На правах рукописи

Абалакин Илья Владимирович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ПРИ ПОСТРОЕНИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена в Институте математического моделирования РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
Четверушкин Борис Николаевич,
директор ИММ РАН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Кобельков Георгий Михайлович,
зав. кафедрой вычислительной математики,
механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова

доктор физико-математических наук,
профессор Галкин Валерий Алексеевич,
зав. кафедрой прикладной математики,
Обнинского государственного университета
атомной энергетики

Ведущая организация: Институт автоматизации проектирования РАН

Защита диссертации состоится «25» октября 2007 г. в _______ на заседании диссертационного совета № К 002.058.01 при Институте математического моделирования РАН по адресу 125047, г. Москва, Миусская пл., 4а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ РАН

Автореферат разослан «__»___________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Прончева Надежда Геннадьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Широкий круг проблем, стоящих перед современной наукой и техникой, связан с решением задач газовой динамики. Одними из наиболее интересных и актуальных задач в индустриальной практике является изучение нестационарных течений около сложных многокомпонентных аэродинамических конструкций при различных скоростях набегающего потока (от дозвуковых течений с числом Маха равным 0.01 до гиперзвуковых с числом Маха порядка 10-15). Такие течения характеризуются возникновением различного типа физических неустойчивостей, приводящих к крупно- и мелкомасштабной турбулентности, а при трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях еще появлением и ударных волн, взаимодействующим с турбулентными пограничными слоями. Для детального исследования таких сложных течений уже недостаточно только проведение натурных экспериментов, а также необходим вычислительный эксперимент или математического моделирование поставленной задачи. В качестве математической модели для изучения этих процессов можно использовать систему уравнений Навье-Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Фактически единственным эффективным способом решения этой сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных являются численные методы. С одной, как хорошо известно, прямое использование дискретизированных тем или иным способом уравнений Навье-Стокса (так называемое DNS – Direct Numerical Simulation) для расчетов течений с сильно развитой турбулентностью приводит к необходимости использовать разностные сетки с количеством узлов порядка 10^9, что превосходит возможности имеющейся на сегодняшний день вычислительной техники. С другой стороны, использование осредненных по времени уравнений Навье-Стокса (RANS – Reynolds Average of Navier-Stokes) или использование подсеточных фильтров, применяемых в подходах типа LES (Large Eddy Simulation), требует эмпирических или полуэмпирических моделей, которые не могут быть универсальны даже в рамках одного моделируемого течения, что очень осложняет проведение расчетов. Поэтому в данной диссертационной работе будет рассматриваться изучавшаяся в течение последних 15 лет квазигазодинамическая система уравнений (КГУ), которую можно интерпретировать как физическую модель, описывающую течения вязкого газа и альтернативную уравнениям Навье-Стокса.

Следующим важным звеном в математическом моделировании сложных аэродинамических задач, помимо физико-математической модели, является выбор численного метода для решения системы уравнений (Навье-Стокса или КГУ), который мог бы одинаково надежно работать в областях с разными типами течений. В этом смысле хорошо зарекомендовали себя так называемые кинетически-согласованные разностные схемы (КСРС), полученные из дискретных кинетических моделей. Но теоретическое обоснование успешности расчетов с помощью КСРС поводилось только на кинетическом уровне, что не вполне достаточно для выявления как слабых, так и сильных сторон данной схемы. С другой стороны, проведение подробного анализа КСРС на макроскопическом уровне позволит глубже понять область их применимости и дальнейшего улучшения. Здесь также отметим, что на сегодняшний день все более широкое распространение получают методы аппроксимации уравнений в частных производных на треугольных и тетраэдральных сетках. Тетраэдральная сетка может иметь переменную плотность узлов по пространству, что позволяет сосредоточить большинство узлов расчетной сетки в тех подобластях, где необходимо получить решение с повышенной точностью, аппроксимируя с высокой точностью поверхности сложной формы.

