На правах рукописи

Зенюк Дмитрий Алексеевич

Моделирование фрактальной динамики и идентификация стохастических дифференциальных уравнений в задачах анализа нестационарных временных рядов

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Научный руководитель:	**Юрий Николаевич Орлов** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, и.о. заведующего отделом № 6 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
Официальные оппоненты:	**Сакбаев Всеволод Жанович** доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института (г. Москва)
	Зарипова Эльвира Ринатовна кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов (г. Москва)
Ведущая организация:	Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (г. Москва)

Защита состоится «____» _______________ 2016 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при ИПМ им. М. В. Келдыша РАН по адресу 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М. В. Келдыша РАН или на официальном сайте диссертационного совета по адресу http://keldysh.ru/council/3/.

Автореферат разослан «____» _______________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.024.03
кандидат физико-математических наук М. А. Корнилина

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Анализ динамических процессов, представленных временными рядами, является важнейшей частью многих прикладных исследований. Для многих сложных систем (как, например, для финансовых рынков) анализ порождаемых ими временных рядов является, по сути, единственным подходом, позволяющим провести адекватное исследование. В настоящее время одной из наиболее актуальных задач в этой области является развитие адекватных методов статистического анализа нестационарных временных рядов. Эти методы должны существенно отличаться от приемов работы со стационарными случайными процессами, нашедших широкое применение в инженерно-технических приложениях.

На сегодняшний день существует несколько подходов к проблеме анализа нестационарных рядов, опирающихся на различный математический аппарат. В первую очередь, здесь нужно отметить интегрированные модели авторегрессии и скользящего среднего ARIMA, а также авторегрессионные модели с условной гетероскедастичностью ARCH. Активно используются сингулярный спектральный анализ SSA и методы имитации повторных выборочных совокупностей.

Следует подчеркнуть, что применение большинства из этих процедур строго обосновано только для стационарных временных рядов или нестационарных временных рядов специальной формы (например, с полиномиальным трендом), и асимптотические критерии, гарантирующие увеличение точности статистических выводов с увеличением объема выборочной совокупности, в общем случае не справедливы. Некоторые популярные методы вообще не могут быть применены к нестационарным временным рядам, поскольку существенно искажают зависимость характеристик подлежащего стохастического процесса от времени.

В работе [1] был предложен оригинальный подход к проблеме анализа нестационарных временных рядов, опирающийся на формализм кинетических уравнений, описывающих эволюцию конечномерных эмпирических функций распределения, соответствующих наблюдаемому временному ряду. Подробно были исследованы ограничения применения этого метода, оптимальный выбор классовых интервалов для построения рассматриваемых эмпирических функций распределения, оптимальный выбор объема данных, подвергаемых анализу (с помощью т.н. горизонтных статистик), описана иерархия прогностических моделей для временных рядов и общие методы оценки параметров этих моделей. В частности, метод прогнозирования значений временного ряда, основанный на использовании уравнения адвекции — диффузии (Фоккера — Планка) был применен для анализа динамики различных

[1] Орлов Ю. Н., Осминин К. П. Нестационарные временные ряды. 2011.

финансовых и сырьевых рынков

В последние десятилетия неослабевающий интерес привлекают разнообразные приложения дифференциальных уравнений с производными дробного порядка (см., например, [2–4] и цитированную там литературу). В 40-е гг. А. Н. Герасимовым, Г. Скоттом-Блэром и Ю. Н. Работновым были проведены обширные исследований свойств вязкоупругих материалов, в ходе которых было продемонстрировано, что в волокнистых полимерах механическое напряжение может быть представлено в виде дробной производной Римана — Лиувилля от деформации, причем дробный показатель определяется реальными физическими свойствами этих материалов. В середине 20 в. Ф. Маинарди и М. Капуто показали, что использование дифференциальных уравнений с дробными производными для построения моделей термовязкоупругости более адекватно из физических соображений и позволяет более точно воспроизводить экспериментально наблюдаемые данные. Аппарат уравнений с дробными производными активно применяется для исследования аномальных диффузионных процессов, характеризующихся сильной пространственной нелокальностью и наличием эффекта памяти. Это направление исследований получило развитие в работах Р. Метцлера, Р. Хильфера, И. Подлюбного, Р. Горенфло, А. А. Килбаса и др.

В рамках изучения аномальной диффузии, в частности, было показано, что фундаментальные решения задачи Коши для определенного уравнения с производными дробного порядка по временному и пространственному переменным представляют собой плотности распределения случайных величин. В связи с этим представляется вполне естественной попытка соединить упомянутый выше кинетический подход с идеями дробного анализа. Актуальность такого исследования объясняется тем, что использование богатого арсенала методов дробного исчисления позволит существенно обобщить кинетический метод и предложить новые методы статистического анализа нестационарных временных рядов и оценки параметров стохастических моделей, порождающих их.

Основные цели и задачи работы:

1° исследование вопроса о представлении функций распределения случайных величин интегралами дробного порядка;

2° построение и обоснование эволюционной модели нестационарного временного ряда, а также метода оценки параметров этой модели по наблюдаемым выборочным траекториям;

[2] Podlubny I. Fractional differential equations. 1999.

[3] Applications of fractional calculus in physics / Ed. by R. Hilfer. 2000.

[4] Zaslavsky G. M. // Physics Reports. 2002. **371**:6.

3° программная реализация разработанных методов численного анализа временных рядов и применение этих методов к реальным временным рядам;

4° построение алгоритма случайного блуждания на детерминированных фрактальных множества.

