

На правах рукописи



**Улькин Дмитрий Александрович**

**МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И  
РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре вычислительной механики, механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Левин Владимир Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
Каракин Андрей Владимирович

кандидат физико-математических наук,  
Болдарев Алексей Сергеевич

Ведущая организация: Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта  
РАН

Защита диссертации состоится " \_\_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2011 г.  
в \_\_\_\_\_ час. на заседании диссертационного совета Д 002.024.03  
при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН по адресу:  
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им М.В. Келдыша РАН.

Автореферат разослан " \_\_\_\_\_ " сентября 2011 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.024.03,  
д. ф.-м. н.



Н.В.Змитренко

### **Актуальность**

Образование и рост трещин являются важными составляющими многих природных и техногенных геологических процессов, происходящих в земной коре. В последнее время активные исследования данных явлений связаны в первую очередь с широким распространением технологии гидравлического разрыва пластов (ГРП) на месторождениях углеводородов, применяемой для повышения продуктивности. ГРП представляет собой создание искусственной трещины в геологическом пласте под действием расклинивающего давления жидкости, нагнетаемой через скважину.

Серьезные последствия некачественного проведения ГРП с одной стороны и большая стоимость самой операции с другой обуславливают необходимость моделирования роста трещины. Однако задача определения всех характеристик трещины ГРП в реальном времени на месторождении до сих пор остается нерешенной, что связано с большим количеством взаимосвязанных процессов, которые должны быть учтены: течение жидкости разрыва в трещине и в пласте, деформация и разрушение породы, распространение примесей, предназначенных для закрепления трещины и т.п.

Первая часть настоящей диссертационной работы посвящена разработке эффективных методов численного моделирования ГРП на основе моделей с упрощенной геометрией трещины, которые позволяют вычислить основные характеристики трещины и хорошо работают для широкого круга ситуаций.

Одним из важнейших вопросов, которые не могут быть учтены в рамках моделей с упрощенной геометрией, является определение направления роста трещины. В подавляющем большинстве случаев трещина ГРП развивается в плоскости перпендикулярной минимальному главному напряжению во вмещающей среде. Если данный факт не учитывать при подготовке ГРП, то итоговая трещина будет изогнута, что существенно уменьшит ее эффективность. Одним из способов получения информации о внутренних напряжениях на месторождении является анализ распределения трещин естественного происхождения различных масштабов. В

частности, при исследованиях строения горных пород зачастую обнаруживают системы крупных параллельных трещин, носящих название складчатых структур. Моделирование возникновения складчатых структур в изначально однородном пласте осадочной горной породы, которому и посвящена вторая часть настоящей диссертации, позволяет в частности получить информацию о напряжениях, возникающих в породе в процессе формирования трещин.

### **Цель работы**

Целью настоящей работы является разработка и исследование методов моделирования возникновения и распространения трещин в горных породах, позволяющих повысить эффективность применения ГРП.

- Исследование моделей развития трещины ГРП в плоско-деформированной среде и выбор модели, позволяющей наиболее полно описать процесс ГРП, но при этом допускающей построение эффективных вычислительных алгоритмов для расчетов прямо на месторождении.
- Выявление качественных особенностей поведения трещины ГРП в рамках выбранных моделей в зависимости от значений управляющих параметров задачи.
- Разработка и реализация в виде комплекса программ эффективных численных методов для моделирования ГРП в плоско-деформированной среде.
- Исследование принципиальной возможности моделирования зарождения систем параллельных трещин в горной породе как результата локализации пластических деформаций при потере устойчивости в процессе закритического деформирования.

### **Научная новизна**

Методами подобия и размерности исследованы автомодельные решения, допускаемые уравнениями, описывающими рост трещины ГРП в плоско-деформированной упругой изотропной среде, в том числе для всех физически содержательных асимпто-

тических случаев вырождения задачи по управляющим параметрам. Получены условия симметрии системы уравнений относительно групп преобразований подобия и сдвига по времени, что позволило найти автомодельные переменные и характер зависимости от времени величин, входящих в задачу.

Показано, что решение задачи о росте трещины ГРП в плоско-деформированной упругой изотропной среде имеет автомодельную асимптотику, что позволяет достаточно произвольно выбирать начальные данные при численном моделировании, поскольку их особенности забываются с ростом трещины.

