

На правах рукописи

Зезюлин Дмитрий Александрович

**Математическое моделирование структур,  
возникающих в конденсате Бозе–Эйнштейна**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в *Московском государственном институте электронной техники*.

Научный руководитель: *кандидат физико-математических наук  
Алфимов Георгий Леонидович*

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук  
Камчатнов Анатолий Михайлович*  
*доктор физико-математических наук,  
профессор Трофимов Вячеслав Анатольевич*

Ведущая организация: *Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского*

Защита состоится «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2009 г. в \_\_\_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д.002.058.01 при *Институте математического моделирования РАН*, расположенном по адресу: *125047, Москва, Миусская пл., 4а*.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ИММ РАН*.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

*доктор физико-математических наук*

*Змитренко Н. В.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Существование такого явления, как конденсация Бозе–Эйнштейна, было предсказано еще в 1925 году. Однако получить конденсат Бозе–Эйнштейна (БЭК) в реальном эксперименте впервые удалось лишь в 1995 году [1]. Это экспериментальное открытие стимулировало интерес к данной теме во всем мире, а в 2001 году ученым, получившим БЭК, была присуждена Нобелевская премия по физике. В настоящее время растущие экспериментальные возможности для получения и удержания этого нового состояния вещества ставят перед исследователями-теоретиками многочисленные вопросы, связанные как с объяснением имеющихся экспериментальных данных, так и с подготовкой новых экспериментов.

Одним из подходов к математическому описанию БЭК является так называемая теория среднего поля, в основе которой лежит уравнение Гросса–Питаевского (УГП) [2–4]:

$$i\Psi_t = -\Delta\Psi + V(\mathbf{x})\Psi - \sigma\Psi|\Psi|^2, \quad (1)$$

В контексте БЭК  $\Psi(t, \mathbf{x})$  соответствует макроскопической волновой функции,  $V(\mathbf{x})$  имеет смысл потенциала ловушки, удерживающей конденсат, а множитель  $\sigma = \pm 1$  описывает характер взаимодействий между частицами, образующими конденсат. Случай  $\sigma = 1$  соответствует наличию притягивающих взаимодействий между частицами, в то время как при  $\sigma = -1$  между частицами действуют отталкивающие взаимодействия. Величины

$$E = \frac{1}{2} \int \left( |\nabla\Psi|^2 + V(\mathbf{x})|\Psi|^2 - \frac{\sigma}{2}|\Psi|^4 \right) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

$$N = \int |\Psi|^2 d\mathbf{x} \quad (3)$$

имеют смысл энергии конденсата и числа частиц, образующих конденсат, соответственно. Обе эти величины сохраняются в ходе эволюции, описываемой уравнением (1).

Следует отметить, что УГП, которое представляет собой нелинейное уравнение Шредингера с дополнительным потенциалом  $V(\mathbf{x})$ , возникает и в других физических задачах. Например, в физике плазмы это уравнение описывает распространение импульса в плазменном канале [5]. В нелинейной оптике включение дополнительного потенциала в классическую модель нелинейного уравнения Шредингера продиктовано необходимостью сжатия импульсов в оптическом волокне [6].

В диссертации рассматриваются *стационарные решения* УГП. Такие решения записываются в виде подстановки

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \psi(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где функция  $\psi(\mathbf{x})$  удовлетворяет стационарному уравнению

$$\Delta\psi + (\omega - V(\mathbf{x}))\psi + \sigma\psi|\psi|^2 = 0, \quad (5)$$

а также условиям пространственной локализации:  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}) = 0$ . Решения вида (4) представляют отдельный интерес, так как в терминах БЭК описывают *стационарные состояния* конденсата. Действительный параметр  $\omega$  соответствует так называемому химическому потенциалу стационарного состояния. Важной характеристикой стационарного решения является его устойчивость, которая связана с возможностью наблюдения соответствующего состояния конденсата в реальном эксперименте.

Известно, что при фиксированном числе частиц  $N$  минимум функционала  $E$  достигается именно на некотором стационарном решении. Соответствующее этому решению состояние конденсата называется *основ-*

*ным.* Благодаря указанному свойству основное состояние представляет особый интерес и наиболее широко обсуждается в литературе [7–9]. Однако рассматриваются также и *высшие* (то есть, не являющиеся основными) стационарные решения УГП (см., например, [9–11]), в том числе, в связи с экспериментами по «квантовому запутыванию» различных конденсатов [12]. Некоторые решения УГП, соответствующие высшим состояниям, были найдены численно (см., например, [13–15]). В некоторых частных случаях удалось строго доказать, что существует бесконечно много семейств стационарных решений [6]. В то же время, для произвольного потенциала  $V(\mathbf{x})$  исчерпывающей классификации различных семейств стационарных решений до сих пор не построено.

**Цель диссертационной работы** — перечислить (классифицировать) *все* типы стационарных решений, которые допускает УГП (для различных, но фиксированных потенциалов  $V(\mathbf{x})$ ), найти их численно и исследовать их устойчивость.

