

В этом разделе дан обзор разработанной автором программной системы (фреймворка), предназначенной для экспериментов с методами численного решения задачи Коши для систем ОДУ в нормальной форме при наличии дискретного состояния и числом переменных состояния n порядка нескольких тысяч. Этот класс задач описан в п. 2.1.2; здесь мы придерживаемся обозначений гл. 2.

Для численного решения задачи Коши разработано много программного обеспечения, в том числе, с открытым исходным кодом. В частности, библиотека CVODE, являющаяся одной из библиотек пакета SUNDIALS [79], ориентирована именно на указанный класс задач. Библиотека `odeint` [103] из проекта `boost` [104] предоставляет множество решателей для задачи Коши, правда, без дискретного состояния. Библиотека PETSc [105–107] предоставляет C-интерфейс к большому количеству явных и неявных, одношаговых и многошаговых методов численного интегрирования. Имеется много других программ, написанных на разных языках программирования. Тем не менее, мы сочли нужным создать ещё одну систему (она называется `ode_num_int`¹).

Существующие системы нацелены в первую очередь на получение численного решения. Назначение предлагаемого фреймворка иное: мы ставим задачу разработки доступных пользователю простых компонентов, из которых можно собирать различные решатели и исследовать поведение последних.

В настоящий момент компоненты `ode_num_int` реализуют одношаговые методы численного интегрирования — все, рассмотренные в гл. 2, за исключением

¹ Репозиторий с исходным кодом доступен по адресу https://github.com/deadmorous/ode_num_int

DUMKAZ, то есть явные методы Рунге – Кутты, метод Грэгга, два линейно неявных W -метода, неявный метод типа метода трапеций, а также класс методов, основанных на экстраполяции по Ричардсону (с любым опорным методом и различными последовательностями шагов). Проблематика решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений охвачена отдельными компонентами, а не реализована прямо в неявных методах, чтобы предоставить пользователю максимальную гибкость в использовании компонентов за счёт агрегирования.

Реализация явных методов решения ОДУ, как правило, проста; они не требуют дополнительной настройки для работы. С другой стороны, реализация неявных методов может потребовать от разработчика значительных усилий, особенно если система ОДУ нелинейна и требуется получить эффективный с точки зрения быстродействия решатель. Это относится как к полностью неявным методам, таким как ОДНРК² [81, п. II.7], так и к линейно неявным методам типа Розенброка [82], в частности, к W -методам [83]. Отметим, что оба класса методов требуют вычисления матрицы Якоби $J = DF/Dx$ правой части системы ОДУ или аппроксимации A к ней. При попытке применить неявный метод к решению имеющейся задачи Коши могут возникнуть следующие трудности.

- Качество численного решения, полученного линейно неявным W -методом, может сильно зависеть от того, насколько A близка к J . Поэтому для разработчика численного метода естественно экспериментировать с различными стратегиями обновления матрицы A . Необходимо отметить, что именно благодаря сохранению одного и того же значения A на протяжении многих шагов интегрирования W -метод становится быстродействующим по сравнению с другими неявными методами. Всякий раз при изменении матрицы A или шага интегрирования h требуется очередная факторизация матрицы $W = E - hdA$ (см. п. 2.5), что требует заметных вычисли-

² Однократно диагонально-неявный метод Рунге – Кутты

тельных затрат.

- Матрица Якоби J может вычисляться по-разному: для одних систем легко найти её в виде аналитической зависимости $J(t, x)$; для более сложных систем аналитическое вычисление может оказаться возможным с использованием средств автоматического дифференцирования, таких как ADOL-C [108]; для сложных систем часто приходится довольствоваться численной процедурой, вычисляющей матрицу, близкую к J , с использованием конечных разностей.
- Матрица Якоби может оказаться редкозаполненной; учёт этого при её вычислении и решении линейных систем становится ключевым фактором, влияющим на быстродействие решателя в целом, если только n не слишком мало. Кроме того, редкозаполненность матрицы Якоби накладывает ограничения на выбор алгоритмов обновления аппроксимирующей её матрицы A .
- Сходимость и быстродействие квази-ньютоновских итераций [86] при решении системы нелинейных алгебраических уравнений на шаге интегрирования может зависеть от нескольких факторов. Количество итераций обычно возрастает, если A не обновляется достаточно часто; с другой стороны, при $A = J$ на каждой итерации требуется большой объём вычислений; наконец, сходимость может отсутствовать без применения некоторой регуляризации. Ещё один важный фактор, влияющий на число итераций — начальное приближение.

При разработке фреймворка `ode_num_int` мы стремились дать его пользователю — разработчику численного метода решения своей конкретной задачи — максимальную свободу комбинирования различных компонентов, так как выбор эффективного численного метода в большой степени является исследовательской задачей. Такая свобода появляется, когда каждый компонент отвечает

лишь за выполнение одной простой задачи (single responsibility principle).

Фреймворк `ode_num_int` написан на C++11 и состоит из множества шаблонов классов. Кроме того, в нём есть несколько единиц трансляции, обеспечивающих динамическое создание экземпляров и реализующих функции измерения времени. Вся основная функциональность реализована в заголовочных файлах. В следующих подразделах она описана подробнее.

4.2. Общая инфраструктура

Рассмотрим некоторые общие шаблоны проектирования, применённые в архитектуре фреймворка `ode_num_int`. Отметим, что решения, описанные в п. 3.3, здесь по ряду причин не используются — в том числе, из-за того, что исходный код данного фреймворка открыт, а код разработанного программного комплекса, описанного в гл. 3, — нет.

Наблюдатели. В C++ функции не являются «полноправными гражданами», как, например, в JavaScript. Однако язык позволяет создавать классы (*функторы*), поведение которых похоже на поведение функций. Более того, C++11 позволяет легко создавать их при помощи *лямбда-выражений*. Шаблон класса `Observers` инкапсулирует массив таких функторов, имеющих общую сигнатуру (это пакет параметров шаблона). Методы шаблона позволяют добавлять функторы в этот массив и удалять их. Кроме того, сам шаблон `Observers` является функтором с той же сигнатурой, что и элементы массива. Его вызов приводит к вызову всех элементов массива по очереди. Данный шаблон проектирования существует и в других языках программирования; в библиотеке `boost` C++ есть аналогичный шаблон `signals2`, однако наша реализация несколько быстрее.

Различные интерфейсы используют шаблон `Observers` посредством объявления открытых полей соответствующего типа, куда пользователи интерфейсов

могут добавлять свои функторы, играющие роль функций обратного вызова. Реализации интерфейсов вызывают их посредством вызова указанных полей (это функторы). В результате у пользователя появляется простая возможность получить необходимую информацию о работе тех или иных компонентов (подсчитать количество вызовов, измерить их время, вывести на экран невязку на текущей итерации и др.)

Хранители значений. В C++ для хранения значения в экземпляре класса в нём объявляют поле. Традиционная практика — делать поле закрытым и предоставлять открытые методы для чтения (getter) и записи (setter) значения. Если необходимо уведомить заинтересованные стороны (подписчиков) об изменении значения, в нашем случае уместно добавить в класс открытое поле наблюдателей `Observers`. Отметим ещё, может понадобиться иметь одинаковые по смыслу значения в разных классах.