Установлено, что автомодельный режим решения задачи о росте трещины ГРП с учетом лага и трещиностойкости в практически наиболее важном случае ненулевого горного давления и постоянной скорости закачки совпадает с автомодельным решением задачи без учета лага, а в случае возрастающей скорости закачки с автомодельным решением задачи без учета трещиностойкости и лага. Выход на автомодельность происходит неравномерно по пространству и времени.

Численными методами получены формы неустойчивости для мизесова упругопластического тела, подвергающегося сдвиговым деформациям. Первичная неустойчивость проявляется в виде периодической системы параллельных полос малой ширины с пластическими деформациями, разделяющих области с упругими деформациями. Качественно похожая картина деформаций наблюдается в складчатых структурах, что показывает принципиальную возможность моделирования их возникновения на основе выбранного в работе подхода.

### **Практическая и научная значимость**

Разработаны алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ, для численного решения задачи о формировании трещины ГРП в плоско-деформированной упругой среде с учетом начальных данных, что позволяет рассмотреть процесс развития трещины до момента выхода на автомодельную асимптотику. Созданный комплекс программ представляет интерес для иссле-

дования режимов развития и управления ростом трещины в реальном времени при проведении ГРП.

Разработан алгоритм численного решения задачи о нахождении первичных форм потери устойчивости разупрочняющегося упругопластического тела, который может быть применен для численных исследований при произвольных упругопластических определяющих соотношениях. Показана принципиальная возможность моделирования возникновения складчатых структур как формы проявления внутренней неустойчивости упругопластического пласта.

### **Обоснованность и достоверность**

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается физической обоснованностью постановок задач, строгим аналитическим характером их рассмотрения с применением современного математического аппарата механики деформируемого твердого тела, применением теоретически обоснованных вычислительных методов, согласованностью результатов численного моделирования с аналитическими выводами автора и ряда классических опубликованных результатов ведущих исследователей в этой области, а также с данными эксперимента.

### **Апробация результатов**

По результатам работы на разных стадиях ее выполнения в период с 2007г. по настоящее время был сделан ряд докладов на семинарах и конференциях. Среди них:

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения», Москва, апрель 2007 и 2009.
2. Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», Москва, июнь 2009.
3. 7-я всероссийская научно-техническая конференция «Актуальные проблемы состояния и развития нефтегазового комплекса России», Москва, январь 2007.

4. Семинары кафедры механики композитов и кафедры вычислительной механики Механико-математического факультета МГУ.

### **Публикации**

Результаты диссертации с достаточной полнотой отражены в 7 научных работах, среди которых две публикации в журналах из перечня ВАК, один препринт, а также четыре доклада в сборниках материалов и тезисов научных конференций:

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 77 наименований. Работа изложена на 133 страницах и содержит 26 рисунков.

Во **введении** обоснована актуальность проблем моделирования образования и развития трещин в горных породах, описаны цели и задачи диссертационной работы, указана новизна и возможная прикладная значимость результатов исследования, перечислены основные результаты, выносимые на защиту, а также представлена структура диссертации.

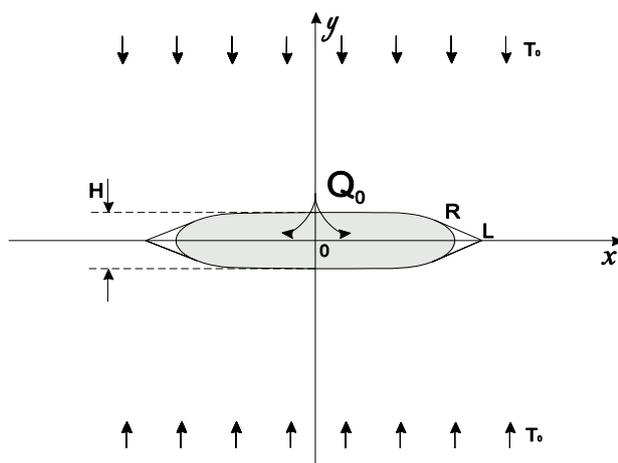
### **Первая глава**

В первой главе представлен обзор литературы, посвященной исследованию различных аспектов математического моделирования роста трещин гидроразрыва, а также основополагающих работ в механике континуального разрушения, используемой в диссертационной работе для моделирования зарождения систем природных трещин. Указаны основные отличительные особенности моделей и методов исследования, использованных в диссертационной работе.

