

На правах рукописи



ПЕТРОВ АЛЕКСАНДР ПХОУН ЧЖО

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР  
В НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук

Москва – 2009 г.

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институт математического моделирования РАН

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор,  
член-корреспондент Российской академии образования Розов Николай Христович

доктор физико-математических наук, профессор  
Черняев Александр Петрович

доктор физико-математических наук  
Колдоба Александр Васильевич

**Ведущая организация:**

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет

Защита состоится 14 мая 2009 года, в 14 час. 30 мин.  
на заседании диссертационного совета Д 002.058.01  
в Институте математического моделирования РАН  
по адресу: 125047, г. Москва, Миусская пл., д 4а

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке  
Института математического моделирования РАН

Автореферат разослан

2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук



Н.В.Зыгренко

## **Общая характеристика работы**

**Актуальность темы.** На первом этапе реализации триады «модель-алгоритм-программа» (А.А. Самарский, см. напр., [1-3]) строится математическая модель – «эквивалент объекта, отражающий в математической форме его основные свойства. Математическая модель или ее фрагменты исследуются всеми доступными способами, что не только позволяет получить предварительные сведения об объекте, но и помогает конструировать вычислительные алгоритмы применительно к специфике решаемых задач на следующем этапе реализации триады» [3].

Качественные и приближенные методы дают возможность провести анализ общих свойств моделей (законы сохранения, симметрия и инвариантность, связь с вариационными принципами и пр.), выработать базовые понятия, характерные для изучаемых явлений (области больших градиентов, фронты, вихри, сильные и слабые разрывы, солитоны, локализованные диссипативные структуры, аттракторы и области притяжения к ним и т.д.), а также наметить пути теоретического обоснования дискретных моделей и вычислительных алгоритмов.

В качестве примеров вычислительных методов, построенных с учетом результатов качественного исследования моделей можно привести метод характеристик и родственные ему; однородные, консервативные и полностью консервативные схемы (А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Ю.П.Попов); семейство методов С.К.Годунова и родственных им; подходы, основанные на применении сопряженных уравнений (Г.И.Марчук и др.); вариационно-разностные схемы (А.А.Самарский, А.П.Фаворский, В.М.Головизнин, В.Ф.Тишкин и др.); кинетически согласованные разностные схемы (Б.Н.Четверушкин и др.); рациональные схемы (О.М.Белоцерковский и др.); адаптивные алгоритмы, использующие свойства решений, в том числе, при построении расчетных сеток.

Проведенные в настоящей работе **исследования относятся к области** развития качественных и приближенных аналитических методов изучения математических моделей для использования на предварительном этапе математического моделирования.

**Основным объектом исследования** являются контрастные структуры (см. напр. [4-8]) – решения сингулярно возмущенных задач, возникающие в задачах астрофизики [9-11], химической кинетики [12-13], биофизики [14-15], при изучении геофизической плазмы [16] и магнитных жидкостей [17-18]. В последнее время эти решения стали применяться также при изучении модели системы «власть-общество» [19-20]. При этом возникающие в прикладных задачах контрастные структуры могут быть не только стационарными, но и *изменяющимися во времени*.

Стационарные контрастные структуры типа ступеньки изучены достаточно подробно: для них исследованы вопросы существования, построения асимптотики (например, [4,5]), устойчивости (например, [6]).

В настоящей работе рассматриваются нестационарные контрастные структуры типа ступеньки, причем исследование существенно опирается на известные результаты о стационарных контрастных структурах.

**Цель исследования** – построение конструктивной асимптотической теории нестационарных контрастных структур в задачах для параболических уравнений с кубической нелинейностью, моделирующих процессы в моделях галактического динамо и в моделях системы «власть-общество».

**Методика исследования основана** на развитии алгоритмов метода пограничных функций (А.Б. Васильева); теоретические построения дополняются и количественно уточняются с помощью вычислительных экспериментов. Данный подход позволил, с одной стороны, использовать достоинства асимптотического анализа (в частности: получить результаты относительно порядка времени жизни контрастных структур, что играет важную роль в приложениях), с другой – оценить границы его применимости. Для рассматриваемого класса задач необходимость применения асимптотических методов связана также с тем, что они позволяют обнаруживать и подробно теоретически исследовать разнообразные режимы пространственно-временной эволюции решения, возникающие при варьировании начальных условий и параметров уравнений.

**Сформулируем основные результаты.**

*Разработана конструктивная асимптотическая теория нестационарных контрастных структур для задач параболического типа с кубической нелинейностью, служащих моделями ряда сложных естественнонаучных и социально-политических процессов. В рамках разработанной теории:*

1. Предложена и теоретически обоснована методика построения пространственно-временной асимптотики нестационарных контрастных структур для указанного класса задач; для них задач получены выражения для главного члена асимптотики скорости контрастной структуры,

- с помощью разработанной методики подробно исследована *базовая задача* и ряд ее обобщений;

- все результаты обоснованы путем соответствующих теорем о невязках; пределы применимости асимптотик оценены с помощью вычислительных экспериментов.

2. Изучены классы решений математических моделей распределения крупномасштабного магнитного поля спиральных галактик, называемые *внутренними и внешними фронтами*.

В том числе,

- построены пространственно-временные асимптотики контрастных структур, описывающих внутренние и внешние фронты для моделей

распределения крупномасштабного магнитного поля в спиральных галактиках; в частности, получены главные члены асимптотик выражений для скоростей движения фронтов,

- результаты обобщены на модель, учитывающую аккрецию, а также на модель с общим видом нелинейности,

- построенные асимптотики обоснованы путем соответствующих теорем о невязке; пределы применимости асимптотики оценены с помощью вычислительных экспериментов,

- теоретически обоснованы оценки времени жизни переориентаций магнитных полей спиральных галактик; показано, что они соответствуют данным реальных астрономических наблюдений.

3. Изучены модели системы «власть-общество» в случае реакции гражданского общества, описываемой функцией с кубической нелинейностью (так называемой «*биполярной*», *двойственной*, *амбивалентной* реакцией общества).

В том числе:

- построены пространственно-временные асимптотики стационарных и нестационарных контрастных структур, описывающих динамику распределения власти в иерархии; в частности, получен главный член асимптотики выражения для скорости движения точки перехода,

- построенные асимптотики обоснованы путем соответствующих теорем о невязке; пределы применимости асимптотики оценены с помощью вычислительных экспериментов,

- дана содержательная политологическая трактовка полученных математических результатов – в частности, введены понятия стационарного и нестационарного контрастных распределений власти, изучен ряд решений, могущих служить образцами типовых сценариев политического развития (построение «властной вертикали», конфедеративное распределение власти и др.).

Таким образом, основные **результаты имеют вид новых математических методов** и полученных с их помощью новых закономерностей, характеризующих изучаемые астрофизические и социально-политические объекты.

Все перечисленные **результаты являются новыми.**

**Представленные в работе результаты** получены лично автором, за исключением установления соответствия результатов асимптотического анализа данным астрономических наблюдений, в чем вклад автора является решающим.

**Практическая значимость результатов** исследования заключается в следующем. Разработанная асимптотическая теория может быть применена к анализу нестационарных контрастных структур, возникающих [8-19] в прикладных задачах из области астрофизики, химической кинетики,

биофизики, политологии, при исследовании геофизической плазмы и магнитных жидкостей. Полученные результаты о магнитных фронтах в спиральных галактиках являются значимыми ввиду необходимости теоретического объяснения данных астрономических наблюдений и развития теории астрофизических магнитных полей. Практическая значимость результатов исследования системы «власть-общество» связана с тем, что построенные на основе разработанных математических методов политологические сценарии могут быть использованы при построении прогнозов и анализе на макроуровне протекающих в обществе социально-политических процессов.

**Достоверность результатов.** Разработанные математические методы обоснованы с помощью соответствующих теорем. Надежность результатов подтверждена соответствием результатов асимптотического анализа результатам вычислительных экспериментов. Достоверность части результатов Главы 2 диссертации дополнительно подтверждена соответствием данных астрономических наблюдений.

По результатам исследований сделано **40 публикаций**, в том числе 13 статей в российских и иностранных журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов диссертации на соискание ученой степени доктора наук (из них – 7 публикаций в журналах, рекомендованных экспертным советом по управлению, вычислительной технике и информатике, 1 – экспертным советом по физике и 2 – экспертным советом по философии, социологии и культурологии, а также 3 статьи в рекомендованных ВАК иностранных журналах, включенных в систему цитирования Web of Science: Science Citation Index Expanded). В диссертацию включены лишь те результаты статей, написанных в соавторстве, которые получены лично автором (за исключением сопоставления результатов асимптотического анализа данным астрономических наблюдений в главе 2, в чем вклад автора является решающим).

**Апробация работы.** Результаты исследований докладывались на следующих конференциях:

Конференции, посвященные памяти акад. А.Н. Тихонова (1996, 2000), математическим идеям П.Л.Чебышева (2004) – Институт атомной энергетики, г. Обнинск; Математическое моделирование социальной и экономической динамики – MMSED (2004, 2007) – Российский государственный социальный университет (РГСУ); научные конференции факультета физико-математических и естественных наук РУДН (1995, 1997); Зимние чтения РГСУ по математике, информатике и социологии (1993 – 2008 ежегодно); Социологические конгрессы и Сорокинские чтения (с 2003 ежегодно) - социологический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова; Социальные конгрессы (2004, 2006) – РГСУ; Singular solutions and perturbations in control systems. (1997) – ИПС РАН, г. Переславль-Залесский;

Strong Magnetic Fields in Neutrino Astrophysics. (1999) – Ярославский гос. Университет им. П.Г.Демидова; Актуальные проблемы внегалактической астрономии. (2000, 2001) – Пушинская радиоастрономическая обсерватория, г.Пушино; LMS Durham Symposium: Astrophysical Fluid Mechanics (2002) – Университет Дарема, г. Дарем, Великобритания; Annual UK MHD meeting (2003) – Университет Кембриджа, г.Кембридж, Великобритания; Конференция по проблемам управления (2006) - ИПУ РАН.

а также на ряде научных семинаров, в частности – на общеинститутском семинаре ИММ РАН, на семинаре по теории сингулярных возмущений под рук. А.Б.Васильевой и В.Ф. Бутузова на физическом факультете МГУ, на семинаре по астрофизическому и геофизическому динамо под рук. Д.Д.Соколова в НИВЦ МГУ.