**Научная новизна работы.** Не считая нескольких специальных частных случаев (например, когда удерживающий потенциал имеет вид бесконечно глубокой прямоугольной ямы, как в [16]), стационарные решения УГП могут быть найдены только численно. Если для некоторого стационарного решения (4) амплитуда стационарной волновой функции  $\psi(\mathbf{x})$  мала, то саму функцию  $\psi(\mathbf{x})$  и соответствующее ей значение параметра  $\omega$  можно аппроксимировать собственной функцией и собственным числом линейной задачи на собственные значения вида

$$\Delta\psi + (\omega - V(\mathbf{x}))\psi = 0. \quad (6)$$

Положим для простоты, что потенциал  $V(\mathbf{x})$  таков, что задача (6) имеет бесконечный дискретный набор решений  $(\tilde{\omega}_n, \tilde{\psi}_n(\mathbf{x}))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где собственные числа  $\tilde{\omega}_n$  действительны и упорядочены в порядке возрастания

тания:  $\tilde{\omega}_0 < \tilde{\omega}_1 < \dots$ . Любое стационарное решение УГП, то есть, любую пару  $(\omega, \psi(\mathbf{x}))$ , удовлетворяющую (4), можно отметить точкой на координатной плоскости  $\{\omega, N\}$ . Например, тривиальное решение  $\psi(\mathbf{x}) \equiv 0$  существует при любом  $\omega$ . На рассматриваемой плоскости такому решению соответствует вся прямая  $N = 0$ . В точках  $\omega = \tilde{\omega}_n$  нулевое решение *ветвится*, в результате чего на плоскости  $\{\omega, N\}$  появляется набор непрерывных кривых  $\Gamma_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , выходящих из точек  $(\tilde{\omega}_n, 0)$ . Следуя терминологии, предложенной в [13], будем говорить, что кривые  $\Gamma_n$  описывают семейства стационарных решений, *обладающих линейным аналогом*. Известно, что решения, обладающие линейным аналогом, существуют в случае как притягивающих, так и отталкивающих взаимодействий между частицами. В окрестности точки  $(\tilde{\omega}_n, 0)$  амплитуда решений  $\psi(\mathbf{x})$ , принадлежащих семейству  $\Gamma_n$ , мала. При этом само решение  $\psi(\mathbf{x})$  и соответствующее значение  $\omega$  можно приближенно описать с помощью асимптотических разложений вида

$$\psi(\mathbf{x}) = \varepsilon \tilde{\psi}_n(\mathbf{x}) + o(\varepsilon), \quad \omega = \tilde{\omega}_n - \varepsilon^2 \sigma \Omega_n + o(\varepsilon^2), \quad (7)$$

где  $\varepsilon$  — формальный малый параметр и  $\Omega_n$  — числовой коэффициент, зависящий от  $n$ .

За последнее время было предложено несколько подходов для численного построения стационарных решений УГП. Многие из них (см., например, [14, 15]) используют разложения (7) для того, чтобы аппроксимировать малоамплитудные решения в окрестности точки ветвления  $\tilde{\omega}_n$ , и затем, постепенно меняя параметр  $\omega$ , «выйти из линейного предела» в область, где амплитуда решений малой уже не является. Однако УГП допускает также стационарные решения, *не имеющие линейного аналога*. Такие решения не могут быть получены путем выхода из линейного предела. В [13] решения, не имеющие линейного аналога, были найдены

с помощью метода продолжения из предела бесконечно большой нелинейности.

Однако подобные методы продолжения по параметру требуют наличия некой априорной информации о форме искомых решений. Данная информация используется для того, чтобы с достаточной степенью точности найти начальное приближение, с которого следует начинать итерационный процесс. Кроме того, ни один из предложенных ранее методов не позволяет гарантировать, что при данном значении параметра  $\omega$  удалось найти *все* стационарные решения.

В данной работе предлагается новый численный метод для расчета стационарных решений УГП. Он не требует наличия априорной информации о пространственной форме стационарных решений и позволяет находить решения как обладающие, так и не обладающие линейным аналогом, а также (в одномерном случае) несимметричные решения, для которых  $|\psi(x)| \neq |\psi(-x)|$ . Метод имеет строгое математическое обоснование в виде теоремы, устанавливающей взаимно-однозначное соответствие между некоторым классом решений стационарного уравнения (5) и множеством действительных чисел. Важным преимуществом нового метода является то, что в некоторых случаях (точнее, для случая отталкивающих взаимодействий  $\sigma = -1$ ) он позволяет провести процедуру *доказательных вычислений*, когда, проделав некоторый объем вычислительной работы, можно оборвать расчет, гарантировав при этом, что при данном значении параметра  $\omega$  рассматриваемая задача не допускает других решений, кроме тех, что уже были найдены. Кроме того, предложенный метод позволяет работать с широким классом потенциалов  $V(\mathbf{x})$ , а в одномерном случае он легко обобщается на случай неоднородной по пространству нелинейности, когда коэффициент  $\sigma$  является функцией от  $x$ .

Вопросу устойчивости стационарных решений УГП посвящено большое количество литературы, см., например, [6, 13–15]. Следует, однако, признать, что до настоящего момента даже для лучше всего изученного случая одномерного гармонического потенциала  $V(x) = x^2$  не построено общей картины устойчивости различных семейств стационарных решений. Более того, в литературе не обсуждалось, как выбор конкретного потенциала  $V(x)$  в УГП влияет на устойчивость одномерных стационарных состояний. В настоящей диссертации случай гармонического потенциала был подробно рассмотрен, что позволило обобщить и уточнить некоторые полученные ранее результаты (например, в [6, 15]). Кроме того, в диссертации показано, что данный случай является в некотором смысле особенным, что связано с эквидистантностью набора собственных чисел  $\tilde{\omega}_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  гармонического квантового осциллятора  $\psi_{xx} + (\omega - x^2)\psi = 0$ .