### **Вторая глава**

В **разделе 2.1** формулируется математическая модель роста симметричной двумерной трещины гидроразрыва (рис. 1). Трещина длины  $2 \cdot L(t)$  развивается в направлении  $Ox$  в бесконечной линейно-упругой изотропной плоско-деформированной среде,

которая задается модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Через скважину, расположенную в начале координат, в трещину закачивается несжимаемая ньютоновская жидкость с вязкостью  $\eta$ . Жидкость занимает область  $[-R(t), R(t)]$  в трещине, причем  $0 < R(t) \leq L(t)$ , т.е. жидкость не обязательно заполняет всю трещину, возле носиков (подвижных концов) трещины может располагаться лаг – область свободная от жидкости. Утечки жидкости в окружающую среду считаются незначительными. На упругую среду действуют давление жидкости  $P_f$ , заданное на границе трещины, и сжимающее давление  $T_0 \leq 0$ , заданное на бесконечности.



### 1. Схема трещины гидроразрыва.

Предполагается, что характерное раскрытие трещины гидроразрыва  $H^*$ , например максимальное раскрытие возле скважины, значительно меньше длины трещины  $L$ , т.е. в задаче присутствует малый параметр  $\varepsilon = H^* / L$ , что позволяет использовать для описания течения жидкости в трещине уравнения теории смазки

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{12\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = Q_0 f(t) \delta(x), \quad |x| \leq R. \quad (1)$$

Из классического решения двумерной задачи теории упругости для плоско-деформированной плоскости, ослабленной трещиной, следует, что давление на границе трещины  $P(x, t)$  и раскрытие трещины  $H(x, t)$  связаны интегральным соотношением

$$P(x, t) = -\frac{E'}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{\partial H(s, t)}{\partial s} \frac{ds}{s-x}. \quad (2)$$

Для учета трещиностойкости среды в работе используется классический критерий Ирвина, согласно которому трещина находится в состоянии равновесия при равенстве коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  критическому значению

$$K_I = K_{Ic}. \quad (3)$$

Превышение критического значения коэффициента интенсивности приводит к росту трещины. Для плоско-деформированного состояния коэффициент интенсивности напряжений равен

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi L(t)}} \int_{-L(t)}^{L(t)} P(x, t) \sqrt{\frac{L(t)+x}{L(t)-x}} dx.$$

В разделах 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.5 представлены три различные модели роста трещины ГРП в плоско-деформированной среде, исследуемые в данной диссертации.

Первая – наиболее простая самосогласованная модель, в которой предполагается, что жидкость занимает всю трещину, а ее длина определяется на основании материального баланса. Система уравнений задачи состоит из (1) и (2), причем  $L = R$ . Не смотря на свою простоту, данная модель описывает ГРП точнее, чем наиболее распространенные в практике приближенные решения.

Следующая модель, дополнительно учитывает наличие трещиностойкости, при этом по-прежнему  $L = R$ , но длина трещины определяется не из материального баланса, а из критерия (3). В последнее десятилетие данная модель исследуется во многих работах, в связи с возросшим интересом к процессам, происходя-

щим в носике трещины, а также к влиянию сопротивления породы на развитие трещины.

Последняя модель, дополнительно учитывает возможность отставания подвижной границы жидкости от носика трещины. Таким образом, система уравнений задачи включает (1), (2) и (3). Кроме того, добавляется условие постоянства давления в лаге

$$P = T_0, \quad R \leq |x| \leq L, \quad (4)$$

а также соотношение для определения скорости продвижения границы жидкости

$$\pm \dot{R}H(\pm R) = Q(\pm R). \quad (5)$$

Несмотря на то, что впервые модель ГРП была предложена именно в таком виде<sup>1</sup>, в последствие она редко использовалась, в основном из-за того, что лаг, как правило, занимает лишь несколько процентов длины трещины, при этом учет его наличия вносит дополнительные сложности в решение. В настоящей диссертации показано, что рассмотрение лага не только необходимо в ряде случаев для получения физически содержательных результатов моделирования, но и упрощает численное решение задачи.

Для всех трех моделей проводится обезразмеривание уравнений. Так для наиболее общей модели с учетом лага из семи размерных величин, участвующих в уравнениях

$$x, t, E', Q_0, K_{1c}, T_0, \eta,$$

только три имеют независимую размерность. Если в качестве величин с независимой размерностью использовать  $E'$ ,  $Q_0$  и  $\eta$ , тогда, согласно теории размерности, решение задачи зависит от безразмерных координат пространства и времени, а также двух управляющих параметров

$$K = K_{1c} / E'^{3/4} Q_0^{1/4} \eta^{1/4}, \quad T = T_0 / E'.$$

Аналогичное обезразмеривание для модели без учета лага показывает, что решение в этом случае зависит от единственного

---

<sup>1</sup> Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтяного пласта // Изв. АН СССР. Отд. техн. н. 1955. №5. С. 3–41

управляющего параметра  $K$ , для простейшей самосогласованной модели управляющие параметры и вовсе отсутствуют.

