

На правах рукописи

Таюрский Алексей Александрович

**ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПРОЦЕССЫ В  
ДВУХЖИДКОСТНОЙ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ**

Специальность 05.13.18

“Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена в ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Научный руководитель: Гавриков Михаил Борисович  
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: Демидов Александр Сергеевич  
профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Пестрякова Надежда Владимировна  
доктор технических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН Институт системного анализа РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Защита состоится “4” декабря 2014 года в 11 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ИПМ им. М.В. Келдыша РАН: <http://www.keldysh.ru>.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” октября 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук

Н.В. Змитренко

## Общая характеристика работы

**Актуальность проблемы.** Для исследования динамики плазмы широко применяются классические МГД-модели, в которых плазма понимается как сжимаемая среда, проводящая электрический ток и взаимодействующая с электромагнитным полем. При этом структура плазменного вещества не принимается в расчёт. В работе представлено значительно более подробное описание квазинейтральной плазмы по сравнению с одножидкостным гидродинамическим МГД-приближением. Представленная модель в полном объёме учитывает инерцию как ионов, так и электронов, что открывает возможность исследования ряда эффектов, не наблюдаемых в рамках классической МГД.

Уравнения динамики предлагаемой математической модели плазмы, называемые ниже уравнениями электромагнитной гидродинамики (ЭМГД), отличаются от уравнений классической МГД несколькими принципиальными слагаемыми, в особенности, значительно более сложной формой обобщённого закона Ома, согласно которому в случае квазистационарного магнитного поля для нахождения электрического поля  $\mathbf{E}$  в плазме необходимо решить краевую задачу для некоторой вырожденной эллиптической системы уравнений на компоненты поля  $\mathbf{E}$ . Тем самым в ЭМГД кардинально меняется характер зависимости электрического поля  $\mathbf{E}$  от остальных параметров плазмы, что предопределяет возникновение сильной пространственной дисперсии и ряда других важных эффектов.

Уравнения классической МГД являются предельным случаем ЭМГД-уравнений, когда характерное погонное число частиц плазмы неограниченно увеличивается или, иначе, когда  $L \ll c/\omega_p$ , где  $L$  – характерный масштаб длины,  $\omega_p$  – плазменная частота. Формально МГД-уравнения являются нулевым, а уравнения МГД с учётом эффекта Холла – первым по параметру  $c/(\omega_p L) \ll 1$  приближениями ЭМГД-уравнений.

При численном и аналитическом исследовании ЭМГД-уравнений

выявляются новые конечные эффекты, которые не могли быть получены посредством МГД-модели. К ним относятся:

- 1) скинирование плотности тока и других параметров плазмы вблизи границы плазменного шнура в задаче о возбуждении плазмы шнура гармонически меняющимся полным током
- 2) конечное отклонение потока плазмы от направления силы, вызывающей течение (“гидродинамический эффект Холла”), в задаче об установившемся течении несжимаемой замагниченной плазмы в плоском канале
- 3) значительное увеличение по сравнению с МГД-теорией толщины погранслоя в задаче об обтекании несжимаемой плазмой замагниченной поверхности
- 4) возникновение в сжимаемой плазме уединённых волн как точных решений фундаментальных уравнений и реализация дуализма волна-частица при их взаимодействии
- 5) сложная картина временного и пространственного затухания альфвеновских волн в диссипативной плазме, обусловленная пространственной анизотропией распространения и дисперсией альфвеновских волн в двухжидкостной плазме.

Проведённые в диссертации математическое моделирование и вычислительный эксперимент актуальны для: а) определения границ применимости различных гидродинамических моделей плазмы, б) получения подробной информации о процессах в плазме, недоступной другими теоретическими и экспериментальными методами, в) проверки гипотез о природе конкретных механизмов различных плазменных процессов, анализа имеющихся экспериментальных данных.

Проведённое в диссертации исследование затухания альфвеновских волн в

диссипативной плазме подтверждает выдвинутую в 2011г.<sup>1</sup> гипотезу о разогреве солнечной короны в результате затухания в плазме короны альфвеновских волн, генерируемых в нижних значительно более холодных солнечных слоях.

**Цели исследования.** Выяснение границ применимости классической МГД на примере решения конкретных задач в рамках ЭМГД-модели и исследование новых двухжидкостных ЭМГД-эффектов, возникновение и описание которых не возможно в рамках классической МГД.

Для достижения поставленной цели в рамках ЭМГД-модели потребовалось

1. Решить следующие задачи: а) о возбуждении несжимаемой плазмы под действием периодического тока, б) о стационарном течении несжимаемой плазмы в плоском канале, в) о взаимодействии уединённых волн в сжимаемой плазме, г) о затухании альфвеновских волн (временном и пространственном) в диссипативной плазме.
2. Построить и реализовать численные и аналитические методы исследования поставленных задач.
3. Сравнить результаты, полученные в рамках ЭМГД-модели, с результатами МГД-теории.
4. Провести анализ эффектов, выявленных при помощи ЭМГД.

**Методы исследования.** В работе использованы методы математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Достоверность и обоснованность.** Достоверность и обоснованность полученных результатов гарантируются строгостью используемого математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с известными данными.