Таким образом, для расчета сложных разномасштабных течений, которые характерны для индустриально важных на сегодняшний день задач, актуальны следующие составляющие компоненты для проведения вычислительного эксперимента:

- максимально универсальная математическая модель, более или менее адекватно описывающая возможно большее число типов течения;
- простая в реализации, экономная и надежно работающая разностная схема, аппроксимирующая уравнения математической модели;

- адаптация к областям сложной формы, в частности, за счет применения неструктурированных сеток.

Одна из возможностей удовлетворения перечисленным выше этапам лежит в кинетическом подходе при построении моделей вычислительного эксперимента в газовой динамике.

Цели и задачи диссертационной работы

Основной целью данной диссертационной работы является обоснование и улучшение существующих на сегодняшний день кинетически-согласованных разностных схем, а также проведение сравнения результатов, полученных при моделировании по уравнениям Навье-Стокса и системе КГУ, с целью выявления классов течения, где их решения мало отличаются, а где система КГУ превосходит по точности моделирования уравнения Навье-Стокса. Для ее достижения решаются следующие задачи:

- представление КСРС, как схемы принадлежащей классу схем расщепления вектора потока для аппроксимации системы невязких уравнений Эйлера;
- изучение свойств КСРС относительно семейства схем расщепления вектора потока, а также построения схем повышенного порядка точности на основе базовых КСРС первого порядка;
- построение кинетически согласованной аппроксимации на неструктурированных сетках (треугольных и тетраэдральных);
- построение аппроксимации системы КГУ на тетраэдральной сетке и проведение расчетов обтекания сферы при различных параметрах течения и сравнение с аналогичными расчетами, полученными при решении уравнений Навье-Стокса.

Научная новизна и практическая ценность работы

В диссертации предложены следующие оригинальные разработки:

1) выведены новые аппроксимации уравнений Эйлера на основе кинетического расщепления вектора потока;

2) построены схемы повышенного порядка аппроксимации на основе базовых схем кинетического расщепления.
3) проведено обобщение кинетически-согласованных разностных схем как первого, так и повышенного порядка точности на неструктурированные сетки;
4) на основе смешанного метода конечных объемов и метода конечных элементов построена аппроксимация квазигазодинамической системы уравнений.

Разработанные алгоритмы были внедрены в комплекс параллельных программ по решению задач газовой динамики. Используя этот комплекс программ, были проведены расчеты тестовых задач по системе КГУ и уравнениям Навье-Стокса на тетраэдральных сетках. Выполнено сравнение полученных результатов с точным решением соответствующих задач, экспериментальными данными и результатами расчетов, выполненных по другим методикам.

На примере численного моделирования задачи обтекания летательного аппарата невязким газом показана возможность эффективного использования полученных кинетических алгоритмов при выполнении научных исследований и производственных расчетов.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях и семинарах, в частности:

- Second European Fluid Dynamics Conference, 5-8 September 1994, Stuttgart, Germany. Устный доклад: "Kinetically-Consistent Difference Schemes for the Prediction of Moderately Rarefied Gas Flows" (co-authors B.N. Chetverushkin).
- Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике, ММТ-96, 1996, Ижевск. Устный доклад: "Кинетически-согласованные разностные схемы на нерегулярных сетках" (соавторы Жохова А.В. Четверушкин Б.Н.).
- Всероссийская школа-семинар: “Современные проблемы математического моделирования”, 1997, Ростов-на-Дону. Устный доклад: " Кинетиче-

ски-согласованная аппроксимация газодинамических уравнений на треугольных сетках (соавторы Жохова А.В. Четверушкин Б.Н.).

- Семинары кафедры вычислительных методов ф-та ВмиК МГУ.
- Семинары ИММ РАН.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приведен в конце данного автореферата.

Достоверность результатов.

Достоверность результатов, полученных в работе, подтверждается тем, что для выполненных в работе численных расчетов наблюдается качественное совпадение полученных результатов с точным решением соответствующих задач, экспериментальными данными и результатами других авторов. Эффективность предложенных кинетических алгоритмов подтверждается результатами тестирования разработанных на их основе программ.

Реализация результатов.