Уравнения задачи для всех трех моделей переписываются в подвижных координатах

$$\xi = x/R, \quad \tau = t.$$

При такой замене жидкость все время занимает область  $|x| \leq 1$ , что позволяет избежать перестроения сетки на каждом шаге по времени при численном решении. При этом существенно изменяется только уравнение (1), в котором появляется дополнительный член

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{12R^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) - \xi \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{1}{R} f(\tau) \delta(\xi), \quad |\xi| \leq 1. \quad (6)$$

**Раздел 2.2** посвящен исследованию автомодельных решений задачи гидроразрыва.

Показано, что уравнения задачи гидроразрыва допускают автомодельные решения только степенного и экспоненциального вида. Найдены все преобразования подобия и сдвига по времени параметров задачи, сохраняющие уравнения и построены соответствующие им автомодельные решения степенного и экспоненциального вида соответственно.

Простейшая модель допускает целое семейство автомодельных решений. При объемной скорости закачки  $t^{\alpha-1}$ , реализуются автомодельные решения степенного вида

$$H(x,t) = t^\mu \tilde{H}(x/t^\lambda), \quad P(x,t) = t^{-1/3} \tilde{P}(x/t^\lambda), \quad R(t) = t^\lambda \tilde{R}, \quad (7)$$

где  $\lambda = 1/2(\alpha + 1/3)$ ,  $\mu = 1/2(\alpha - 1/3)$ . При объемной скорости закачки  $e^{\alpha t}$  реализуются автомодельные решения экспоненциального вида

$$H(x,t) = e^{\frac{\alpha}{2}t} \tilde{H}(x/e^{\frac{\alpha}{2}t}), \quad P(x,t) = \tilde{P}(x/e^{\frac{\alpha}{2}t}), \quad R(t) = e^{\frac{\alpha}{2}t} \tilde{R} \quad (8)$$

Модель с учетом трещиностойкости в общем случае допускает единственное автомодельное решение вида (7) при  $\alpha = 1$ , а модель с учетом лага и вовсе не допускает автомодельных решений.

Однако для двух последних моделей складывается принципиально иная ситуация при вырождении задачи по управляющим

параметрам  $K$  и  $T$ . Действительно, при вырожденном значении  $T$  в модели с учетом лага, становится возможным решение вида (7) при  $\alpha=1$ , а в случае вырождения обоих параметров  $K$  и  $T$  обе модели допускают любое из решений (7), (8). Случаи вырождения интересны не только сами по себе, но и как асимптоты режимов развития трещины при произвольных величинах параметров. Действительно, определяющие параметры  $K$  и  $T$  могут быть выражены через характерные величины времени развития трещины и объемной скорости закачки

$$K = K_{lc} / E^{3/4} \eta^{1/4} Q^{*1/4}, \quad T = T_0 t^{*1/3} / E^{2/3} \eta^{1/3}.$$

Откуда ясно, что с течением времени и изменением скорости нагнетания жидкости разрыва в трещину поведение трещины изменяется, приближаясь к режиму с вырожденными значениями одного или обоих параметров.

Рассмотрены все случаи вырождения задач по параметрам и соответствующие им асимптотические и промежуточно-асимптотические автомодельные режимы. Указаны физически содержательные случаи вырождения.

**Раздел 2.3** посвящен построению численного решения задачи о росте трещины ГРП с начальными условиями.

Для всех трех моделей решение ищется при помощи неявной консервативной разностной схемы, при этом на каждом шаге по времени необходимо решать систему нелинейных уравнений, полученных аппроксимацией интегро-интерполяционным методом уравнения (6). Кроме того, в систему входят уравнения, позволяющие определить длину трещины. Для простейшей модели – аппроксимация глобального условия баланса массы жидкости, для модели с учетом трещиностойкости – аппроксимация критерия Ирвина (3). В модели с лагом необходимо вычислять и длину области занятой жидкостью и длину трещины, поэтому в систему входят оба уравнения.