Методы исследования. В работе использовались общие методы статистического анализа временных рядов, методы классического и дробного анализа, аналитические и численные методы анализа уравнений с дробными производными, а также аппарат теории случайных процессов. Помимо этого, в рамках задачи построения случайного блуждания на фрактальных множествах использовался метод итерированных сжимающих отображений.

Научная новизна. В настоящей работе впервые исследован вопрос о представлении функций распределения случайных величин односторонними дробными интегралами Римана — Лиувилля. С помощью аппарата классического и дробного анализа получены простые достаточные условия, накладываемые на дробные аналоги функций плотности, и новые свойства последних, которые существенно отличаются от привычных свойств обычных функций плотности.

Разработаны новый подход к определению случайного блуждания на детерминированных фрактальных множествах в терминах случайных последовательностей и численная схема, позволяющая получать выборочные траектории этого случайного блуждания. Опираясь на результаты Дж. Хатчинсона и М. Барнсли [5, 6] о системах итерированных сжимающих отображений, было показано, что развитый метод может быть применен к весьма широкому классу регулярных фрактальных множеств.

Предложена модель эволюции эмпирических квантилей функции распределения временного ряда, использующая производные дробного порядка, накладывающая минимальные ограничения на характеристики (в частности, на асимптотическое поведение распределения и существование моментов) этого временного ряда. Описана общая схема оценки параметров этой модели. На основе программной реализации разработанных вычислительных методов проведено тестирование алгоритма на практических примерах.

Обоснованность и достоверность результатов. Достоверность изложенных в работе результатов подтверждается использованием строгих математических доказательств и рассуждений и апробированных в научной практике методов численного анализа.

Практическая значимость работы. Развитые в работе методы, примыкая к классическим техникам статистического анализа, предоставляют новый

[5] Hutchinson J. E. // Indiana University Mathematics Journal. 1981. **30**:5

[6] Barnsley M. F., Demko S. // Proc. R. Soc. A. 1985. **399**:1817.

инструмент для изучения различных систем, эволюция которых описывается временными рядами, и позволяют исследовать широкий класс практически важных задач. Численные схемы, предложенные в работе и реализованные в виде исполняемого кода, могут лечь в основу программных комплексов, предназначенных для автоматического анализа временных рядов. Результаты работы использованы в рамках исследований, поддержанных грантом РФФИ 13-01-00617 «Исследование новых типов и механизмов самоорганизации. Разработка алгоритмов анализа и прогноза динамики нелинейных систем».

Апробация работы. Результаты, изложенные в работе, докладывались и обсуждались на семинаре по математической физике ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, а также на следующих конференциях: «Математическое моделирование и вычислительная физика», Дубна, 2013; «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Долгопрудный, 2013; «Синергетика в общественных и естественных науках», Тверь, 2015.

Публикации и личный вклад автора. Результаты исследования представлены в пяти печатных работах, из которых три опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук. В работах, опубликованных в соавторстве, лично соискателем выполнены: реализация модели случайных блужданий на фрактальных множествах; вывод достаточных условий представления распределений дробными интегралами; вывод уравнения эволюции эмпирических квантилей; разработка численного алгоритма оценки параметров эволюционного уравнения; вычислительные эксперименты. Все основные результаты диссертационного исследования, выносимые на защиту, получены лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, приложения и заключения. Результаты исследования изложены на 78 страницах с использованием 38 рисунков. Библиографический список состоит из 127 наименований.

На защиту выносятся:

1° модель нестационарного временного ряда, основанная на уравнении эволюции квантилей его выборочной функции распределения, удовлетворяющей уравнению типа адвекции — диффузии с дробными производными;

2° алгоритм построения случайного блуждания на детерминированных фрактальных множествах и его численная реализация;

3° программная реализация процедуры оценки параметров эволюционной модели по наблюдаемому временному ряду.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, дан краткий обзор существующих подходов к обозначенной проблеме, указаны общие сведения о работе, приведен перечень результатов, выносимых на защиту.

В **первой главе** рассматриваются общие вопросы дробного исчисления и его приложений. Параграфы 1.1 и 1.2 носят вводный характер: в них приводятся основные свойства интегралов и производных дробного порядка в различной форме, подходы к их геометрической и физической интерпретации, а также примеры приложения дифференциальных уравнений с дробными производными к некоторым естественнонаучным и инженерным задачам. В параграфе 1.3 исследуется вопрос о представлении функций распределения абсолютно непрерывных случайных величин односторонними дробными интегралами Римана — Лиувилля.

Непосредственным вычислением (например, для функции плотности распределения Симпсона) легко установить, что односторонний интеграл Римана — Лиувилля произвольного порядка от неотрицательной функции как функция верхнего предела не является монотонным, а значит, в общем случае не может определять функцию распределения случайной величины — на функцию плотности должны быть наложены некоторые дополнительные ограничения. Пусть функция распределения определена как

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a, \\ \left(I^{\alpha}_{a+}\, p\right)(x) & x \in (a, b], \\ 1 & x > b, \end{cases} \tag{1}$$

где a и b конечны. Если функция распределения F известна, то на $(a, b]$ соответствующая ей функция p является ее производной порядка α.