Результаты диссертации получены в ходе выполнения ряда работ, поддерживаемых РФФИ, в которых автор принимал участие в качестве основного исполнителя (гранты 94-01-01526-а “Кинетически-согласованные разностные схемы газовой динамики”, 97-01-01032-а “Кинетически-согласованные разностные схемы как модель для описания течения вязкого теплопроводного газа”, 00-01-00263-а “Моделирование течений вязкого газа на основе кинетически- согласованных разностных схем”). Разработанные численные методики внедрены в комплекс параллельных программ являющихся составной частью пакета моделирования задач механики сплошной среды, разрабатываемого в ИММ РАН в рамках государственного контракта № 10002-251/ОМН-03/026-023/240603-806 от 30 апреля 2003 г.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем составляет 120 машинописных страниц, текст содержит 40 рисунков и 10 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы.

Во **введении** обоснована актуальность рассматриваемых в работе проблем, сформулированы основные цели диссертации и дано ее краткое содержание по главам. Приведен обзор существующих на сегодняшний день в мире методов и подходов к решению системы уравнений газовой динамики и методов пространственной дискретизации расчетной области. Особое внимание уделено различным кинетическим алгоритмам. Также приведено краткое изложение построения и исследований квазигазодинамической системы.

В **первой главе** рассматриваются базовые принципы построения кинетически-согласованных разностных схем для невязкого уравнения Бюргерса в качестве модельной задачи и уравнений одномерной газовой динамики. Далее показано, что КСРС можно интерпретировать как схему из класса схем вектора расщепления потока для аппроксимации уравнений Эйлера. Затем на основе этого расщепления были построены схемы повышенного порядка точности. Все построения иллюстрируются расчетами тестовых задач.

Одним из методов построения КСРС является использование модели расщепления по физическим процессам уравнения Больцмана для одночастичной функции распределения молекул по скоростям $f\left(\mathbf{x},\xi,t\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}\xi f=J\left(f,f'\right).$$

Введем дискретное время t^k с шагом $\Delta t^k=t^{k+1}-t^k$ и на этом интервале определим два процесса: бесстолкновительный разлет за время τ_{free} и релаксацию, имеющую время τ_{relax} При предположении $\tau_{\text{free}}\gg\tau_{\text{relax}}$ модель расщепления сводится к решению задачи Коши для бесстолкновительного уравнения Больцмана и с начальным условием в момент времени t^k, определяемым начальной локально-максвелловской функцией распределения (рисунок 1)

Рисунок 1: Схематическое изображение модели расщепления

Решением начальной задачи Коши в 1D пространственном случае с равномерной сеткой с шагом Δx есть балансное соотношение

$$f_i^{k+1} = \left(f_M\right)_i^k - \xi \frac{\left(f_M\right)_{i+1}^k - \left(f_M\right)_{i-1}^k}{2\Delta x} - |\xi| \frac{\left(f_M\right)_{i+1}^k - 2\left(f_M\right)_i^k + \left(f_M\right)_{i-1}^k}{2\Delta x}$$

После интегрирования этого соотношения с сумматорными инвариантами получаем кинетически-согласованную разностную схему

Получить аналогичную КСРС, а также целый класс подобных схем можно не прибегая к рассмотрению кинетического уравнения, а используя метод *расщепления вектора потока*. Основная идея этого метода опирается на свойство однородности вектора потока в уравнениях. Это означает, что вектор потока в уравнении Эйлера есть однородная функция степени один от вектора консервативных переменных $\mathbf{Q}$. Следовательно, поток $\mathbf{F}$ в уравнении Эйлера есть произведение матрицы Якоби $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{Q}$ на вектор $\mathbf{Q}$. Расщепляя собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ на положительную и отрицательную части, получаем расщепленный вектор потока $\mathbf{F}^{\pm} = \mathbf{A}^{\pm}\mathbf{Q}$. Дальнейшая аппроксимация «положительного» потока левой разностью, а «отрицательного» потока правой разностью дает так называемую *схему расщепления вектора потока*, аппроксимирующую систему уравнений Эйлера с первым порядком. В зависимости от метода расщепления имеем целый класс схем. В таблице 1 приведены законы расщепления для стандартной схемы расщепления Стегера –Уорминга (SW) и три схемы кинетического расщепления КР1, КР2, КР3.