В простейшей модели и модели с учетом трещиностойкости система нелинейных уравнений решается относительно величин раскрытия  $H$  на новом шаге по времени, а величины давления  $P$  определяются интегрированием соотношения (2). Недостатком

такого подхода является ухудшение обусловленности задачи из-за наличия в (2) интеграла типа Коши от производной раскрытия  $H$ . Однако использование в качестве первичных переменных значений давления  $P$  в этих моделях невозможно, поскольку наличие бесконечного давления в носике трещины не позволяет использовать соотношение обратное (2)

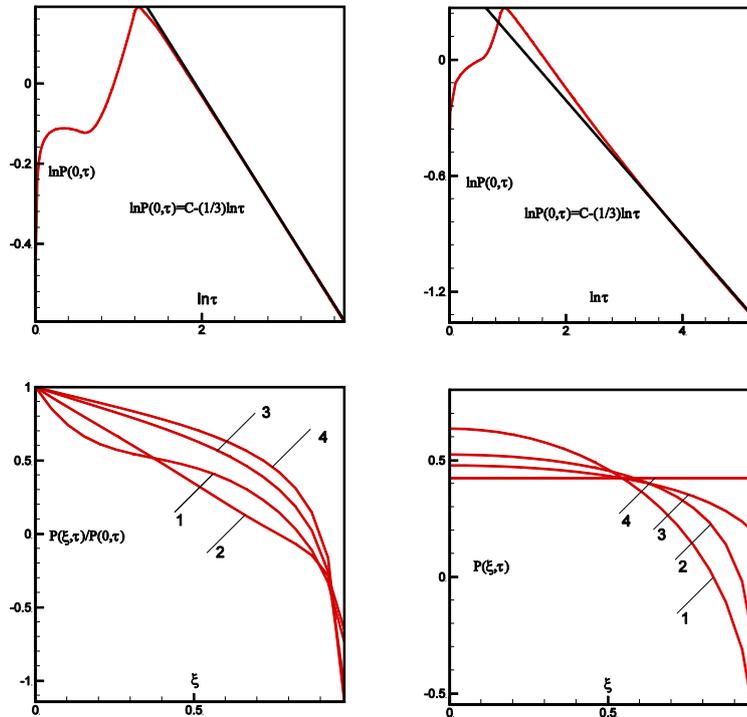
$$H(\xi, \tau) = \frac{2R}{\pi} \int_0^{L/R} F(\xi R/L, \xi' R/L) P(\xi, \tau) d\xi', \quad (9)$$

$$F(\alpha, \beta) = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\alpha^2} - \sqrt{1-\beta^2}} \right|.$$

В модели с учетом лага давление нигде не обращается в бесконечность, поэтому  $P$  используется в качестве первичной переменной, а  $H$  вычисляется интегрированием (9). Результаты расчетов показывают, что именно такая схема является наиболее эффективной.

В разделе 2.4 приводятся результаты моделирования. Построенные в разделе 2.2 автомодельные решения являются полуаналитическими, поскольку для них удается явно получить только автомодельные переменные. В предшествующих работах для получения профилей  $P$  и  $H$  в исходной системе уравнений переходят к автомодельным переменным, в результате чего получалась система обыкновенных дифференциальных уравнений, численное решение которых сопоставимо по сложности с решением исходной задачи. В настоящей диссертации используется другой подход. В разделе 2.2 установлено, что решение полной задачи с начальными условиями во всех случаях забывает начальные данные и становится автомодельным, таким образом, профили  $P$  и  $H$  получаются после выхода решения на автомодельный режим. При этом, поскольку для всех случаев установлено, какой именно из режимов (7) и (8) должен реализоваться, то для проверки правильности численного решения можно использовать не только сам факт выхода на автомодельность, но и конкретный вид автомодельных переменных.

На рис. 2 а) и 2 б) представлены графики  $P(0, \tau)$  зависимости давления на входе в трещину от времени для расчета по простейшей модели и модели с учетом трещиностойкости соответственно. Скорость закачки жидкости линейно возрастает со временем. Графики представлены в логарифмических координатах.



**2. Результаты моделирования роста трещины:  $P(0, \tau)$  при выходе на а) автомодельное решение б) предельный автомодельный режим;  $P(\xi, \tau)$  при с) выходе на автомодельное решение д) остановке роста.**

В случае 2 б) уравнения задачи не допускают автомодельного решения, поэтому выход на автомодельность (линейный участок графика) затягивается по времени по сравнению с 2 а).