**Научная новизна и практическая значимость.** Все выносимые на

---

<sup>1</sup> Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // Nature 475, 478-480 (28 July 2011)

защиту результаты являются новыми. Полученные результаты исследований имеют значение для анализа и интерпретации экспериментальных данных.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. Обнаружен скин-эффект в ЭМГД-модели возбуждения несжимаемой плазмы под действием периодического тока.
2. Найдены определяющие параметры течения, гидродинамический эффект Холла, конечное увеличение толщины погранслоя в ЭМГД-модели стационарного течения несжимаемой плазмы в плоском канале.
3. Численная модель взаимодействия уединённых волн в двухжидкостной плазме.
4. Численная модель затухания альфвеновской волны в диссипативной плазме, включающая в себя:
  - а) модель временного затухания альфвеновской волны с представленными численными и аналитическими результатами.
  - б) модель пространственного поглощения диссипативной плазмой альфвеновской волны, набегающей на её границу.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. XXXVII Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС(Звенигород, 2010)
2. XVIII Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики”, посвященная памяти К.И. Бабенко. (Абрау-Дюрсо, 2010)
3. International Conference and School on Plasma Physics and Controlled Fusion and 4-th Alushta International Workshop on the Role of Electric Fields in Plasma Confinement in Stellarators and Tokamaks (Alushta (Crimea), Ukraine, 2010)
4. XXXVIII Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС(Звенигород, 2011)

5. X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011)
6. XXXIX Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС(Звенигород, 2012)
7. XIX Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики”, посвященная памяти К.И. Бабенко. (Абрау-Дюрсо, 2012)
8. Семинар ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, 2014)

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 13 печатных работах: 6 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК, 1 препринт, 6 тезисов докладов конференций.

**Личный вклад соискателя.** Диссертационная работа выполнена под руководством М.Б. Гаврикова в рамках тематического плана института. Соискатель лично участвовал в разработке моделей и методов, представленных в диссертационной работе. Соискатель лично проводил все расчеты, результаты которых рассмотрены в диссертации, и наравне с другими соавторами участвовал в написании научных работ, опубликованных по теме диссертации.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 118 страницах, содержит 23 иллюстрации. Список литературы включает 59 наименований.

Исследования, представленные в диссертации, выполнены при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №12-01-00071, № 09-01-00181, № 08-01-00299).

### **Содержание работы**

Во введении приведён обзор существующих гидродинамических моделей плазмы. Представлены двухжидкостная и одножидкостная формы ЭМГД-уравнений. Первая состоит из уравнений Брагинского, замкнутых уравнениями электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля.

Вторая получается из первой математическим преобразованием при переходе к новым гидродинамическим неизвестным  $\rho = \rho_+ + \rho_-$ ,  $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-)/\rho$  – суммарная плотность и массовая скорость плазмы. Здесь и ниже индексы “±” относятся к параметрам электронов и ионов. Указано отличие ЭМГД-уравнений от классической и холловской МГД: 1) появляется добавка  $\Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \mathbf{j}\mathbf{j}/\rho$  в тензоре плотности потока импульса; 2) термодинамика плазмы становится трёхпараметрической – определяется тремя параметрами  $\rho$ ,  $\rho_+$ ,  $\rho_-$ ; 3) кардинально усложняется обобщённый закон Ома. Последнее отличие принципиальное. В ЭМГД электрическое поле в каждой точке пространства зависит от значений остальных параметров плазмы не в сколь угодно малой окрестности этой точки, как это имеет место в классической и холловской МГД, а во всей области, занятой течением. Математически это выражается в том, что для нахождения поля  $\mathbf{E}$  в ЭМГД надо поставить краевую задачу для некоторой вырожденной эллиптической системы уравнений на компоненты  $\mathbf{E}$ . Наконец, указан предельный переход от ЭМГД-теории к уравнениям классической и холловской МГД. Он состоит в стремлении  $\xi \rightarrow 0$ , где

безразмерное число подобия  $\xi = \frac{c}{\omega_p L_0} = \frac{c \lambda_+^{1/2} \lambda_-^{1/2}}{2\pi^{1/2} \rho_0^{1/2} L_0}$ , а  $\omega_p$  – плазменная частота,

$L_0$ ,  $\rho_0$  – характерный масштаб длины и плотности,  $\lambda_{\pm} = m_{\pm}/e_{\pm}$ ,  $m_{\pm}$  – массы

электронов и ионов,  $e_{\pm}$  – их заряды. В тоже время  $\xi = \frac{0.532 \cdot 10^6}{L_0 \sqrt{n_e}}$  и, таким

образом, обратно пропорционален корню из характерного погонного числа электронов  $n_e L_0^2$ .

В конце введения представлены уравнения ЭМГД-теории для несжимаемой плазмы, позволяющие для квазинейтральных течений учесть ещё и ток смещения. Также сформулированы цель и задачи исследования. Приведено содержание работы.

Главы 1 и 2 посвящены исследованию задач течения несжимаемой плазмы



посредством ЭМГД-модели. В первой главе рассмотрена задача о возбуждении плазмы под действием периодического тока. В разделе 1.1 приведена постановка задачи о возбуждении плазмы в цилиндрическом канале. Считается, что ток меняется по времени гармонически с частотой  $\omega$ , а неизвестные величины являются периодическими по времени функциями с той же частотой и неизвестными амплитудами (модами):

$$(U_z, E_z, H_\phi, j_z) = (U_z(r), E_z(r), H_\phi(r), j_z(r)) e^{i\omega t}$$

В разделе 1.2 для поиска амплитуд колебаний получена система ОДУ, решение которой удалось найти аналитически. Это решение полностью определяется корнями кубического характеристического многочлена. В разделе 1.3 предложен метод численного исследования корней характеристического уравнения с комплексными коэффициентами, зависящим от  $\omega$ , как от параметра. В разделе 1.4 проведено сравнение полученных результатов с классической МГД-теорией. Определяющим становится безразмерный

параметр  $a = \frac{\rho r_0}{\lambda_+ + \lambda_-} \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} \right)}$ , а МГД-предел получается условием

$a \rightarrow +\infty$ , где  $\sigma$  – проводимость плазмы,  $\mu_\pm$  – гидродинамические вязкости электронов и ионов,  $r_0$  – радиус шнура,  $\rho$  – плотность плазмы. На Рис.1 приведены профили плотности тока  $j_z(r)$  в зависимости от значений параметра  $a$  для частоты  $\omega = 0$ .

В разделе 1.5 приведены профили найденных амплитуд и показано, что с ростом частоты  $\omega$  наблюдается (Рис.2) скинирование плотности и других параметров плазмы вблизи границы плазменного шнура. В разделе 1.6 подведён итог проделанной работы.