Результаты исследований были отражены в монографиях [21,22]

На разных этапах проведения работ исследования были поддержаны грантами РФФИ (99-01-00879, 00-02-17854, 01-02-16158, 02-02-27013, 03-02-16384, 04-01-00710, 05-06-80237, 06-01-00426), Минобразования (РФ Е00-1.0-158), INTAS (YSF 2002-38), РГНФ (07-03-00620).

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 97 наименований. Объем работы – 220 страниц.

## **Содержание работы**

**Во введении** дана общая характеристика диссертации, обоснована актуальность темы, сформулирована цель исследования, показана научная новизна и практическая значимость результатов.

Также, во введении очерчено место работы в общем контексте математического моделирования и приведен обзор теории сингулярных возмущений, ведущей свое начало от пионерских работ А.Н.Тихонова [23-25]. В этих работах были заложены основы теории сингулярных возмущений – доказаны теоремы о предельном переходе. Исследования были продолжены А.Б.Васильевой – ученицей А.Н.Тихонова, разработавшей метод пограничных функций [26-28], позволяющий для широкого класса сингулярно возмущенных задач строить равномерные асимптотические приближения решений. Одно из современных направлений развития метода пограничных функций – это асимптотическая теория контрастных структур (напр., [29-35]), разрабатываемая в последние двух десятилетий А.Б.Васильевой, В.Ф.Бутузовым, Н.Н.Нефедовым и их учениками. *Контрастными структурами* называются решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, имеющие *внутренние переходные слои*. Решения такого типа нередко встречаются в разнообразных прикладных задачах.

В настоящей работе рассматриваются контрастные структуры типа

ступеньки. Поясним это понятие на следующем примере.

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2 u'' = (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)), \quad u'(0) = u'(1) = 0, \quad (1)$$

где функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$  имеют при  $x \in [0; 1]$  непрерывные первые производные, и удовлетворяют неравенству  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$ . Пусть уравнение  $F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_3(x) - 2\varphi_2(x) = 0$  имеет корень  $x_0$  такой, что  $F'(x_0) \neq 0$ . Тогда краевая задача (1) имеет решение  $u(x, \varepsilon)$ , стремящееся в предельном переходе к разрывной функции:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_3(x), & 0 < x < x_0 \\ \varphi_1(x), & x_0 < x < 1 \end{cases}$$

(Рис. 1). Функция  $u(x, \varepsilon)$  имеет в окрестности точки  $x_0$  внутренний переходный слой ширины порядка  $O(\varepsilon)$  и высоты порядка  $O(1)$ .

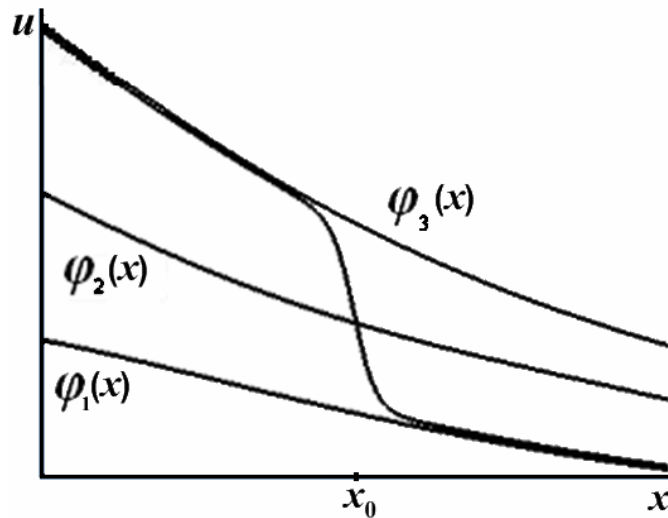


Рис. 1 Контрастная структура типа ступеньки

Такие решения сингулярно возмущенных уравнений называются *контрастными структурами типа ступеньки* (помимо них, существуют и другие типы контрастных структур – например, структуры типа «всплеска» [4])

В приложениях нередко встречаются решения с несколькими внутренними переходными слоями. Например, если уравнение  $F(x) = 0$  имеет два корня  $x_1, x_2$  такой, что  $F'(x_1) \neq 0, F'(x_2) \neq 0$ , тогда задача (1) имеет решение  $u(x, \varepsilon)$  с предельным переходом к разрывной функции:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_3(x), & 0 < x < x_1 \\ \varphi_1(x), & x_1 < x < x_2 \\ \varphi_3(x), & x_2 < x < 1 \end{cases}$$

Это решение имеет два внутренних переходных слоя. Наряду с ним, нелинейная краевая задача (1) при указанных условиях имеет решения с



одним внутренним переходным слоем, например, такие, что:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_3(x), & 0 < x < x_1 \\ \varphi_1(x), & x_1 < x < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_3(x), & 0 < x < x_2 \\ \varphi_1(x), & x_2 < x < 1 \end{cases}$$

Наряду с ними, существуют также и решения, называемые чисто погранслойными:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \varphi_3(x), \quad 0 < x < 1 \quad \text{или} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < 1.$$

Они не содержат внутренних переходных слоев, и имеют лишь переходные слои на краях отрезка  $[0;1]$ , называемые пограничными.

Рассмотрим теперь задачу на отрезке для уравнения в частных производных параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon^2 u'' - (u - \varphi_1(x))(u - \varphi_2(x))(u - \varphi_3(x)) \\ u'|_{x=0} &= u'|_{x=1} = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Ее стационарные решения являются решениями краевой задачи (1), некоторые из этих стационарных решений являются устойчивыми. Притяжение к каждому из устойчивых стационарных решений осуществляется из некоторого множества начальных функций  $u^0(x)$ . Основополагающей работой в установлении соответствия между начальными условиями и стационарными решениями является [30].

Наличие нескольких стационарных решений определяет разнообразие режимов решений параболической задачи (2). В задачах с зависимой от времени правой частью возможны также решения, относящиеся к классу контрастных структур переменного типа [31] – периодические (по  $t$ ) решения, на одних этапах эволюции являющиеся чисто погранслойными, на других – имеющие внутренние переходные слои.

При всем многообразии режимов, для качественного описания эволюции нестационарной контрастной структуры (с одним или несколькими внутренними переходными слоями типа ступеньки) достаточно указать скорость движения каждого из переходных слоев, а также корень вырожденного уравнения (например, для задачи (2) –  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  или  $\varphi_3(x)$ ), к которому близко решение  $u(x, t, \varepsilon)$  на интервале между двумя соседними переходными слоями. Близость к тому или иному корню вырожденного уравнения определяется из начальных условий, с учетом теоремы А.Н.Тихонова о предельном переходе.

Вопрос о скорости движения внутренних переходных слоев (т.е. скорости движения точек перехода) нестационарных контрастных структур является одним из центральных для настоящей работы.

При этом, ввиду того, что функции, описывающие переходные слои, являются экспоненциально убывающими (т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$  убывающими быстрее, чем функции вида  $e^{-x/\varepsilon}$ ), сами переходные слои можно считать

(при достаточно малых  $\varepsilon$ ) достаточно далекими друг от друга, если только они отделены на расстояние порядка  $O(1)$ . Поэтому асимптотический анализ каждого переходного слоя можно проводить независимо от наличия других внутренних переходных слоев, а также пограничных слоев в окрестностях концов отрезка.

Это обстоятельство играет важную роль, так как в приложениях встречаются решения достаточно сложной структуры с несколькими переходными слоями; например, при моделировании магнитных фронтов в спиральных галактиках (глава 2) каждый внутренний переходный слой описывает переориентацию крупномасштабного магнитного поля, а реальная галактика может иметь несколько таких переориентаций. Так, *Млечный Путь* имеет, согласно данным астрономических наблюдений, не менее двух переориентаций [39,40].

В работе исследуются контрастные структуры в задачах для параболических уравнений, имеющих, как правило, нелинейность в виде многочлена третьей степени. В прикладных задачах использование кубической нелинейности является распространенным (начиная, видимо, с уравнения Ван-дер-Поля-Дуффинга, 1918), т.к. она позволяет описать довольно широкий класс нелинейных явлений.

Таким образом, **во введении** описан основной объект исследования – нестационарные контрастные структуры типа ступеньки. **В Главе 1** разработана методика построения асимптотики таких решений. Рассмотрена *базовая задача* и ряд ее обобщений; для каждого случая построена асимптотика решения; в частности, получен главный член асимптотики выражения для скорости движения ступеньки. **В Главе 2** рассмотрены модели, описывающие распределение крупномасштабного магнитного поля в спиральных галактиках. Разработанная в первой главе методика прилагается к исследованию решений, описывающих структуры поля, называемые *внутренними* и *внешними фронтами*. Построены асимптотики решений ряда задач, результатам дана физическая интерпретация; в частности, показано соответствие полученных результатов данным астрономических наблюдений. **В Главе 3** предложенная методика прилагается к анализу модели системы «власть-общество». Построена асимптотика решения уравнения модели для случая так называемой «*биполярной*» *реакции общества*; на основе математических результатов рассмотрен ряд содержательных сценариев политического развития общества.

Целью **Главы 1** является разработка методика построения пространственно-временной асимптотики (асимптотической теории) нестационарных контрастных структур для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с кубической нелинейностью, возникающих при математическом моделировании ряда естественнонаучных и социальных объектов. В главе предложена методика построения асимптотики нестационарной контрастной структуры типа ступеньки,

предполагающая, в частности, получение главного члена асимптотики выражения для скорости ступеньки. Методика апробирована на базовой задаче и ряде ее обобщений.

**В разделе 1.1** рассматривается уравнение:

$$\varepsilon^2 u_{xx} - u_t = p^2(x)[u - \varphi(x)](u^2 - 1), \quad (3)$$

где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр. Уравнение (3) рассматривается на отрезке  $0 < x < 1$  и дополняется краевыми условиями

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{x=0} = \left. \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{x=1} = 0 \quad (4)$$

Предполагаются выполненными следующие условия

**Условие 1:** функции  $p(x), \varphi(x)$  непрерывно дифференцируемы при  $0 \leq x \leq 1$ .

**Условие 2:**  $p(x) > 0, -1 < \varphi(x) < 1$  при  $x \in [0, 1]$ .

**Условие 3:** существует  $x_0 \in (0, 1)$  такое, что  $\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) \neq 0$ .