Следуя принципу единственной ответственности класса, нужно объявлять закрытое поле, getter, setter и поле наблюдателей в отдельном классе, инкапсулирующем логику доступа к значению и уведомлений. Мы называем такие классы *хранителями значений*. Они создаются при помощи макроопределения, потому что имена методов чтения и записи значения у них различаются. Каждый класс может открыто унаследовать нужные ему хранители значений.

Фабрики. Этот известный шаблон проектирования [109] традиционно используется для создания экземпляров классов, реализующих заданный интерфейс, по заданным идентификаторам типов (в нашем случае это строки). В масштабируемых программных системах идентификаторы типов неизвестны на момент проектирования фабрики.

Фабрики в `ode_num_int` реализованы при помощи двух шаблонов классов. При этом каждому интерфейсу (если требуется) соответствует одна фабрика. Для поддержки динамического создания экземпляров класс интерфейса насле-

дует шаблон `Factory`, параметризуя его самим собой (интерфейс — параметр шаблона). Реализации интерфейса, для которых должно поддерживаться динамическое создание, наследуют шаблон `FactoryMixin`, который инстанцируется с двумя параметрами: классом реализации и классом интерфейса.

Динамически создаваемые реализации интерфейса регистрируются в фабрике. Это может быть сделано разными способами, в том числе — на этапе инициализации глобальных переменных. В таком случае используется макрос, параметрами которого являются имя класса и значение идентификатора типа.

Использование фабрики сводится к вызову метода `Factory::newInstance()`, которому передаётся идентификатор типа. Он возвращает умный указатель (`std::shared_ptr`) на фабричный интерфейс созданного экземпляра. Иногда оказывается полезной возможность узнать идентификаторы всех зарегистрированных в фабрике типов — для этого есть метод `Factory::registeredTypes()`.

Параметры. Часто экземпляры классов имеют *параметры* произвольных типов. Значением параметра может быть число, строка, решатель задачи Коши и др. Если значения конкретных параметров требуется читать или записывать непосредственно в коде C++, и класс, в экземпляре которого находится это значение, известен, то достаточно интерфейса хранителя значений, который обычно используют для параметров. Но может понадобиться прочитать из файла все хранящиеся там параметры объекта и записать их в экземпляр, тип которого неизвестен. При этом, если значение параметра — объект, значение трактуется как идентификатор типа, его установка приводит к созданию экземпляра соответствующей фабрикой.

Чтобы реализовать чтение и запись произвольных параметров произвольного объекта, разработаны два класса, `OptionalParameters` и `Value`. Первый из них является интерфейсом, объявляющим методы чтения и записи именованных параметров. Экземпляр второго способен хранить значение произвольного (до некоторой степени) типа. Класс `Value` похож на `QVariant` из библиотеки

Qt [98], однако имеет встроенную функциональность для взаимодействия с фабриками: если значение — указатель на фабричный интерфейс, то при попытке записи в него строки создаётся экземпляр, для которого она является идентификатором типа. Созданный экземпляр сохраняется в качестве значения.

Поскольку типы значений произвольны, возможно создание деревьев именованных значений (фактически свойств) и сериализация в форматах XML, JSON и других.

Измерение времени. При разработке программного обеспечения стандартным инструментом для оптимизации быстродействия является профилировщик. Поскольку быстродействие решателя ОДУ практически всегда представляет интерес для его разработчика, в состав фреймворка включены несколько «лёгких» функций для измерения временных интервалов. Класс `TickCount` имеет методы для измерения количества тактов процессора, произошедших между вызовами. Его интерфейс схож с интерфейсом класса `QTime` из библиотеки Qt, но `TickCount` намного точнее, так как использует инструкцию `rdtsc`, доступную на архитектурах x86-64. Правда, этот подход требует привязки потока выполнения к ядру процессора на архитектурах AMD, поскольку для них инструкция `rdtsc` выдаёт разные значения для разных ядер.

Временной интервал, измеренный в тактах, можно перевести в миллисекунды при помощи класса `TimerCalibrator`. Экземпляр этого класса надо создать перед началом достаточно продолжительной операции, а преобразование выполнять после неё, так как преобразование использует данные системных часов с разрешением порядка 10 мс.

Полное время выполнения и количество операций, выполняемых многократно, удобно измерять при помощи класса `TimingStats`. Для встраивания процедур измерения времени в программный код используются наблюдатели.

Линейная алгебра. Имеется несколько значимых программных реализаций алгоритмов линейной алгебры (например, библиотеки Intel MKL, AMD ACML, OpenBLAS). Чтобы упростить сборку фреймворка из исходного кода, ни одна из них не используется. Вместе с тем, конструкция шаблона вектора, рассмотренная ниже, в принципе позволяет использовать подобные библиотеки, ничего не меняя в коде `ode_num_int`.

Шаблон класса `VectorTemplate` предоставляет интерфейс вектора-столбца. Определены линейные операции (сложение, вычитание, умножение на число). Шаблон имеет один параметр, `VectorData`, определяющий правила доступа к данным вектора, тип элементов, а также алгоритмы копирования данных вектора. Допускается копирование, при котором реализация шаблона с одним параметром копируется в реализацию с другим параметром. Это повышает гибкость использования векторов в коде. Фреймворк `ode_num_int` реализует в качестве `VectorData` шаблон класса, хранящий данные в `std::vector` (параметр шаблона — тип элемента). Возможны и другие реализации. Данный подход помогает в некоторых случаях избежать лишнего копирования, например, при необходимости представить часть вектора (скажем, верхнюю половину) в виде отдельного вектора. Это достигается при помощи инстанцирования шаблона `VectorTemplate` с параметром `VectorProxy::Block`. Здесь используется шаблон проектирования *прокси* [109]. Ещё один пример — отмасштабированная «копия» вектора. Чтобы избежать непосредственного копирования и умножения каждого элемента на число, шаблон `VectorTemplate` инстанцируется с параметром `VectorProxy::Scale` и инициализируется исходным вектором и масштабным множителем. Отметим, что большинство шаблонов фреймворка параметризованы классом `VectorData`.

Шаблон класса `SparseMatrixTemplate` предоставляет интерфейс редкозаполненной матрицы. Его дизайн аналогичен дизайну вектора. Шаблон имеет параметр `MatrixData`. Подобно тому, как это сделано для векторов, прокси-реализации позволяют представить прямоугольный блок матрицы как отдельную

редкозаполненную матрицу и избежать лишнего копирования. Для фактического хранения элементов матрицы предусмотрены две реализации параметра `MatrixData`. Одна из них (назовём её `D`) позволяет динамически менять структуру заполнения матрицы при записи элементов; она хранит данные в ассоциативном массиве `std::map` с ключом, равным паре из номера строки и номера столбца элемента и значением, равным значению элемента. Такие операции, как умножение на вектор, требуют перебора ассоциативного массива, и длятся значительно дольше, чем хотелось бы. Поэтому есть ещё одна реализация параметра `MatrixData` (назовём её `F`). Для неё структура заполнения матрицы считается фиксированной и определяется в момент инициализации. Ненулевые элементы матрицы хранятся в `std::vector`. Такие матрицы умножаются на вектор в несколько раз быстрее, чем с параметром `D`. Как и для векторов, допускается копирование матриц с разными параметрами шаблона, что позволяет применять следующий алгоритм, например, при вычислении матрицы Якоби. Если структура заполнения неизвестна, в процессе вычисления матрицы записываем результат в `SparseMatrixTemplate<D>`, но далее не храним её — вместо этого копируем в экземпляр `SparseMatrixTemplate<F>`, который сохраняем и используем в операциях с векторами. При вычислении матрицы Якоби в следующий раз, если известно, что структура заполнения не изменилась, следует учесть её (способом, предложенным в [90]); при этом матрица с параметром `D` больше не понадобится.

