

**На правах рукописи**

Плёткин Андрей Валерьевич

**Разрывы газодинамических функций в методах  
сквозного счета, их алгоритмическая  
локализация и классификация**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва - 2013

*Работа выполнена на кафедре вычислительной механики механико-математического факультета Федерального государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова”.*

Научный руководитель:

*доктор физико-математических наук,  
Афендииков Андрей Леонидович*

Официальные оппоненты:

*Меньшов Игорь Станиславович, доктор физико-математических наук,  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук,  
ведущий научный сотрудник*

*Георгиевский Павел Юрьевич, кандидат физико-математических наук,  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования “Московский государственный  
университет имени М.В. Ломоносова”, Научно-исследовательский  
институт механики МГУ, ведущий научный сотрудник*

Ведущая организация:

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
вычислительной математики Российской академии наук (ИВМ РАН).*

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2014 г. в \_\_\_\_\_ час. на заседании Диссертационного совета Д 002.024.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (ИПМ РАН) по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 002.024.03,  
*доктор физико-математических наук Змитренко Н.В.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** При математическом моделировании течений газа, содержащих ударные волны, контактные разрывы и др., актуальна задача построения прецессионных алгоритмов, в которых указанные объекты выделяются с высокой точностью. Можно условно выделить два больших класса методов расчета. В первом разрывы выделяются, а сетка привязывается к расположению разрывов. Очевидно, что в этом случае логическая сложность алгоритмов и требования к производительности ЭВМ быстро растут при усложнении картины расположения разрывов. Альтернативой является применение методов сквозного счета, в которых разрывы размазываются и не выделяются. Универсальность этих методов привела к их широкому распространению.

Использование численных методов для решения задач гидро и газовой динамики, по сути, является моделированием, поскольку для большинства задач нет даже теорем о глобальном по времени существовании и единственности решений начально-краевых задач для соответствующих систем уравнений. Более того реальные ударные волны представляют собой переходные слои конечной толщины. Ширина ударных волн большой интенсивности оказывается порядка нескольких длин свободного пробега молекул газа. В свою очередь при использовании методов сквозного счета разрывы в течениях, которым в идеальной модели соответствуют разрывы полей или их производных, размазываются и формируются переходные зоны ненулевой толщины. В итоге, основным способом оценки качества полученного расчета является сравнение с экспериментом и эталонными расчетами, а также проверка сходимости решения при стремлении шага сетки к нулю.

Можно выделить две существенные особенности методов сквозного счета, во-первых, размазываются разрывы газодинамических функций, а во-вторых, в случае использования аппроксимаций высокого порядка, предназначенных для эффективного приближения гладких решений, в окрестности разрыва могут возникать эффекты типа явления Гиббса, развитие которых может со временем привести к авосту.

Первая из указанных выше проблем может быть решена за счет измельчения расчетной сетки. Однако увеличение точности расчета только за счет равномерного

измельчения сетки не оптимально и не всегда возможно даже на современных супер ЭВМ. В такой ситуации оказалось эффективным использование адаптивных сеток сгущающихся в окрестности разрывов. Вторая проблема не может быть решена только за счет измельчения сетки. В окрестности разрывов требуется модификация самого разностного метода, что привело, например, к созданию TVD схем.

Также следует отметить, что при численном моделировании газодинамических течений используются различные вспомогательные модели, в частности, позволяющие переносить реальные граничные условия на границу расчетной сетки. Использование этих моделей может по-разному влиять на качество расчета. Поэтому возникает задача алгоритмического анализа расчета, в частности расположения разрывов.

Таким образом, задача алгоритмического выделения разрывов в расчете, полученном методом сквозного счета, является актуальной.

Исследования, вошедшие в диссертацию, были частично поддержаны грантами РФФИ 08-01-00454-а, 11-01-00390-а и программой 3 ОМН РАН.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Основной задачей является моделирование газодинамических течений, содержащих большое количество разрывов методами сквозного счета с алгоритмической локализацией и классификацией разрывов в процессе расчета, а также адаптацией расчетной сетки или модификацией разностных алгоритмов в окрестности локализованных разрывов.

На входе алгоритма выделения особенностей должны задаваться поля плотности и давления, заданные в узлах (или центрах ячеек расчетной сетки). На выходе каждому узлу сетки будет сопоставлено число, характеризующее течение в окрестности этого узла. Поскольку алгоритм должен быть вспомогательным модулем и применяться непосредственно в ходе расчета, он должен быть быстрым и обеспечивать качественную локализацию разрывов без априорного задания порогов чувствительности. Алгоритм должен быть применим для анализа двумерных и трехмерных расчетов, выполненных в областях со сложной геометрией на неструктурированных расчетных сетках. Алгоритм также должен допускать гибкую настройку, включающую и задание порогов чувствительности, позволяющих исключить из рассмотрения скачки малой амплитуды, что позволит использовать его в постобработке для оценки качества расчетов.

**Научная новизна.** Алгоритмизации задачи о локализации особенностей полей газодинамических величин до сих пор уделялось сравнительно мало внимания.