Рассматривается нестационарная контрастная структура типа ступеньки, т.е. решение  $u(x, t, \varepsilon)$  такое, что при значениях  $t$  из некоторого интервала  $(t_1; t_2)$  значение функции  $u(x, t, \varepsilon)$  близко к 1 при  $0 < x < R(t, \varepsilon)$  и к -1 при  $R(t, \varepsilon) < x < 1$ . Построен главный член асимптотики этого решения, имеющий вид

$$\hat{u}_0(x, R(t, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1 - \exp[\sqrt{2}p(R)(x - R)/\varepsilon]}{1 + \exp[\sqrt{2}p(R)(x - R)/\varepsilon]}, \quad (5)$$

Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Пусть выполнены условия 1-3 и функция  $R = R(t, \varepsilon)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{2}\varepsilon p(R)\varphi(R) \quad (6)$$

Тогда функция вида (5) удовлетворяет уравнению (3) и краевым условиям (4) с невязкой  $\delta$ , имеющей при достаточно малых  $\varepsilon$  оценку

$$|\delta| \leq \frac{4\varepsilon}{e\sqrt{2}} \left( L_1 + L_2 + \frac{\max_{0 \leq x \leq 1} [p(x)\varphi(x)p'(x)]}{\min_{0 \leq x \leq 1} p(x)} \right),$$

где постоянные  $L_1, L_2$  определяются неравенствами

$$\begin{aligned} |p^2(R) - p^2(x)| &\leq L_1 |x - R|, \\ |p^2(R)\varphi(R) - p^2(x)\varphi(x)| &\leq L_2 |x - R|. \end{aligned}$$

**Замечание.** Наряду с краевыми условиями (4) рассматривалась также задача с условиями первого рода:  $u(0, t, \varepsilon) = h_0, u(1, t, \varepsilon) = h_1$ . Была доказана теорема, аналогичная Теореме 1.1; при этом накладывалось дополнительное

**Условие 4:**  $-1 < h_0 < 1, -1 < h_1 < 1$ .

Для оценки пределов применимости асимптотической теории проведена серия вычислительных экспериментов. С их помощью показано, что выражение (6) для скорости движения ступеньки достаточно хорошо согласуется с результатами экспериментов вплоть до значений малого параметра, равных  $\varepsilon = 0,25$ .

Приведем в качестве примера данные одного из экспериментов. При различных значениях малого параметра  $\varepsilon$  рассчитывалось решение уравнения  $\varepsilon^2 u_{xx} - u_t = 5[u - (e^{x/2} - 1,5)](u^2 - 1)$  с краевыми условиями  $(\partial u / \partial x)|_{x=0} = (\partial u / \partial x)|_{x=1} = 0$  и начальными условиями  $u|_{t=0} = 0,25 - x$ . При движении контрастной структуры для каждого значения времени  $t$  определялась точка перехода  $R$  и скорость ее движения  $V_{expm}$ . Также по формуле (6) вычислялось «теоретическое» значение скорости  $V_{thr}$  и проводилось их сравнение (Табл.1). Результаты показывают весьма высокую степень согласия результатов асимптотической теории с результатами вычислительного эксперимента вплоть до значения  $\varepsilon = 0,25$ . Таким образом, даже при не очень малых значениях  $\varepsilon$  разработанная методика дает приемлемые результаты.

$t$	$R$	$V_{thr}$	$V_{expm}$	$V_{thr}/V_{expm}$
$\varepsilon = 0,1$				
4.000	0.6652	0.0339	0.0330	1.0280
5.000	0.6922	0.0273	0.0265	1.0315
$\varepsilon = 0,01$				
4.000	0.5025	0.0068	0.0069	0.9872
5.000	0.5092	0.0066	0.0067	0.9950
$\varepsilon = 0,25$				
2.000	0,6815	0,0743	0,0700	1,0613
3.000	0,7375	0,0428	0,0450	0,9499

Табл. 1. Сравнение результатов асимптотической теории с данными вычислительного эксперимента при различных значениях малого параметра  $\varepsilon$

**В разделе 1.2** рассматривается уравнение (3) при  $\varphi(x) \equiv 0$ . В теории сингулярных возмущений такой случай получил название *критического*; здесь не выполняется условие 3 теоремы 1.1 (Рис. 2.). Асимптотический анализ в этой ситуации затруднен тем, что некоторые из соотношений, являющихся в некритическом случае уравнениями для определения членов асимптотики, в критическом случае являются тождествами. Вследствие этого, для построения асимптотики некоторого порядка в критическом случае оказывается необходимым проанализировать уравнения для членов

асимптотики следующего порядка.

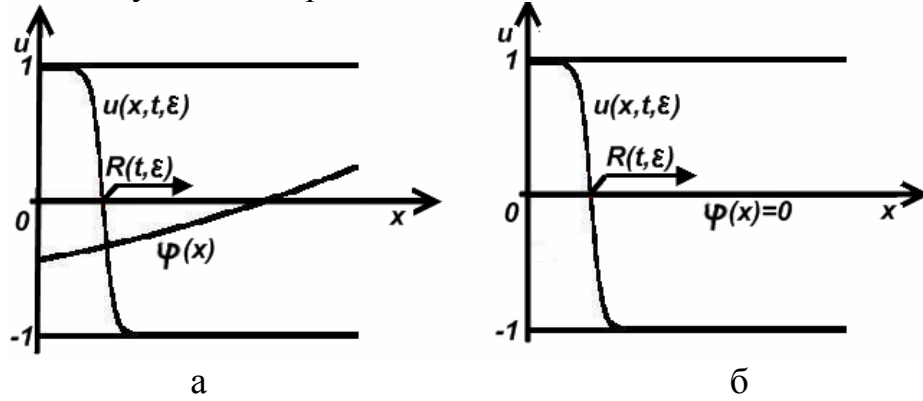


Рис. 2. Некритический (а) и критический (б) случаи

С физической точки зрения, критический случай важен тем, что он часто возникает при наличии в задаче некоторой симметрии – например, в случае нечетной (по искомой функции) правой части дифференциального уравнения. Например, указанная симметрия, обусловленная физической сущностью задачи, имеет место в моделях, рассматриваемых в главе 2.

Таким образом, в разделе 1.2 рассматривается уравнение

$$\varepsilon^2 u_{xx} - u_t = p^2(x)u(u^2 - 1)$$

Построена асимптотика решения, имеющая вид

$$\hat{u}_1(x, R(t, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1 - \exp[\sqrt{2} p(R)(x - R)/\varepsilon]}{1 + \exp[\sqrt{2} p(R)(x - R)/\varepsilon]} - \varepsilon p'(R) \sqrt{2} \frac{\exp[\sqrt{2} p(R)(x - R)/\varepsilon]}{(1 + \exp[\sqrt{2} p(R)(x - R)/\varepsilon])^2} \left(\frac{x - R}{\varepsilon}\right)^2 + S_1 u\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{1 - x}{\varepsilon}\right)$$

где через  $S_1 u\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{1 - x}{\varepsilon}\right)$  обозначена сумма пограничных функций нулевого и первого приближений, описывающих экспоненциально убывающие пограничные слои в окрестности точек  $x=0, x=1$ , а скорость движения ступеньки имеет в главном приближении вид

$$\frac{dR}{dt} = -\varepsilon^2 \frac{p'(R)}{p(R)}.$$

Заметим, что в критическом случае скорость имеет порядок  $O(\varepsilon^2)$ , в то время, как в некритическом она имела порядок  $O(\varepsilon)$ .

Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке, аналогичной теореме 1.1, а пределы применимости асимптотической теории оценены с помощью серии вычислительных экспериментов.

**В разделе 1.3** предложенная методика развита на задачу о *контрастных структурах переменного типа* [31]. Конечный член дифференциального уравнения параболического типа является в данном

случае периодической функцией времени, что приводит к существованию периодических режимов. На протяжении одного периода решение может менять структуру: на одних временных интервалах (фазах) оно является чисто погранслойным, на других имеет внутренний переходный слой. При этом на некоторых фазах решение имеет вид нестационарной контрастной структуры, подобной рассмотренным выше.

Рассматривается уравнение

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = p^2(x)[u - \varphi(x,t)](u^2 - 1) \quad (7)$$

на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с краевыми условиями

$$u(0,t,\varepsilon) = 0, \quad u(1,t,\varepsilon) = 0 \quad (8)$$

Предполагаются выполненными следующие условия

**Условие 5:** функция  $p(x)$  непрерывно дифференцируема при  $0 \leq x \leq 1$ , функция  $\varphi(x,t)$  непрерывно дифференцируема при  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .

**Условие 6:**  $p(x) > 0$  при  $x \in [0,1]$ .

**Условие 7:** функция  $\varphi(x,t)$  периодична с периодом  $T$ :  $\varphi(x,t+T) = \varphi(x,t)$  при  $x \in [0,1]$ .

При указанных условиях получен главный член асимптотики нестационарной контрастной структуры, в частности – главный член асимптотики скорости. Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке, аналогичной теореме 1.1, а пределы применимости асимптотической теории оценены с помощью серии вычислительных экспериментов.

**В разделе 1.4** предложенная методика обобщена на двумерный случай. Рассмотрены контрастные структуры для уравнения Лапласа в полосе (подраздел 1.4.1) и в кольце (подраздел 1.4.2). Аналогом точки перехода в двумерной задаче является кривая перехода, а контрастная структура типа ступеньки – это решение, близкое к  $+1$  по одну сторону от этой кривой, и  $-1$  – по другую.