В работе были получены простые достаточные условия, при которых конструкция (1) корректно определяет функцию распределения. При $\alpha \geqslant 1$ классу функций, играющих роль плотности в (1), принадлежат ограниченные кусочно-непрерывные неотрицательные функции (что, в целом, совпадает с обычными требованиями к функции плотности); в случае же $0 < \alpha < 1$ в этот класс входят неубывающие функции с ограниченной кусочно-непрерывной производной, такие что $p(a) \geqslant 0$. Это следует из выражения для приращения функции F на $(a, b]$

$$\Gamma(\alpha+1)\Delta F = p(a)[\mathrm{k}_{\alpha}(x+\Delta x, a) - \mathrm{k}_{\alpha}(x, a)] + \\ + \int_a^x p'(\xi)[\mathrm{k}_{\alpha}(x+\Delta x, \xi) - \mathrm{k}_{\alpha}(x, \xi)]d\xi + \int_x^{x+\Delta x} p'(\xi)\mathrm{k}_{\alpha}(x+\Delta x, \xi)d\xi,$$

где $\mathrm{k}_\alpha(x,\xi) = (x-\xi)^\alpha$ и $\Delta x > 0$.

Следует подчеркнуть, что при некоторых значениях α функции p могут принимать в том числе и отрицательные значения, поскольку знак дробной производной функции не связан с характером монотонности этой функции. Таким образом, неотрицательность подынтегральной функции не является ни необходимым, ни достаточным условием для корректного представления функции распределения дробным интегралом Римана — Лиувилля.

Поведение плотностей, соответствующих (1), в окрестности точки b существенно зависит от значения α. Так, при $0 < \alpha < 1$ на $(a, b]$ справедливо представление

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{F(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{F'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\alpha} \right].$$

Поскольку F неубывает, найдется по крайней мере один отрезок внутри $[a, b]$, на котором $F' > 0$ (используемое представление справедливо только для абсолютно непрерывных подынтегральных функций). Тогда сумма в правой части

$$p(b) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{F(a)}{(b-a)^\alpha} + \int_a^b \frac{F'(\xi)d\xi}{(b-\xi)^\alpha} \right].$$

является строго положительной, т.е. при $0 < \alpha < 1$ не существует плотностей, которые принимали бы нулевые значения на обоих концах отрезка $[a, b]$. При $\alpha > 2$ это уже не так: значение $p(b)$ здесь зависит от направления выпуклости функции F и поведения ее производных более высокого порядка и, вообще говоря, может быть любым, в том числе и равным нулю.

Рассмотренные построения могут быть распространены на случай функций с неограниченным носителем, если дополнительно потребовать, чтобы p надлежащим образом убывала на бесконечности. Следует отметить, что при рассмотрении функций распределения, представимых дробными интегралами Римана — Лиувилля, предварительный выбор носителя функции плотности имеет существенное значение. Например, функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -1, \\ (x+1)/2 & x \in (-1, 1], \\ 1 & x > 1, \end{cases}$$

может быть представлена дробными интегралами от двух неэквивалентных функций с носителями $[-1, 1]$ и $[-1, +\infty)$. Причина такой неоднозначности заключается в том, что дробная производная Римана — Лиувилля нецелого порядка от постоянной отлична от нуля.

Отмеченные нестандартные свойства функций, допускающих корректное представление распределений в виде односторонних дробных интегралов, делают весьма затруднительным использование подобных конструкций в прикладных задачах. Например, привычная оценка плотности распределения с помощью относительных частот (гистограмма) может оказаться неприменимой при заданном нецелом α, поскольку, как уже отмечалось выше, неотрицательность еще не гарантирует, что выражение типа (1) будет корректно определять функцию распределения. Поэтому в дальнейшем будет использоваться обычный подход к определению функций распределения.

Вторая глава посвящена рассмотрению некоторых моделей случайного блуждания, которые могут в том или ином смысле описывать фрактальную динамику.

В параграфе 2.1 описан новый подход к построению случайного блуждания на регулярных фрактальных множествах. В качестве основного примера рассматривается симметричное множество Кантора. Случайное блуждание на нем может быть описано как случайный процесс с дискретным временем

$$\eta_t = (1-\beta)\sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \xi_t^{(k)}, \tag{2}$$

где β — геометрический параметр множества Кантора, а $\xi_t^{(k)}$ — дискретные случайные величины с распределением Бернулли, принимающие лишь два значения: 0 или 1. Один из простейших вариантов случайного блуждания можно получить, считая, что $\xi_t^{(k)}$ при любом фиксированном k образуют однородную цепь Маркова, и при любом фиксированном t случайные величины $\xi_t^{(k_1)}$ и $\xi_t^{(k_2)}$ независимы. Для такой модели были получены аналитические выражения для основных характеристик случайного блуждания:

$$P_1(t) = \frac{p_{10}}{p_{01}+p_{10}} + \frac{p_{01}}{p_{01}+p_{10}}(\operatorname{tr}\Pi - 1)^t, \;\; P_2(t) = 1 - P_1(t),$$

$$\mathbf{E}\left[\eta_t\right] = (1-\beta)\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^k \mathbf{E}\left[\xi_t^{(k)}\right] = P_2(t),$$

$$\mathbf{D}\left[\eta_t\right] = (1-\beta)^2\sum_{k=0}^{+\infty}\beta^{2k} \mathbf{D}\left[\xi_t^{(k)}\right] = P_1(t)P_2(t)\frac{1-\beta}{1+\beta},$$

$$K_\eta(t,\tau) = \begin{cases} p_{11}P_2(\min\{t,\tau\})\dfrac{1-\beta}{1+\beta} - P_2(t)P_2(\tau) & |t-\tau| = 1, \\ P_1(t)P_2(t)\dfrac{1-\beta}{1+\beta} & |t-\tau| = 0, \\ 0 & |t-\tau| > 1. \end{cases}$$

Здесь p_{ij} — вероятность перехода (за один шаг) из i-го состояния в j-е. Процесс (2) будет строго стационарным, если $\operatorname{tr}\Pi = 1$, где Π — матрица переходных вероятностей.