Во второй главе решена задача о стационарном течении несжимаемой плазмы в плоском канале ширины  $2\ell$ . В МГД-модели решением будет профиль Гартмана. В разделе 2.1 приведена ЭМГД-модель установившегося течения плазмы в плоском канале, сводящаяся к краевой задаче на отрезке  $[-\ell, \ell]$  для

системы ОДУ высокого (14-го!) порядка. В разделе 2.2 проведена комплексификация полученной системы ОДУ с целью понижения порядка системы, в результате чего порядок краевой задачи понизился до 4-го.

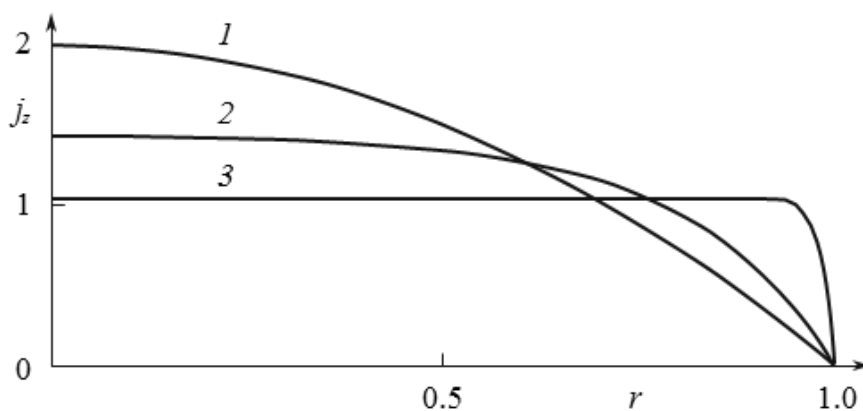


Рис.1. Предельный профиль  $j_z(r)$  в единицах  $J_0/(\pi r_0^2)$  при  $\omega \rightarrow 0$  для различных значений параметра  $a$ : 1 –  $a = 0.5954$ , 2 –  $a = 5.954$ , 3 –  $a = 59.54$

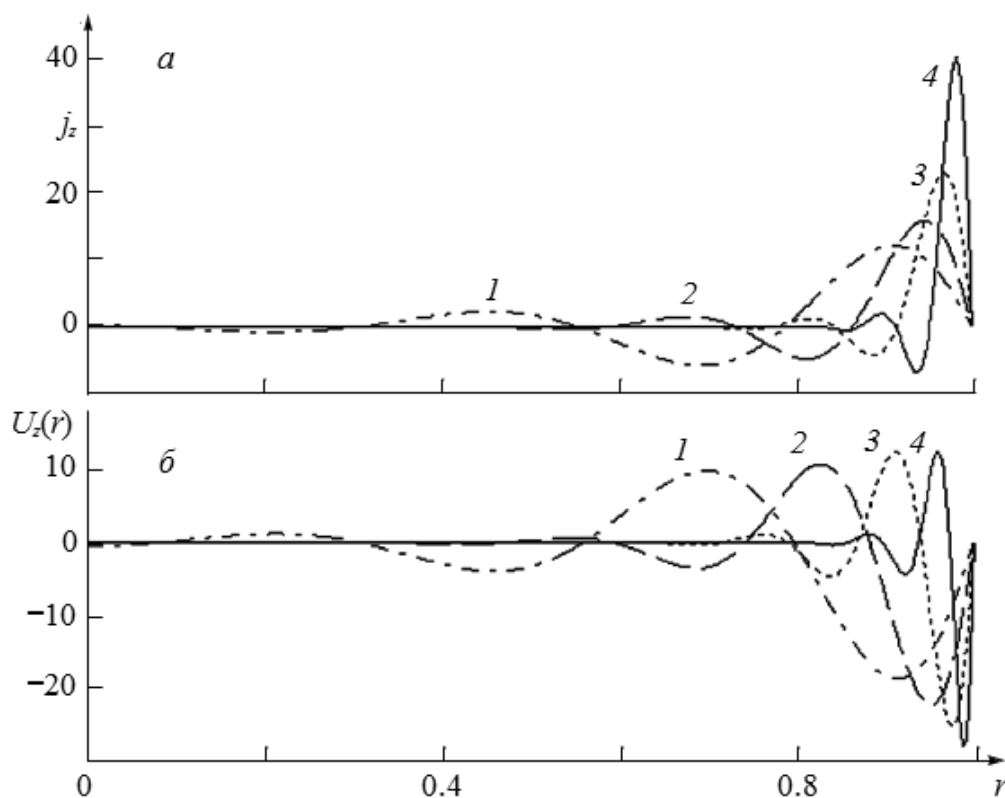


Рис.2. Скинирование плотности тока  $j_z(r)$  в единицах  $J_0/(\pi r_0^2)$  и массовой скорости  $U_z(r)$  в единицах  $J_0 \mu_* (2\pi r_0^3 \rho^2 v_0)^{-1}$  при  $\omega \rightarrow +\infty$ . Даны профили для четырёх характерных частот: 1 – ( $\omega = 10^9$  Гц), 2 – ( $\omega = 10^{10}$  Гц), 3 – ( $\omega = 10^{11}$  Гц), 4 – ( $\omega = 10^{12}$  Гц)

В классической МГД определяющим параметром задачи о течении несжимаемой плазмы в плоском канале является число Гартмана  $Ha$ . В разделе 2.3 приведены определяющие параметры этой задачи в ЭМГД-теории. Оказалось, что их два: число Гартмана  $Ha$ , а также новый безразмерный параметр  $\Gamma$ , содержащий плотность:

$$Ha = \frac{H_0 \ell}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_\Sigma}}, \quad \Gamma = \frac{H_0 \sigma \lambda}{c\rho}$$