$\mathbf{A}^{\pm} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^{\pm}\mathbf{S}^{-1}$ $\quad \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\quad V = \lvert u + c \rvert$	
SW	$\mathbf{\Lambda}^{\pm} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda_j \pm \lvert\lambda_j\rvert}{2}\right)$
КР1	$\mathbf{\Lambda}^{\pm} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda_j \pm \left(\lambda_j\,\mathrm{erf}(s) + \exp\left(-s^2\right)/\beta\sqrt{\pi}\right)}{2}\right)$
КР2	$\mathbf{\Lambda}^{\pm} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda_j \pm \lambda_j^2/V}{2}\right)$
КР3	$\mathbf{\Lambda}^{\pm} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda_j \pm \left(\lambda_j^2/V + V/4\right)}{2}\right)$

Таблица 1: Расщепление собственных значений матрицы Якоби для различных схем

Отметим, что расщепленные собственные значения в SW, КР1, КР3 сохраняют знак и следовательно являются обобщением схем с разностью против потока на нелинейные уравнений Эйлера. При этом схему КР1 можно рассматривать как бесконечно непрерывно-дифференцируемое приближение к схеме SW (рисунок 2а). Наличие недифференцируемой особенности в звуковых точках (число Маха равно $\mathrm{M} = \pm 1$) в схеме SW приводит к возникновению большой вычислительной ошибки в окрестности этих точек даже в случае непрерывного течения. Так, на рисунке 2б показано распределение локального числа Маха при расчете изотермического течения в сопле Лаваля в режиме «дозвук-сверхзвук» по схемам SW и КР1 и точного решения. Видно, что численное решение по схеме SW имеет характерный излом по сравнению с решением по схеме КР1, которое более близко к точному решению.

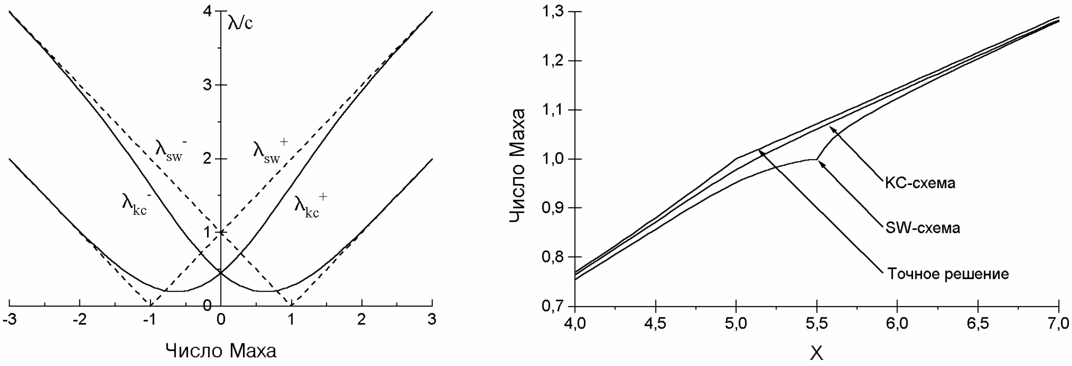


Рисунок 2: а) расщепленные собственные значения для схем SW и КР1; **б)** распределение числа Маха в изотермическом течении в сопле Лаваля

Одним из способов повышения порядка аппроксимации для *схем расщепления вектора потока* первого порядка является замена кусочно-постоянного распределения консервативного вектора газодинамических параметров в расчетной ячейке $\mathbf{Q}_i$ на кусочно-линейное распределение (метод MUSCL)

$$\mathbf{Q}_{i+1/2}^{-} = \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2}\left[k\,\mathrm{Lim}\left(\Delta\mathbf{Q}_{i-1/2}, \frac{1+k}{k}\Delta\mathbf{Q}_{i+1/2}\right) + (1-k)\,\mathrm{Lim}\left(\Delta\mathbf{Q}_{i+1/2}, \frac{1+k}{k}\Delta\mathbf{Q}_{i-1/2}\right)\right]$$