Шаблон класса `LUFactorizer` осуществляет решение систем линейных алгебраических уравнений с редкозаполненной матрицей. При этом используется LU-факторизация [110]. В шаблоне имеются методы для задания матрицы системы; для повторного задания другой матрицы системы с той же структурой заполнения (выполняется быстрее первого, так как не требуется выделение памяти и вычисление профилей матриц L и U); для решения СЛАУ с заданной правой частью. Факторизация выполняется при решении СЛАУ, если необходимо (она не производилась ранее или матрица системы изменилась).

Шаблон измеряет время, ушедшее на различные операции (задание матрицы, факторизацию, прямой и обратный ходы), накапливая результаты измерений при многократных вызовах в экземпляре класса `TimingStats`.

4.3. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений

Для численного решения уравнений используются модификации метода Ньютона, рассмотренные в п. 2.6.1 (мы будем использовать здесь те же обозначения); их обзор также представлен в [85; 86].

В этом разделе представлены интерфейсы, специфичные для численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений, возникающих на шаге неявного метода численного интегрирования систем ОДУ, а также некоторые их реализации. Функциональность локализована в различных шаблонах классов, каждый из которых обладает единственной ответственностью. Экземпляры шаблонов, реализующие один и тот же интерфейс, взаимозаменяемы, что обеспечивает широкие возможности комбинирования алгоритмов. Представленные интерфейсы содержат поля наблюдателей, помогающих получить всю необходимую информацию о поведении реализаций интерфейсов.

Векторное отображение. Шаблон класса `VectorMapping` определяет интерфейс, при помощи которого вычисляется $f(x)$ — векторнозначная функция от векторного аргумента. Его реализации определяют конкретные отображения. Экземпляр векторного отображения может быть хранимым значением (см. стр. 322).

Оценщик ошибки. Шаблон класса `ErrorEstimator` — интерфейс для оценки абсолютной и относительной ошибки приближения к точному решению, полученного на очередной ньютоновской итерации. Ошибка оценивается на ос-

новании очередного значения вектора невязки. Реализации интерфейса также должны выдавать значение (перечислимого типа) статуса итерации. В простейшей реализации оценщика ошибок параметрами являются допустимые значения абсолютной и относительной погрешности, а также пороговые значения этих погрешностей для диагностики расходимости итерационного процесса. Параметры доступны через интерфейс `OptionalParameters`, поддерживаемый реализациями. Итерационный решатель хранит экземпляр оценщика ошибки и использует его для определения статуса итерации, не вдаваясь в детали его вычисления.

Поставщик матрицы Якоби. Шаблон класса `JacobianProvider` — интерфейс с методами для вычисления матрицы Якоби $J = Df/Dx$ или её аппроксимации (реализация определяет способ вычисления). Матрицу можно получить в виде константной ссылки на тип `SparseMatrixTemplate<F>` (см. стр. 325). Имеющаяся общая реализация вычисляет J с использованием конечных разностей. Учитывается структура заполнения [90], если она известна на момент начала вычисления. Это означает, что количество вычислений функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ может быть меньше, чем $n + 1$ (столько раз необходимо вычислить f при полностью заполненной матрице Якоби).

Редуцирование матрицы Якоби. Один из способов ускорить решение линейной системы (2.19) в методе Ньютона — *отбраковать*, то есть принудительно положить равными нулю, некоторые элементы матриц B_k (идея изложена подробнее на стр. 266). Поставщик матрицы Якоби содержит в качестве необязательного параметра экземпляр типа `JacobianTrimmer` — этот интерфейс предназначен для изменения структуры заполнения матрицы с целью уменьшить количество ненулевых элементов. Конкретные правила, по которым это делается, определяются реализациями интерфейса. В настоящий момент есть две общие реализации, одна из которых отбраковывает элементы, абсолютная вели-

чина отношения которых к максимальному по модулю элементу не превышает заданного порогового значения; другая реализация отбраковывает элементы за пределами ленты заданной ширины. Для ОДУ (2.4) рассматривался специализированный вариант, не входящий в `ode_num_int`.

Направление поиска. Шаблон `NewtonDescentDirection` предоставляет интерфейс для вычисления направления поиска d_k в (2.19). Его реализации отвечают как за решение СЛАУ $B_k d_k = -f(x_k)$, так и за то, какой будет матрица B_k . Специфика реализаций состоит именно в способе вычисления B_k . В данный момент реализованы варианты `exact`, `broyden`, `fake-broyden`, `hart` и `const`, описанные на стр. 264. Кроме того, имеются реализации, названные `lazy-broyden` и `lazy-fake-broyden`. Первая из них аналогична `broyden`, но отличается тем, что вместо применения формулы (2.20) на каждой итерации она применяется через каждые m итераций:

$$B_{k-m+1} = \dots = B_{k-1} = B_{k-m}, \quad B_k = B_{k-m} + \sum_{j=k-m+1}^k \frac{r_j s_j^T}{s_j^T s_j}, \quad (4.1)$$

что позволяет сэкономить на LU-факторизации матриц B_k . Число m задаётся параметром. Реализация `lazy-fake-broyden` отличается тем, что в матрицах B_k принудительно сохраняется та же структура заполнения, что и в матрице Якоби.

Поскольку в реализациях интерфейса имеется внутреннее состояние, предусмотрен метод для его сброса, так что на следующей итерации матрица B_k будет получена у `JacobiabProvider` (это параметр `NewtonDescentDirection`).

Поиск вдоль направления d_k . Шаблон `NewtonLinearSearch` предоставляет интерфейсный метод для вычисления α_k на итерации (2.19). В данный момент имеется лишь одна его реализация; она работает так, как описано на стр. 266.

Исполнитель итераций. Шаблон `NewtonIterationPerformer` инкапсулирует всю логику одной ньютоновской итерации (2.19) с заданным начальным приближением x_k . Его интерфейс предоставляет метод для выполнения итерации; он возвращает статус, определённый оценщиком ошибки. Имеется одна реализация этого интерфейса. Её параметрами являются реализации интерфейсов `VectorMapping` — для вычисления $f(x)$; `ErrorEstimatorHolder` — для определения статуса итерации; `NewtonDescentDirection` — для поиска направления d_k ; `NewtonLinearSearch` — для вычисления α_k . Пользователь имеет полную свободу в выборе реализаций этих интерфейсов, в частности, он может создать свои реализации.