В первую очередь следует упомянуть монографию Н.Н. Яненко и Е.В. Ворожцова, а также развивающие эти работы исследования С.Б. Базарова. Кроме того имеется значительное количество работ, посвященных решению задачи выделения краев, возникающей при обработке изображений. Показательным является то, что в основе большинства этих методов лежит использование вейвлет - анализа, который в задачах обработки изображений доказал свою эффективность. Использование вейвлет - разложения также оказалось эффективным средством для расчетов использующих методы типа Галеркина. Отметим, что общие методы выделения краев не достаточно эффективны при анализе газодинамических полей. Они нуждаются в модификации, поскольку не учитывают специфику расположения структуры разрывов в газодинамических течениях и их физической природы.

В настоящей работе предполагается, что заданная сеточная вектор функция газодинамических величин является малым возмущением проекции значений (обобщенного) решения уравнений Эйлера на множество узлов некоторой сетки. При этом предполагается, что решения являются гладкими вне множеств разрывов самих функций и их производных, являющихся регулярными множествами, состоящими из кусочно-гладких поверхностей (кривых). Сам анализ базируется на усовершенствованных методах, характерных, для общей теории анализа изображений в сочетании с физическими условиями на поверхностях разрывов.

**Практическая значимость.** Разработанная модель и алгоритмы выделения и классификации особенностей, позволяют усовершенствовать моделирование газодинамических течений, основанных на методах сквозного счета, за счет учета информации о положении разрывов. В постобработке эти методы позволяют выявить дефекты алгоритмов и оценить качество моделирования.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1) На основе методов вейвлет-анализа разработана математическая модель выделения особенностей в полях газодинамических функций. Модель основана на использовании симметричных комплексных вейвлетов Добеши и классических вещественных вейвлетов Добеши, а также соотношений Гюгонио на разрывах.

2) Разработаны численные алгоритмы, включая многомасштабный, позволяющие на основании численных данных, полученных методом сквозного счета, восстановить содержащуюся в них информацию о положении и типах разрывов. В основе алгоритмов лежат методы вейвлет – анализа. Алгоритмы позволяют проводить локализацию разрывов в расчетах двумерных и трехмерных течений. Высокая точность локализации разрывов подтверждена решением ряда тестовых задач.

3) Разработанные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ для локализации разрывов двумерных и трехмерных течений на прямоугольных, а также и на неструктурированных сетках. Программно реализован алгоритм на основе метода Годунова для моделирования одномерных течений с адаптацией сетки на основе разработанного вейвлет-анализа особенностей решения.

4) Проведено численное моделирование и выделение разрывов в ряде прикладных задач газовой динамики. Рассмотрены сверхзвуковое обтекание тел под углом атаки и распространение ударных волн в каналах при наличии импульсного энерговыделения. Расчеты проводились для идеальных и вязких течений при больших числах Рейнольдса. Показано, что «разрывы» выделяемые в найденных численно решениях уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса вдали от тела близки к разрывам в решениях уравнений Эйлера. В решениях уравнений Навье-Стокса алгоритмически выделяются пограничной и вихревые структуры свойственные только вязким течениям.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях: научно-исследовательские семинары кафедры вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (МГУ им. М.В.Ломоносова 2009-2011 гг.); научно-исследовательские семинары Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИВМ РАН, 2011 г.); научно-исследовательский семинар Института вычислительной математики РАН (ИВМ РАН, 2013 г.); XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (г. Москва 2009 г.); научная конференция «Ломоносовские чтения» (г. Москва 2009 г.); XVIII (2010 г.), XIX (2012 г.) всероссийские конференции «Теоретические основы и

конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко (Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия); XIV (2011 г.), XV (2013 г.) всероссийские молодежные конференции-школы с международным участием «Современные проблемы математического моделирования» (Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия); международная молодёжная конференция-школа «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (г. Дубна, 2012 г.); XIII всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск 2012 г.); XVII молодежная научная конференция Объединения молодых ученых и специалистов (ОМУС-2013) (г. Дубна 2013 г.); международная конференция по математической теории управления и механике (г. Суздаль, Россия, 5-9 июля 2013 г.); The International Conference MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTATIONAL PHYSICS (MMCP 2013) (г. Дубна 2013 г.).

Доклад на XVI международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (г. Москва 2009 г.) отмечен грамотой за лучший доклад. Доклад на XVII молодежной научной конференции Объединения молодых ученых и специалистов (ОМУС-2013) (г. Дубна 2013 г.) отмечен почетным дипломом за лучший доклад секции «Математическое моделирование и вычислительная физика».

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 19 печатных работах, из них 4 статьи в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК, [1–4], 4 публикации в других научных изданиях [5–8] и 11 тезисов докладов.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами в работах [1, 2, 4–10]. Автору принадлежит основной вклад в разработку математической модели и алгоритмов выделения особенностей в полях газодинамических функций. Комплекс программ для выделения разрывов в различных газодинамических течениях был полностью реализован лично автором. Часть расчетов газодинамических течений, использованных в работе, также выполнена автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии и приложений. Общий объем диссертации 125 страницы, включая 66 рисунков и 1 таблицу. Библиография включает 48 наименований на 4 страницах.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы исследований, сформулированы основные цели работы, показана ее научная новизна и практическая значимость. Также кратко описана структура и содержание работы. Сформулированы основные результаты, полученные в работе.