В диссертационной работе также показано, что добавление к гармоническому потенциалу даже малой ангармонической составляющей (например, вида  $\gamma x^4$ ,  $0 < \gamma \ll 1$ ), позволяющей нарушить эквидистантность, существенно меняет общую картину устойчивости стационарных решений. Кроме того, в диссертации рассматривается ангармонический потенциал  $V(x) = x^4$ , для которого также подробно изучена устойчивость различных семейств стационарных решений и выявлены некоторые закономерности, позволяющие сделать общие предположения об устойчивости высших стационарных состояний.

Проблема устойчивости двумерных стационарных состояний особенно интересна с той точки зрения, что некоторые недавние подробные исследования (см., например, [14]) сообщают о неустойчивости *всех* рассмотренных высших радиально-симметричных стационарных состояний для случая гармонического потенциала  $V(r) = r^2$ . В диссертации рас-



смотрена устойчивость радиально-симметричных стационарных состояний в присутствии как гармонического, так и ангармонических потенциалов  $V(r)$ . Показано, что, как и в одномерном случае, добавление ангармонического возмущения к обычному гармоническому потенциалу может улучшить устойчивость высших стационарных состояний. Однако, в отличие от одномерного случая, при увеличении амплитуды решений все рассмотренные высшие состояния довольно быстро теряют устойчивость.

**Практическая значимость работы.** В процессе работы над диссертацией была написана программа, позволяющая рассчитывать стационарные решения УГП и затем численно исследовать устойчивость найденных решений. В программе реализована процедура проверки условий, которые должны выполняться (в случае отталкивающих взаимодействий между частицами) для того, чтобы расчет можно было прервать, гарантировав при этом, что при данном  $\omega$  найдены все рассматриваемые стационарные решения.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы при подготовке новых экспериментов, связанных с исследованием БЭК, например, для получения не наблюдавшихся ранее в реальном эксперименте структур.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. метод доказательных вычислений для расчета стационарных решений одномерного и двумерного уравнения Гросса–Питаевского;
2. общая картина устойчивости различных семейств стационарных решений для гармонического  $V(x) = x^2$  и ангармонического  $V(x) = x^4$  потенциалов;

3. стабилизация стационарных решений уравнения Гросса–Питаевского при добавлении к гармоническому потенциалу  $V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$  ангармонического возмущения;
4. существование бистабильных (в определенном смысле, см. стр. 16) стационарных состояний в случае неоднородной по пространству нелинейности, когда коэффициент  $\sigma$  представляет собой функцию от  $x$ :  $\sigma = \sigma(x)$ .

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на нескольких научных конференциях и семинарах, в том числе:

- на научной конференции “Solitons and nonlinear phenomena in degenerate quantum gases”, Cuenca, Spain, Sept. 27–30, 2006;
- на научных конференциях «Микроэлектроника и информатика — 2007, 2008, 2009», Зеленоград, 18–20 апреля 2007 г., 23–25 апреля 2008 г., 22–24 апреля 2009 г;
- на научной конференции “Nonlinear phenomena in quantum degenerate gases”, Toledo, Spain, April 1–4, 2008;
- на семинаре ИММ РАН и кафедры математического моделирования МФТИ под руководством профессора Е.И. Леванова, Москва, 11 декабря 2008 г.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликованы пять научных статей, список которых приведен в конце данного автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы.

ры. Общий объем диссертации составляет 177 страниц, работа содержит 37 рисунков, 7 таблиц. Список литературы содержит 91 наименование.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, приведен краткий обзор известных результатов, показана практическая значимость диссертационной работы, представлены выносимые на защиту научные положения.

**Первая глава** посвящена новому методу для расчета стационарных решений одномерного УГП. В первом параграфе приводится описание предлагаемого численного подхода. В первом пункте первого параграфа изложены нестрогие наводящие соображения, раскрывающие идею метода. Пусть  $S_+$  — это множество действительных решений уравнения (5), стремящихся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Рассматривая любое решение из  $S_+$ , естественно предположить, что при больших значениях аргумента его поведение можно описать линейным уравнением  $\psi_{xx} + (\omega - V(x)) = 0$ . Если сделанное предположение справедливо, то любое решение из  $S_+$  подчиняется следующей асимптотической формуле [17]:

$$\psi(x) = (V(x) - \omega)^{-1/4} \cdot e^{-\int_{x_0}^x \sqrt{V(t) - \omega} dt} (C_+ + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (8)$$

где  $C_+$  — действительный числовой параметр. Следующее предположение заключается в том, что соотношение (8) выражает взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством  $S_+$ . Другими словами, для любого числа  $C_+$  существует единственное решение  $\psi_+(x) \equiv \psi_+(x; C_+)$ , принадлежащее множеству  $S_+$  и подчиняющееся асимптотической формуле (8), и наоборот, для любого решения из  $S_+$

найдется соответствующая константа  $C_+$ .