Задача в полосе имеет вид

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = p^2(x,y)[u - \varphi(x,y)](u^2 - 1) \quad (9)$$

$$0 \leq x \leq a, \quad -\infty < y < +\infty \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad (11)$$

где функция  $\varphi(x,y)$  является периодической по  $y$ :

$$\varphi(x,y+Y) = \varphi(x,y) \quad (12)$$

Построен главный член асимптотики нестационарной контрастной структуры, имеющий вид

$$\hat{u}(x, y, t, \varepsilon) = \frac{1 - \exp \left[ \sqrt{2} \frac{p(R(y, t, \varepsilon), y) x - R(y, t, \varepsilon)}{\sqrt{1 + [\partial R / \partial y]^2} \varepsilon} \right]}{1 - \exp \left[ \sqrt{2} \frac{p(R(y, t, \varepsilon), y) x - R(y, t, \varepsilon)}{\sqrt{1 + [\partial R / \partial y]^2} \varepsilon} \right]}$$

где  $x = R(y, t, \varepsilon)$  – кривая перехода. Для скорости движения ступеньки  $\frac{\partial R}{\partial t}$  построен главный член асимптотики:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\sqrt{2} \varepsilon p(R, y) \varphi(R, y) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2}$$

Задача в кольце имеет вид

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = p^2(r, \varphi) [u - q(r, \varphi)] (u^2 - 1) \quad (13)$$

Уравнение (13) рассматривается в области  $r_{\min} < r < r_{\max}$  с граничными условиями

$$u(r_{\min}, \varphi, t, \varepsilon) = h_0(\varphi), u(r_{\max}, \varphi, t, \varepsilon) = h_1(\varphi) \quad (14)$$

При выполнении условий

**Условие 8:** Функции  $p(r, \varphi), q(r, \varphi)$  имеют непрерывные частные производные первого порядка в области  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ ,  $p(r, \varphi + 2\pi) = p(r, \varphi)$ ,  $q(r, \varphi + 2\pi) = q(r, \varphi)$ .

**Условие 9:** В этой области  $p(r, \varphi) > 0$ ,  $q(r, \varphi) \neq \pm 1$ .

**Условие 10:**  $-1 < h_0(\varphi) < 1$ ,  $-1 < h_1(\varphi) < 1$ , функции  $h_0(\varphi), h_1(\varphi)$  – дифференцируемы.

Построен главный член асимптотики контрастной структуры вида

$$\hat{u}_0(r, \varphi, R(\varphi, t, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1 - \exp \left[ \sqrt{\frac{2\gamma(R, \varphi)}{1 + (R'/R)^2}} \frac{r - R}{\varepsilon} \right]}{1 + \exp \left[ \sqrt{\frac{2\gamma(R, \varphi)}{1 + (R'/R)^2}} \frac{r - R}{\varepsilon} \right]} + P_0 u \left( \frac{r - r_{\min}}{\varepsilon}, \frac{r - r_{\max}}{\varepsilon} \right) \quad (15)$$

где через  $P_0 u((r - r_{\min})/\varepsilon, (r - r_{\max})/\varepsilon)$  обозначена сумма пограничных функций нулевого приближения, описывающих экспоненциально убывающие погранслои в окрестностях окружностей  $r = r_{\min}, r = r_{\max}$ .

Скорость кривой перехода в главном приближении имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\varepsilon \sqrt{2\gamma(R, \varphi)} q(R, \varphi) \sqrt{1 + (R'/R)^2}$$

Таким образом, скорость движения контрастной структуры зависит от геометрических свойств кривой перехода (как для задачи в полосе, так и для задачи в кольце).

Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке, аналогичной теореме 1.1, а пределы применимости асимптотической теории оценены с помощью серии вычислительных экспериментов.

**В Главе 2** предложенная методика анализа нестационарных контрастных структур прилагается к задачам исследования магнитных полей в спиральных галактиках.

Спиральная галактика представляет собой тонкий диск, отношение толщины которого к диаметру принимается в целях асимптотического анализа в качестве малого параметра  $\varepsilon = h/(2R)$ . Для нашей Галактики (Млечного пути) это отношение имеет численное значение 0,04.

Вещество спиральной галактики вращается в плоскости галактического диска. При этом локальные электрические заряды ввиду своего движения приводят к появлению магнитного поля. Таким образом, происходит преобразование кинетической энергии в магнитную; соответствующий механизм называют *галактическим гидромагнитным динамо* [36]. В линейном случае уравнения галактического динамо имеют решения, описывающие неограниченный рост магнитного поля с течением времени. Чтобы описать насыщение поля, необходимо рассматривать нелинейные уравнения; именно они являются предметом рассмотрения настоящей главы.

Задача рассматривается в полярной системе координат, при этом магнитное поле (вернее, его составляющая, лежащая в плоскости галактического диска) раскладывается на две компоненты: радиальную и азимутальную:  $\vec{B}(r, t) = \{B_r(r, t); B_\varphi(r, t)\}$ .

**Раздел 2.1** посвящен общему описанию рассматриваемых в главе моделей динамо спиральных галактик.

**В разделе 2.2** рассматривается так называемая скалярная модель [35], в рамках которой отношение радиальной и азимутальной компонент магнитного поля предполагается неизменным как во времени, так и в пространстве:  $\vec{B}(r, t) = Q(r, t)\{b_r; b_\varphi\}$ . Здесь  $\{b_r; b_\varphi\}$  - постоянный вектор, а функция  $Q(r, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \gamma(r)Q(1 - g(r)Q^2) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{Q}{r^2} \right) \quad (16)$$

Уравнение (16) рассматривается с однородными краевыми условиями второго рода вне окрестности центра галактики, т.е. при значениях  $r$ , больших, чем некоторое  $r_{\min} > 0$ . Максимальное значение  $r_{\max}$  определяется радиусом галактики. Функции  $g(r)$  и  $\gamma(r)$  - положительные и достаточно гладкие.

Рассматриваются два типа решений.

Во-первых, это - функции, имеющие противоположные знаки по разные стороны от точки перехода  $R(t, \varepsilon)$ , т.е. близкие к  $1/\sqrt{g(r)}$  по одну



сторону от переходного слоя, и к  $-1/\sqrt{g(r)}$  - по другую. Такие решения (а также сами переходные слои) называются внутренними фронтами. Они соответствуют так называемым *переориентациям магнитного поля* [36-40]: во внутренней ( $r < R(t, \varepsilon)$ ) и внешней ( $r > R(t, \varepsilon)$ ) частях диска функция  $Q(r, t)$  имеет разные знаки, а линии магнитного поля – противоположные направления (Рис. 3а).

Второй тип решений – это функции, близкие к  $1/\sqrt{g(r)}$  по одну сторону от переходного слоя, и к нулю – по другую. Такие решения (а также сами переходные слои) называются внешними фронтами [41]. Движение внешнего фронта описывает *распространение магнитного поля в область, где оно отсутствует* (Рис. 3б).

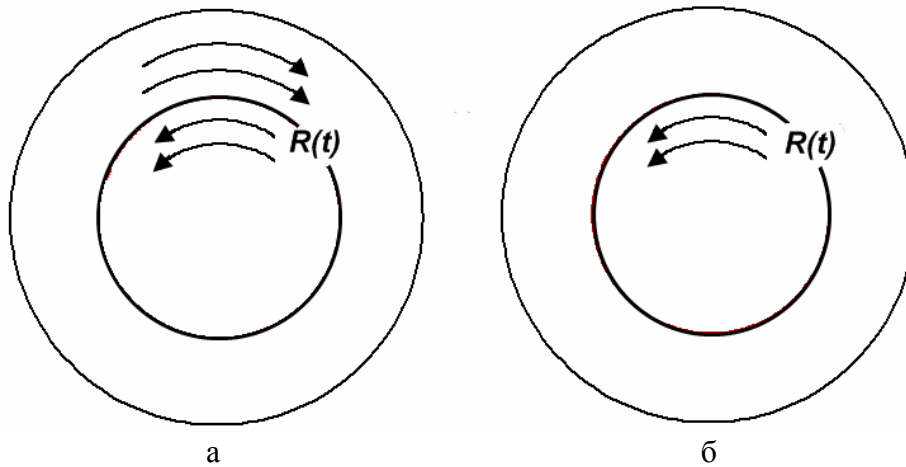


Рис. 3. Внутренний (а) и внешний (б) магнитные фронты.

Уравнение (16) отличается от рассмотренных в Главе 1 более сложным видом дифференциального оператора. При построении асимптотики внутреннего фронта имеет место критический случай, внешнего фронта – некритический.

Для нормированной функции внутреннего фронта  $\hat{u}(r, t, \varepsilon) = Q(r, t, \varepsilon)\sqrt{g(r)}$  построена асимптотика, имеющая вид

$$\hat{u}(r, t, \varepsilon) = \frac{1 - \exp\left[\sqrt{2\gamma(R)}\frac{r-R}{\varepsilon}\right]}{1 + \exp\left[\sqrt{2\gamma(R)}\frac{r-R}{\varepsilon}\right]} - \varepsilon \frac{\gamma'(R)}{\sqrt{2\gamma(R)}} \left(\frac{r-R}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\exp\left[\sqrt{2\gamma(R)}\frac{r-R}{\varepsilon}\right]}{\left(1 + \exp\left[\sqrt{2\gamma(R)}\frac{r-R}{\varepsilon}\right]\right)^2} + Q_1 u$$

где  $Q_1 u$  - сумма экспоненциально убывающих функций, описывающих пограничные слои в окрестностях точек  $r = r_{\min}, r = r_{\max}$ . Главный член

асимптотики скорости движения внутреннего фронта имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon^2 \left[ \frac{g'(R)}{g(R)} - \frac{\gamma'(R)}{2\gamma(R)} - \frac{1}{R} \right]. \quad (17)$$

Для исследования внешнего фронта сделана замена  $Q(r, t, \varepsilon) \sqrt{g(r)} = (v(r, t, \varepsilon) + 1)/2$ . Для функции  $v(r, t, \varepsilon)$  построена асимптотика вида

$$\hat{v}(r, R(t, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1 - \exp \left[ \sqrt{\frac{\gamma(R)}{2}} \frac{r - R}{\varepsilon} \right]}{1 + \exp \left[ \sqrt{\frac{\gamma(R)}{2}} \frac{r - R}{\varepsilon} \right]} + Q_0 v \quad (18)$$

где  $Q_0 v$  - функция, описывающая совокупность экспоненциально убывающих пограничных слоев в окрестностях точек  $r = r_{\min}, r = r_{\max}$ . Главный член асимптотики скорости движения внешнего фронта имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon \frac{3\sqrt{2\gamma(R)}}{2}$$

Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке; пределы применимости асимптотики оценены с помощью вычислительного эксперимента.