Инструменты регуляризации. К сожалению, ньютоновские итерации иногда расходятся. Если это происходит в неявном методе численного интегрирования ОДУ, обычно уменьшают шаг интегрирования. В общем случае можно ввести в рассмотрение некоторую *регуляризацию*. Например, вместо решения уравнения $f(x) = 0$ можно рассмотреть семейство уравнений $g(x, \gamma) = 0$, где $\gamma \in [0, 1]$ — параметр регуляризации, а функция g такова, что, с одной стороны, $g(x, 1) = f(x)$, и, с другой стороны, ньютоновские итерации сходятся лучше с уменьшением γ . Тогда можно попробовать начать итерации при $\gamma = 0$ и увеличивать γ в процессе итераций. Можно надеяться, что итерационный процесс сойдётся при $\gamma = 1$ благодаря тому, что первые итерации дадут достаточно хорошее начальное приближение для случая $\gamma = 1$. Отметим, что в случае решения нелинейной системы на шаге неявного метода интегрирования ОДУ можно взять величину, пропорциональную шагу интегрирования, в качестве параметра γ , хотя в конкретных задачах могут быть и другие возможности.

В `ode_num_int` имеется шаблон `NewtonRegularizationStrategy`, интерфейс которого предусматривает метод для изменения γ в процессе итераций; этому методу доступны текущие значения невязки, статуса итерации, номера итерации. Реализации интерфейса отсутствуют, но при решении ОДУ (2.4) была

создана реализация, в которой в качестве $1 - \gamma$ был взят параметр ε в сглаженном законе трения (табл. 2.1). Это, однако, не принесло ощутимых результатов.

Решатель ньютоновского типа. Шаблон `NewtonSolverInterface` предоставляет интерфейс итерационного решателя нелинейных уравнений. В качестве параметров задаются исполнитель итераций, пороговое число итераций и (не обязательно) стратегия регуляризации. В интерфейсе имеются методы для задания начального приближения и запуска итерационного процесса. Вторым методом возвращает статус завершения итерационного процесса. Имеется общая реализация интерфейса, она отвечает за цикл итерационного процесса. В этом цикле предусмотрен, в том числе, сброс `NewtonDescentDirection` при расхождении итераций, что фактически приводит к вычислению матрицы Якоби на следующей итерации. Также предусмотрена регуляризация через интерфейс `NewtonRegularizationStrategy`.

4.4. Решатели ОДУ

В `ode_num_int` пока реализованы лишь одношаговые методы; планируется поддержка многошаговых методов. Кроме того, в настоящий момент не поддерживаются численные схемы переменного порядка точности, например, экстраполяционные с автоматическим управлением величиной шага и порядком экстраполяции.

Шаблон `OdeSolver` предоставляет интерфейс решателя ОДУ. Его методы позволяют узнать порядок точности; задать начальное состояние; задать начальное значение шага интегрирования; узнать текущее состояние; выполнить один шаг численного интегрирования (этот метод называется `doStep`). Ниже рассмотрены другие шаблоны, составляющие архитектуру фреймворка.

Правая часть системы ОДУ. Шаблон `OdeRhs` предоставляет интерфейс, аналогичный `VectorMapping` (стр. 327), но предназначенный для вычисления $F(t, x)$, где t — независимая переменная, а не $f(x)$.

Кроме того, в интерфейсе предусмотрена некоторая поддержка для ОДУ второго порядка. Полагая, что вектор переменных состояния имеет вид $x = [u^T, v^T, z^T]^T$, как в (2.4), где координаты и скорости u, v — столбцы высоты n_2 , а переменные состояния ОДУ первого порядка z — столбец высоты n_1 , получим правую часть вида $f(t, x) = [v^T, f_v^T, f_z^T]^T$. Этот вид позволяет существенно сократить размерность систем алгебраических уравнений для неявных методов (см. п. 2.6). Интерфейс `OdeRhs` имеет методы, возвращающие n_2 (реализация по умолчанию возвращает 0) и $n = n_1 + n_2$.

В интерфейсе также предусмотрены методы для вычисления индикаторов событий — см. (2.6) — и вызова процедуры переключения дискретного состояния вследствие наступления одного или нескольких одновременных событий.

Явные методы решения ОДУ. Реализованные в `ode_num_int` явные методы могут быть сформулированы в виде одношаговых явных схем Рунге – Кутты (ЯРК) [81, гл. II]. Для них созданы две общие реализации, конструкторы которых принимают таблицу Бутчера в качестве параметра. Первая реализация, `OdeSolverExplicitRK`, предназначена для схем без контроля точности и управления длиной шага (например, явный метод Эйлера, RK4). Вторая реализация, `OdeSolverExplicitEmbeddedRK`, предназначена для вложенных схем с контролем точности и автоматическим управлением длиной шага (например, DOPRI45, DOPRI56, DOPRI78). Для перечисленных схем имеются производные классы с конструкторами по умолчанию, добавление других аналогичных схем — тривиальная задача, если таблица Бутчера известна.

Метод Грэгга привлекателен в качестве опорного для экстраполяционных схем благодаря свойству симметрии [81, п. II.8]. Этот двухшаговый метод можно сформулировать как одношаговый, хотя необходимости в этом нет: наша

реализация `OdeSolverGragg` снаружи выглядит как одношаговый метод; внутри она хранит два вектора состояния (для двух последних шагов); вызов метода `doStep` приводит к выполнению двух шагов. Реализация предусматривает параметр логического типа, определяющий, требуется ли сглаживание. При сглаживании метод, возвращающий текущее состояние, возвращает среднее значение двух векторов состояния. Данное поведение позволяет легко реализовать экстраполяционный метод ГБШ как со сглаживающим шагом, так и без него.

Экстраполяционные схемы. Данный класс методов численного интегрирования основан на экстраполяции по Ричардсону с использованием алгоритма Эйткена – Невилла [81, п. II.9]. В `ode_num_int` он представлен шаблоном `OdeSolverExtrapolator`, основные параметры которого — *опорный метод*, *последовательность шагов* и число стадий N (оно фиксировано). На первой стадии делается один шаг длины h опорным методом. На следующих стадиях опорным методом из начального состояния делается n_k шагов (k — номер стадии) длины h/n_k . Полученные в конце всех стадий состояния экстраполируются по формуле Эйткена – Невилла. В данный момент реализованы последовательности Булирша ($n_k = 2^{k-1}$), Ромберга ($n_1 = 1, n_{2k} = 2^k, n_{2k+1} = 1.5 \times 2^k$) и гармоническая последовательность ($n_k = k$). Благодаря произвольности опорного метода и последовательности шагов шаблон обладает широкими возможностями по созданию различных численных схем. Отметим, однако, что управление длиной шага и числом стадий не реализовано.

Управление длиной шага. Шаблон `OdeStepSizeController` предоставляет интерфейсный метод для осуществления контроля длиной шага интегрирования h . Метод возвращает значение h , рекомендуемое к использованию на следующем шаге, а также два флага: достаточно ли мала норма ошибки на последнем шаге и отличается ли новое значение шага от текущего. Параметры метода — текущая длина шага, порядок точности схемы и норма ошибки.

Шаблон `OdeStepSizeController` может использоваться схемами, способными оценить норму ошибки на шаге, например, вложенными схемами Рунге – Кутты.