Аналогичные рассуждения можно провести и для решений, образующих множество  $S_-$ , то есть, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ . Соответствующее константе  $C_-$  решение из  $S_-$  будем обозначать как  $\psi_-(x; C_-)$ . Очевидно, локализованное решение  $\psi(x)$  уравнения (5) должно принадлежать пересечению множеств  $S_+$  и  $S_-$ . При этом для некоторого фиксированного  $x$  (скажем, для  $x = 0$ ) должны выполняться условия  $\psi(0) = \psi_-(0; C_-) = \psi_+(0; C_+)$  и  $\psi'(0) = \psi'_-(0; C_-) = \psi'_+(0; C_+)$ . Последние соотношения представляют собой систему уравнений относительно пары неизвестных чисел  $C_-$  и  $C_+$ .

Во втором пункте первого параграфа изложенным выше рассуждениям придается строгая форма в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть существует такое  $x_0$ , что выполняются следующие условия:*

$$(i) \quad V(x) - \omega \geq \varepsilon > 0 \text{ для } x > x_0;$$

$$(ii) \quad V(x) \in C^2(x_0, +\infty);$$

$$(iii) \quad \int_{x_0}^{\infty} |V''(x)| \cdot (V(x) - \omega)^{-3/2} dx < \infty.$$

Пусть  $\psi_1(x) \not\equiv 0$  — фиксированное решение линейного уравнения  $\psi_{xx} + (\omega - V(x))\psi = 0$ , такое что  $\psi_1(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$  и имеет асимптотику (8). Тогда:

(a) для любого решения  $\psi(x) \in S_+$  существует число  $C_+$ , такое что

$$\psi(x) = \psi_1(x)(C_+ + o(1)), \quad \psi'(x) = \psi'_1(x)(C_+ + o(1)); \quad (9)$$

(b) наоборот, для любого числа  $C_+ \in \mathbb{R}$  существует единственное решение  $\psi_+(x; C_+) \in S_+$  уравнения (5), подчиняющееся асимптотическим соотношениям (9).

В следующем пункте описывается, как организовать поиск стационарных решений на основе сделанного утверждения. В ходе расчета при фиксированном  $\omega$  производится перебор различных значений параметров  $C_+$  и  $C_-$ , начиная от нуля и до некоторых выбранных заранее значений, и находятся решения системы  $\psi_-(0; C_-) = \psi_+(0; C_+)$ ,  $\psi'_-(0; C_-) = \psi'_+(0; C_+)$ . Вводится в рассмотрение новый способ визуализации семейств стационарных решений: вместо традиционного  $\{\omega, N\}$ -представления предлагается отмечать каждое локализованное решение точкой на плоскости  $\{\omega, C_+\}$ . Преимущество такого способа заключается в том, что в силу теоремы 1 каждая точка на плоскости  $\{\omega, C_+\}$  соответствует ровно одному локализованному решению, чего нельзя сказать о плоскости  $\{\omega, N\}$ . В четвертом пункте первого параграфа приводятся дополнительные утверждения для случая отталкивающих взаимодействий. Эти утверждения позволяют оборвать процесс поиска локализованных решений, остановившись на некоторых конечных значениях параметров  $C_{\pm}$ . При этом можно гарантировать, что при данном  $\omega$  в ходе уже проделанного расчета были найдены все решения рассматриваемой задачи.

Во втором параграфе первой главы рассматриваемая задача анализируется с помощью асимптотических разложений вида (7). Эти соотношения позволяют описать свойства малоамплитудных решений, обладающих линейным аналогом. Получено несколько вспомогательных соотношений, использующихся в следующих разделах диссертации.

В третьем параграфе первой главы сообщаются результаты расчетов, полученные с помощью описанного метода. В первом пункте рас-

сма­три­ва­ет­ся слу­чай гар­мо­ни­че­ско­го по­тен­ци­ала  $V(x) = x^2$ . Най­ден­ные се­мей­ства ста­ци­о­нар­ных ре­ше­ний при­во­дят­ся в ви­де диа­грамм на плос­ко­сти  $\{\omega, C_+\}$  и  $\{\omega, N\}$ . Во вто­ром пун­кте рас­сма­три­ва­ет­ся двухъ­ям­ный по­тен­ци­ал ви­да  $V(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ . Для это­го слу­чая уда­лось най­ти ре­ше­ния, не об­ла­да­ю­щие ли­ней­ным ана­ло­гом, а так­же не­сим­мет­рич­ные ре­ше­ния. Сле­ду­ет под­черк­нуть, что как для гар­мо­ни­че­ско­го, так и для двухъ­ям­но­го по­тен­ци­ала в слу­чае  $\sigma = -1$  по­лу­чен­ная кар­тина яв­ля­ет­ся пол­ной в том смы­сле, что в рас­сма­от­рен­ном диа­па­зо­не по  $\omega$  бы­ли най­де­ны все ста­ци­о­нар­ные ре­ше­ния. В тре­тьем пун­кте пред­ла­га­е­мый ме­тод об­об­ща­ет­ся на слу­чай не­од­но­род­ной по про­стран­ству не­ли­ней­но­сти. Рас­сма­три­ва­ет­ся слу­чай, ко­гда ко­эф­фи­ци­ент  $\sigma$  яв­ля­ет­ся кусоч­но-по­сто­ян­ной функ­цией от  $x$ , до­пус­ка­ю­щей раз­рыв при  $x = 0$ .