**В первой главе** приведен обзор известных методов применения вейвлет - анализа для выделения особенностей. Некоторые из этих методов (параграфы 1.3, 1.4) имеют достаточное теоретическое обоснование, но не могут быть использованы на практике, так как либо требуют трудоемких расчетов (вычисление непрерывного вейвлет - преобразования), либо не приспособлены для анализа дискретных численных полей, с которым приходится иметь дело в большинстве прикладных задач. На практике могут быть использованы только некоторые дискретные модификации этих алгоритмов. Также приведено описание и сравнение некоторых прикладных алгоритмов (параграфы 1.5, 1.6), включая многомасштабную версию известного детектора Кэнни. В параграфе 1.7 описана модификация базиса вейвлетов, которая лучше адаптирована для представления двумерного сигнала и может быть использована для построения более эффективных, но и более ресурсоемких, алгоритмов выделения и анализа особенностей. В параграфе 1.8 приведен метод, предложенный С.Б. Базаровым, который не использует вейвлеты, этот метод был реализован в ходе исследований и апробирован в главе 2 (пункт 2.3.7). В параграфе 1.9 представлены методы локализации особенностей газодинамических полей, разработанные на первом этапе исследования данной задачи.

В тексте главы содержатся исчерпывающие ссылки на использованные в обзоре источники. Однако, поскольку вейвлет – анализ еще достаточно молод, в научной литературе встречаются различные определения и обозначения, поэтому материалы,



взятые из различных источников, в данном обзоре были переработаны и представлены в единообразном виде.

**Во второй главе** предлагается модель для выделения и классификации особенностей в одномерных течениях газа.

Если рассмотреть простейшие примеры разрывов (рисунок 1), сглаженных за счет свертки с гауссианом, а также три производных от сглаженных функций, видно, что сильному разрыву соответствуют нуль второй производной и локальный максимум модуля третьей производной. Слабому разрыву наоборот соответствуют нуль третьей производной и локальный максимум модуля второй производной. Для вычисления сглаженных второй и третьей производных от исходного поля могут быть использованы следующие выражения:

$$m_n = \alpha r_n = \sum_k \eta_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} f_m,$$

$$c_n = \sum_k \varsigma_{k-2n} \sum_m \xi_{k-2m} f_m,$$

где  $\{f_k\}$  – исходное поле,  $\alpha$  - постоянный коэффициент,  $\{\xi_k\}$

и  $\{\eta_k\}$  – вещественная и мнимая части низкочастотного фильтра комплексного вейвлета Добешиб (цифра 6 обозначает, что фильтры вейвлета имеют 6 ненулевых элементов),  $\{r_k\}$  и  $\{s_k\}$  – сглаженные вторая и третья производные.  $\{\varsigma_k\}$  – высокочастотный фильтр классического вещественного вейвлета Добешиб.

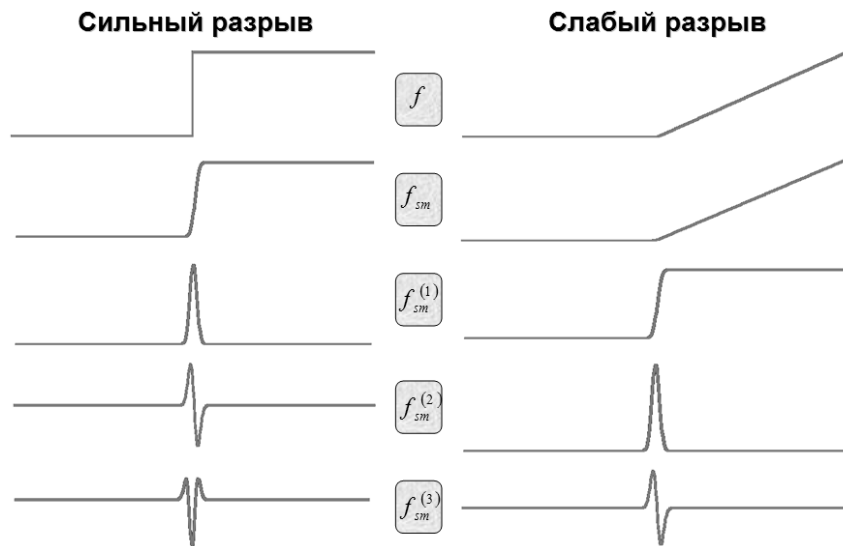


Рисунок 1 – Шаблоны разрывов

В соответствии с этим на рисунке 2 представлена схема классификации узлов расчетной сетки. Фактически вводятся два детектора, основанных на анализе второй (основной) и третьей (корректор) производных, которые могут быть использованы независимо, но оптимальный результат достигается при совместном использовании. Для сглаженных второй и третьей производных полей плотности и давления выделяются переходы через ноль и локальные максимумы модуля, которые больше заданного порога. В результате каждый узел сетки может получить некий поднабор из восьми возможных меток.