Имеется одна реализация интерфейса управления длиной шага. В ней несколько параметров, основным из которых является максимальная допустимая ошибка. Другие параметры при необходимости обеспечивают некоторую дискретность изменения длины шага, если предпочтительно менять длину шага как можно реже (это так, например, для W -методов, поскольку изменение h влечёт за собой новую декомпозицию).

Поддержка событий. Шаблон `OdeEventController` имеет интерфейс с двумя методами. Первый из них вызывается в начале шага интегрирования (он вычисляет и запоминает значения индикаторов событий). Второй метод вызывается в конце шага интегрирования. Его задача — определить, произошли ли события на шаге. Если это так, метод должен найти самое раннее из них, интерполировать (при помощи специального интерполятора, передаваемого параметром) состояние системы на момент наступления события и вызвать процедуру переключения дискретного состояния ϕ (см. стр. 238), передав ей номер наступившего события. Метод возвращает значение независимой переменной в конце (возможно, усечённого) шага и информацию о наступивших событиях.

Для интерполяции вектора состояния можно использовать линейный интерполятор; схемы, поддерживающие плотную выдачу, могут предоставить интерполятор лучшего качества (но в данный момент такие интерполяторы не реализованы).

В `ode_num_int` имеется одна реализация интерфейса управления дискретным состоянием. Она несколько упрощённая: индикаторы событий интерполируются на шаге линейно. Возможны уточнённые реализации, численно решающие уравнение (2.6) — именно так работает CVODE. Отметим, однако, что линейная интерполяция индикаторов при решении ОДУ динамики бесступен-

чатой трансмиссии (2.4) никогда не оказывала негативного влияния на точность решения.

Линейно неявные W-методы. Реализованные методы рассмотрены в п. 2.5. Они представлены шаблонами `OdeSolverRosenbrock_SW2_4` (метод SW24) и `OdeSolverRosenbrock_W1` (метод W1). Они наследуют общий базовый класс, ответственный за вычисление матриц A и W , а также за решение СЛАУ с матрицей W . Для вычисления A используется `JacobianProvider` (стр. 328); его экземпляр задаётся параметром. Базовый класс может быть использован при реализации других W-методов.

Неявные методы. В данный момент в `ode_num_int` реализовано лишь следующее семейство неявных методов:

$$x_{k+1} = x_k + h[(1 - \alpha)F(t_k, x_k) + \alpha F(t_k + h, x_{k+1})]. \quad (4.2)$$

Параметр $\alpha \in [0, 1]$ определяет конкретный метод. В частности, $\alpha = 0$ соответствует явному методу Эйлера, $\alpha = 1$ — неявному методу Эйлера, $\alpha = 0,5$ — методу трапеций. Шаблон `OdeSolverImplicitEuler` реализует это семейство методов. В качестве параметров задаются реализации следующих интерфейсов: `NewtonSolverInterface` — для решения системы нелинейных алгебраических уравнений на шаге; `OdeEventController` — для управления дискретным состоянием; `OdeRhs` — для задания правой части системы ОДУ.

Кроме того, в качестве параметров задаются число α и любой решатель ОДУ, используемый в качестве предиктора и дающий начальное приближение для решателя алгебраических уравнений — опыт показывает, что даже предсказание, сделанное явным методом Эйлера, часто позволяет значительно уменьшить число итераций по сравнению со случаем, когда в начальное приближение соответствует состоянию в начале шага.

При формулировании системы нелинейных уравнений учитывается случай $n_2 > 0$ (наличие ОДУ второго порядка, см. стр. 331) аналогично тому, как это

сделано в частном случае метода трапеций — см. (2.17), — координаты u исключаются.

Вывод решателя ОДУ. При экспериментировании с методами численного интегрирования часто требуется выводить различные данные в процессе или по окончании процедуры численного решения. Для этого предусмотрен ряд шаблонов. В частности, шаблон `StatisticsOutput` по окончании расчёта выводит время и количество выполнений различных частей программного кода (вычисление правой части, LU-факторизация, прямой и обратный ходы, вычисление матрицы Якоби и др., в зависимости от решателя). Шаблон `GeneralOutput` предназначен для вывода текущей информации в процессе расчёта (время, размер шага, норма ошибки на шаге, информация о событиях, невязка на очередной ньютоновской итерации). Шаблон `SolutionOutput` позволяет вывести вектор состояния на каждом шаге или через заданные интервалы времени. Вывод осуществляется в файл или в поток стандартного вывода. Благодаря наблюдателям (стр. 321) пользователь при необходимости имеет возможность создать удобные для себя процедуры вывода.

Конфигурация решателя ОДУ. Шаблон `OdeSolverConfiguration` предоставляет хранилище свойств, целиком описывающее параметры решателя, правой части, начального состояния, процедур вывода. Он удобен, когда требуется прочитать текстовый файл со всеми этими параметрами и запустить расчёт.

4.5. Выводы к четвёртой главе

Фреймворк `ode_num_int` с открытым исходным кодом был создан с целью помочь тем, кому требуется найти или разработать метод численного интегрирования для решения конкретной задачи Коши или настроить параметры метода. Приложены значительные усилия для создания архитектуры, состоящей

из множества максимально независимых сущностей, каждая из которых обладает единственной ответственностью. Поэтому `ode_num_int` обладает большой гибкостью, предоставляя возможность комбинировать отдельные компоненты в единую систему для решения задачи, а также для исследования поведения решателя при помощи средств сбора и вывода интересующей разработчика информации. Кроме того, создание новых компонент представляется относительно несложной задачей благодаря продуманным простым интерфейсам. Можно сказать, что фреймворк является игровой площадкой для разработчика методов численного интегрирования.

Когда подходящий метод численного решения задачи Коши найден, он может быть использован непосредственно. Всё же оптимизированные реализации могут давать существенный выигрыш в быстродействии. Подчеркнём, что в задачи фреймворка не входит разработка наиболее быстродействующей реализации решателя или реализации, пригодной для решения ОДУ с очень большим числом переменных состояния.

Отметим также, что фреймворк `ode_num_int` возник в процессе решения задачи подходящего выбора численного метода для решения ОДУ динамики трансмиссии. Все результаты гл. 2 получены с его использованием.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

1. Разработаны физические и математические модели вариатора различной сложности и степени детализации (с числом степеней свободы от одной до тысяч), позволяющие судить об устойчивости положения равновесия, предсказывать глобальную динамику, детали напряжённо-деформированного состояния элементов цепи, КПД, акустический шум. Малоразмерные модели вариатора для предсказательного моделирования глобальной динамики не требуют больших вычислительных затрат и могут быть использованы для расчётов в реальном времени. Наиболее детализированная модель цепи вариатора учитывает её дискретную структуру; изгиб соединительных осей; изгиб и кручение пластинок цепи; ограниченность изгибающего момента в пластинках; наличие двух обкатывающихся друг по другу половинок в каждой соединительной оси.
2. На основе контактной теории Герца разработана модель локального контактного взаимодействия тел с двояковыпуклыми поверхностями при наличии трения, близкого к кулонову, отличающаяся уточнённым описанием кинематики контакта.
3. Создана архитектура (фреймворк) программных компонентов, облегчающих конструирование явных и неявных одношаговых методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и исследования их поведения с целью оценки быстродействия и дальнейшей оптимизации.
4. С использованием созданного фреймворка исследована возможность применения различных методов численного интегрирования для решения задач динамики вариатора. Определены классы методов, использование ко-

торых представляется перспективным.