В чет­вер­том па­ра­гра­фе при­ве­ден об­зор ре­зуль­та­тов пер­вой гла­вы.

**Во вто­рой гла­ве** изу­ча­ет­ся ус­той­чи­вость ста­ци­о­нар­ных ре­ше­ний од­но­мер­но­го УГП. В пер­вом и вто­ром па­ра­гра­фах рас­сма­три­ва­ет­ся ли­ней­ная ус­той­чи­вость ста­ци­о­нар­ных ре­ше­ний. В пер­вом пун­кте пер­во­го па­ра­гра­фа по­ка­за­но, что ли­ней­ная ус­той­чи­вость ста­ци­о­нар­но­го ре­ше­ния  $\psi(x)e^{-i\omega t}$  оп­ре­де­ля­ет­ся соб­ствен­ны­ми чис­ла­ми сле­ду­ю­щей ли­ней­ной за­да­чи на соб­ствен­ные зна­че­ния:  $L^- L^+ \zeta = \Lambda \zeta$ , где опе­ра­то­ры  $L^-$  и  $L^+$  име­ют вид

$$L^\pm = d^2/dx^2 + \omega - V(x) + (2 \pm 1) \cdot \sigma(x)\psi^2(x), \quad (10)$$

Во вто­ром пун­кте пер­во­го па­ра­гра­фа по­ка­за­но, что ли­ней­ная ус­той­чи­вость ма­ло­ам­пли­туд­ных ре­ше­ний, при­над­ле­жа­щих се­мей­ству  $\Gamma_n$ , оп­ре­де­ля­ет­ся соб­ствен­ны­ми чис­ла­ми опе­ра­то­ра  $\mathcal{L}_n^2$ , где  $\mathcal{L}_n = d^2/dx^2 + \tilde{\omega}_n - V(x)$ . Если все соб­ствен­ные чис­ла опе­ра­то­ра  $\mathcal{L}_n^2$  раз­лич­ны, то все ре­ше­ния до­ста­точ­но ма­лой ам­пли­туды, при­над­ле­жа­щие се­мей­ству  $\Gamma_n$ , *ли­ней­но ус­той­чи­вы*. Если же спектр опе­ра­то­ра  $\mathcal{L}_n^2$  со­дер­жит крат­ные соб­ствен­

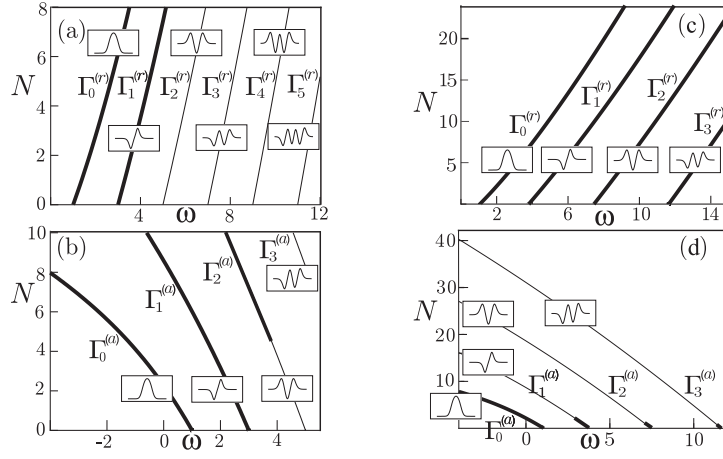


Рис. 1. Семейства  $\Gamma_n$  стационарных решений уравнения (5) для гармонического потенциала  $V(x) = x^2$  для случая отталкивающих (график (a)) и притягивающих (график (b)) взаимодействий. На графиках (c) и (d) показаны семейства стационарных решений для случая  $V(x) = x^4$ . Фрагменты кривых, которые соответствуют устойчивым решениям, выделены жирным. В прямоугольных рамках показаны примерные пространственные профили решений.

ные числа (что, в частности, имеет место в случае гармонического потенциала в силу эквидистантности его спектра), то возможна линейная неустойчивость малоамплитудных решений. В третьем пункте первого параграфа кратко описывается понятие сигнатуры Крейна. Если  $\Lambda$  — полупростое действительное собственное число оператора  $L^-L^+$  и  $\zeta(x)$  — соответствующая собственная функция, то сигнатура Крейна собственного числа  $\Lambda$  находится как  $K = \text{sign} \langle L^+\zeta(x), \zeta(x) \rangle$ . При «движении» вдоль семейства  $\Gamma_n$  собственные числа  $\Lambda$  непрерывно меняются. Однако при этом сигнатура каждого собственного числа измениться не может. Если два собственных числа «сталкиваются», то после столкновения данные собственные числа могут стать комплексными только если их сигнатуры Крейна были различны.