Приведем в качестве примера данные одного из экспериментов. При различных значениях малого параметра  $\varepsilon$  рассчитывалось решение уравнения  $\frac{\partial Q}{\partial t} = e^{r/5} Q \left( 1 - \frac{e^r}{r} Q^2 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{Q}{r^2} \right)$  с краевыми условиями  $(\partial Q / \partial r)|_{r=1} = (\partial Q / \partial r)|_{r=5} = 0$  и начальными условиями  $Q|_{t=0} = 0,8 - 0,25r$ . При движении контрастной структуры для каждого значения времени  $t$  определялась точка перехода  $R$  и скорость ее движения  $V_{expm}$ . Также по формуле (17) вычислялось «теоретическое» значение скорости  $V_{thr}$  и проводилось их сравнение (Табл.2). Результаты показывают весьма высокую степень согласия результатов асимптотической теории с результатами вычислительного эксперимента вплоть до значения  $\varepsilon = 0,2$ . Таким образом, даже при не очень малых значениях  $\varepsilon$  разработанная методика дает приемлемые результаты. В частности, высокая точность асимптотических результатов наблюдается при значении  $\varepsilon = 0,04$ , характерного для нашей Галактики.

$t$	$R$	$V_{thr}$	$V_{exprm}$	$V_{thr}/V_{exprm}$
$\varepsilon = 0,04$				
3.000	0.5504	0.0070	0.0069	1.0263
4.000	0.5521	0.0071	0.0069	1.0314
$\varepsilon = 0,1$				
3.000	0.5676	0.0461	0.0443	1.0429
4.000	0.5789	0.0475	0.0465	1.204
$\varepsilon = 0,2$				
3.000	0,6176	0,2222	0,2098	1,0589
4.000	0,8480	0,2433	0,2541	0,9578

Табл. 2. Сравнение результатов асимптотической теории с данными вычислительного эксперимента при различных значениях малого параметра  $\varepsilon$

В разделе 2.3 рассматривается модель по- $z$  [40], уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial t} &= -R_\alpha \alpha_0 f(g(r) B_\phi^2) B_\phi - B_r + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right], \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= R_\omega G B_r - B_\phi + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (19) рассматривается при  $t > 0$ ,  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ .

Учитывая изложенные выше физические соображения, потребуем выполнения следующих условий:

**Условие 11.** Функция  $g(r)$  положительна и имеет непрерывную вторую производную при  $r_{\min} < r < r_{\max}$ . Знаки постоянных:  $R_\alpha > 0, R_\omega < 0$ .

**Условие 12.** Функция  $f(x)$  дважды дифференцируема при  $x > 0$ , причем  $f'(x) < 0$ . Кроме того,  $f(0) = 1$ , и постоянная  $\alpha_0$  положительна.

**Условие 13 (пороговое условие).** Уравнение  $1 - |R_\alpha R_\omega| G \alpha_0 f(x) = 0$  имеет положительный корень.

Для модели по- $z$  также рассмотрены внутренние и внешние фронты. Показано, что, как и для скалярной модели, скорость внутреннего фронта имеет порядок  $O(\varepsilon^2)$ , а внешнего фронта –  $O(\varepsilon)$ .

Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке.

В разделе 2.4 обсуждается физический смысл полученных результатов. В рамках каждой из моделей скорость внутреннего фронта имеет порядок  $O(\varepsilon^2)$ , а внешнего фронта –  $O(\varepsilon)$ . Следовательно, время жизни переориентации магнитного поля (внутреннего фронта) на порядок (по  $\varepsilon$ ) превышает время жизни внешнего фронта. В размерных величинах, лишь первое из них превышает время жизни галактики ( $\sim 10^{10}$  лет). Поэтому, в соответствии с полученными результатами, вероятным является существование в наблюдаемой картине переориентаций магнитного поля в

спиральных галактиках и отсутствие внешних фронтов. Этот результат подтверждается данными астрономических наблюдений. В частности, несколько переориентаций обнаружено в нашей Галактике [39,40].

**В разделе 2.5** рассмотрена модель по- $z$  с аккрецией, имеющая вид

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\varepsilon R_v \frac{v(r)}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) - B_r - R_\alpha \alpha_0 f(g(r) B_\phi^2) B_\phi + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right]$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = -\varepsilon R_v \frac{\partial}{\partial r} (v(r) B_\phi) + R_\omega G B_r - B_\phi + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right]$$

Здесь через  $v(r)$  обозначена скорость аккреции. Показано, что в этом случае скорость внутреннего фронта в главном асимптотическом приближении складывается из скорости аккреции и скорости фронта  $v^0$  в отсутствие аккреции:  $\frac{dR}{dt} = v(R) + v^0$ . Таким образом, несмотря на то, что задача является нелинейной, в главном по  $\varepsilon$  приближении действует принцип суперпозиции, характерный для линейных задач.

Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке.

**В разделе 2.6** проводится обобщение части результатов предыдущих параграфов главы на модели с нелинейностью более общего вида.

**В Главе 3** Рассматриваются контрастные структуры в моделях «власть-общество».

**Раздел 3.1** посвящен общему описанию проблемы.

Модель "власть-общество" (напр., [3,22,42]) описывает динамику распределения власти в иерархии, взаимодействующей с гражданским обществом. Уравнение модели имеет вид

$$n(x) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa \left( p, \frac{\partial p}{\partial x}, x, t \right) n(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + F(p, x, n(x), t) +$$

$$+ \int_0^1 \chi(p(x', t), p(x, t), x', x, n(x), n(x')) [p(x', t) - p(x, t)] dx'$$

Здесь через  $x$  обозначен уровень инстанции в иерархии, при этом  $x=0$  соответствует высшему уровню иерархии,  $x=1$  – низшему. Количество власти, находящейся в распоряжении инстанции уровня  $x$  в момент времени  $t$  обозначено через  $p(x, t)$ , а количество инстанций такого уровня – через  $n(x)$ . Коэффициент  $\kappa(p, \frac{\partial p}{\partial x}, x, t)$  имеет смысл величины, обратной «ответственности» инстанций иерархии, функция  $F(p, x, n(x), t)$  описывает реакцию общества на текущее распределение власти.

В базовом случае (цепочечная иерархия (т.е.  $n(x) \equiv 1$ ), отсутствие так называемого механизма команд «через голову») уравнение модели имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa \left( p, \frac{\partial p}{\partial x}, x, t \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + F(p, x, t), \quad (20)$$

Уравнение (20) рассматривается с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (21)$$

имеющими смысл отсутствия потоков власти через концы иерархии.

Начальное условие

$$p(x, 0) = p^0(x) \quad (22)$$

описывает начальное распределение власти в иерархии

В работе рассматривается случай  $\kappa = \kappa_0 = const \ll 1$ . Содержательно это соответствует малому значению так называемого *дефекта власти* – интегрального показателя, характеризующего разницу между реальным и идеальным, т.е. желательным, с точки зрения общества, распределением власти. Далее обозначим  $\kappa_0 = \varepsilon^2$ .

Уравнение (20) рассматривается с кубической функцией  $F(p, x, t)$ , описывающей «биполярную» реакцию общества:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_1(x)(p - p_1(x))(p - p_2(x))(p - p_3(x)) \quad (23)$$

где  $k_1(x) > 0$ ,  $p_1(x) < p_2(x) < p_3(x)$ , функции  $k_1(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$  имеют непрерывные производные. С содержательной точки зрения, функции  $p_1(x)$ ,  $p_3(x)$  имеют смысл двух вариантов устойчивых (и желательных, с точки зрения общества) распределений власти, первое из которых называется *партиципаторным*, второе – *распределением сильной руки*. Устойчивость в данном контексте означает, что каждое из этих распределений является аттрактором, притяжение к которому осуществляет из некоторого класса начальных условий. Функция  $p_2(x)$  разделяет области притяжения указанных устойчивых распределений власти; например, если начальное распределение удовлетворяло при всех  $x \in [0; 1]$  неравенству  $p_2(x) < p^0(x) < p_3(x)$ , то с течением времени будет наблюдаться притяжение к распределению сильной руки. Область  $p_2(x) < p < p_3(x)$  на плоскости  $(x, p)$  называется *полем сильной руки*, область  $p_1(x) < p < p_2(x)$  – *партиципаторным полем*. Соотношение между величинами  $p_2(x) - p_1(x)$  и  $p_3(x) - p_2(x)$  (называемыми *ширинами соответствующих полей*) определяет, таким образом, соотношение между привлекательностями идеи партиципации и идеи сильной руки.

С математической точки зрения, уравнение (23) существенно отличается от рассмотренных в Главе 1 тем, что корни вырожденного (при  $\varepsilon = 0$ ) стационарного уравнения являются не постоянными величинами, а функциями от  $x$ .

**В разделе 3.2** рассматриваются нестационарные контрастные структуры для задачи (21)-(23). Построен главный член асимптотики решения, имеющий вид

$$p(x, R(t, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1 - \exp\left[\sqrt{\frac{k_1(R)}{2}} (p_3(R) - p_1(R)) \frac{x - R}{\varepsilon}\right]}{1 + \exp\left[\sqrt{\frac{k_1(R)}{2}} (p_3(R) - p_1(R)) \frac{x - R}{\varepsilon}\right]} \frac{p_3(x) - p_1(x)}{2} + \frac{p_3(x) + p_1(x)}{2} \quad (24)$$

Распределение власти  $p(x, t, \varepsilon)$  близко к распределению сильной руки  $p_3(x)$  при  $0 \leq x < R$  и к партиципаторному распределению  $p_1(x)$  при  $R < x \leq 1$ . Величина  $dR/dt$  представляет собой скорость движения переходного слоя (от распределения сильной руки к партиципаторному или наоборот в какой-то части иерархии). Получено, вид главного члена асимптотики выражения для скорости переходного слоя:

$$\frac{dR}{dt} = -\varepsilon \sqrt{k_1(R)/2} [2p_2(R) - p_3(R) - p_1(R)] \quad (27)$$

Полученные результаты обоснованы с помощью теоремы о невязке; пределы применимости асимптотики оценены с помощью вычислительного эксперимента. Данные результаты обобщены на случай произвольной гладкой функции  $p(x)$  (см. (20)).