Из соотношений Гюгонио на разрыве следует, что на контактных разрывах существует только разрыв плотности, но нет разрыва давления. Но поскольку существует некоторая погрешность при локализации разрывов, удобно определить новые операции над множествами точек, являющимися подмножествами узлов расчетной сетки. Введем натуральный параметр  $R$ , характеризующий допустимую погрешность локализации. Расстоянием между узлами сетки  $x_{i_1, \dots, i_n}$  и  $x_{j_1, \dots, j_n}$  будем называть  $\rho(x_{i_1, \dots, i_n}, x_{j_1, \dots, j_n}) = \max(|i_1 - j_1|, \dots, |i_n - j_n|)$ .

Для операции пересечения ( $C = A \tilde{\cap} B$ ): точка  $a \in C$ , если  $a \in A$  и  $\exists b \in B$ , такое что расстояние между  $a$  и  $b$  меньше  $R$ . Для операции разности ( $C = A \tilde{\setminus} B$ ): точка  $a \in C$ , если  $a \in A$  и  $\bar{\exists} b \in B$ , такого что расстояние между  $a$  и  $b$  меньше  $R$ .

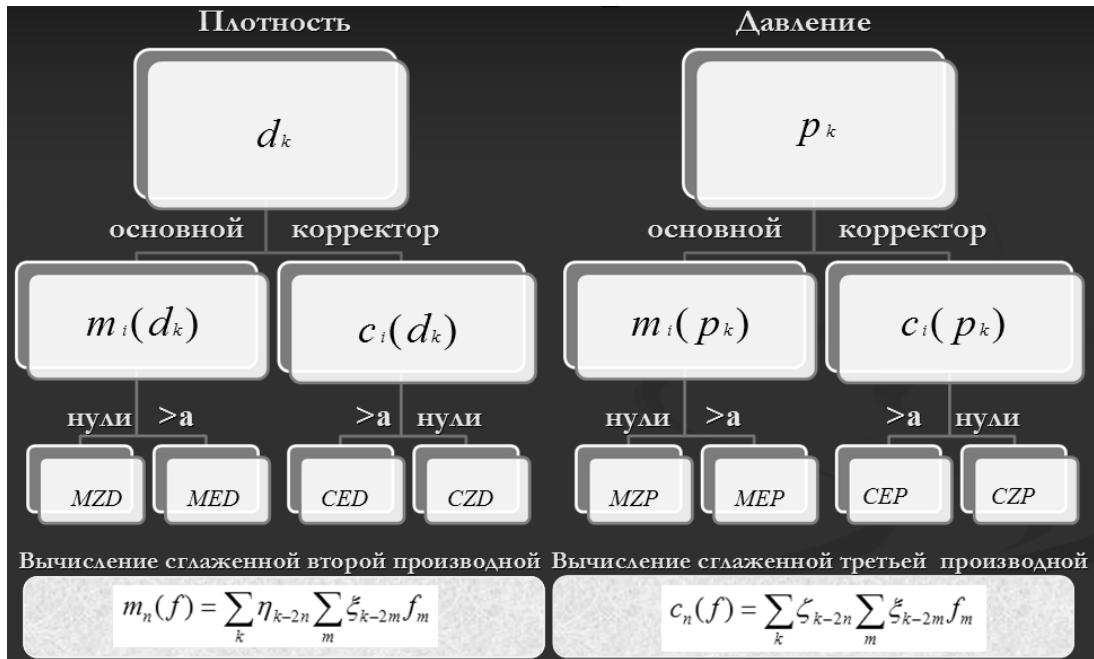


Рисунок 2 – Схема классификации узлов сетки

Ударным волнам соответствует множество точек:  $(MZD \tilde{\cap} CED) \tilde{\cap} (MZP \tilde{\cap} CEP)$ . Так как на контактных разрывах рвется плотность, но не рвется давление, им соответствует множество точек:  $(MZD \tilde{\cap} CED) \tilde{\cap} (MZP \tilde{\cap} CEP)$ . Волнам разрежения соответствует множество точек:  $(MED \tilde{\cap} CZD) \tilde{\cap} (MEP \tilde{\cap} CZP)$ .

На основе модели разработаны алгоритмы для выделения особенностей в двумерных и трехмерных расчетах, выполненных на прямоугольных сетках. Алгоритмы апробированы на расчете задачи о взаимодействии разрывов в канале под действием импульсного энерговложения.

Результаты второй главы опубликованы в работах [1, 5].

**В третьей главе** на основе результатов предыдущей главы разработан многомасштабный алгоритм выделения особенностей в полях, полученных при расчетах на прямоугольных сетках. Проведен сравнительный анализ сингулярностей и артефактов, проявляющихся на различных уровнях вейвлет разложения исходного поля, выполненного при помощи различных вещественных и комплексных вейвлетов.

Использование многомасштабного анализа позволяет получить дополнительную

информацию о структуре разрывов в течении, а совместный анализ нескольких уровней вейвлет - разложения дал возможность значительно сократить количество артефактов при локализации разрывов в расчете без дополнительного введения порога чувствительности. Однако это возможно только в том случае, если расчет выполнен на достаточно мелкой сетке. Установлено, что для многомасштабного разложения целесообразно использовать симметричные и достаточно гладкие вейвлеты. Использование же несимметричных вейвлетов приводит к смещению разрывов на различных уровнях разложения.