где  $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$ ,  $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$ . Здесь же изучено качественное поведение течения в зависимости от определяющих параметров  $Ha$ ,  $\Gamma$ . В частности, исследован МГД-предел, отвечающий стремлению  $\Gamma \rightarrow 0$ . Показано, что при  $\Gamma \rightarrow 0$  продольная скорость сходится равномерно на  $[-\ell, \ell]$  к профилю Гартмана

$$U_\tau(x) \rightarrow U_{\text{МГД}}(x) = \frac{-i\ell^2}{\mu_\Sigma} \frac{\partial p_\Sigma}{\partial z} \left( \frac{\text{ch } Ha - \text{ch } Ha x/\ell}{Ha \text{sh } Ha} \right), \quad |x| \leq \ell$$

Но даже при  $\Gamma \ll 1$  профиль Гартмана  $U_{\text{МГД}}(x)$  не может реализоваться в чистом виде, а состоит из мелких зазубрин с пространственной частотой

$$\omega_* = \frac{Ha}{2\ell} \left( \sqrt{\frac{\mu_-}{\mu_+}} - \sqrt{\frac{\mu_+}{\mu_-}} \right).$$

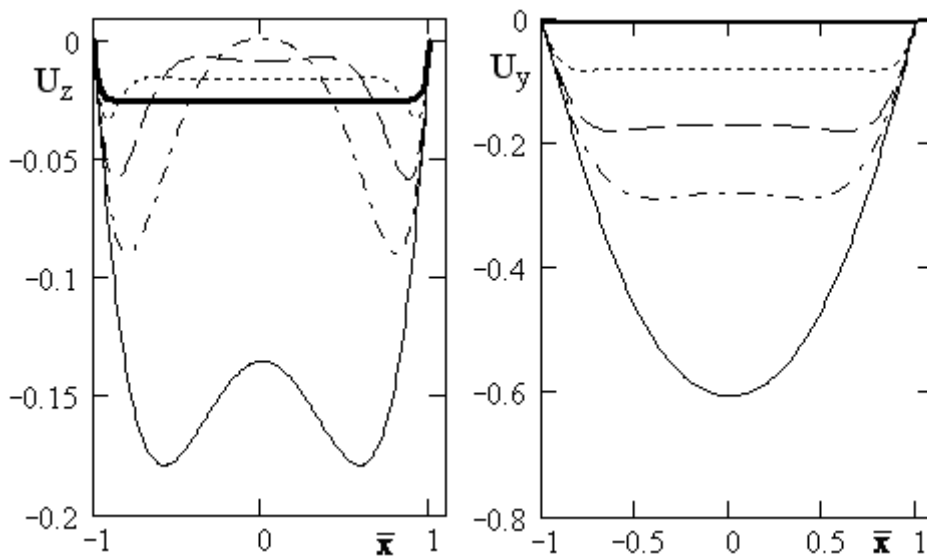


Рис.3.  $\Gamma = 10^{-2}$  – жирная сплошная;  $\Gamma = 5$  – пунктирная;  $\Gamma = 20$  – штриховая;  $\Gamma = 50$  – штрих-пунктирная;  $\Gamma = 200$  – тонкая сплошная кривые.

В разделе 2.3 описан гидродинамический “эффект Холла”. В МГД плазма под действием перепада давления течёт вдоль антиградиента давления, т.е. туда, куда её толкает вызывающая течение сила. В ЭМГД согласно полученным результатам течение плазмы отклоняется от направления перепада давления. Для средней по сечению канала скорости предельный угол отклонения в сильно замагниченной плазме  $H_0$  равен  $\alpha_\infty = \arctg \frac{\sqrt{\mu_-} - \sqrt{\mu_+}}{\sqrt{\mu_-} + \sqrt{\mu_+}}$ . Для изотермической плазмы  $\alpha_\infty \cong -\pi/4$ , для сильно неизоотермической плазмы,  $T_e \square T_i$ ,  $\alpha_\infty \cong \pi/4$ , в общем случае  $|\alpha_\infty| \leq \pi/4$ .

В разделе 2.5 выписано решение для случая подвижных и замагниченных стенок канала. В разделе 2.6 решена задача об обтекании несжимаемой плазмой замагниченной поверхности и определена толщина погранслоя

$$\Delta \ell = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\mu_\Sigma}{\sigma}} \max \frac{1}{\operatorname{Re} f_\pm(\Gamma)}, \text{ где } f_\pm(\Gamma) = \frac{1}{\Lambda_* \Gamma} \left\{ \frac{1 + i\Lambda_0 \Gamma \pm \sqrt{1 + 2i\Lambda_0 \Gamma - \Gamma^2}}{2} \right\}^{1/2}$$

$$\Lambda_* = (\mu_+ \mu_-)^{1/2} / \mu_\Sigma, \Lambda_0 = (\mu_- - \mu_+) / \mu_\Sigma$$

Полученное значение  $\Delta \ell$  для толщины погранслоя при  $\Gamma \rightarrow 0$  переходит в известное выражение  $\Delta \ell_{\text{МГД}} = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\mu_\Sigma}{\sigma}}$  для классической МГД. Для конечных  $\Gamma$  учёт двухжидкостной структуры плазмы приводит к значительному увеличению толщины погранслоя  $\Delta \ell_{\text{МГД}} / \Delta \ell$ , как это следует из Рис.4.

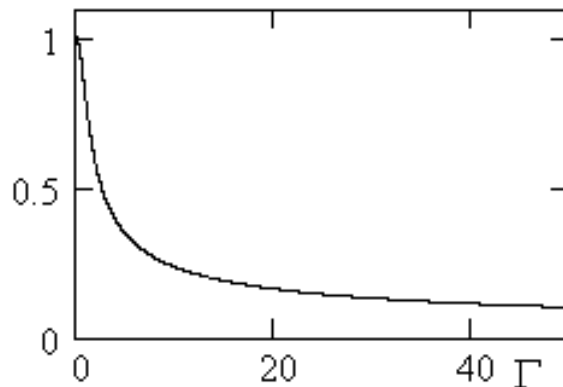


Рис.4. Зависимость отношения  $\Delta \ell_{\text{МГД}} / \Delta \ell$  от  $\Gamma$

В разделе 2.7 обсуждаются полученные результаты. В частности, отмечено, что условие  $\Gamma \ll 1$  обычно выполняется для газовой плазмы, а противоположное условие  $\Gamma \gg 1$  – для плазмы жидких металлов. Приведены типичные значения  $\Gamma$  для некоторых видов газовой плазмы. Отмечено, что локальное отклонение течения плазмы от антиградиента давления в конкретных точках может достигать 90 градусов (Рис.3).