Естественным обобщением описанной конструкции является случайное блуждание, где $\xi_t^{(k)}$ образуют неоднородную цепь Маркова, т.е. вероятности переходов зависят от времени t. Таким же образом можно ввести явную зависимость переходных вероятностей от положения символа в последовательности. Манипулируя величинами переходных вероятностей, можно получать выборочные траектории с заданными свойствами (см., например, рис. 1 и 2).

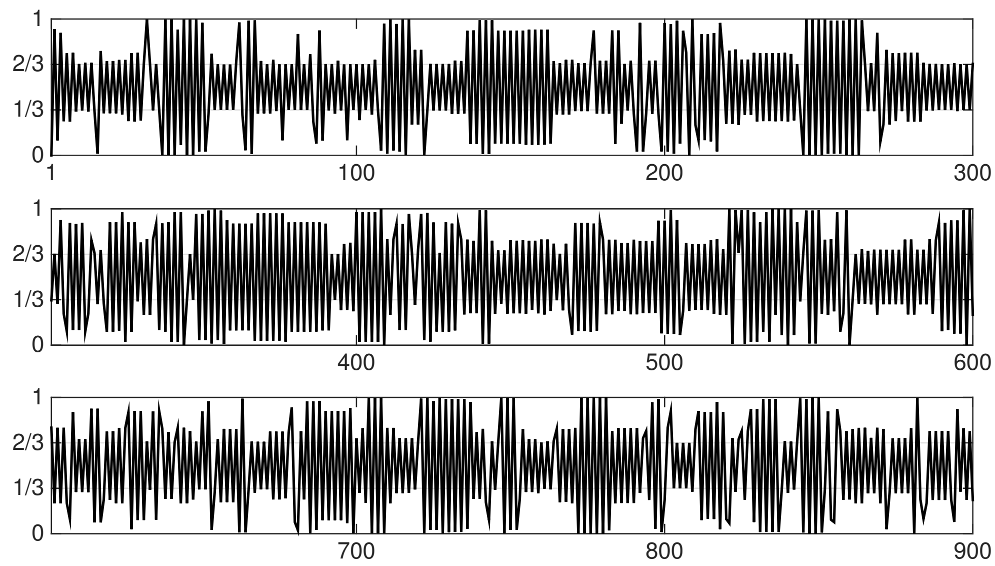

Рис. 1. Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с вероятностями сохранения символов $p_{00} = 0.1$, $p_{11} = 0.1$

Предложенный метод может быть обобщен на случай фрактальных множеств с более сложной геометрией, которые могут быть получены с помощью некоторой системы сжимающих отображений. Класс таких множеств достаточно широк и включает в себя многие известные фрактальные структуры. Например, подерный треугольник Серпинского порождается системой из трех сжимающих отображений на плоскости:

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta \\ \cos\beta\sin\beta & -\cos^2\beta \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

$$\psi_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos^2\gamma & -\cos\gamma\sin\gamma \\ -\cos\gamma\sin\gamma & -\cos^2\gamma \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin^2\gamma \\ \cos\gamma\sin\gamma \end{pmatrix},$$

$$\psi_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cos(\gamma-\beta) & \cos\alpha\sin(\gamma-\beta) \\ \cos\alpha\sin(\gamma-\beta) & \cos\alpha\cos(\gamma-\beta) \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sin^2\gamma \\ \cos\gamma\sin\gamma \end{pmatrix},$$

где α, β и γ — острые углы при вершинах исходного треугольника. Случайное блуждание на таких фрактальных множествах может быть описано в терминах случайных последовательностей над алфавитом из m символов, где m —

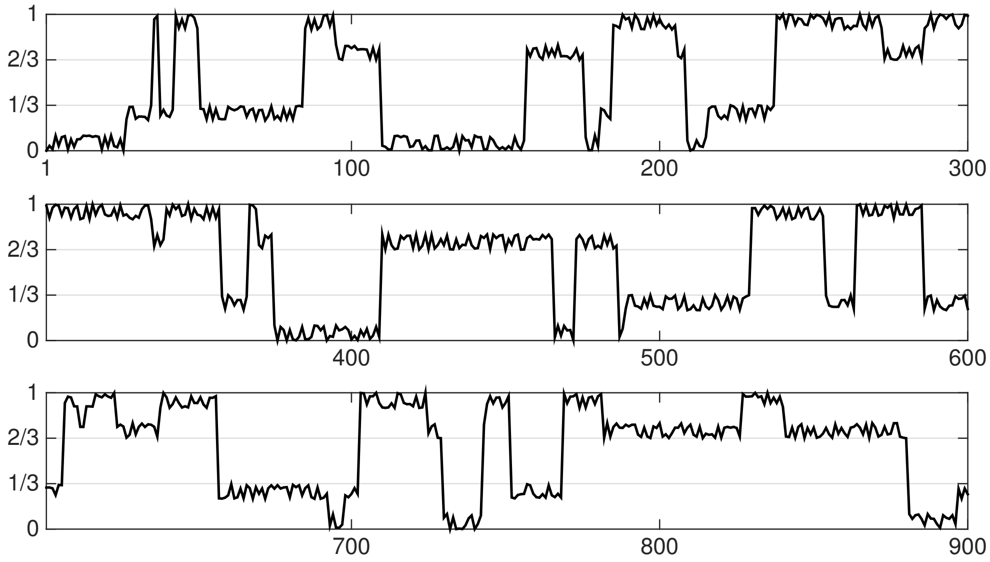

Рис. 2. Траектория случайного блуждания на тернарном множестве Кантора с переходными вероятностями, зависящими от положения символа в последовательности

количество отображений; эту последовательность следует интерпретировать как порядок применения конкретных отображений к некоторой фиксированной точке.