5. Создана инфраструктура программных компонентов, предназначенная для создания масштабируемых проблемно-ориентированных программных комплексов. Она состоит из множества модулей и облегчает решение как задач общего характера, так и более специфичных для предсказательного моделирования.
6. На базе созданной инфраструктуры компонентов создан программный комплекс, являющийся полноценным программным продуктом, в котором реализованы созданные модели элементов трансмиссии, методы численного интегрирования, а также все средства, необходимые для комфортной работы инженера по численному моделированию вариатора — подготовки исходных данных, в том числе для многовариантных расчётов, запуска расчётов, анализа численного решения в отдельно взятом расчёте, подготовки сводных отчётов по результатам многовариантных расчётов.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим учителям, проф. Н. Н. Шаброву за всестороннюю поддержку на протяжении всего диссертационного исследования; проф. Ю. Г. Исполу за оказанную помощь при разработке математических моделей бесступенчатой трансмиссии и обсуждение использованных при этом идей; проф. П. А. Жилину за образование в области прямого тензорного исчисления, проф. В. В. Елисееву и проф. В. А. Пальмову — за образование в области механики деформируемого твёрдого тела; коллегам доц. А. К. Кузину за всестороннее обсуждение архитектуры компонентов, составляющих фундамент разработанного программного комплекса; сотрудникам компании LuK А. Фидлину, Л. Бурковски, Ю. Лукито, А. Тойберту — за многолетнее плодотворное сотрудничество и предоставленные экспериментальные данные;

А. Б. Богатырёву — за обсуждение стабилизированных явных методов решения ОДУ. Особую благодарность автор приносит своей жене, А. К. Канидьевой, за терпение и поддержку.

Список литературы

1. *Faust H., Linnenbrügger A.* CVT Development at LuK // LuK Symposium. — LuK GmbH & Co. KG, 1998. — С. 157–179. — URL: https://www.schaeffler.com/remotemedien/media/_shared_media/08_media_library/01_publications/schaeffler_2/symposia_1/downloads_11/7_CVT_2.pdf.
2. Latest Results in the CVT Development / N. Indlekofer [и др.] // LuK Symposium. — 2002. — С. 63–72. — URL: https://www.schaeffler.com/remotemedien/media/_shared_media/08_media_library/01_publications/schaeffler_2/symposia_1/downloads_11/LuK_Symposium_2002_CVT_development_de_en.pdf.
3. CVT without limits — Components for commercial vehicle transmissions / A. Englisch [и др.] // LuK Symposium. — 2006. — С. 73–85. — URL: https://www.schaeffler.com/remotemedien/media/_shared_media/08_media_library/01_publications/schaeffler_2/symposia_1/downloads_11/05_CVT_without_limits.pdf.
4. *Englisch A.* CVT: High value and high performance // Schaeffler Symposium. — 2010. — С. 139–151. — URL: https://www.schaeffler.com/remotemedien/media/_shared_media/08_media_library/01_publications/schaeffler_2/symposia_1/downloads_11/Schaeffler_Kolloquium_2010_09_en.pdf.
5. CVT: The Transmission Concept of the Future / A. Englisch [и др.] // Schaeffler Kolloquium. — 2014. — С. 498–511. — URL: https://www.schaeffler.com/remotemedien/media/_shared_media/08_media_library/01_publications/schaeffler_2/symposia_1/downloads_11/Schaeffler_Kolloquium_2014_34_en.pdf.

6. *Srnik J., Pfeiffer F.* Dynamics of CVT chain drives // International Journal of Vehicle Design. — 1999. — Т. 22, вып. 1/2. — С. 54—72.
7. *Neumann L., Ulbrich H., Pfeiffer F.* New Model of a CVT Rocker Pin Chain with Exact Joint Kinematics // ASME Journal of Computational and Nonlinear Mechanics. — 2006. — Т. 1, вып. 2. — С. 143—149.
8. Simulation of a push belt CVT considering uni- and bilateral constraints / Т. Geier [и др.] // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2006. — Т. 86, № 10. — С. 795—806.
9. *Neumann L., Ulbrich H., Pfeiffer F.* Optimisation of the Joint Geometry of a Rocker Pin Chain // Machine Dynamics Problems. — 2005. — Т. Vol. 29, No. 4. — С. 97—108.
10. *Bullinger M., Pfeiffer F., Ulbrich H.* Elastic Modelling of Bodies and Contacts in Continuous Variable Transmissions // Multibody System Dynamics. — 2005. — Т. 13, № 2. — С. 175—194.
11. *Schindler T., Friedrich M., Ulbrich H.* Computing Time Reduction Possibilities in Multibody Dynamics // Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications / под ред. К. Arczewski [и др.]. — Dordrecht : Springer Netherlands, 2011. — С. 239—259.
12. *Lebrecht W., Pfeiffer F., Ulbrich H.* Analysis of self-induced vibrations in a pushing V-belt CVT // International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, Paper No. 04CVT-32. — 2004.
13. *Bullinger M., Funk K., Pfeiffer F.* An Elastic Simulation Model of a Metal Pushing V-Belt CVT // Advances in Computational Multibody Systems / под ред. J. A. Ambrósio. — Springer, 2006. — С. 269—293.

14. *Srivastava N., Haque I.* Clearance and friction-induced dynamics of chain CVT drives // *Multibody System Dynamics*. — 2008. — Анн. — Т. 19, № 3. — С. 255—280. — DOI: 10.1007/s11044-007-9057-3. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11044-007-9057-3>.
15. *Sedlmayr M., Pfeiffer F.* Spatial contact mechanics of CVT chain drives // *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*. Т. 6. — 2001. — С. 1789—1795.
16. *Sedlmayr M., Bullinger M., Pfeiffer F.* Spatial Dynamics of CVT Chain Drives // *VDI-Berichte Nr. 1709: CVT 2002 Congress*. — VDI-Verlag GmbH, Duesseldorf, 2002. — С. 511—527.
17. *Schindler T.* Spatial dynamics of pushbelt CVTs. Т. 730. — Düsseldorf : VDI Verlag, 2010. — (Fortschritt-Berichte VDI : Reihe 12, Verkehrstechnik, Fahrzeugtechnik). — ISBN 978-3-18-373012-4. — <http://mediatum.ub.tum.de/node?id=981870>.
18. *Carbone G., Mangialardi L., Mantriota G.* The Influence of Pulley Deformations on the Shifting Mechanism of Metal Belt CVT // *Journal of Mechanical Design*. — 2005. — Т. 127, № 1. — С. 103—113.
19. *Bradley T. H.* Simulation of Continuously Variable Transmission Chain Drives with Involute Inter-element Contact Surfaces : дис. ... канд. / Bradley T. H. — Sacramento (California) : University of California, 2003. — 154 с.
20. *Каменсков В. Ю.* Совершенствование эксплуатационных свойств автомобильного фрикционного вариатора с металлической цепью : дис. ... канд. / Каменсков Вадим Юрьевич. — Москва : Моск. гос. техн. ун-т им. Н.Э. Баумана, 2009. — 136 с.
21. *Shabrov N., Ispolov Yu., Orlov S.* Simulations of continuously variable transmission dynamics // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*

- / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2014. — Т. 94, № 11. — С. 917—922.
22. *Orlov S., Shabrov N.* Vertex shader for visualizing a deformable strip // Scientific Visualization. — 2016. — Т. 8, вып. 2. — С. 1—14.
23. *Orlov S., Melnikova N.* Compound Object Model for Scalable System Development in C++ // Procedia Computer Science. — 2015. — Т. 66. — С. 651—660.
24. *Елисеев В. В., Орлов С. Г.* Асимптотическое расщепление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со структурой // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63, вып. 1. — С. 93—101.
25. Generation of isosurface on a large mesh / А. Akayev [и др.] // Proceedings of the International Conference on Automation, Control, and Information Technology. — 2010. — С. 236—240.
26. Virtual prototyping modeling in the cave 3D environment / N. Shabrov [и др.] // Proceedings of 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014. — 2014.
27. CAVE 3D: Software Extensions for Scientific Visualization of Large-scale Models / N. Melnikova [и др.] // Procedia Computer Science. — 2015. — Т. 66. — С. 679—688.
28. High-performance simulations of continuously variable transmission dynamics / S. Orlov [и др.] // CEUR Workshop Proceedings. — 2015. — Т. 1482. — С. 41—48.
29. *Orlov S., Shabrov N.* Numequares — online simulation tool for education and academic research // Proceedings of 27th European Modeling and Simulation Symposium. — 2015. — С. 258—265.

30. Application of Numerical time Integration Schemes to Continuously Variable Transmission Dynamics Analysis / S. Orlov [и др.] // *Procedia Computer Science*. — 2016. — Т. 101. — С. 53—57.
31. *Orlov S., Kuzin A., Shabrov N.* Two approaches to speeding up dynamics simulation for a low dimension mechanical system // *Communications in Computer and Information Science*. — 2017. — Т. 793. — С. 95—107.
32. *Orlov S.* C++ playground for numerical integration method developers // *Communications in Computer and Information Science*. — 2017. — Т. 793. — С. 418—429.
33. *Орлов С. Г.* Малоразмерные динамические модели бесступенчатой трансмиссии // *Доклады академии наук*. — 2018. — Т. 479, вып. 4. — С. 368—372.
34. Исследование и комплексный анализ динамики автомобиля / Ю. М. Ветюков [и др.] // *Материалы IX Всероссийской конференции по проблемам науки и высшей школы*. — Санкт-Петербург, 2005.
35. Проблемы реализации приложений на вычислительных кластерах / Н. Н. Шабров [и др.] // *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2007)»*. — Челябинск, 2007.
36. *Мельникова Н. Б., Орлов С. Г., Шабров Н. Н.* Разработка и развитие альтернативного программного обеспечения // *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2008)»*. — Санкт-Петербург, 2008. — С. 172—177.
37. *Orlov S., Ispolov Yu.* Contact interactions in the problem of tooth chain transmission dynamics // *Proceedings of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Saint Petersburg, Russia, 2008*. — 2008.

38. *Шабров Н. Н., Орлов С. Г., Мельникова Н. Б.* Моделирование и параллельные вычисления в системе виртуальной реальности CAVE // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2009)». — Нижний Новгород, 2009. — С. 784—786.
39. Параллельные алгоритмы построения изоповерхностей на больших сетках / В. А. Киев [и др.] // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ 2010)». — Уфа, 2010. — С. 220—226.
40. *Orlov S., Shabrov N.* NumEquaRes — Web Application for Numerical Analysis of Equations // SOFTENG, International Conference on Advances and Trends in Software Engineering. — ThinkMind, 2015. — С. 41—47.
41. *Orlov S.* Application of numerical integration methods to continuously variable transmission dynamics models // SHS Web of Conf. — 2018. — Т. 44. — С. 00065. — DOI: 10.1051/shsconf/20184400065.
42. *Мельникова Н. Б., Орлов С. Г., Шабров Н. Н.* Проект новой масштабируемой системы численного моделирования в задачах механики. Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах // Материалы шестого Международного научно-практического семинара. Т. 2. — Санкт-Петербург, 2006. — С. 43—50.
43. *Шабров Н. Н., Орлов С. Г., Куриков Н. Н.* Развитие средств виртуальной реальности и технологий повышения эффективности программных кодов на новых вычислительных архитектурах // Научный сервис в сети Интернет: масштабируемость, параллельность, эффективность: Труды Всероссийской суперкомпьютерной конференции. — Новороссийск, 2009.
44. *Ispolov Yu., Orlov S.* Modeling contact interactions in CVT // 3rd International Conference on vibro-impact systems and systems with non-smooth interactions. — Leinsweiler, Germany, 2013.

45. *Shabrov N., Ispolov Yu., Orlov S.* Simulations of dynamics of CVT // 3rd International Conference on vibro-impact systems and systems with non-smooth interactions. — Leinsweiler, Germany, 2013.
46. *Елисеев В. В., Орлов С. Г.* О критических скоростях массивных упругих роторов // Теория механизмов и машин. — 2005. — Т. 3, вып. 5. — С. 40—43.
47. *Орлов С. Г., Кондрамашин Д. А.* Построение плоских и пространственных кривых с помощью интерполяционных натуральных параметрических кубических В-сплайнов и их использование для формирования каркасных моделей переменного поперечного сечения // Компьютерная графика и геометрическое моделирование в САПР: Сб. науч. тр. — 1997. — Вып. 11. — С. 131—139.
48. *Orlov S., Shabrov N.* Designing Data Processing Systems with NumEquaRes // International journal on advances in systems and measurements. — 2015. — Т. 8, вып. 3/4. — С. 288—307.
49. *Мамаев В. В., Орлов С. Г., Кузин А. К.* Расчёт абсолютных и относительных тепловых перемещений ротора и статора турбины для различных режимов её работы. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612403 от 06.03.2012.
50. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — 2-е изд. — М.: Наука, 1966.
51. *Мак-Коннел Дж.* Введение в тензорный анализ. — М.: Физматгиз, 1963. — 411 с.
52. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965. — 427 с.
53. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и механике сплошных сред. — М.: Наука, 1971. — 376 с.

54. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
55. *Zhilin P.* A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1996. — Т. 76, № 4. — С. 187—204.
56. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. — Москва : Наука, 1976. — 608 с.
57. *Елисеев В. В., Зиновьева Т. В.* Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 96 с.
58. *Gerbert B. G.* Force and Slip Behavior in V-belt Drives // Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series. — Helsinki, 1972. — № 67.
59. *Gerbert G., Sorge F.* Full Sliding “Adhesive-Like” Contact of V-Belts // Journal of Mechanical Design. — Helsinki, 2002. — Т. 124, вып. 4. — С. 706—712.
60. CVT dynamics: Theory and experiments / G. Carbone [и др.] // Mechanism and Machine Theory. — 2007. — Т. 42, № 4. — С. 409—428.
61. *Sattler H.* Efficiency of Metal Chain and V-Belt CVT // Proc. CVT'99 Congress. — The Netherlands, 1999. — С. 99—104.
62. Analysis of Slip in a Continuously Variable Transmission / B. Bonsen [и др.] // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Dynamic Systems and Control, Volumes 1 and 2. — Washington, DC, USA, 2003. — С. 995—1000.
63. An Enhanced CMM Model for the Accurate Prediction of Steady-State Performance of CVT Chain Drives / G. Carbone [и др.] // Journal of Mechanical Design. — 2010. — Т. 132, № 2.