В главах 3 и 4 рассмотрены ЭМГД-модели сжимаемой плазмы. В третьей главе исследуется взаимодействие уединённых волн в сжимаемой электрон-ионной бездиссипативной плазме на базе фундаментальных законов сохранения массы, импульса, энергии и законов электродинамики, а не модельных уравнений, как это обычно принято в теории плазмы. В разделе 3.1 приведены ЭМГД-уравнения для сжимаемой квазинейтральной плазмы с уравнениями энергии, записанными относительно давлений. Электроны и ионы для простоты считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты  $\gamma$ . В разделе 3.2 показано, что в случае холодной плазмы решения ЭМГД-уравнений типа плоских бегущих волн, то есть зависящих от  $t$ ,  $\mathbf{r}$  в комбинации  $\theta = \mathbf{r}\mathbf{k} - at$ , где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор, определяющий направление распространения волны,  $a$  – константа (фазовая скорость), удовлетворяют системе:

$$J u + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} = D$$

$$\left( u - \frac{H_{\perp}^2}{4\pi J} \right) \mathbf{H}_{\perp} - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left( u \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right) + \frac{c H_{\perp}}{4\pi J} (\lambda_i - \lambda_e) u \left[ \mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right] + \mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{H}_{\perp}$  – поперечное магнитное поле,  $u = U_{\perp} - a$ ;  $J \neq 0$ ,  $D > 0$ ,  $H_{\perp}$ ,  $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$  – произвольные константы.

В разделе 3.2 и ниже исследуются уединённые волны специального типа, являющихся решением системы (1) для произвольного магнитного поля  $H_{\parallel} = 0$  вида  $\mathbf{H}_{\perp}(\theta) = H(\theta)\mathbf{e}_0$ , где  $\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{k}$  – единичный вектор,  $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_0$ . Иными словами, рассматриваются только бегущие волны, в которых вектор магнитного поля  $\mathbf{H}$

меняется только по величине, имея при этом фиксированное направление в поперечной плоскости. Для таких волн, согласно системе (1), функции  $H(\theta)$ ,  $u(\theta)$  ищутся из уравнений

$$Ju + \frac{H^2}{8\pi} = D$$

$$Hu - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} \left( u \frac{dH}{d\theta} \right) + q = 0 \quad (2)$$

где  $J \neq 0$ ,  $D > 0$ ,  $q$  – произвольные константы.

В разделе 3.3 выписаны решения системы уравнений (2) типа уединённой волны для покоящейся плазмы:

$$\theta = \pm \frac{\xi}{a} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \ln \frac{2a^2 - 1 - H + \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{4a^2 - (H + 1)^2}}{|a|(H - 1)} - \sqrt{4a^2 - (H + 1)^2} \right\}$$

Данное неявное выражение задаёт профиль уединённой волны  $H(\theta)$ . Далее это решение используется в качестве начального условия при численном исследовании взаимодействия уединённых волн (Рис.5).

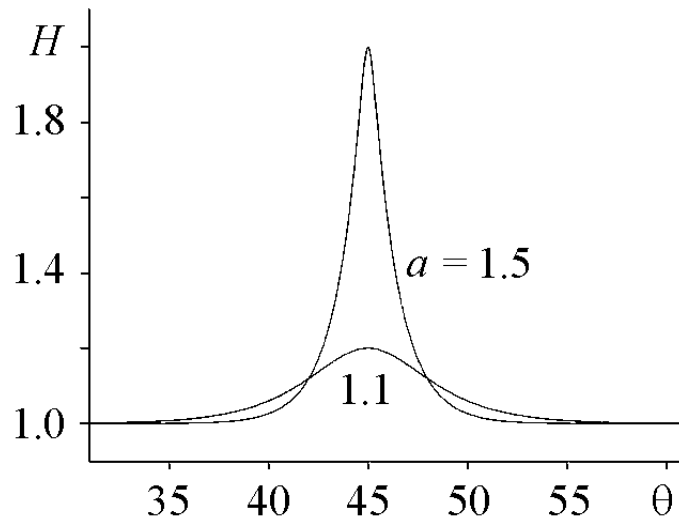


Рис.5. Зависимость  $H(\theta)$  для различной фазовой скорости  $a$

Также найдена оценка зависимости ширины уединённой волны от фазовой скорости. В разделе 3.4 приведена методика численного моделирования взаимодействия уединённых волн. Рассмотрены следующие задачи:

1. Движение двух уединённых волн одинаковой амплитуды навстречу друг

- другу;
2. Движение двух уединённых волн разной амплитуды навстречу друг другу;
  3. Набегание уединённой волны с большей амплитудой на уединённую волну с меньшей амплитудой в предположении, что волны двигаются в одну сторону;
  4. Распад начального возмущения, локализованного в пространстве, в частности, может ли начальное возмущение порождать пакет уединённых волн.

Результаты в этих задачах получаются численным решением ЭМГД-уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_x}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho U_x^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} \right) &= 0 \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \\
 E_y - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{U_x H_z}{c} - \frac{c \lambda_i \lambda_e}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( U_x \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Численный метод решения системы (3) включает двухшаговый метод Лакса-Вендроффа для гидродинамической части системы (3) с решением на каждом шаге уравнений, полученных разностной аппроксимации обобщённого закона Ома, методом прогонки.

В разделе 3.5 приведены результаты расчётов. Решение задачи о столкновении двух уединённых волн разной амплитуды, движущихся навстречу друг другу, представлено на Рис.6.