Во втором параграфе второй главы приводятся результаты численного исследования линейной устойчивости. В первом пункте второго параграфа рассматривается случай гармонического потенциала. Полученные

с помощью анализа асимптотических разложений результаты говорят о том, что в этом случае малоамплитудные решения, принадлежащие высшим семействам ( $n \geq 2$ ), являются неустойчивыми. Рассматривается также устойчивость решений произвольной амплитуды. В целом полученные результаты не противоречат, но в то же время обобщают сообщавшиеся ранее результаты (например, в [6] и [15]). В следующих пунктах второго параграфа рассматриваются случаи «слабо ангармонического» потенциала  $V(x) = x^2 + \gamma x^4$ ,  $0 < \gamma \ll 1$ , и «сильно ангармонического» потенциала  $V(x) = x^4$ . В обоих этих случаях имеет место линейная устойчивость малоамплитудных решений. Сравнивая результаты, полученные для трех рассмотренных типов потенциалов (четвертый пункт), можно убедиться в том, что в случае ангармонических потенциалов общая картина устойчивости существенно отличается от той, которая имеет место для гармонического потенциала (см. рис. 1). Например, для потенциала  $V(x) = x^4$  и случая отталкивающих взаимодействий ( $\sigma = -1$ ) все рассмотренные решения оказались линейно устойчивыми. В следующих двух пунктах второго параграфа рассматривается линейная устойчивость решений, найденных ранее для случая двухъямного потенциала и для случая неоднородной нелинейности, когда  $\sigma(x) = \sigma_+$  при  $x > 0$  и  $\sigma(x) = \sigma_-$  при  $x < 0$ . Для последнего случая показано, что уравнение Гросса–Питаевского с неоднородной нелинейностью допускает существование *бистабильных* стационарных состояний. Под бистабильным состоянием понимается устойчивое стационарное решение  $(\omega, \psi_1(x)) \in \Gamma_n$ , такое что для него существует еще одно устойчивое решение  $(\omega, \psi_2(x)) \in \Gamma_n$ , принадлежащее тому же семейству  $\Gamma_n$  и соответствующее тому же значению параметра  $\omega$ . Показано, что при подходящем выборе значений  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  бистабильные состояния можно получить даже для семейства  $\Gamma_0$  (см. рис. 2).



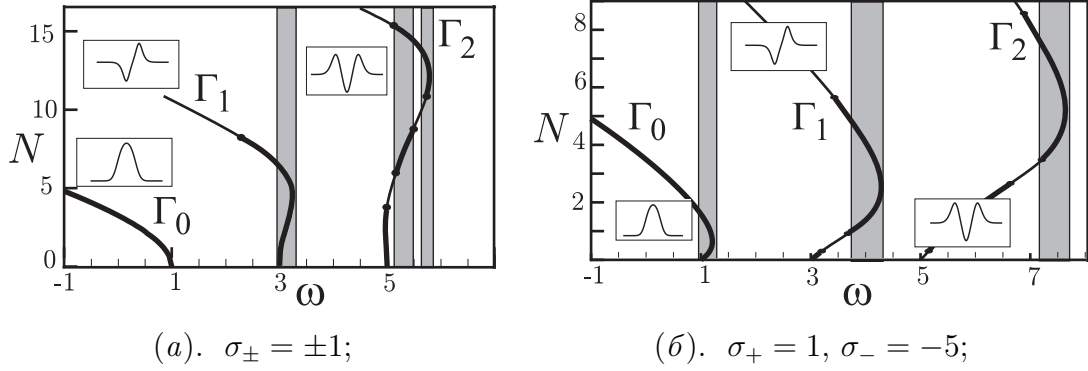


Рис. 2. Семейства стационарных решений  $\Gamma_n$  для  $n = 0, 1, 2$ . Фрагменты кривых, содержащие устойчивые решения, выделены жирным. Затененные области показывают участки кривых, которые содержат устойчивые решения, принадлежащие одному и тому же семейству и соответствующие одной и той же величине  $\omega_n$  (то есть, решения, соответствующие бистабильным состояниям).

В третьем параграфе второй главы полученные выше результаты, касающиеся устойчивости, подтверждаются с помощью численного решения УГП во времени. Рассматривается следующая задача: УГП дополняется некоторыми начальными данными:  $\Psi(t = 0, x) = \psi(x)$  и нулевыми граничными условиями. Для решения данной задачи в первом пункте третьего параграфа была адаптирована схема Розенброка с комплексным коэффициентом [18], которая хорошо зарекомендовала себя при расчетах на бесконечных областях. Во втором пункте проведены тесты схемы Розенброка на сгущающихся квазиравномерных сетках, в том числе, с помощью точных решений, которые допускает УГП в некоторых предельных случаях. В третьем пункте приведены результаты решения УГП во времени. Данные результаты подтверждают выводы, сделанные на основе анализа линейной устойчивости стационарных решений УГП.

В последнем, четвертом параграфе приведен обзор результатов второй главы.