На рис. 2 с) представлены профили давления, которые реализуются в процессе выхода решения на автоматический режим. Нумерация соответствует порядку их появления. Профили, следующие за 4, практически не отличаются от него в автоматических переменных.

Принципиальным отличием модели с учетом трещиностойкости от простейшей модели является возможность остановки роста трещины. На рис. 2 d) представлены профили давления, реализующиеся в решении после прекращения закачки. Рост прекращается, давление выравнивается по всей длине, кроме носика, трещина принимает форму эллипса в полном соответствии с результатами классического решения задачи о раскрытии трещины под действием постоянного давления.

Учет в модели наличия лага, оказывает существенное влияние на решение на начальном этапе развития трещины, а также при заданном постоянном давлении на входе, т.е. в тех случаях, когда лаг занимает существенную часть трещины.

### **Третья глава**

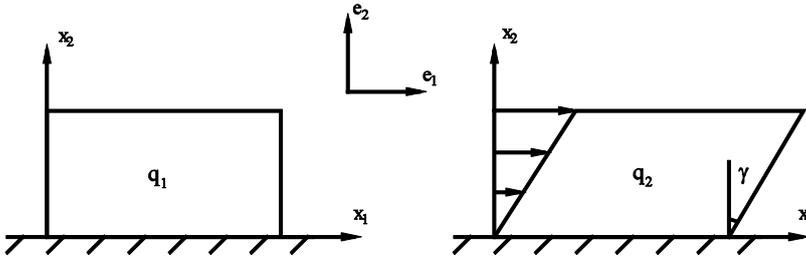
В третьей главе исследуется задача о возникновении системы параллельных трещин в изначально однородном упругопластическом теле, подвергающемся деформации простого сдвига. Предполагается, что зарождение системы трещин происходит в местах локализации пластических деформаций, возникающих при потере устойчивости в механической системе. Под системой здесь и далее понимается совокупность тела, наложенных на него кинематических связей и приложенных усилий.

В разделе 3.1 описывается специальное испытательное устройство, предназначенное для исследования деформации простого сдвига. Схема деформации упругопластического образца, помещенного в устройство, представлена на рис. 3. Процесс деформирования рассматривается как последовательность равновесных конфигураций  $q_i$ , переходящих одна в другую в результате бесконечно медленного деформирования. Обозначим через  $\mathbf{x}$  радиус-векторы точек тела в конфигурации  $q_1$ , а через  $\mathbf{r}$  радиус-векторы в

конфигурации  $q_2$ . Однородная деформация простого сдвига при переходе из  $q_1$  в  $q_2$  задается отображением

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} + \gamma \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = \mathbf{x} + \gamma x_2 \mathbf{e}_1,$$

здесь  $\gamma$  – параметр, задающий угол сдвига, при переходе из  $q_1$  в  $q_2$ , а  $x_2$  – компонента вектора  $\mathbf{x}$ , отвечающая  $\mathbf{e}_2$ .



### 3. Схема деформации упругопластического образца.

Упругопластическое поведение образца на малых смещениях  $\delta \mathbf{r}$  из положения  $q_2$  описывается кусочно-линейными инкрементальными определяющими соотношениями

$$\delta \mathbf{T} = \begin{cases} \mathbf{C}^p : \delta \mathbf{H}, & \delta \mathbf{H} : \mathbf{S} \geq 0, \quad (\text{область пластичности}) \\ \mathbf{C}^e : \delta \mathbf{H}, & \delta \mathbf{H} : \mathbf{S} \leq 0, \quad (\text{область упругости}) \end{cases}$$

где  $\delta \mathbf{H} \equiv \nabla \otimes \delta \mathbf{r}$  – малые дисторсии,  $\delta \mathbf{T}$  – малые приращения тензора напряжений Пиолы,  $\mathbf{C}^p$  и  $\mathbf{C}^e$  – тензоры четвертого ранга, характеризующие жесткость пластического и упругого откликов материала,  $\mathbf{S}$  – тензор второго ранга, задающий нормаль к гладкой поверхности текучести в пространстве  $\delta \mathbf{H}$ , разделяющей области пластического и упругого поведения материала. На гиперплоскости  $\delta \mathbf{H} : \mathbf{S} = 0$  оба линейных соотношения должны совпадать, не-

обходимым и достаточным условием чего является выполнение соотношения

$$\mathbf{C}^p = \mathbf{C}^e - \theta \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}.$$