В параграфе 2.2 рассматриваются случайные блуждания, ассоциированные с уравнением адвекции — диффузии дробного порядка

$$\left({}_t\mathcal{D}^{\beta}_{0+}\, p\right)(x,t) = A\frac{\partial p}{\partial x} + B\left({}_xD^{\alpha}_{\theta} p\right)(x,t), \tag{3}$$

параметры которого подчинены следующим ограничениям:

$$0 < \beta \leqslant 1,\ 0 < \alpha \leqslant 2,\ |\theta| \leqslant \min\{2, 2-\alpha\},\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}^+.$$

Здесь ${}_t\mathcal{D}^{\beta}_{a+}$— дробная производная Герасимова — Капуто по временному переменному, а ${}_xD^{\alpha}_{\theta}$ — производная Рисса — Феллера по пространственному переменному (см. [7, 8]). После обобщения численной схемы, предложенной в работе [9], были получены примеры выборочных траекторий описываемого случайного блуждания при различных значениях параметров.

В **третьей главе** предложена эволюционная модель дробного порядка для временного ряда и рассматривается задача оценки параметров этой модели по наблюдаемому временному ряду.

[7] Самко С. Г. и др. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. 1987.
[8] Mainardi F. et al. // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2001. **4**:2.
[9] Gorenflo R. et al. // Chemical Physics. 2002. **284**:1.

В параграфе 3.1 вводится уравнение эволюции эмпирических квантилей и описывается метод получения оценок входящих в него величин. Пусть $Q_\gamma(t)$ — квантиль порядка γ распределения с плотностью $p(x,t)$. Тогда, в предположении, что эволюция функции плотности описывается уравнением типа (3), эволюция самого квантиля подчиняется уравнению

$$\frac{dQ_\gamma}{dt}p(Q_\gamma(t),t) - \int_{\infty}^{Q_\gamma(t)} \frac{\partial j}{\partial x}dx = \frac{dQ_\gamma}{dt}p(Q_\gamma(t),t) - j(Q_\gamma(t),t) = 0, \qquad (4)$$

где плотность потока вероятности j имеет вид

$$j(x,t) = A(x,t)p(x,t) - BU_{\alpha,\theta}(x,t), \qquad (5)$$

а форма диффузионного слагаемого зависит от значения α:

$$U_{\alpha,\theta}(x,t) = \begin{cases} \left(c_+ \left({}_xI_{a+}^{1-\alpha}\, p\right)(x,t) - c_- \left({}_xI_{b-}^{1-\alpha}\, p\right)(x,t)\right) & 0<\alpha<1, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(c_+ \left({}_xI_{a+}^{2-\alpha}\, p\right)(x,t) + c_- \left({}_xI_{b-}^{2-\alpha}\, p\right)(x,t)\right) & 1<\alpha<2. \end{cases}$$

Конвективный коэффициент $A(x,t)$ в рамках кинетического подхода к описанию нестационарных временных рядов должен описывать «скорость дрейфа» эмпирических частот в соседних классовых интервалах (или аналогичную характеристику в случае непрерывной оценки эмпирической плотности) с течением времени. В [1] было показано, что

$$A(x,t)p(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} vp_2(x,v,t)dv,$$

где $p_2(x,v,t)$ — совместное распределение рассматриваемого временного ряда и его первых разностей.

Уравнение (4) незамкнуто в том смысле, что оно не может быть решено относительно Q_γ, если неизвестна функция плотности p. Однако, если считать, что это уравнение описывает эволюцию эмпирических характеристик временного ряда, то вместо неизвестной функции плотности p можно использовать ее оценку, построенную по наблюдаемым данным (в виде гистограммы или, например, оценки Розенблатта — Парзена с полиномиальными ядерными функциями). Величину плотности потока после этого можно получить, подставляя оценку функции плотности в аналитическое выражение (5) и вычисляя возникающие выражения в явном виде.

После перехода к эмпирическим уравнениям эволюции квантилей процедура оценки параметров α, θ и B может быть реализована с помощью минимизации отклонения решений этих уравнений от реально наблюдаемых квантилей временного ряда — такой подход широко используется для реконструкции параметров динамических систем (см., например, [10, 11]). Целевая функция, подлежащая оптимизации, обычно выбирается в виде суммы квадратов отклонений, так что предлагаемая процедура сводится к нахождению оценок по методу наименьших квадратов:

$$(\alpha^*, \theta^*, B^*) = \underset{(\alpha,\theta,B)\in\Omega}{\arg\min}\, \rho(\alpha, \theta, B), \tag{6}$$

$$\rho(\alpha, \theta, B) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(q_{\gamma_k}(t+1) - Q_{\gamma_k}(t+1)\right)^2}, \tag{7}$$

$$Q_{\gamma_k}(t+1) = q_{\gamma_k}(t) + \frac{\hat{\jmath}(q_\gamma(t), t)}{\hat{p}(q_\gamma(t), t)}$$

Здесь q_γ — наблюдаемые значения квантилей; Q_γ — решения уравнений эволюции квантилей; $\hat{\jmath}(x, t)$ — аппроксимация плотности потока вероятностей, получаемая после подстановки в выражение (5) оценки плотности распределения $\hat{p}(x, t)$; n — количество используемых в схеме квантилей. Все входящие в (7) оценки вычисляются по непересекающимся сегментам временного ряда длины L. Экстремальная задача (6) решалась с помощью исчерпывающего поиска. Заметим, что использование квантилей придает процедуре некоторую численную устойчивость, поскольку они нечувствительны к единичным выбросам.