**В третьей главе** развитый выше метод расчета стационарных реше-

ний УГП обобщается на двумерный случай. В первом параграфе уточняется постановка задачи. Рассматривается особый класс стационарных решений, так называемые *вихревые структуры*. Стационарные решения такого типа записываются в виде подстановки  $\Psi(t, r, \varphi) = e^{-i(\omega t + m\varphi)}v(r)$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты, а число  $m = 0, 1, 2, \dots$  называется топологическим зарядом вихревой структуры. Функция  $v(r)$  является действительным решением уравнения

$$v_{rr} + v_r/r + (\omega - V(r))v - m^2v/r^2 + \sigma v^3 = 0. \quad (11)$$

Кроме требования пространственной локализации,  $\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = 0$ , задается асимптотическое поведение функции  $v(r)$  при  $r \rightarrow 0$ :

$$\lim_{r \rightarrow +0} v(r)r^{-m} = c \neq \pm\infty. \quad (12)$$

Второй параграф третьей главы посвящен описанию предлагаемого подхода. В первом пункте второго параграфа приводятся утверждения, лежащие в основе метода. Сначала на рассматриваемый в третьей главе случай обобщается теорема 1 из первой главы: показано, что асимптотическое соотношение

$$v_+(r; C) = r^{-1/2}Q^{-1/4}(r) \cdot e^{-\int_{r_0}^r \sqrt{Q(t)} dt} (C + o(1)), \quad r \rightarrow +\infty,$$

где  $Q(r) = V(r) - \omega + m^2/r^2$ , задает взаимно-однозначное соответствие между множеством решений уравнения (11), достаточно быстро стремящихся к нулю при  $r \rightarrow +\infty$ , и множеством действительных чисел. Затем в этом же пункте рассматривается задача (11)–(12). Показано, что для любого действительного числа  $c$  она имеет единственное решение  $v_-(r; c)$ . Как и в одномерном случае, доказанные утверждения позволяют свести задачу поиска вихревой структуры к решению системы уравнений  $v_+(r_1; C) = v_-(r_1; c)$ ,  $v'_+(r_1; C) = v'_-(r_1; c)$  относительно пары числовых неизвестных  $c$  и  $C$ . В последних соотношениях  $r_1 > 0$  —

некоторая фиксированная точка. Во втором пункте второго параграфа подробнее рассматривается случай  $\sigma = -1$  и  $m = 0$ . Сформулирован и доказан набор утверждений, позволяющий при выполнении определенных условий остановить процесс расчетов, рассмотрев конечный диапазон значений параметров  $c$  и  $C$  и гарантировав при этом, что при данном  $\omega$  найдены все рассматриваемые вихревые структуры. В третьем пункте второго параграфа описывается процедура расчета вихревых структур.

В третьем параграфе третьей главы сообщаются полученные результаты. Как и в одномерном случае, были рассмотрены случаи гармонического  $V(r) = r^2$  и двухъямного  $V(r) = \alpha r^4 + \beta r^2$  потенциалов. Были изучены случаи нулевого и единичного топологического заряда. Найденные семейства стационарных решений приводятся в виде диаграмм на плоскостях  $\{\omega, c\}$  и  $\{\omega, N\}$ .

В четвертом параграфе приведен обзор результатов третьей главы.

**В четвертой главе** изучается устойчивость двумерных стационарных состояний. В терминах предыдущей главы рассматриваются вихревые структуры с нулевым топологическим зарядом. В первом параграфе приводятся предварительные замечания и вспомогательные факты, касающиеся стационарных решений УГП. Кратко сообщаются известные результаты. Подчеркивается, что, согласно недавним исследованиям, в случае гармонического потенциала  $V(r) = r^2$  все высшие вихревые структуры с нулевым топологическим зарядом являются неустойчивыми. Показано, что задача определения линейной устойчивости может быть сведена к рассмотрению набора задач на собственные значения. Анализируется линейная устойчивость малоамплитудных стационарных решений.

Во втором параграфе четвертой главы подробно рассматривается слу-

чай гармонического потенциала  $V(r) = r^2$ . С помощью анализа асимптотических разложений показано, как определенные особенности спектра гармонического потенциала приводят к неустойчивости малоамплитудных радиально-симметричных стационарных состояний, принадлежащих высшим семействам. Проведенный анализ позволяет обобщить результаты, полученные в [14]. Расчет показывает, что неустойчивость продолжает существовать и с увеличением амплитуды стационарных решений.

В третьем параграфе четвертой главы изучается случай ангармонического потенциала. По аналогии с одномерным случаем рассматривается гармонический потенциал с малым ангармоническим возмущением (первый пункт) и потенциал вида  $V(r) = r^4$  (второй пункт). Показано, что наличие ангармоничности приводит к тому, что высшие стационарные состояния достаточно малой амплитуды становятся устойчивыми. Однако, в отличие от одномерного случая, и для притягивающих, и для отталкивающих взаимодействий высшие состояния довольно быстро теряют устойчивость с увеличением амплитуды решений.

Последний, четвертый параграф содержит результаты четвертой главы.

**В заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы:

1. Разработан метод стрельбы для расчета стационарных решений УГП. Сформулирован и доказан набор утверждений, дающих предложенному методу строгое математическое обоснование.
2. При помощи предложенного метода построены семейства стационарных решений для нескольких типов потенциалов, представляющих физический интерес. В ряде случаев для заданного потенци-

ала  $V(\mathbf{x})$  и для  $\sigma = -1$  показано, что в рассмотренном диапазоне значений параметра  $\omega$  найдены все существующие решения.

3. Исследована устойчивость найденных решений. Выявлена связь между спектром потенциала  $V(\mathbf{x})$ , удерживающего конденсат, и устойчивостью высших стационарных состояний УГП.
4. Рассмотрено УГП с неоднородной по пространству нелинейностью. Для данного случая также построены семейства стационарных решений и изучена их устойчивость. Обнаружено существование бистабильных стационарных состояний.