Приведем в качестве примера данные одного из экспериментов. При различных значениях малого параметра  $\varepsilon$  рассчитывалось решение уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 5(p - (1 - 0,8x))(p - (1,3 - 0,3x))(p - (2 - 0,6x))$$

с краевыми условиями  $(\partial p / \partial x)|_{x=0} = (\partial p / \partial x)|_{x=1} = 0$  и начальными условиями  $p_{t=0} = 1,4 - 0,7x$ . При движении контрастной структуры для каждого значения времени  $t$  определялась точка перехода  $R$  и скорость ее движения  $V_{expm}$ . Также по формуле (27) вычислялось «теоретическое» значение скорости  $V_{thr}$  и проводилось их сравнение (Табл.3). Результаты показывают

$t$	$R$	$V_{thr}$	$V_{expm}$	$V_{thr}/V_{expm}$
$\varepsilon = 0,01$				
5,000	0,2568	0,0031	0,0029	1,0753
6,000	0,2598	0,0030	0,0029	1,0621
$\varepsilon = 0,05$				
5,000	0,2866	0,0135	0,0116	1,1600
6,000	0,2980	0,0128	0,0111	1,1549
$\varepsilon = 0,1$				
5,000	0,2601	0,0303	0,0221	1,3713
6,000	0,2813	0,0277	0,0204	1,3522

Табл. 3. Сравнение результатов асимптотической теории с данными вычислительного эксперимента при различных значениях малого параметра  $\varepsilon$

не столь высокую степень согласия результатов асимптотической теории с результатами вычислительного эксперимента, как в задачах из глав 1,2. Однако, ввиду того, что модель «власть-общество» предназначена для качественного описания процессов, точность асимптотического анализа можно считать вполне приемлемой.

**Раздел 3.3** посвящен содержательной трактовке полученных результатов. В зависимости от параметров уравнения (23) и начальных условий, могут реализовываться различные режимы пространственно-временной динамики распределения власти. Каждому из таких режимов соответствует определенный сценарий политического развития. Ряд таких сценариев рассмотрен в разделе 3.3.

Опишем сценарий, называемый «построением властной вертикали». Пусть  $p_3(x) - p_2(x) > p_2(x) - p_1(x)$  (поле сильной руки шире партиципаторного поля) для любого  $x \in [0,1]$ , что означает большую привлекательность, с точки зрения общества, распределения сильной руки, чем партиципаторного. Пусть также начальное распределение власти

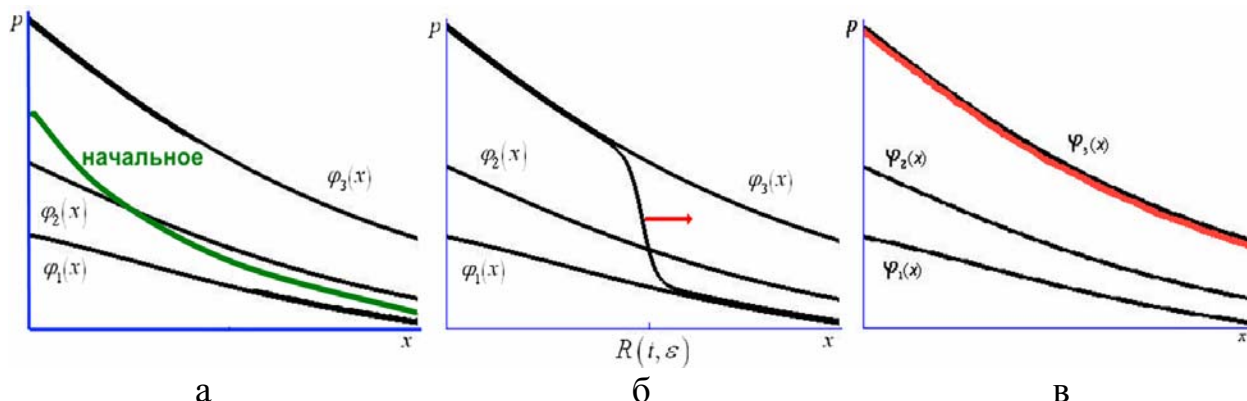


Рис. 3. Построение властной вертикали. Начальное распределение власти (а), движение контрастной структуры (б), сформировавшееся распределение сильной руки (в).

находится в поле сильной руки для старших инстанций, и в партиципаторном поле – для младших (Рис. 3,а). В этом случае после формирования контрастной структуры она движется (Рис.3,б) со скоростью, имеющей главный асимптотический член (25). При этом  $dR/dt > 0$ , и за время порядка  $\varepsilon^{-1}$  точка перехода  $R(t, \varepsilon)$  доходит до правого конца отрезка  $[0,1]$ . Тем самым устанавливается распределение власти, близкое при  $x \in [0,1]$  к распределению сильной руки (Рис.3,в). Этот процесс мы называем построением властной вертикали. Заметим, что если в начальный момент времени  $t = 0$  функция  $p(x, 0, \varepsilon)$  принимала бы значения только в партиципаторном поле, то при достаточно больших значениях  $t$  распределение власти было бы близким к партиципаторному даже при выполнении условия  $h_3(x) > h_1(x)$ .

В качестве другого примера опишем сценарий, называемый установлением стационарного контрастного распределения власти. Пусть существует точка  $x_0 \in (0,1)$  такая, что  $p_3(x_0) - p_2(x_0) = p_2(x_0) - p_1(x_0)$ ,  $p_3(x) - p_2(x) > p_2(x) - p_1(x)$  при  $x < x_0$ , и  $p_3(x) - p_2(x) < p_2(x) - p_1(x)$  при  $x > x_0$ . Таким образом, ширина поля сильной руки больше, чем ширина партиципаторного поля для старших инстанций иерархии, и меньше – для младших.

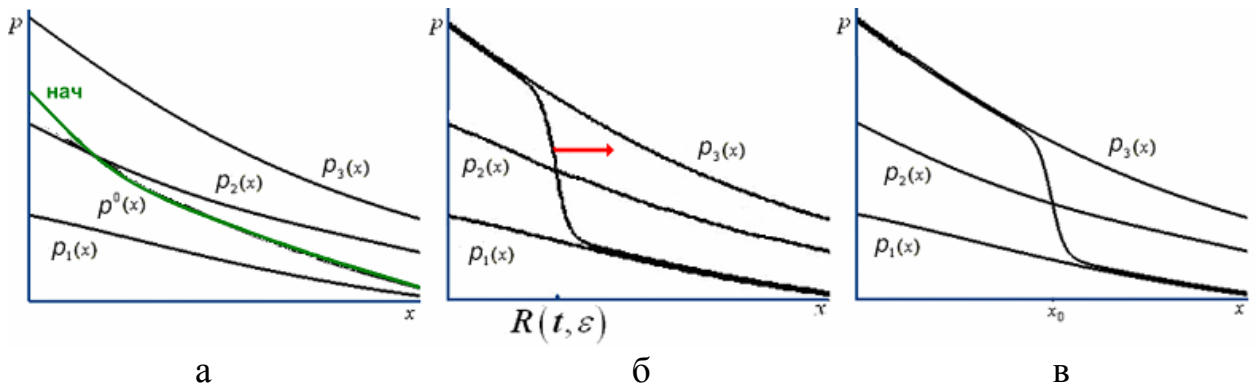


Рис. 4. Установление стационарного контрастного распределения власти. Начальное распределение власти (а), движение контрастной структуры (б), сформировавшееся контрастное распределение (в).

Пусть, кроме того, в момент  $t=0$  функция  $p(x,0,\varepsilon)$  принимает значения в поле сильной руки при  $x < \xi$ , и в партиципаторном поле при  $x > \xi$ , где  $x_0 < \xi < 1$ . Тогда распределение  $p(x,t,\varepsilon)$  притянется к распределению сильной руки при  $x < \xi$ , и к партиципаторному распределению при  $x > \xi$ . После формирования контрастной структуры она движется (Рис.4,б) со скоростью, имеющей главный асимптотический член (25). При этом, если  $R < x_0$ , то  $dR/dt > 0$ . Если же  $R > x_0$ , то  $dR/dt < 0$ . Таким образом, при достаточно больших значениях  $t$  точка перехода  $R(t,\varepsilon)$  будет находиться в малой по  $\varepsilon$  окрестности точки  $x_0$ . Тем самым устанавливается стационарное контрастное распределение власти с переходом в окрестности точки  $x_0$ . С содержательной точки зрения, сформировавшееся распределение описывает относительно сильно централизованную иерархию, в которой верхние инстанции обладают существенно большим количеством власти, чем низшие.

В качестве заключительного примера опишем сценарий формирования так называемого конфедеративного распределения власти. Выражение (25) для главного члена асимптотики скорости движения точки перехода справедливо в случае контрастной структуры, имеющей главный асимптотический член (24), т.е. решения, близкого к  $p_1(x)$  по левую сторону от внутреннего переходного слоя, и к  $p_3(x)$  - по правую. Однако задача (21)-(23) может иметь, при определенных условиях, решение, близкое к  $p_3(x)$  по левую сторону от внутреннего переходного слоя, и к  $p_1(x)$  - по правую.



Главный член асимптотики этого решения имеет вид

$$p(x, R(t, \varepsilon), \varepsilon) = -\frac{1 - \exp[\sqrt{2\gamma(R)} (x - R)/\varepsilon]}{1 + \exp[\sqrt{2\gamma(R)} (x - R)/\varepsilon]} \frac{p_3(x) - p_1(x)}{2} + \frac{p_3(x) + p_1(x)}{2}.$$

Скорость движения такой ступеньки направлена в противоположную сторону, т.е. главный член асимптотики скорости (27) следует заменить на

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon \sqrt{k_1(R)/2} [2p_2(R) - p_3(R) - p_1(R)] \quad (28)$$

Пусть существует точка  $x_0 \in (0,1)$  такая, что  $p_3(x_0) - p_2(x_0) = p_2(x_0) - p_1(x_0)$ ,  $p_3(x) - p_2(x) < p_2(x) - p_1(x)$  при  $x < x_0$ , и  $p_3(x) - p_2(x) > p_2(x) - p_1(x)$  при  $x > x_0$ . Таким образом, рассматривается ситуация, обратная по отношению к предыдущему сценарию: ширина поля сильной руки больше, чем ширина партиципаторного поля для младших инстанций иерархии, и меньше – для старших.