В параграфе 3.2 приведены результаты применения описанной процедуры к нескольким временным рядам: были проанализированы временные ряды, образованные котировками акций крупнейших российских корпораций и некоторыми другими финансовыми инструментами, а также траектории фрактального броуновского движения.

Было показано, что для траекторий фрактального броуновского движения оценки параметра α тесно группируются вблизи назначенного значения показателя Херста (см. рис. 3). Аналогичное поведение наблюдалось при изменении управляющих параметров алгоритма (см., например, рис. 4), что можно считать косвенной верификацией предложенной численной процедуры.

На рис. 5 приведены результаты для временного ряда котировок (с минутными интервалами за период с 8 января по 3 мая 2013 г.) акций ПАО Сбербанк России. Использовалась схема с тремя квартилями при $L = 750$. Видно, что в некоторых случаях для некоторых сегментов оценкой параметра B было нулевое значение. Это означает, что наименьшее уклонение от наблюдаемых

[10] Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Extracting knowledge from time series. 2010.
[11] Isermann R., Münchhof M. Identification of dynamic systems. 2011.

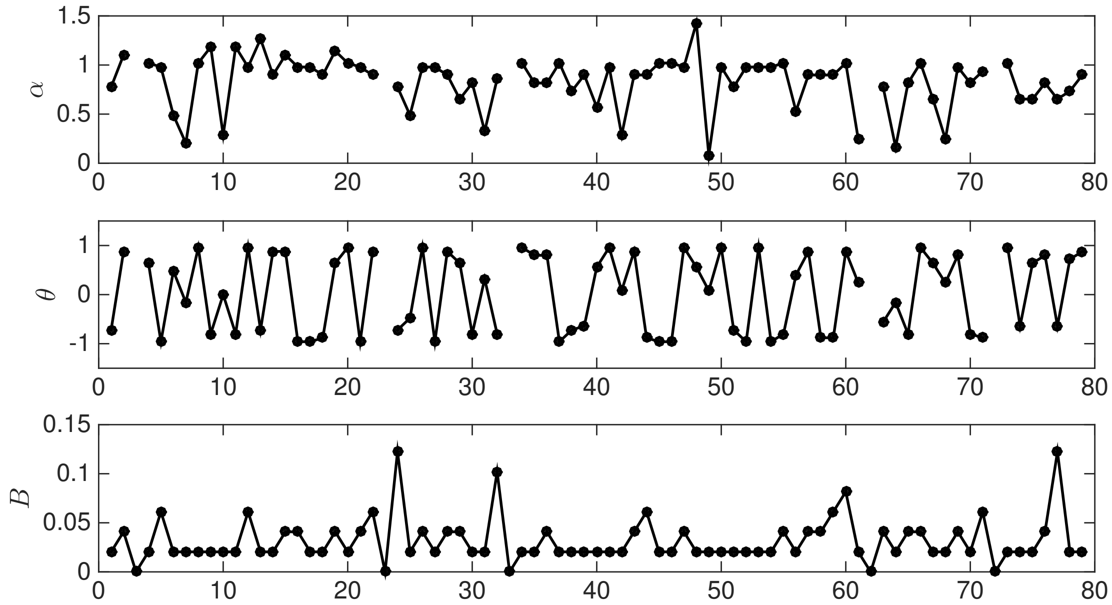

Рис. 3. Оценки параметров для траектории фрактального броуновского движения с показателем Херста $\mathbb{H} = 0.8$ при $L = 750$

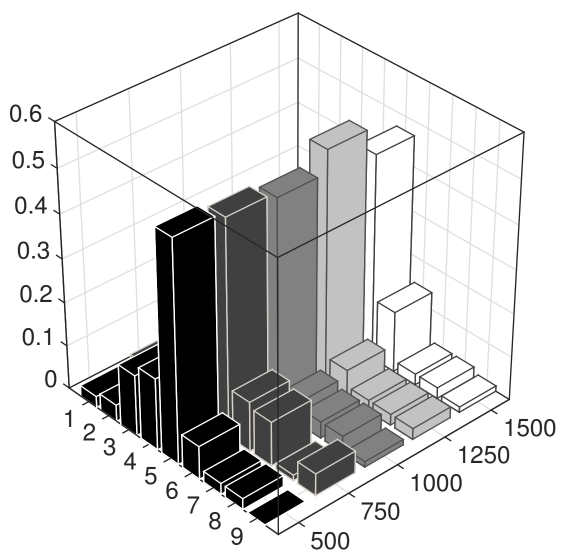

Рис. 4. Распределение оценок параметра α по 9 классовым интервалам при различных длинах сегмента L для фрактального броуновского движения с $\mathbb{H} = 0.8$