Работа сопровождается несколькими приложениями. **Приложение А** содержит краткий обзор известных результатов, касающихся решений уравнения  $\psi_{xx} - Q(x)\psi = 0$ , стремящихся к нулю на бесконечности. **Приложение Б** посвящено доказательству теоремы 1 из первой главы. В **приложении В** приводятся некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для анализа случая отталкивающих взаимодействий. В **приложении Г** рассматриваются асимптотические разложения, описывающие расщепление кратного собственного числа при возмущении линейного оператора. Полученные в данном приложении соотношения используются для анализа устойчивости малоамплитудных решений в случае гармонического потенциала  $V(x) = x^2$ .

## Список литературы, цитируемой в автореферате

- [1] Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor / M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al. // *Science*. — 1995. — Vol. 269. — Pp. 198–201.

- [2] *Питаевский Л. П.* Конденсация Бозе–Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // *УФН.* — 1998. — Т. 168, № 6. — С. 641–653.
- [3] *Питаевский Л. П.* Конденсаты Бозе–Эйнштейна в поле лазерного излучения // *УФН.* — 2006. Т. 176, № 4. — С. 345–364.
- [4] *Pitaevskii L., Stringari S.* Bose–Einstein condensation. — Oxford: Clarendon Press, 2003.
- [5] *Bergé L.* Self-focusing dynamics of nonlinear waves in media with parabolic-type inhomogeneities // *Physics of Plasmas.* — 1997. — May. — Vol. 4, no. 5. — Pp. 1227–1237.
- [6] Nonlinear solitary waves with Gaussian tails / M. Kunze, T. Küpper, V. K. Mezentsev et al. // *Physica D.* — 1999. — Vol. 128. — Pp. 273–295.
- [7] *Edwards M., Burnett K.* Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms // *Physical Review A.* — 1995. — Vol. 51, no. 2. — Pp. 1382–1386.
- [8] Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms / P. A. Ruprecht, M. J Holland, K. Burnett, M. Edwards // *Physical Review A.* — 1995. — Vol. 51, no. 6. — Pp. 4704–4711.
- [9] *Dalfovo F., Stringari S.* Bosons in anisotropic trap: Ground state and vortices // *Physical Review A.* — 1996. — Vol. 53, no. 4. — Pp. 2477–2485.
- [10] *Yukalov V. I., Yukalova E. P., Bagnato V. S.* Nonlinear coherent modes of trapped Bose–Einstein condensates // *Physical Review A.* — 2002. — Vol. 66. — P. 043602.

- [11] *Yukalov V. I.* Nonequilibrium Bose systems and nonground-state Bose–Einstein condensates // *Laser Physics Letters*. — 2006. — Vol. 3, no. 8. — Pp. 406–414.
- [12] *Weiss C., Teichmann N.* Generation of mesoscopic superpositions of a binary Bose–Einstein condensate in a slightly asymmetric double well // *Laser Physics Letters*. — 2007. — Vol. 4, no. 12. — Pp. 895–899.
- [13] *D’Agosta R., Presilla C.* States without a linear counterpart in Bose–Einstein condensates // *Physical Review A*. — 2002. — Vol. 65. — P. 043609.
- [14] Radially symmetric nonlinear states of harmonically trapped Bose–Einstein condensates / G. Herring, L. D. Carr, R. Carretero-González et al. // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 77. — P. 023625.
- [15] Dynamic generation of matter solitons from linear limit states via time-dependent scattering lengths / P. G. Kevrekidis, V. V. Konotop, A. Rodrigues, D. J. Frantzeskakis // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. — 2005. — Vol. 38. — Pp. 1173–1188.
- [16] *Carr L. D., Clark C. W., Reinhardt W. P.* Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. I. Case of repulsive nonlinearity // *Physical Review A*. — 2000. — Vol. 62. — P. 063610.
- [17] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.
- [18] Вычисления на квазиравномерных сетках / Н. Н. Калиткин, А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Б. В. Рогов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 224 с.

## Список публикаций автора

- [19] *Alfimov G. L., Zezyulin D. A.* Nonlinear modes for the Gross–Pitaevskii equation — a demonstrative computation approach // *Nonlinearity*. — 2007. — Vol. 74. — Pp. 2075–2092.
- [20] Control of nonlinear modes by scattering-length management in Bose–Einstein condensates / D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, V. V. Konotop, V. M. Pérez–García // *Physical Review A*. — 2007. — Vol. 76. — P. 013621.
- [21] Stability of excited states of a Bose–Einstein condensate in an anharmonic trap / D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, V. V. Konotop, V. M. Pérez–García // *Physical Review A*. — 2008. — Vol. 78. — P. 013606.
- [22] *Zezyulin D. A.* Stability of two-dimensional radial excited states of a Bose–Einstein condensate in an anharmonic trap // *Physical Review A*. — 2009. — Vol. 79. — P. 033622.
- [23] *Алфимов Г. Л., Зезюлин Д. А.* Использование доказательных вычислений для расчета вихревых структур в конденсате Бозе–Эйнштейна // *Нелинейная динамика*. — 2009. — Т. 5, № 2. — С. 215–235.