Переход от анализа исходного поля к анализу его вейвлет разложения позволяет исключить часть эффектов, соответствующих вычислительным шумам, но приводит к проявлению слабых структур соответствующих перегибам. Эти структуры могут быть удалены совместным анализом исходного поля и вейвлет разложения, либо использованием корректора.

Исследован вопрос о том, особенности какого типа и интенсивности выделяются наиболее надежно. Для определения интенсивности особенностей при локализации разрывов вводились различные пороги чувствительности.

Установлено, что детектор чувствителен к дефектам алгоритмов расчета, благодаря чему может использоваться для оценки его корректности и качества.

Проведен сравнительный анализ разрывов локализованных в расчетах одной и той же задачи, произведенных на различных сетках, таких, что при разложении расчета проведенного на более мелкой сетке переходим на сетку соответствующую расчету, проведенному на грубой сетке. Это позволило определить точность локализации разрывов в расчете на грубой сетке. Структура разрывов выделенных в вейвлет - разложении расчета, выполненного на мелкой сетке, в целом соответствует структуре разрывов локализованных в расчете, выполненном на грубой сетке. Однако, при обработке расчета, выполненного на грубой сетке, выделяется больше артефактов.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [3, 6].

**В четвертой главе** на основе модели выделения и классификации разрывов, предложенной во второй главе, строится алгоритм для выделения и классификации разрывов в расчетах, проведенных на неструктурированных расчетных сетках.

Процедуру выделения и классификации разрывов в расчете можно разбить на

четыре этапа:

- 5) разделение расчетной сетки на ломаные,
- 6) обработка ломаных с помощью вейвлетов и выделение особенностей,
- 7) объединение результатов обработки ломаных,
- 8) фильтрация артефактов и классификация особенностей.

Первый этап заключается в том, чтобы свести многомерную задачу к набору одномерных задач. Из сетки выбирается произвольное ребро. Затем из его соседей выбираются те ребра, которые образуют минимальный угол с этим ребром, причем угол должен быть меньше заданной величины, которая определяет гладкость строящейся ломаной. Если подходящего ребра нет, ломаная на этом конце обрывается, иначе это ребро добавляется в ломаную и на его свободном конце повторяется аналогичная процедура. Чтобы избежать заикливания, каждое ребро может быть добавлено в ломаную только один раз. После того как на обоих концах ломаной не удалось подобрать подходящих ребер, начинается построение следующей ломаной. Ее построение начинается с ребра, не входящего ни в одну ломаную, но ребра других ломаных могут быть в нее добавлены. Это делается для того, чтобы ломаные, по возможности, не обрывались внутри области, поскольку обработка границ ломаных может приводить к появлению артефактов или пропуску разрывов. Первый этап завершается, если каждое ребро включено в некоторую ломаную.

На втором этапе в соответствии с моделью выделения разрывов, предложенной во второй главе, производится независимая обработка ломаных. Обрабатываются только ломаные, у которых число узлов  $N$  больше 6, это число определяется количеством ненулевых элементов в фильтрах вейвлетов, используемых при обработке. Массивы плотности  $d_k$  и давления  $p_k$ , где  $0 \leq k < N$ , заданные в узлах ломаной, также обрабатываются независимо. Для каждого из массивов вычисляется два преобразования  $m(x)$  и  $c(x)$ :

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \varsigma_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N.$$

При этом  $x_i$  - элементы массивов плотности или давления, продолженных на

границах ломаных из соображений симметрии,  $\xi_i$  и  $\eta_i$  - вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добешиб,  $\zeta_i$  - вещественный фильтр классического вейвлета Добешиб. Цифра 6 обозначает, что фильтры имеют 6 ненулевых элементов. В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа узлов:

9) ‘нули’ – если значения массива в двух соседних узлах имеют разный знак или только одно из значений нулевое, то выделяется узел с минимальным по модулю значением. Два первых и два последних узла не выделяются;

10) ‘локальные экстремумы модуля’ – узел выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности  $\alpha$ , он не меньше модулей значений четырех его левых и правых соседей и строго больше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Из множества *нулей* исключаются точки, соответствующие осцилляциям. Считается, что точка соответствует осцилляциям, если слева и справа от нее в радиусе трех точек есть выделенные *нули*. Таким образом, каждый узел ломаной получает некоторый набор из 8 возможных меток: mzd, ced, mzp, ser, med, czd, ter, czp. Символ ‘m’ означает, что метка относится к основному детектору, ‘с’ – к корректору, ‘d’ означает, что метка характеризует поле плотности, а ‘р’ – давления. Символы ‘z’ и ‘e’ определяют, какие структуры были выделены в детекторе: ‘z’ соответствует *переходам через ноль*, а ‘e’ - *локальным экстремумам модуля*.

В общем случае через узел проходит более одной ломаной, и наборы меток, которые получает узел на втором этапе, при обработке каждой из них могут. На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают узлы сетки. Набор меток, которые получает узел, определяется как объединение всех меток, которые он получил при обработке каждой из содержащих его ломаных.