Однородная деформация образца продолжается до того момента пока очередное положение  $q_i$  остается устойчивым. В **разделе 3.2** рассматривается определение устойчивости по Друккеру, эквивалентное положительной определенности функционала работы умозрительных сил, уравнивающих механическую систему на малых смещениях  $\delta \mathbf{r}$  из положения равновесия

$$R\{\delta \mathbf{r}\} = \langle \delta \mathbf{T} : \nabla \otimes \delta \mathbf{r} \rangle_B - \langle \delta \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{r} \rangle_{\partial B},$$

здесь и далее треугольные скобки используются для обозначения интеграла по области  $B$  и по границе  $\partial B$ ,  $\delta \mathbf{t}$  – малое приращение внешних усилий, вызванное смещением  $\delta \mathbf{r}$ . Если в ходе процесса деформирования возникает неустойчивость, то существует некоторое устойчивое состояние  $q_*$ , любое следующее за которым неустойчиво. Смещения  $\delta \mathbf{r}$ , доставляющие функционалу отрицательные значения в неустойчивых состояниях, называются формами потери устойчивости, практический интерес представляют только первичные из них, реализующиеся в состоянии  $q = q_* + 0$ .

Для нахождения первичных форм потери устойчивости необходимо конкретизировать определяющие соотношения. В **разделе 3.3** рассматривается мизесово упругопластическое тело. Анализ положительной определенности функционала  $R\{\delta \mathbf{r}\}$  в этом случае показывает, что первичные формы потери устойчивости определяются из условия

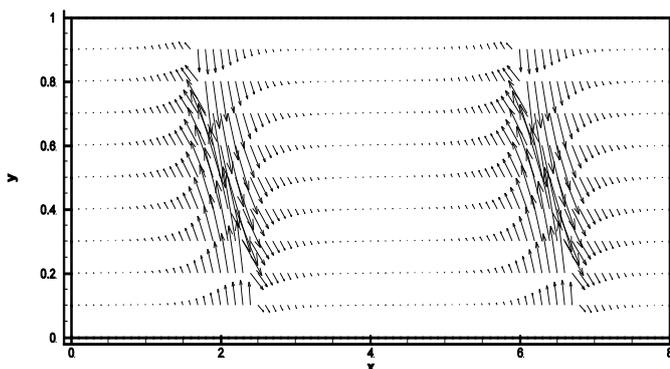
$$\min_{\{\delta \mathbf{r}\}} \frac{\langle \delta \mathbf{H} : \mathbf{C}_* : \delta \mathbf{H} \rangle_B / 2G + \langle (\delta \mathbf{H} : \mathbf{S})^2 \rangle_{B^e} + k(\delta \gamma)^2 / 2G}{\langle (\delta \mathbf{H} : \mathbf{S})^2 \rangle_{B^p}}, \quad (10)$$

$$\mathbf{C}_* = 2G \left( \mathbf{1}^{def} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{S} \otimes \mathbf{S} \right) + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

где  $K$  и  $G$  – упругие модули,  $k(\delta\gamma)^2$  – изменение величины внешних усилий, прикладываемых к испытательному устройству, вызванное смещением из положения равновесия,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга,  $\mathbf{1}^{def}$  – деформационная единица четвертого ранга, двойная свертка которой с тензором второго ранга оставляет только симметричную часть тензора.

**Раздел 3.4** посвящен описанию алгоритма минимизации функционала (10). Искомая форма потери устойчивости в области  $B$  аппроксимируется кусочно-линейной сеточной функцией, заданной на структурированной треугольной сетке. Свойство инвариантности функционала (10) относительно преобразования подобия позволяет свести задачу к поиску минимума функции многих переменных в ограниченной области. Дополнительно при минимизации необходимо учитывать, что по смыслу задачи решение не может быть однородной деформацией. Чтобы избежать тривиального решения в алгоритме используются барьерные функции.

В **разделе 3.5** обсуждаются результаты расчетов. На рис. 4 представлен типичный пример первичной формы потери устойчивости для прямоугольной области  $B$ .



#### 4. Пример смещений в образце при потере устойчивости.

Пластические деформации на рис. 4 реализуются в областях локализации смещений с наибольшей величиной. Характерной

особенностью полученных форм потери устойчивости является периодичность. Решение состоит из нескольких одинаковых частей, повторяющихся с некоторым периодом  $T$  по оси  $x$ , которые разделены узкими полосами с пластическими деформациями. Расчеты показывают, что величина периода  $T$  не зависит от размера сетки. Количество повторяющихся участков определяется соотношением длин сторон  $L_y$  и  $L_x$  прямоугольной области  $B$ . Образец как бы разделяется на части, которые проскальзывают друг относительно друга, что соответствует геологическим представлениям об образовании складчатых структур.