В четвёртой главе исследован процесс затухания альфвеновских волн в сжимаемой ЭМГД-плазме вследствие диссипаций. Для простоты электроны и ионы считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты  $\gamma$ . В разделе 4.1 приведены ЭМГД-уравнения с учётом основных

диссипативных факторов (магнитная и гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов) и процесса релаксации температур электронов и ионов. Альфвеновские волны в двухжидкостной плазме это плоские поперечные колебания плазмы, бегущие вдоль магнитного поля, являющиеся точным решением ЭМГД-уравнений при нулевых диссипациях, отсутствии релаксации температур и имеющие вид в неподвижной плазме:

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = \text{const}, \rho = \text{const}, U_x = 0 \quad (4)$$

Здесь использованы комплексные обозначения  $U_{\perp} = U_y + iU_z$ ,  $H_{\perp} = H_y + iH_z$ ,  $E_{\perp} = E_y + iE_z$ , причём  $H_x = \text{const}$ .

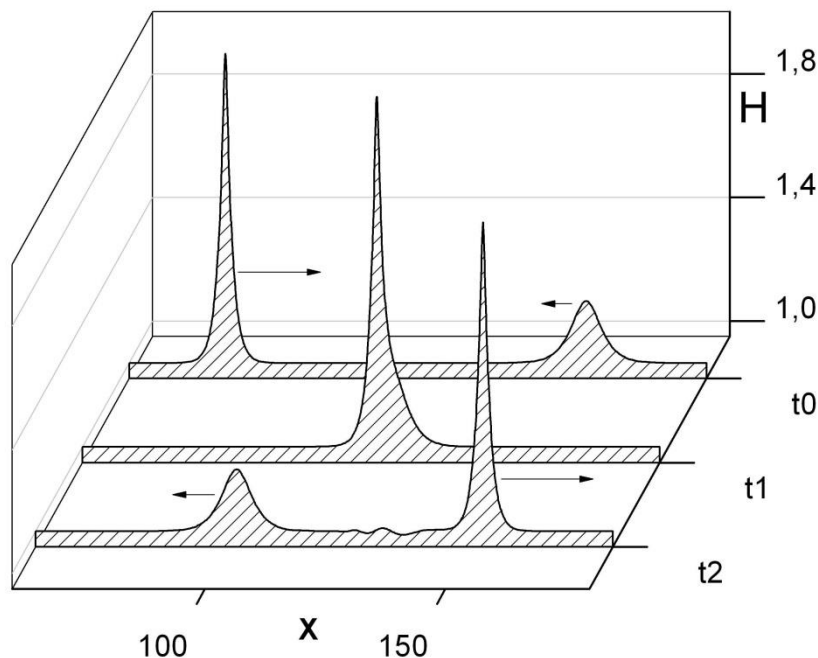


Рис.6. Волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями:  $a = 1.5$  и  $a = -1.1$ , движущиеся навстречу друг другу

В разделе 4.2 показано, что функции (4) являются решением ЭМГД-уравнений в случае плоской симметрии, если

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{kv_A} \{C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t}\} \quad (5)$$

$$e(t) = \frac{i}{1+r^2} \left\{ \left( \frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_+ \right) C_1 e^{i\omega_+ t} + \left( \frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega_- \right) C_2 e^{i\omega_- t} \right\}$$



$$\omega_{\pm} = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[ \frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}, r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}, \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi\rho}{\lambda_+\lambda_-}}$$

В частности, альфвеновская волна есть суперпозиция бегущих волн вдоль и против магнитного поля, волн с разными частотами  $\omega_{\pm}$  и фазовыми скоростями. В МГД-пределе  $r \ll 1$  такие волны переходят в классические альфвеновские волны.

В разделе 4.3 обсужден вопрос о преобразовании энергий в альфвеновской волне и установлено появление дополнительного слагаемого в балансе полной энергии, равного кинетической энергии относительного движения электронов, которое отсутствует в МГД-теории.

В разделе 4.4 поставлена задача о временном затухании альфвеновской волны, которая математически состоит в поиске решений ЭМГД-уравнений в случае плоской симметрии вида

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, T_{\pm} = T_{\pm}(t), U_x \equiv 0, \rho \equiv \text{const}$$

Эта задача редуцируется к нахождению амплитуд  $u(t)$ ,  $h(t)$ ,  $e(t)$ ,  $T(t)$  из некоторой системы ОДУ. В разделе 4.5 полученная система ОДУ на амплитуды аналитически решена в частном случае затухания альфвеновской волны в немагнитной невязкой плазме. В разделе 4.6 рассмотрен вопрос о релаксации температур и поглощении альфвеновской волны в общем случае. Как показало численное исследование, поглощение альфвеновской волны распадается на два этапа. На первом происходит быстрое преобразование магнитной и в значительной мере кинетической энергий альфвеновской волны в тепловую энергию преимущественно электронов, на втором – в основном медленная релаксация температур, при этом остатки кинетической энергии волны переходят в тепловую энергию (Рис.7).

В разделе 4.7 обсужден вопрос о качественных закономерностях временного затухания альфвеновских волн и релаксации температур на больших временах,  $t \rightarrow +\infty$ . Математически задача сводится к нахождению особых точек и исследованию поведения интегральных кривых системы ОДУ

на амплитуды в их окрестности. В данном случае система ОДУ для амплитуд имеет единственную особую точку  $u=0$ ,  $h=0$ ,  $T=T_0$ , где  $T_0$  - температура релаксации. Применение теоремы Гробмана-Хартмана позволяет свести изучение поведения интегральных кривых в окрестности особой точки к исследованию поведения интегральных кривых линеаризованной в особой точке системы в окрестности нуля.