Процесс удаления артефактов основывается на предположении, что разрывы представляют собой набор кусочно-гладких кривых (поверхностей). Классификация разрывов производится на основании модели введенной во второй главе.

Рассмотрен вариант применения детектора для адаптации расчета к положению

разрывов на примере одномерной задачи о распаде и взаимодействии разрывов в трубе под действием импульсного вложения энергии. В начальный момент времени заданы три области с постоянными значениями газодинамических величин:

- 11) невозмущенный неподвижный газ:  $x > 2$ ,  $\rho_1=1$ ,  $u_1=0$ ,  $p_1=1$ ,
- 12) объемная часть разряда:  $0 < x < 2$ ,  $\rho_2=1$ ,  $u_2=0$ ,  $p_2=12.4625$ ,
- 13) область за фронтом падающей волны:  $x < 0$ ,  $\rho_3=3.7629$ ,  $u_3=2.5194$ ,  $p_3=9.6450$ .

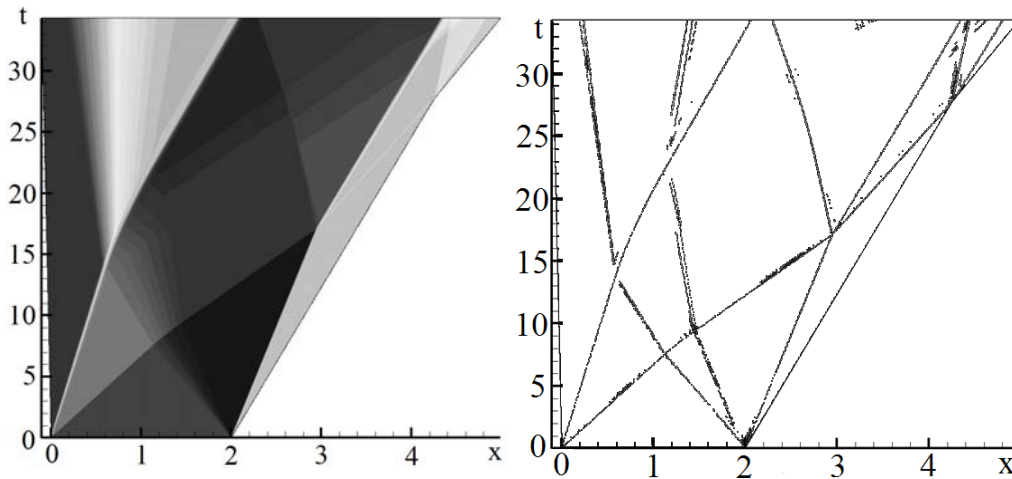


Рисунок 3 – Распределение плотности в расчете на равномерной подвижной сетке, содержащей 2048 ячеек (слева), и разрывы, локализованные в расчете (справа).

В результате распада разрыва в точке  $x = 0$  формируются две ударных волны и контактный разрыв между ними. Распад разрыва в точке  $x = 2$  дает идущую влево волну разрежения, идущую вправо ударную волну и контактный разрыв между ними.

Течение в последующие моменты времени рассчитывалось путем численного интегрирования нестационарных одномерных уравнений Эйлера. В расчет был внедрен алгоритм выделения особенностей течения. Локализация разрывов проводилась на каждом шаге расчета (рисунок 3).

Для проверки качества выделения разрывов, для начального интервала времени

было проведено сравнение результатов локализации с точным решением. Для контактных разрывов и ударной волны получено достаточно точное совпадение, локализованные границы волны разрежения смещены внутрь волны разрежения.

Реализован адаптивный вариант расчета, использующий информацию о положении разрывов, полученную от детектора. На каждом шаге расчета сначала проводилась локализация разрывов в исходных данных (начальных или данных с предыдущего шага). Затем ячейки, в которых были локализованы разрывы, и две соседние с ними ячейки разбивались на восемь равных частей. Таким образом, формировалась неравномерная сетка, на которой выполнялся очередной шаг расчета.

Использование адаптивного подхода позволило существенно повысить качество расчета за счет уменьшения зон размазывания разрывов (особенно контактных рисунок 4).

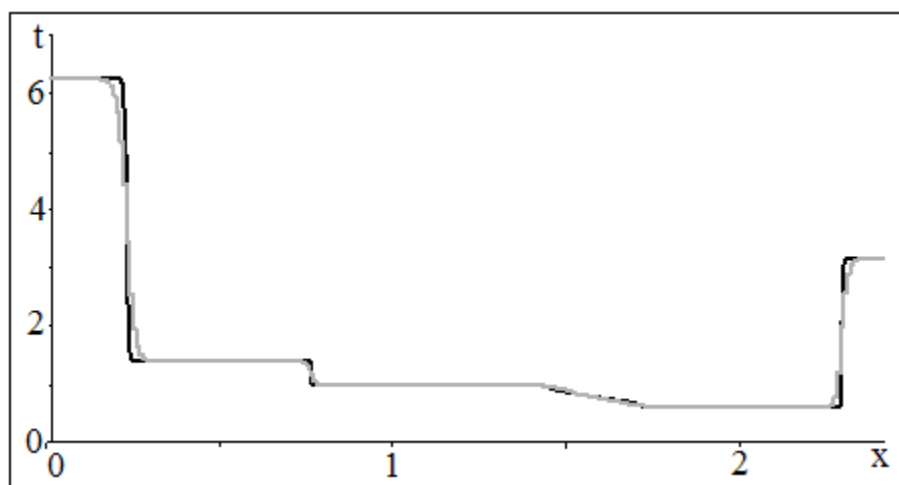


Рисунок 4 – Распределение плотности в момент  $t = 5$  для адаптивного (черный) и неадаптивного (серый) расчетов.