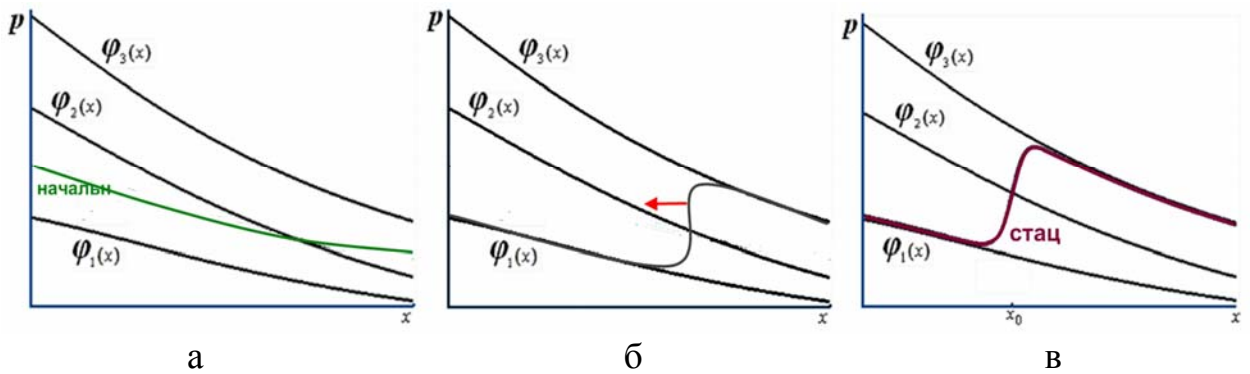


Рис. 5. Установление конфедеративного распределения власти. Начальное распределение власти (а), движение контрастной структуры (б), сформировавшееся конфедеративное распределение (в).

Пусть, кроме того, в момент  $t=0$  функция  $p(x,0,\varepsilon)$  принимает значения в партиципаторном поле при  $x < \xi$ , и в поле сильной руки при  $x > \xi$ , где  $x_0 < \xi < 1$ . Тогда распределение  $p(x,t,\varepsilon)$  притянется к распределению сильной руки при  $x > \xi$ , и к партиципаторному распределению при  $x < \xi$ . После формирования контрастной структуры она движется (Рис.5,б) со скоростью, имеющей главный асимптотический член (28). При этом, если  $R < x_0$ , то  $dR/dt > 0$ . Если же  $R > x_0$ , то  $dR/dt < 0$ . Таким образом, при достаточно больших значениях  $t$  точка перехода  $R(t,\varepsilon)$  будет находиться в малой по  $\varepsilon$  окрестности точки  $x_0$ . Тем самым устанавливается конфедеративное распределение власти с переходом в окрестности точки  $x_0$ . С содержательной точки зрения, сформировавшееся распределение описывает децентрализованную иерархию, в которой часть более низких инстанций обладает большим количеством власти, чем более высоких. Такая структура распределения власти характерна для конфедеративных государств, в которых региональные, формально более низкие, инстанции обладают

большей властью, чем центральные.

Помимо указанных, в разделе 2.3 рассмотрено еще несколько содержательных сценариев динамики распределения власти в иерархии.

**В разделе 3.4** рассматривается модель «власть-общество» с периодической функцией реакции гражданского общества при различных соотношениях между скоростью изменений предпочтений общества и характерной скоростью протекания процессов в иерархии. Анализируются решения, относящиеся к классу контрастных структур.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k_1(x)(p - p_1(x))(p - p_2(x, \varepsilon^\alpha t))(p - p_3(x))$$

где  $p_2(x, \varepsilon^\alpha(t+T)) = p_2(x, \varepsilon^\alpha t)$ ,  $p_1(x) < p_2(x, \varepsilon^\alpha t) < p_3(x)$ ,  $\alpha$  - числовой параметр.

Показано, что в этом случае главный член асимптотики выражения для скорости движения ступеньки имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = -\varepsilon \sqrt{k_1(R)/2} [2p_2(R, \varepsilon^\alpha t) - p_3(R) - p_1(R)]$$

Ввиду периодичности функции  $p_2(x, \varepsilon^\alpha t)$  существует периодический режим, который может быть устойчивым (в смысле притяжения к нему из некоторого класса начальных условий) или неустойчивым. Показано, что динамика власти существенно зависит от значения параметра  $\alpha$ . При этом различаются следующие случаи:

1)  $\alpha < 1$  - скорость изменения реакции общества существенно меньше характерной скорости перераспределения власти между инстанциями (скорости «диффузии»). Тогда либо движение КС сводится к вибрации с малой амплитудой порядка  $O(\varepsilon^{1-\alpha})$ , либо решение превращается в чисто погранслоное за асимптотически большое время.

2)  $\alpha > 1$  - скорость изменения реакции общества существенно больше скорости «диффузии». В этом случае «диффузия» настолько велика, что либо КС успевает подстраиваться под изменения настроений общества:  $|r(t) - \bar{x}(t)|$  является малой величиной порядка  $O(\varepsilon^{\alpha-1})$  при не слишком малых значениях  $t$  (т.е. по прошествии переходного периода), либо решение превращается в чисто погранслоное за малое (по  $\varepsilon$ ) время.

3)  $\alpha = 1$  - скорость изменения реакции общества имеет тот же порядок, что и скорость «диффузии». Либо точка перехода КС совершает периодическое движение с амплитудой порядка  $\varepsilon^0$ , либо решение превращается в чисто погранслоное за время порядка  $\varepsilon^0$ .

В случае устойчивого периодического режима распределение власти имеет вид контрастной структуры с нестационарной точкой перехода, причем колебания переходного слоя следуют за колебаниями общественного настроения.

Таким образом, в случае неустойчивого периодического режима, распределение власти становится по истечении переходного процесса чисто

погранслоинным: либо партиципаторным, либо распределением сильной руки. Колебания общественного настроения перестают оказывать ощутимое влияния на количество власти, находящееся в распоряжении инстанций иерархии.

**В заключении** приведены основные результаты работы

### **Список литературы**

1. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР. 1979. №5. С.38-49.
2. Самарский А.А. Проблема использования вычислительной техники и развитие информатики. Вестник АН СССР 1985, N 3.
3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 2001. 320 с
4. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Об асимптотике решения типа контрастной структуры //Матем. заметки, Т.42. №6 (1987). С.831–841.
6. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б. Об асимптотической теории пространственных контрастных структур//Ж. вычисл. матем. и математической физики. 1988. Т.28. №3, С. 346-361.
6. Васильева А.Б. Об устойчивости контрастных структур // Матем. моделирование. 1991. Т.3. №4. С. 114-123.
7. Васильева А.Б., Петров А.П., Плотников А.А. К теории контрастных структур переменного типа//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38, №9. С. 1534-1543.
8. Бутузов В.Ф., Неделько И.В. О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями//Матем. сборник. 2001. Т.192, №5. С. 13-52.
9. Vasil'eva A., Nikitin A., Petrov A. Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies// Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 1994, vol.78, pp.261-279.
10. Vykov A., Popov A., Shukurov A., Sokoloff D. Anomalous persistence of bisymmetric magnetic structures in spiral galaxies // Monthly Notes of the Royal Astronomical Society. 1997. V.279. №1. 3.1-10
11. Moss D., Petrov A., Sokoloff D. The motion of magnetic fronts in spiral galaxies//Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol 92, 2000, p.129-149.
12. V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider “Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities”, Journal of Mathematical Sciences, 121, No. 1, 1973–2079 (2004)
13. Nefedov N.N., Schneider K.R., Schuppert A. Jumping behavior in singularly perturbed systems modeling bimolecular reactions // Weierstrass-Institute fur Angewandte Analysis and Stochastic, Berlin, Preprint №197, 1994
14. Белинцев Б.Н. Диссипативные структуры и проблема биологического формообразования // УФН, 1983, т.141, №1, С.55-101

15. *Белинцев Б.Н.* Физические основы биологического формообразования. М.: Наука, 1991. 256 с.
16. *Попов В.Ю.* Моделирование эволюции контрастных структур в астрофизической и геофизической плазме // Научная конференция: «Ломоносовские чтения. Секция физики. Апрель 2005». С. 92-100.
17. *Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н.* Контрастные структуры в магнитных жидкостях // Физико-химические и прикладные проблемы магнитных жидкостей. Сб. науч. трудов. - Ставрополь: Изд-во СГУ.-1997.-С.137-139
18. *Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н.* Образование и устойчивость пространственных структур в магнитной жидкости // Прикладная гидромеханика. - 2003. - т.5(77). - С.62-70
19. *М. Г. Дмитриев, Г. С. Жукова, А. П. Петров.* Асимптотический анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти// Математическое моделирование. 2004. Т.16, №5. С.23-34
20. *Петров А.П.* О модели «власть-общество» с периодической функцией реакции гражданского общества // Матем. моделирование. Т. 20. №11 (2008). С.80–88.
21. *Дмитриев М.Г., Дубовский С.В., Жукова Г.С., Малков С.Ю., Михайлов А.П., Петров А.П., Степанцов М.Е.* Моделирование социально-политической и экономической динамики. М.: Российский государственный социальный университет. 2004. – 224 с.
22. *Михайлов А.П.* Моделирование системы «Власть – Общество» М., Физматлит, 2006. - 144 с.
23. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник. 1948.22(64).N2.С.193-204.
24. *Тихонов А.Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сборник. 1950.27(69).N1.С.147-156.
25. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при старших производных // Матем. сборник. 1952.31(73). N3. С.575-586.
26. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973
27. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Московского университета, 1978.
28. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа. 1990. 208 с.
29. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Об асимптотике решения типа контрастной структуры // Матем. заметки. Т.42. №6 (1987), с.831–841
30. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 5. С. 13–52.
31. *Васильева А.Б., Петров А.П., Плотников А.А.* К теории контрастных структур переменного типа//Журнал вычисл. математики и математической физики, 1998, т.38, №9, с.1534-1543.
32. *Бутузов В.Ф.* Контрастные структуры типа всплеска в параболической системе двух сингулярно возмущенных уравнений// Ж. вычисл. матем. и

матем. физ. 1997. Т.37. №4. С.415-428.

33. *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов*, “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах” // *Фундаментальная и прикладная математика*, 4, No. 3, 799–851 (1998)

34. *Васильева А.Б.* Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 35. № 4. С. 520–531

35. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур(обзор) // *Автоматика и телемеханика*, 1997. Т.7. С.4-32.