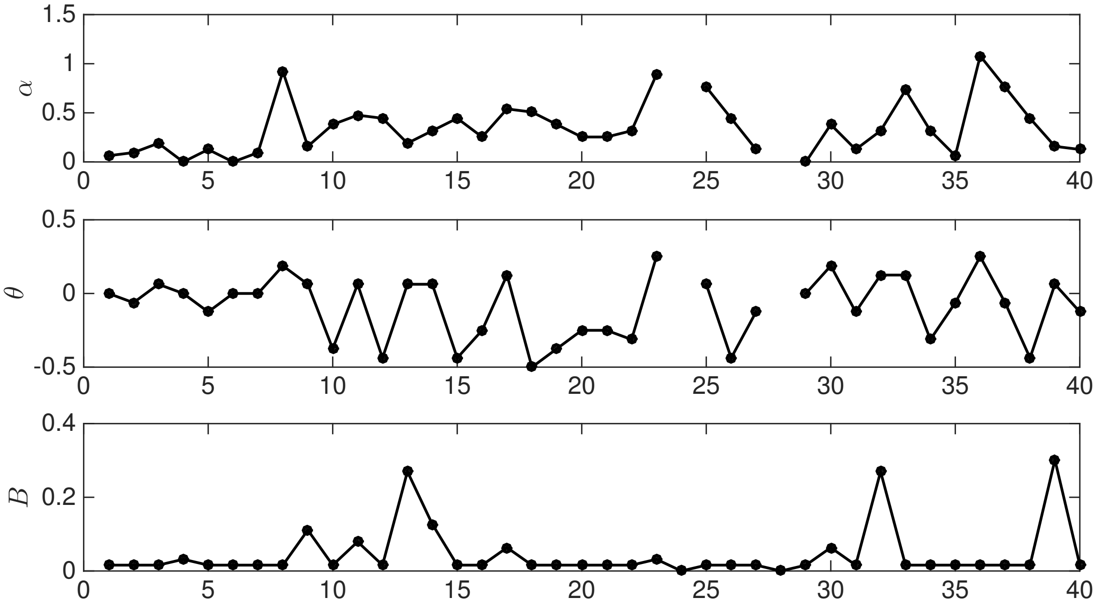

Рис. 5. Оценки параметров для котировок ПАО Сбербанк России при $L = 750$

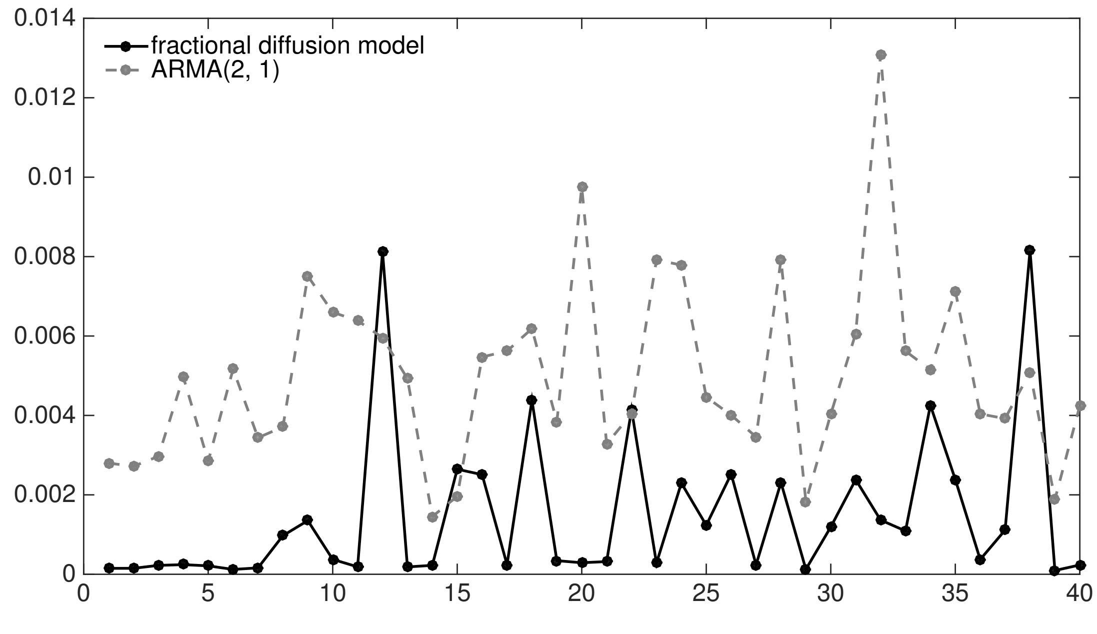

Рис. 6. Относительная точность погрешность идентифиакции квантилей для котировок ПАО Сбербанк

значений достигается в том случае, когда эволюция квантилей описывается уравнением типа Лиувилля, в котором диффузионное слагаемое отсутствует. Необходимо также подчеркнуть, что в рассмотренном примере оценка параметра α редко превосходит 1, откуда можно сделать вывод, что обычное уравнение диффузии (с $\alpha = 2$) описывает рассмотренные ряды несколько хуже. На рис. 6 показана точность идентификации квантилей с помощью предложенного метода; для сравнения показана также точность определения квантилей в модели авторегрессии — скользящего среднего ARMA(2, 1), коэффициенты которой также оценивались по временному ряду. Видно, что в целом точность предложенного метода не хуже, чем у стандартного подхода ARMA, а во многих случаях заметно лучше. На рис. 7 показаны аналогичные оценки для временного ряда, образованного значениями фондового индекса DAX (с минутными интервалами). Для этого ряда качественное поведение оценок заметно отличается от рис. 5; в частности, среднее значение оценки α здесь существенно больше.