Данный пример демонстрирует точность выделения сингулярностей течения и высокий потенциал использования детектора для адаптации расчета к положению разрывов. На практике, вместо описанного подхода, могут использоваться методы, связанные не только с построением адаптивных сеток, но и с модификацией в

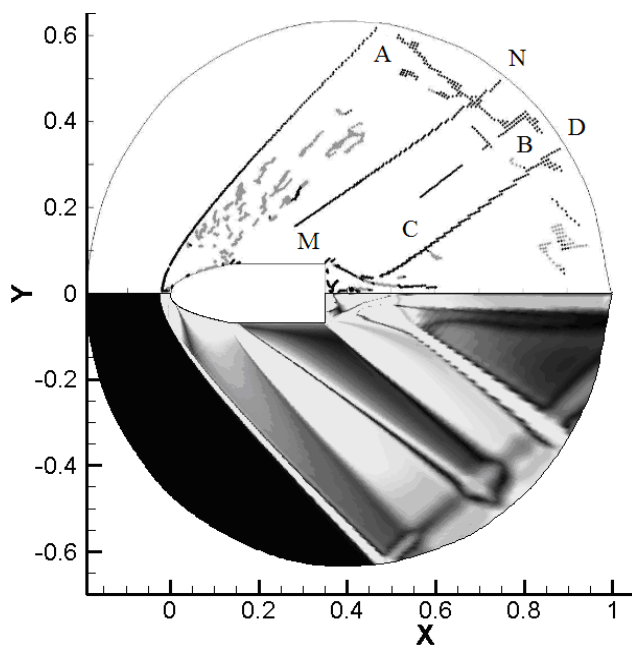


окрестности разрывов самого разностного алгоритма.

Большой интерес представляет локализация структур в вязких течениях. Часть этих структур имеет аналоги в расчетах, выполненных по уравнениям Эйлера (ударные волны), другие имеют исключительно вязкую природу (пограничный слой, вихревые структуры). При этом важно сравнить структуры, которые имеют аналоги в расчетах по обоим моделям.

Выполнено моделирование тесений для задачи о сверхзвуковом обтекании осесимметричных тел. Были проведены расчеты, соответствующие уравнениям Эйлера и Рейнольдса с  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности. Параметры набегающего потока в обоих случаях одинаковы и соответствуют числу Маха 1.5. Число Рейнольдса для вязкой среды приближенно равно 3 000 000. Расчеты выполнялись с помощью пакета NSC2KE на треугольной сетке, в области с криволинейными границами.

В расчете, выполненном по модели Эйлера (рисунок 5 слева), контактные разрывы (серый цвет) присутствуют только в виде артефактов. Четко выделяется головная ударная волна, однако в области волны разрежения остаются артефакты, избавиться от которых можно, подобрав соответствующий порог чувствительности  $\alpha$ . Также выделяется некая структура разрывов за обтекаемым телом.



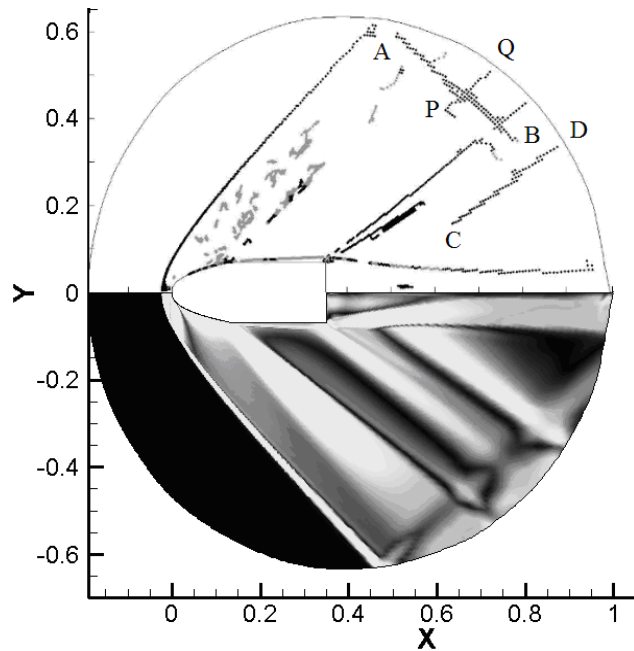


Рисунок 5 – Разрывы (сверху), локализованные в расчетах, выполненных по идеальной (слева) и вязкой (справа) моделям, и распределение градиента плотности (снизу)

В расчете, выполненном с учетом вязкости, четко выделяется линия, соответствующая головной ударной волне в идеальной среде (рисунок 5 справа). Артефактов в зоне волны разрежения в расчете, выполненном по вязкой модели, стало меньше. Четко выделяется пограничный слой и граница следа за моделью, эти линии классифицированы детектором частично как ударные волны, а частично как контактные разрывы.