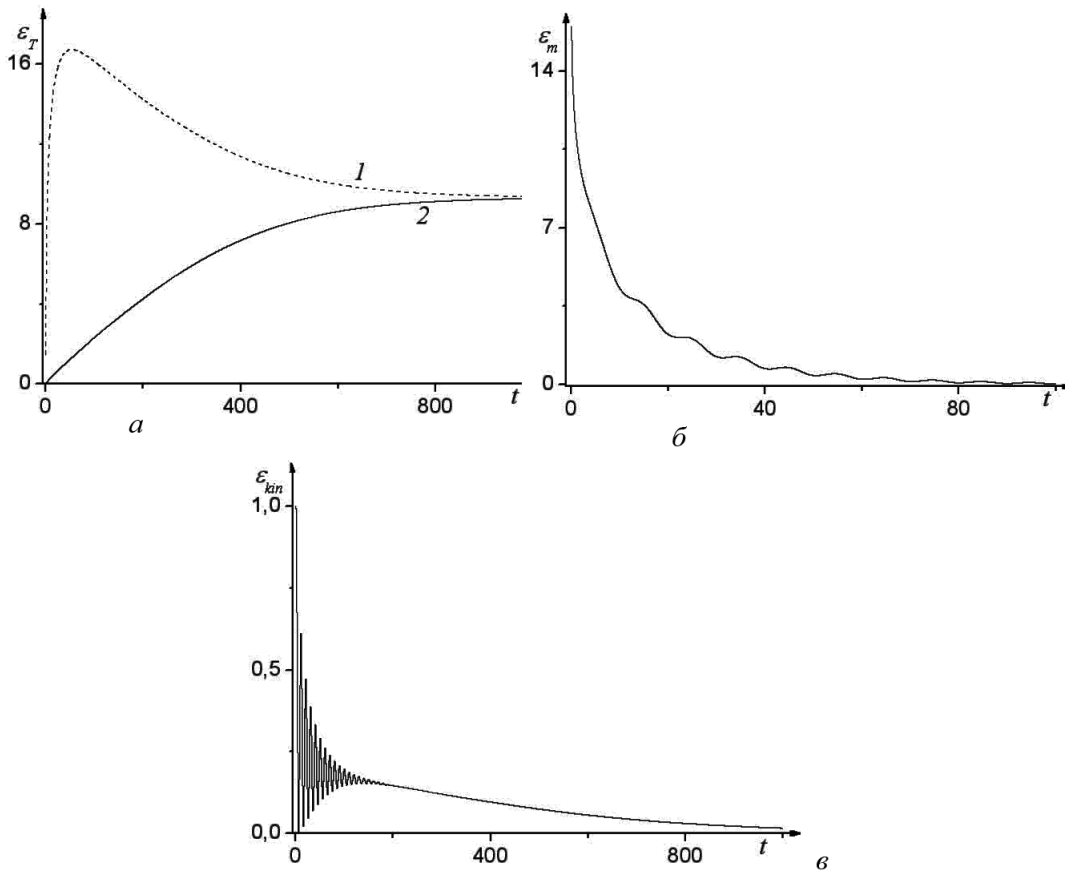


Рис.7. Зависимость от времени тепловой энергии электронов (1) и ионов (2) в альфвеновской волне (а), магнитной энергии альфвеновской волны (б) и кинетической энергии альфвеновской волны (в)

В разделе 4.8 проведено сравнение с линейной теорией и показано, что в линейной теории нельзя исследовать релаксацию температур, а затухание электромагнитных параметров происходит медленнее, чем по экспоненте.

Наряду с временным затуханием исследован процесс пространственного поглощения альфвеновской волны. В разделе 4.9 приведена постановка задачи о набегании альфвеновской волны на границу диссипативной плазмы,

подчинённая ЭМГД-уравнениям в случае плоской симметрии.

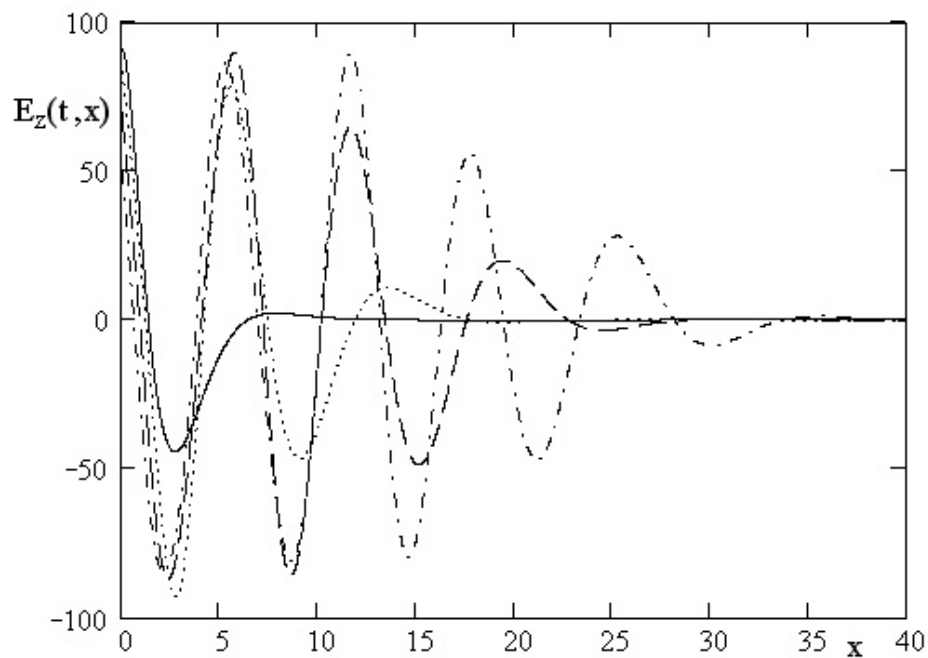


Рис.8. График напряжённости электрического поля в различные моменты времени: сплошная  $t=0.1$ ; пунктирная  $t=0.3$ ; штриховая  $t=0.5$ ; штрих-пунктирная  $t=0.7$  кривые