для левой разности в схеме расщепления («положительные потоки») и

$$\mathbf{Q}_{i+1/2}^{+} = \mathbf{Q}_{i+1} - \frac{1}{2}\left[k\,\mathrm{Lim}\left(\Delta\mathbf{Q}_{i+3/2}, \frac{1+k}{k}\Delta\mathbf{Q}_{i+1/2}\right) + (1-k)\,\mathrm{Lim}\left(\Delta\mathbf{Q}_{i+3/2}, \frac{1+k}{k}\Delta\mathbf{Q}_{i+1/2}\right)\right]$$

для правой разности в схеме расщепления («отрицательные потоки»). Здесь функция $\mathrm{Lim}(a,b)$ есть функция-ограничитель, зависищая от разностных градиентов, и такая, что $\mathrm{Lim}(a,b)=0$, если $ab<0$. В случае выбора параметра $0 \le k \le 1$ и $k \ne 1/3$ порядок пространственной аппроксимации равен двум на монотонных участках решения (при $k=1/3$ – порядок аппроксимации равен трем). В окрестности точек разрыва и экстремальных точек порядок схемы понижается до 1, что обусловлено поведением функции-ограничителя. То есть полученная схема удовлетворяет свойству TVD (Total Variation Diminishing). На рисунке 3 приведены графики плотности в численном решении задачи о распаде произвольного сильного разрыва по схемам повышенного порядка с различным выбором функции-ограничителя и параметра k, а также график точного решения.

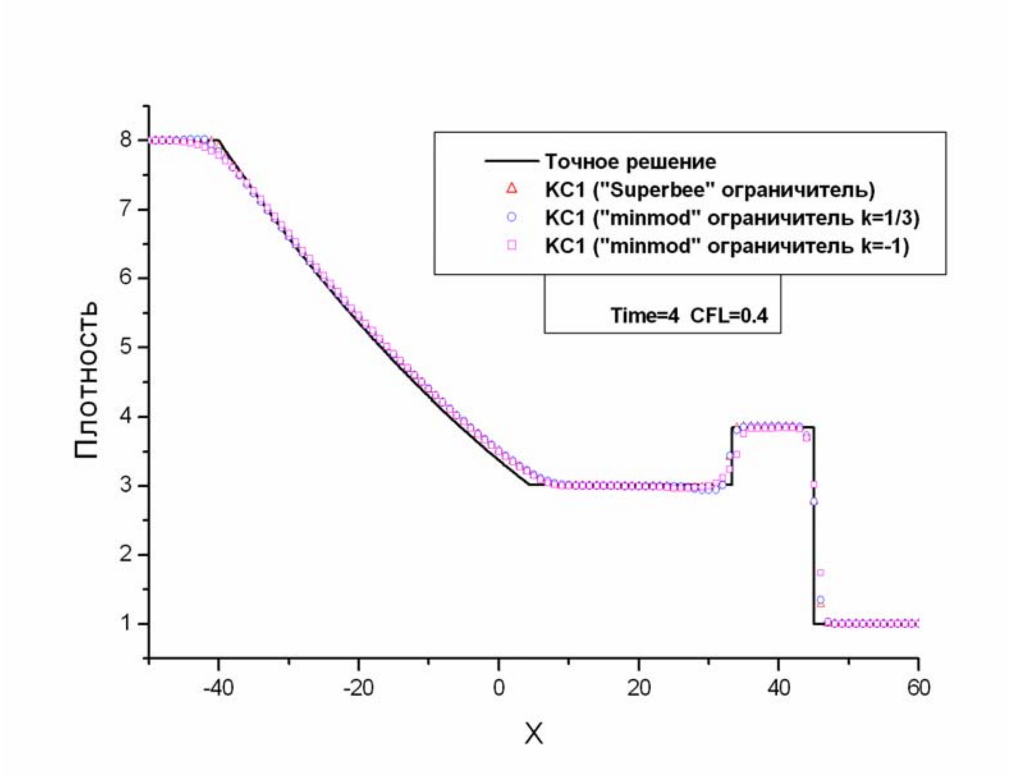


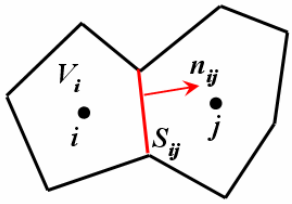
Рисунок 3: Распределение плотности в задаче о распаде произвольного разрыва