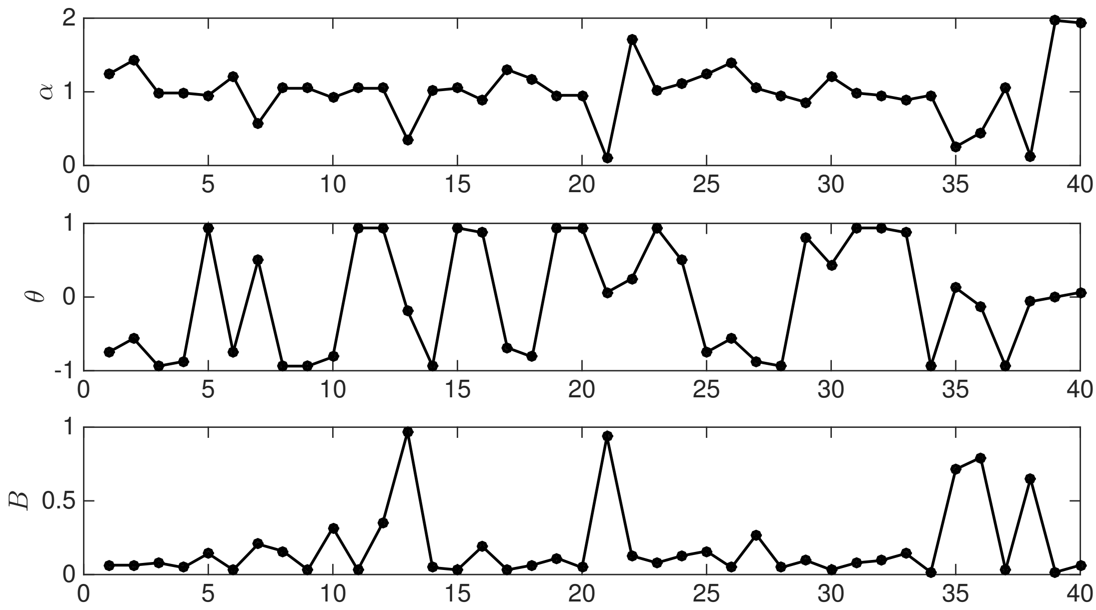

Рис. 7. Оценки параметров для значений индекса DAX при $L = 750$

В **заключении** приведены основные результаты диссертационного исследования. В **приложении** указаны определения и основные свойства некоторых специальных функций (функций Миттаг-Леффлера, Райта и H-функций Фокса), использовавшихся в тесте.

Основные результаты работы

Было показано, что функции распределения случайных величин могут быть представлены с помощью односторонних интегралов Римана — Лиувилля, однако в этом случае требуется наложить некоторые дополнительные ограничения на класс допустимых функций плотности, связанные с характерными свойствами дробных интегралов. В общем случае односторонние интегралы Римана — Лиувилля как функции верхнего предела не являются монотонными, и потому не могут определять меру Лебега — Стилтьеса. Даже с учетом упомянутых дополнительных требований представление распределений в виде дробных интегралов порождает ряд эффектов (наличие отрицательных значений, неоднозначность соответствия, невозможность нулевых значений на обоих концах отрезка), приводящих к нецелесообразности использования такой конструкции в задачах анализа временных рядов.

В работе была предложена схема численной реализации случайного блуждания на регулярных фрактальных множествах, которые могут быть описаны с помощью систем итерированных сжимающих отображений. Основным достоинством развитого метода является его простота: получение выборочных траекторий соответствующего случайного блуждания основано на случайных перестановках некоторого количества символов, управляемых конечными цепями Маркова.

В качестве основного уравнения эволюционной модели дробного порядка было выбрано уравнение адвекции — диффузии (3). Непосредственное решение этого уравнения требует корректной постановки граничных условий. В работе было показано, что на ограниченном отрезке этот вопрос весьма сложен: требования сохранения неотрицательности и нормировочного условия (необходимые для того, чтобы решение являлось функцией плотности) налагает нетривиальные ограничения на поведение решения и дробных интегралов от него в окрестности граничных точек.

Предложенный метод описания эволюции выборочных квантилей позволил обойти затруднения, связанные с постановкой начально-краевой задачи для уравнения адвекции — диффузии дробного порядка. Переход к описанию распределения в терминах квантилей удобен и тем, что квантили, в отличие от моментов, определены для любого распределения вне зависимости от характера его асимптотического поведения и формы его носителя.

Описанный в работе метод оценки параметров был применен к нескольким временным рядам. Было показано, что точность аппроксимации квантилей, на основе которой выполняется реконструкция параметров, достаточно высока и в ряде случаев лучше, чем в стандартной модели ARMA. Из результатов вычислений следует, что разным временным рядам может соответствовать разное качественное поведение оценок параметров.

Таким образом, развитый метод описания эволюции нестационарных временных рядов получил математическое обоснование и имеет практическую значимость.

Публикации по теме диссертации

Статьи в издания, рекомендованных ВАК:

1. Зенюк Д. А. Моделирование случайных блужданий на регулярных фрактальных множествах // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. no. 11. с. 101–104.
2. Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Имитационная модель коррупции в иерархических системах // Компьютерные исследование и моделирование. 2014. Т. 6. no. 2. с. 321–329.
3. Зенюк Д. А., Клочкова Л. В., Орлов Ю. Н. Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. no. 1.

Прочие публикации:

4. Зенюк Д. А., Митин Н. А., Орлов Ю. Н. Моделирование случайного блуждания на Канторовом множестве // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013. no. 31. 18 с.
5. Зенюк Д. А., Орлов Ю. Н. О применении дробного исчисления Римана — Лиувилля для описания распределений вероятностей // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2014, no. 18. 21 с.

Материалы научных конференций:

6. Зенюк Д. А., Орлов Ю. Н. Моделирование случайных блужданий на обобщенном множестве Кантора // Mathematical Modeling and Computational Physics: Book of Abstracts of the International Conference (Dubna, July 8-12, 2013). Dubna: JINR, 2013. P. 188
7. Зенюк Д. А. О представлении функций распределения дробными интегралами Римана — Лиувилля // Труды 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». Управление и прикладная математика. Том 1. М: МФТИ, 2013. с. 18.
8. Зенюк Д. А. Представление функций распределения случайных величин дробными интегралами Римана — Лиувилля // Десятые Юбилейные Курдюмовские чтения «Синергетика в общественных и естественных науках»: Материалы международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. Тверь: ТвГу, 2015. Ч. 1. с. 92–96.