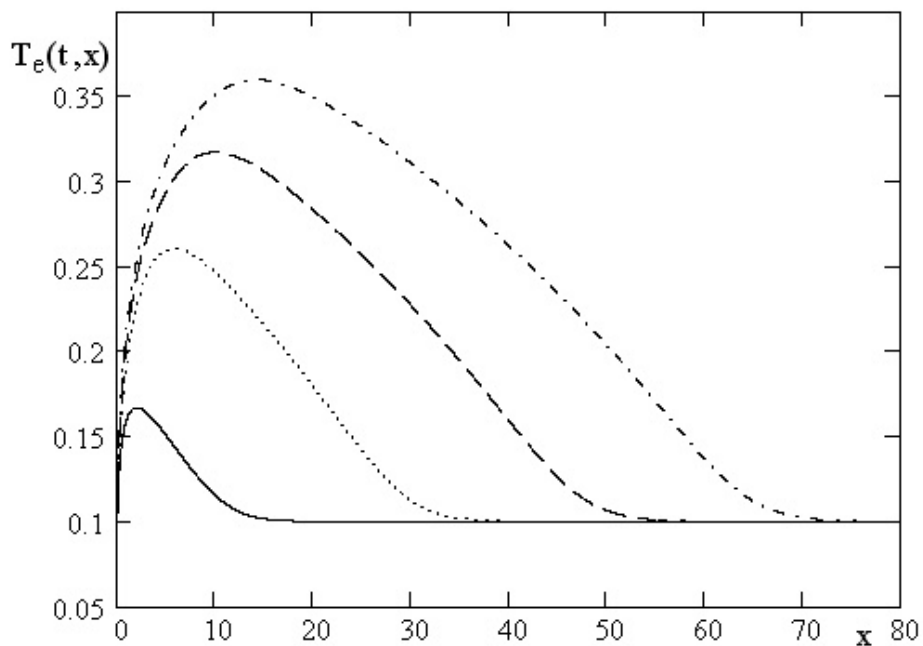


Рис.9. График температуры электронов в различные моменты времени: сплошная  $t=0.1$ ; пунктирная  $t=0.3$ ; штриховая  $t=0.5$ ; штрих-пунктирная  $t=0.7$  кривые

В разделе 4.10 предложен метод численного исследования ЭМГД-системы с определёнными начальными и граничными условиями. Проведена

дискретизация задачи, выписана разностная схема, условие устойчивости и последовательность вычислений. В разделе 4.11 приведены результаты расчётов (Рис.8, Рис.9) и сделан ряд важных выводов. В частности, как следует из расчётов, процесс поглощения альфвеновской волны происходит на длинах порядка скиновых, поэтому МГД-теория, применяемая на длинах много больших скиновых, для исследования этого процесса в принципе не пригодна.

В заключении подытожены полученные в диссертации основные результаты и выводы. Отмечены новые конечные эффекты двухжидкостной плазмы.

### **Основные выводы и результаты работы**

Проведённые численные и аналитические исследования применительно к различным задачам динамики плазмы в диссертации показывают важность учёта инерции электронов. Выявлен ряд новых конечных эффектов, обусловленных двухжидкостной природой плазмы и отсутствующих в МГД-теории. К ним относятся:

1. В задаче о возбуждении несжимаемой плазмы в круглой трубе периодическим током – скинирование параметров плазмы при больших частотах тока и конечное отличие профилей плотности тока в МГД и ЭМГД
2. В задаче об установившемся течении несжимаемой плазмы в плоском канале – гидродинамический “эффект Холла”, двухпараметричность течения, выражающая значительное различие результатов ЭМГД- и МГД-теорий плоского канала для газовой плазмы.
3. В задаче об обтекании несжимаемой плазмой замагниченной поверхности – значительное увеличение по сравнению с МГД-теорией толщины погранслоя.
4. Наличие уединённых волн в двухжидкостной плазме и корпускулярный характер их взаимодействия с сохранением после взаимодействия своих амплитуд, скоростей и других характеристик.

5. Наличие в двухжидкостной плазме альфвеновских волн и их поглощение диссипативной плазмой на длинах порядка скин-слоев.

В диссертации разработаны математические и численные модели взаимодействия уединённых волн и временного и пространственного поглощения альфвеновских волн с использованием созданных методик. Определены основные закономерности затухания альфвеновских волн в диссипативной плазме.

### **Основные результаты диссертации опубликованы в работах**

1. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Вынужденные колебания вязкой несжимаемой плазмы с учётом инерции электронов в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №1. С. 176-192
2. Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Взаимодействие солитонов в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учётом инерции электронов // Труды XXXVII Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС, 2010. С. 207
3. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Вынужденные колебания вязкой несжимаемой плазмы с учётом инерции электронов в круглой трубе // Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики”, памяти К.И. Бабенко. М.:ИПМ им. М.В.Келдыша, 2010. С. 21
4. M.B. Gavrikov, V.V. Savelyev, A.A. Tayurskiy Solitons in two-fluid MHD // Book of Abstracts. Alushta-2010. ННЦ “ХФТИ”, 2010. С. 84
5. Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Солитоны в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов. // Изв. Вузов Прикладная нелинейная динамика. Т.18. №4. С.132-147
6. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. О возможном механизме генерации

- сильного электрического поля в перетяжках Z-пинчей // Труды XXXVIII Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС, 2011. С. 160
7. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Электромагнитная гидродинамика двухжидкостной плазмы. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), С. 694-696
  8. М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме. // Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2011, № 68. 28 с.
  9. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме // Тезисы докладов XXXIX Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС, 2012. С. 173
  10. М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский Численное и аналитическое исследование поглощения альфвеновской волны в диссипативной плазме // Тезисы докладов XIX Всероссийской конференции “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики”, памяти К.И. Бабенко. Абрау-Дюрсо, 2012. С. 26-27
  11. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние инерции электронов на течение несжимаемой плазмы в плоском канале. // Математическое моделирование. № 9, 2012. С. 79-96
  12. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”, 2012, № 4. С. 63-81
  13. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме. // Математическое моделирование. № 8, 2013. С. 65-79