Видно, что кинетические схемы повышенного порядка неплохо согласуются с точным решением для различного вида разрывных решений (ударная волна, контактный разрыв).

Второй способ повышения порядка точности осуществляется за счет добавления антидиффузионных потоков или, другими словами, экстраполяции (интерполяции) не переменных **Q,** потоковых переменных **F**.

Во **второй главе** рассматриваются вопросы, связанные с обобщением полученных кинетических схем для аппроксимации конвективной части уравнений Навье-Стокса на неструктурированные треугольные (двумерный случай) или тетраэдральные сетки (трехмерный случай). Для аппроксимации вязкой части уравнений Навье-Стокса используется метод конечных элементов.

В общем случае для произвольного контрольного объема (расчетная ячейка) может быть выписано балансное соотношение аналогичное одномерному случаю (рисунок 4).



Кусочно-постоянная по пространству функция распределения на ячейке V_i

$$f_i^{k+1} - \left(f_M\right)_i^k = -\frac{\Delta t^k}{V_i} \sum_{j \in \Omega_i} S_{ij} \xi_n f_{ij}$$

Функции распределения на грани ячейки S_{ij}

Решение локальной 1D начальной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \xi_n \dfrac{\partial f}{\partial n} = 0 & t \in \left(t^k, t^{k+1}\right) \\ f\left(x, \xi, t^k\right) = \begin{cases} \left(f_M\right)_i^k & x \in V_i \\ \left(f_M\right)_j^k & x \in V_j \end{cases} & \end{cases}$$

$$f_{ij}^k = \left(f_M\right)_i^k \frac{\xi_n + |\xi_n|}{2\xi_n} + \left(f_M\right)_j^k \frac{\xi_n - |\xi_n|}{2\xi_n} = \begin{cases} \left(f_M\right)_i^k & \xi_n \ge 0 \\ \left(f_M\right)_j^k & \xi_n < 0 \end{cases}$$

Балансное соотношение:

$$\boxed{f_i^{k+1} = \left(f_M\right)_i^k - \frac{\Delta t^k}{V_i} \sum_{j \in \Omega_i} S_{ij} \left[\xi_n \frac{\left(f_M\right)_j^k + \left(f_M\right)_i^k}{2} - |\xi_n| \frac{\left(f_M\right)_j^k - \left(f_M\right)_i^k}{2} \right]}$$

Рисунок 4: Балансное соотношение для произвольного контрольного объема

Дальнейшая вариация зависящего от скорости коэффициента при диффузионном члене в балансном соотношении приведет к локально одномерным относительно грани контрольного объема схемам, рассмотренным в первой главе. Повышение порядка аппроксимации также достигается заменой кусочно-постоянного распределения газодинамических параметров в расчетной ячейке на кусочно-линейное распределение. В это главе также приведен анализ точности схемы в линейном приближении для различного типа расчетных ячеек (барицетрические и ячейки, построенные на основе описанных окружностей). В качестве тестовой задачи выбрано обтекание двумерного аэродинамического профиля потоком вязкого газа с числом Маха набегающего потока равным 0.8.

В **третьей главе** приводится вывод полудискретной квазигазоднамической системы уравнений, исходя из модели «бесстолкновительный разлет-максвеллизация». Далее проводится анализ полученной квазигазодинамической системы уравнений (КГУ) и показывается ее отличие от системы уравнений Навье-Стокса наличием членов второго порядка малости относительно времени бесстолкновительного разлета.