### **Заключение**

В заключении к диссертации подведены итоги работы и сформулированы основные результаты.

### **Основные результаты и выводы**

Исследована задача о росте трещины ГРП с согласованным рассмотрением течения вязкой жидкости в трещине и напряженно-деформированного состояния вмещающей среды. Рассмотрены три модели: простейшая, в которой длина трещины определяется на основании материального баланса жидкости, как в большинстве работ по данной тематике, более общая, в которой длина трещины вычисляется на основе критерия разрушения, как в некоторых современных работах, посвященных исследованию влияния трещиностойкости породы на ГРП, а также наиболее общая, в которой учитывается возможность наличия лага в носике трещины. Лаг редко рассматривается при исследовании ГРП, поскольку экспериментально установлено, что в большинстве случаев он занимает лишь несколько процентов длины трещины. В настоящей диссертации показано, что наличие лага важно сразу по нескольким причинам. Во-первых, при рассмотрении задач с заданным постоянным давлением в скважине, которые особенно актуальны для исследования геофизических процессов в верхних слоях земной коры, учет лага принципиально меняет поведение решения. Во-вторых, постановка с лагом более точно описывает поведение

трещины ГРП на начальных этапах ее развития. В-третьих, при наличии лага не возникает сингулярность в функции давления в носике трещины, что позволяет использовать для численного решения аппроксимацию, приводящую к хорошо обусловленной численной задаче. При этом существенно, что применение численных методов позволило решить задачу с начальными условиями и исследовать выход на асимптотический режим, что было сделано впервые для данного класса задач.

С помощью методов подобия и размерности получены автомодельные решения и установлены управляющие параметры задачи о росте трещины ГРП. Установлено, что решение задачи с начальными условиями достаточно быстро выходит на автомодельный режим, даже в тех случаях, когда система уравнений задачи не допускает автомодельного решения. Для модели с учетом трещиностойкости и лага в практически наиболее важном случае ненулевого горного давления и постоянного потока на входе в трещину решение стремится к автомодельному решению задачи без лага, а при возрастающем потоке к решению для простейшей модели.

Построен алгоритм отыскания первичных форм потери устойчивости упругопластического тела – кинематически допустимых смещений, которые раньше других доставляют отрицательное значение функционалу работы виртуальных внешних сил, уравновешивающих механическую систему при выходе из положения равновесия. Для модели мизесова упругопластического тела алгоритм реализован в виде программы и численно получены первичные формы потери устойчивости, имеющие периодический характер с ярко выраженной локализацией зон пластической деформации в виде узких параллельных полос, что согласуется с результатами многочисленных экспериментальных данных, полученных в лабораторных и естественных условиях. Таким образом, показана принципиальная возможность применения данного подхода для моделирования образования складчатых структур в горных породах.

**Список работ автора по теме диссертации**

- [1] *В. А. Левин, А. Х. Пергамент, Д. А. Улькин* – К постановке трехмерной задачи о трещине гидроразрыва в неоднородном линейно-упругом теле // 7-я всероссийская научно-технической конференции «Актуальные проблемы состояния и развития нефтегазового комплекса России», 2007
- [2] *А. Х. Пергамент, Д. А. Улькин* – Исследование асимптотических режимов развития трещины гидроразрыва // Международная научная конференция «Ломоносовские чтения», 2007
- [3] *А. Х. Пергамент, Д. А. Улькин* – Автомодельные асимптотики в задаче о распространении трещины гидроразрыва в плоскодеформированной среде // Препринт ИПМ №22, Москва, 2007
- [4] *А. Х. Пергамент, Д. А. Улькин* – Метод подобия и размерности в плоской задаче о распространении вертикальной трещины гидроразрыва в упругой среде // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 262-275
- [5] *Д. А. Улькин* – Математическое моделирование первичных форм потери устойчивости разупрочняющихся упругопластических тел // Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», 2009
- [6] *Д. А. Улькин* – Математическое моделирование локализационных форм потери устойчивости разупрочняющихся упругопластических тел // Международная научная конференция «Ломоносовские чтения», 2009
- [7] *Д. А. Улькин* – Моделирование первичных форм потери устойчивости упругопластических тел при однородном сдвиге // Математическое моделирование, 22:12, С. 103–114, 2010