64. Dynamic Simulation of a Metal Belt CVT Under Transient Conditions / E. Pennestri [и др.] // 27th Biennial Mechanisms and Robotics Conference. Т. 5. — Montreal, Quebec, Canada, 2002. — С. 261—268.
65. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. — Москва : Высшая школа, 1980. — 408 с.
66. *Жилин П. А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. — М.: Нестор, 2001.
67. *Ле Суан Ань.* Парадоксы Пенлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // Прикладная математика и механика. — 1990. — Т. 54, № 4. — С. 520—524.
68. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989.
69. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т. 2 / под ред. И. А. Биргер, А. Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968.
70. *Pfiffner R., Guzzella L.* Optimal operation of CVT-based powertrains // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2001. — Т. 11, № 11. — С. 1003—1021.
71. Fuel Consumption Potential of the Pushbelt CVT / F. Van der Sluis [и др.] // FISIT A 2006 World Automotive Congr. — Yokohama, Japan, 2006.
72. Improving pushbelt continuously variable transmission efficiency via extremum seeking control / S. Van der Meulen [и др.] // Proceedings of the 3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control. — Saint Petersburg, Russia : IEEE, 2009. — С. 357—362.
73. *Первозванский А. А.* Курс теории автоматического управления. — Москва : Наука, 1986. — 616 с.
74. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов. — СПб : Питер, 2003. — 604 с.

75. *Campbell W.* Protection of Steam Turbine Disk Wheels from Axial Vibration. — London : General electric Co., 1924. — 67 с.
76. *Doppler C.* Abhandlungen. — Leipzig, 1907. — 194 с.
77. *Иродов И. Е.* Волновые процессы. Основные законы. — М.: Бином, 2015. — 264 с.
78. The Functional Mockup Interface for Tool independent Exchange of Simulation Models / Т. Blochwitz [и др.] // In Proceedings of the 8th International Modelica Conference. — 2011.
79. SUNDIALS: Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers / A. C. Hindmarsh [и др.] // ACM Trans. Math. Softw. — New York, NY, USA, 2005. — Сент. — Т. 31, № 3. — С. 363—396.
80. *Хайпер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
81. *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
82. *Rosenbrock H. H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // The Computer Journal. — 1963. — Т. 5, № 4. — С. 329—330.
83. *Steihaug T., Wolfbrandt A.* An Attempt to Avoid Exact Jacobian and Nonlinear Equations in the Numerical Solution of Stiff Differential Equations // Mathematics of Computation. — 1979. — Т. 33, № 146. — С. 521—534.
84. *Deuffhard P., Bornemann F.* Scientific Computing with Ordinary Differential Equations. — Secaucus, NJ, USA : Springer-Verlag New York, Inc., 2002. — ISBN 0387954627.

85. *Knoll D., Keyes D.* Jacobian-free Newton – Krylov methods: a survey of approaches and applications // Journal of Computational Physics. — 2004. — T. 193, № 2. — C. 357–397.
86. *Brown J., Brune P.* Low-rank quasi-Newton updates for robust Jacobian lagging in Newton methods // International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering. — 05.2013. — C. 2554–2565.
87. *Broyden C. G.* A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations // Mathematics of Computation. — 1965. — T. 19. — C. 577–593.
88. *Hart W. E., Soesianto F.* On the solution of highly structured nonlinear equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1992. — T. 40, № 3. — C. 285–296.
89. *Cuthill E., McKee J.* Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices // Proceedings of the 1969 24th National Conference. — New York, NY, USA : ACM, 1969. — C. 157–172. — (ACM '69).
90. *Ypma T.* Efficient estimation of sparse Jacobian matrices by differences // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 1987. — T. 18, № 1. — C. 17–28.
91. *Medovikov A. A.* High order explicit methods for parabolic equations // BIT Numerical Mathematics. — 1998. — T. 38, № 2. — C. 372–390.
92. *Martín-Vaquero J., Janssen B.* Second-order stabilized explicit Runge – Kutta methods for stiff problems // Computer Physics Communications. — 2009. — T. 180, № 10. — C. 1802–1810.
93. *Torrilhon M., Jeltsch R.* Essentially Optimal Explicit Runge – Kutta Methods with Application to Hyperbolic – Parabolic Equations // Numer. Math. — Secaucus, NJ, USA, 2007. — T. 106, № 2. — C. 303–334.

94. *Богатырев А. Б.* Эффективное решение задачи о наилучшем многочлене устойчивости // Матем. сб. — 2005. — Т. 196, вып. 7. — С. 27—50.
95. *Alexandrescu A.* Modern C++ Design: Generic Programming and Design Patterns Applied. — Addison-Wesley, 2001.
96. Boost: Smart Pointers. — Available at https://www.boost.org/doc/libs/1_67_0/libs/smart_ptr/doc/html/smart_ptr.html, май 2018. [online].
97. *Dimov P.* Intrusive pointer class template. — 2013. — Available at http://www.boost.org/doc/libs/1_58_0/libs/smart_ptr/intrusive_ptr.html, май 2018. [online].
98. *The Qt team.* Qt application framework site. — 2018. — Available at <https://www.qt.io>, май 2018. [online].
99. Component Object Model. — Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Component_Object_Model, last viewed September 2015. [online].
100. Common Object Request Broker Architecture. — Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Common_Object_Request_Broker_Architecture, last viewed September 2015. [online].
101. Microsoft Foundation Class Library. — Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Foundation_Class_Library, last viewed September 2015. [online].
102. *Van Heesch D.* Doxygen documentation generator homepage. — 2015. — Available at <https://www.doxygen.org>, last viewed August 2015. [online].
103. *Ahnert K., Mulansky M.* Odeint — Solving ordinary differential equations in C++ // IP Conf. Proc. — 2011. — Т. 1389. — С. 1586—1589.
104. *Schling B.* The Boost C++ Libraries. — XML Press, 2011.
105. PETSc Web page / S. Balay [и др.]. — 2018. — URL: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.

106. PETSc Users Manual : тех. отч. / S. Balay [и др.] ; Argonne National Laboratory. — 2018. — ANL-95/11 - Revision 3.9. — URL: <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
107. Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries / S. Balay [и др.] // Modern Software Tools in Scientific Computing / под ред. E. Arge, A. M. Bruaset, H. P. Langtangen. — Birkhäuser Press, 1997. — С. 163–202.
108. *Griewank A., Juedes D., Utke J.* Algorithm 755: ADOL-C: A Package for the Automatic Differentiation of Algorithms Written in C/C++ // ACM Trans. Math. Softw. — 1996. — Т. 22, вып. 2. — С. 191–167.
109. Design Patterns: Elements of Reusable Object-oriented Software / E. Gamma [и др.]. — Boston, MA, USA : Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1995.
110. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999. — 548 с.