Аналогично уравнениям Навье-Стокса для аппроксимации системы КГУ используется смешанный метод: метод конечных объемов и кинетическая схема для аппроксимации конвективного переноса, метод конечных элементов для вычисления вязких членов.

Для сравнения поведения разностного решения уравнений Навье-Стокса и КГУ решается ряд тестовых задач. Одна из этих задач – это обтекание сферы при числе Маха равном 0.1 и числе Рейнольдса равном 25. Расчет проводился на грубой (149802 тетраэдра) и подробной (786952 тетраэдра) сетках. Как можно видеть из таблицы 2, где приведен коэффициент лобового сопротивления сферы C_D, результаты расчетов по обеим системам очень близки друг к другу и не сильно отличаются от аналитического значения (рассчитанного для несжимаемой жидкости).

	Система	
Сетка (тетраэдры)	Навье-Стокс	КГУ
149802	2.29	2.32
786952	2.49	2.48
Аналитическое решение: $C_D = 2.218$		

Таблица 2: Коэффициенты лобового сопротивления при обтекании сферы.

Проведенный расчет подтверждает вывод о том, что при числах Кнудсена, определяемых как отношение числа Маха к числу Рейнольдса порядка 0.001, решение уравнений Навье-Стокса и квазигазодинамической системы совпадают.

В **заключении** диссертационной работы сформулированы основные выводы и приведены выносимые на защиту результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложены новые методы кинетического расщепления. Проведен анализ кинетически-согласованных разностных как схем расщепления вектора потока.
2. Разработаны алгоритмы повышения порядка точности кинетически согласованных разностных схем с использованием методики MUSCL и с помощью введения антидифузионных потоков.
3. Построены кинетических схемы, аппроксимирующие уравнения Эйлера с повышенным порядком аппроксимации на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках.
4. Проведена аппроксимация квазигазодинамической системы на неструктурированных тетраэдральных сетках.
5. Проведена серия модельных расчетов, демонстрирующих возможности кинетически согласованных разностных схем и квазигазодинамической системы для моделирования задач газовой динамики.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Абалакин И.В., Четверушкин Б.Н. *Кинетически-согласованные разностные схемы как модель для описания газодинамических течений*, Математическое моделирование, 1996. Т.6, № 8.
2. Абалакин И.В., Жохова А.В., Четверушкин Б.Н. *Кинетически-согласованная аппроксимация газодинамических уравнений на треугольных сетках*, Тезисы докладов VII Всероссийской школы-семинара “Современные проблемы математического моделирования”, Ростов-на-Дону, 1997, с.1-4.
3. Абалакин И.В., Жохова А.В., Четверушкин Б.Н. *Кинетически-согласованные разностные схемы на нерегулярных сетках*, Математическое моделирование, 1997. Т.9, № 7.
4. Абалакин И.В., Жохова А.В., Четверушкин Б.Н. *Кинетически согласованный алгоритм для расчета газодинамических течений на треугольных сетках*, Математическое моделирование, 1998. Т.10, № 4, с.51-60.

5. Абалакин И.В., Жохова А.В. *Кинетически-согласованные разностные схемы с коррекцией на треугольных сетках*, Дифференциальные уравнения, 1998, Т.34, № 7, с.904-910.

6. Абалакин И.В., Жохова А.В., Четверушкин Б.Н. *Разностные схемы на основе кинетического расщепления вектора потока*, Математическое моделирование, 2000. Т.12, № 4, с.73-82.

7. Абалакин И.В., Жохова А.В., Четверушкин Б.Н. *Кинетически–согласованные схемы повышенного порядка точности*, Математическое моделирование, 2001. Т.13, № 5, с.53-61.

8. I.V. Abalakin, A. Dervieux, T.K. Kozubskaya *A vertex centered high order MUSCL scheme applying to linearised Euler acoustics*, INRIA report, № 4459, 2002.

9. Абалакин И.В., Суков С.А., Моделирование внешнего обтекания тел на многопроцессорных системах с использованием тетраэдрических сеток. В сб. "Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем", вып. 7, под ред. Л.А. Уваровой. М., Изд-во "Janus-K", 2004, с. 52-57.