36. *Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М.* Магнитные поля галактик. М.: Наука, 1988

37. *Belyanin M.P., Sokoloff D.D., Shukurov A.M.* Simple models of nonlinear fluctuation dynamo // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 1993, vol.68, pp.237-261

38. *Moss, D.* On the generation of bisymmetric magnetic field structures by tidal interactions" // *Mon. Not. R. astr. Soc.* 1995. V/275, p.191-194.

39. *Beck R.* Galactic and Extragalactic Magnetic Fields // *Space Science Reviews*. 2001. V.99. P.263-260

40. *Hun J.L.* The Large-Scale Magnetic Field Structure of Our Galaxy: Efficiently Deduced from Pulsar Rotation Measures // *The Magnetized Interstellar Medium*. Eds.: B.Uyaniker, W.Reich, R.Wielebinsky. 2003, Antalya, Turkey. P.3-12.

41. *Moss D., Petrov A., Sokoloff D.* The motion of magnetic fronts in spiral galaxies//*Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, Vol 92, 2000, p.129-149.

42. *Михайлов А.П.* Математическое моделирование власти в иерархических структурах // *Математическое моделирование*, 1994. Т.6, №6, стр. 108-138.

### **Публикации по теме диссертации**

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК

1. *Vasil'eva A., Nikitin A., Petrov A.* Stability of contrasting solutions of nonlinear hydromagnetic dynamo equations and magnetic fields reversals in galaxies // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 1994, vol.78, pp.261-279.

2. *Васильева А.Б., Никитин А.Г., Петров А.П.* Асимптотический метод исследования контрастных структур и его приложение к теории гидромагнитного динамо // *Математическое моделирование* 1995, т.7, №2, с.61-71.

3. *Васильева А.Б., Петров А.П., Плотников А.А.* К теории контрастных структур переменного типа // *Журнал вычисл. математики и математической физики*, 1998, т.38, №9, с.1534-1543.

4. *Петров А.П.* О бегущих контрастных структурах типа ступеньки // *Журнал*

- вычисл. математики и математической физики, т.39, №9, 1999, с.1449-1454
5. *Никитин А.Г., Петров А.П.* О предельном переходе по малому параметру для собственных значений сингулярно возмущенных задач Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения, т.35, №6, 1999.
  6. *Moss D., Petrov A., Sokoloff D.* The motion of magnetic fronts in spiral galaxies//Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol 92, 2000, p.129-149.
  7. *А. П. Петров, Д. Д. Соколов, Д.Л. Мосс.* Магнитные фронты в галактиках // Астрономический журнал. 2001. Т.78, №7, с.579-584.
  8. *Петров А.П.* Бегущие контрастные структуры в различных моделях гидромагнитного динамо//Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 10. С. 95-104.
  9. *D. Moss, D. Sokoloff, K. Kuzanyan, A. Petrov.* Stellar Dynamo Waves: Asymptotic Configurations // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, Volume 98, Number 3 / June 2004. P:257 - 272
  10. *М. Г. Дмитриев, Г. С. Жукова, А. П. Петров.* Асимптотический анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти// Математическое моделирование. 2004. Т.16, №5. С.23-34
  11. *М. Г. Дмитриев, Г. С. Жукова, А. П. Петров.* Нелинейная модель "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти// Ученые записки Российского государственного социального университета. 2004. №2. С.60-69.
  12. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Макромодель взаимоотношений бизнеса и власти // Социальная политика и социология, 2007, №3, с.219-231
  13. *Петров А.П.* О модели «власть-общество» с периодической функцией реакции гражданского общества // Математическое моделирование.Т.20. №11 (2008). С.80–88.

#### Прочие публикации

1. *A. Petrov, D. Sokoloff, D. Moss.* Accretion and magnetic fronts in galaxies // Magnetohydrodynamics 38, 4 (2002) p. 339-344.
2. *Петров А.П.* Об устойчивости контрастных структур типа ступеньки // Алгебраические структуры и сингулярные возмущения. Труды конференции (Аксаково,1993), с.137-138.
3. *Петров А.П.* Об устойчивости контрастных структур и некоторых решений с погранслоями// Математические модели и методы в социальных науках. Труды межвузовской конференции (Нахабино,1994), с. 18-19.
4. *Vasil'eva A., Petrov A., Plotnikov A.* Contrast structures // Singular solutions and perturbations in control systems. International Workshop. Pereslavl-Zalessky, 1997, p.41.
5. *Vasil'eva A., Petrov A., Plotnikov A.* Contrast structures of alternating type//Singular solutions and perturbations in control systems. Proceeding volume from the IFAC Workshop. Elsevier Science Ltd. Oxford, UK, 1997,p.71-74.
6. *Sokoloff D., Petrov A., Moss D.* Magnetic fronts in spiral galaxies//Plasma turbulence and Energetic particles in Astrophysics. Ed. M.Ostrovsky and

- R.Schlickeiser. Proc. Int. Conf. Cracow (Poland), Cracow, 1999, p.92-97.
7. *Petrov A., Moss D., Sokoloff D.* The motion of magnetic fronts in the no-z galactic dynamo model // Strong Magnetic Fields in Neutrino Astrophysics Ed. A.Kuznetsov, N.Mikheev and A.Parkhomenko. Int Workshop. Yaroslavl, 2000, p.190-196.
8. *Петров А.П.* Бегущие контрастные структуры в различных моделях галактического динамо // Математическая физика, математическое моделирование и приближенные методы. Конф., посвященная памяти акад. А.Н. Тихонова. Обнинск, 2000, с.46-47.
9. *Sokoloff D., Petrov A.* Asymptotic results for "no-z" approximation in galactic dynamo // 24 General Assembly. International Astronomical Union. Manchester, 2000, p.212.
10. *Дмитриев М.Г., Петров А.П.* Анализ модели "власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти // Математические методы и приложения. Труды девярых математических чтений МГСУ (26-31 января 2001 года). Москва, 2002. С. 150-154.
11. *Дмитриев М.Г., Петров А.П.* Анализ модели "Власть-общество" для случая двух устойчивых распределений власти // Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания. Международная конференция. Тезисы докладов. Обнинск, 14-18 мая 2002 г. С. 38-39.
12. *Dmitriev M., Zhukova G., Petrov A.* Interior layers in the nonlinear "Power-society" model // V International Congress on Mathematical Modeling. September 30 – October 6. Dubna, Moscow region. Book of abstracts, volume II. P. 49.
13. *Дмитриев М.Г., Жукова Г.С., Петров А.П.* К нелинейной модели динамики власти в иерархии // Функциональные пространства, дифференциальные операторы, проблемы математического образования. Тезисы докладов. Вторая международная конференция. М.: Физматлит, 2003. С. 164-166
14. *M. Dmitriev, A. Petrov, G. Zhukova* The nonlinear "authority-society" model // WSEAS Transactions on Mathematics. Issues: 1 and 2, Volume 2, January 2003, p.31-36
15. *Дмитриев М.Г., Жукова Г.С., Петров А.П.* Нелинейная модель "власть-общество" и политические сценарии // Математическое моделирование социальных процессов. Труды II Всероссийского социологического конгресса
16. *Дмитриев М.Г., Дубовский С.В., Жукова Г.С., Малков С.Ю., Михайлов А.П., Петров А.П., Степанцов М.Е.* Моделирование социально-политической и экономической динамики. М.: Российский государственный социальный университет. 2004. – 224 с.
17. *M.Dmitriev, A.Petrov, G.Joukova.* The "power-society" model: power dynamics // Proceedings of the International Conference Mathematical Modeling of Social and Economic Dynamics. Moscow, 2004. P.101-104
18. *M.Dmitriev, A.Petrov, G.Zhukova.* The "Authority-society" Model in case of Several Stable Authority Profiles // Mathematical Modeling: Modern Methods and Applications. Moscow, Yanus-K, 2004. P.53-60.
19. *М.Г.Дмитриев, Г.С.Жукова, А.П.Петров.* Нелинейная модель динамики власти // Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в

международное образовательное пространство. Международная научная конференция. Высокие Татры, Словакия. 22-27 августа 2004 г. М., изд-во РУДН. С.151-154.

20. *Д. Ланкин, А.П. Петров.* Численные эксперименты с моделью «власть-общество» с кубической функцией реакции общества. // Сб.: Математическое моделирование социальных процессов, Социологический факультет МГУ, вып.7., М.: МАКС Пресс, 2005.

21. *Петров А.П.* О периодических структурах в модели «власть-общество» // В сб.: Математическое моделирование социальных процессов, Социологический факультет МГУ, вып.8., М.: МАКС Пресс, С.87-92

22. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Объединение модели «власть-общество» с моделью Солоу // В сб.: Математическое моделирование социальных процессов, Социологический факультет МГУ, вып.8., М.: МАКС Пресс, с.30-36.

23. *Дмитриев М.Г., Петров А.П.* Математическая модель «Власть-общество-инфраструктура-производство». //В сб. «Тезисы докладов и выступлений Всероссийского социологического конгресса. Глобализация и социальные изменения в современной России, том 11, 3-5 октября 2006 года».М.: Альфа-М, 2006. Стр.123-124

24. *Павлов А.А., Дмитриев М.Г., Петров А.П.* Исследование модели «Власть-общество» с учетом экономического роста. //В сб. «Тезисы докладов и выступлений Всероссийского социологического конгресса. Глобализация и социальные изменения в современной России, том 11, 3-5 октября 2006 года».М.: Альфа-М, 2006. Стр.140-141.

25. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Концепция модели взаимоотношений бизнеса и власти. // В сб. «Глобализация: настоящее и будущее России. Материалы VI Международного социального конгресса 24-25 ноября 2006 года. В 2-х томах». - М.: Изд-во РГСУ, 2006, т.1. – 356 с.- стр. 109-110.

26. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Оптимальный объем властных полномочий в иерархиях по критерию удельного потребления // Математическое моделирование социальных процессов. Вып.9. 2007, с.6-14

27. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Развитие модели «власть-общество» и ее приложения // В сб. «V Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2007), посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н.Моисеева: Москва,10-14 апреля 2007 г. Труды». Отв. редакторы П.С.Краснощеков, А.А.Васин.-М.: МАКС Пресс, 2007.- 368 с., стр.218-219.