При наложении результатов локализации структур в двух расчетах видно, что положение головной ударной волны в расчетах в точности совпадает. Также в обоих расчетах присутствует разрыв АВ, порожденный взаимодействием головной ударной волны с границей области и разрыв CD.

Проведено моделирование течения вязкого газа для задачи о сверхзвуковом обтекании тела под углом атаки шесть градусов. Расчет выполнялся методом установления по модели Навье-Стокса. На рисунке 6 представлены результаты локализации ударных волн в трех блоках расчетной сетки для двух моментов времени. Четко локализуются структуры, соответствующие головной ударной волне.

В течении также наблюдается нестационарный процесс. За головной ударной волной был выделен разрыв слабой интенсивности (рисунок 6 слева). Этот скачок постепенно удаляется от тела (рисунок 6 справа) и при дальнейшем установлении течения должен покинуть расчетную область. Указанный факт свидетельствует о том, что течение еще не установилось и требуется продолжение расчета.

В течении также наблюдается нестационарный процесс. За головной ударной волной был выделен разрыв слабой интенсивности (рисунок 6 слева). Этот скачок постепенно удаляется от тела (рисунок 6 справа) и при дальнейшем установлении течения должен покинуть расчетную область. Указанный факт свидетельствует о том, что течение еще не установилось и требуется продолжение расчета. В силу слабой интенсивности обнаружить указанный нестационарный разрыв стандартными средствами может быть достаточно сложно.

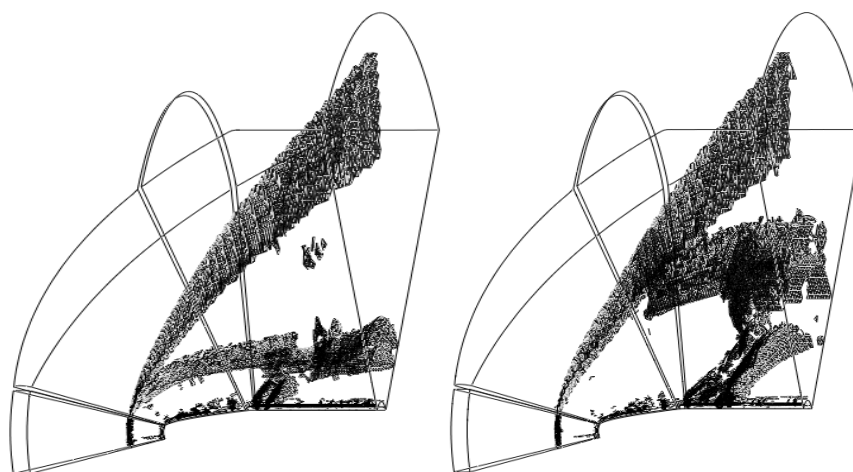


Рисунок 6 – Результаты локализации ударных волн на шаге 176000 и 239200.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [2, 4, 7, 8].

**В заключении** кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

**Приложения** содержат дополнительную информацию об использованных в работе вейвлетах.

Публикации в журналах из перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК

1. **Плёнкин, А. В.** Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа / А. Л. Афендигов, Л. И. Левкович-Маслюк, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин // Математическое Моделирование. – 2008. – № 7. – С. 65–84.

2. **Плёнкин, А. В.** Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин // Математическое Моделирование. – 2011. – № 1. – С. 41–50.

3. **Плёнкин, А. В.** Кратно-масштабный анализ газодинамических полей / А. В. Плёнкин // Вестник Московского университета Серия 1. Математика. Механика. – 2011. – № 2. – С. 56–59.

4. **Плёнкин, А. В.** Локализация особенностей газодинамических полей и адаптация расчетной сетки к положению разрывов / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин // Математическое Моделирование. – 2012. – № 12. – С. 49–54.

Публикации в других научных изданиях

5. **Плёнкин, А. В.** Локализация сингулярностей газодинамических полей при помощи комплексных и вещественных вейвлетов / А. Л. Афендигов, В. В. Горбунова, Л. И. Левкович-Маслюк, А. В. Плёнкин // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2005. – № 98. – 32 с.

6. **Плёнкин, А. В.** Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2008. – № 98. – 17 с.

7. **Плёнкин, А. В.** Локализованные структуры в идеальной и вязкой моделях. Вейвлетный анализ / А. Л. Афендигов, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин // Препринт Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН. – 2009. – № 78. – 10 с.

8. **Плѐнкин, А. В.** Применение вейвлет анализа для выделения структур в расчетах газодинамических течений и для адаптации сеток / А. Л. Афендииков, А. Е. Луцкий, А. В. Плѐнкин // Научная визуализация. – 2012. – № 3. – С. 8–25.