Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской Академии Наук

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

СБОРНИК ЛЕКЦИЙ МОЛОДЕЖНЫХ НАУЧНЫХ ШКОЛ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯМ

III

Москва · 2007

М34
УДК 519.7

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 07–01–06018

М34 Дискретная математика и ее приложения: Сборник лекций молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. Выпуск III. Под редакцией А. В. Чашкина. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. — 63 с.

Третий выпуск лекций содержит содержит лекцию В. В. Кочергина, прочитанную на VI молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям, проходившей в Москве с 16 по 21 апреля 2007 г. при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–60018). Для студентов, аспирантов и научных работников в области дискретной математики и математической кибернетики.

Научное издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник лекций
Выпуск III

Под общей редакцией А. В. ЧАШКИНА

Ответственный за выпуск *Ф. М. Ковалев*

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИСТЕМ ОДНОЧЛЕНОВ И СИСТЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

В. В. Кочергин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119992 Москва, Ленинские горы
e-mail: `vvkoch@yandex.ru; koch@procenter.net.ru`

В работе рассматриваются обобщения известной задачи о наискорейшем возведении в степень (см., например, [2]) т. е. нахождении величины $l(x^n)$ — минимального числа операций умножения, достаточного для вычисления по переменной x величины x^n. Эта задача может быть формализована следующим образом.

Аддитивной цепочкой [2] *для натурального числа* n называется всякая последовательность целых чисел

$$u_0 = 1, u_1, \ldots, u_r = n,$$

удовлетворяющая свойству: для каждого k, $1 \le k \le r$, найдется два целых числа (не обязательно различных) i и j, $0 \le i, j \le k-1$, таких, что $u_k = a_i + a_j$. Число r называется *длиной* этой аддитивной цепочки. Минимальная длина аддитивной цепочки для n называется *аддитивной сложностью вычисления натурального числа* n и обозначается через $l(n)$. Очевидно, что справедливо равенство $l(n) = l(x^n)$.

Теперь определим три обобщения понятия аддитивной сложности, при этом конечным результатом вычислений будет уже не число, а матрица. Задачи, связанные с этими обобщениями, условно назовем так: "Вычисление системы одночленов", "Вычисление системы целочисленных линейных форм" и "Вычисление системы элементов свободной абелевой группы".

I. Вычисление системы одночленов.

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными элементами без нулевых строк.

Аддитивной цепочкой для матрицы A будем называть последовательность q-мерных векторов (наборов) вида

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,\ldots,0), \mathbf{v}_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, \mathbf{v}_q = (0,0,\ldots,1), \\ \mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_{q+r},$$

начинающуюся с q единичных векторов и удовлетворяющую условиям:

1) для каждого k, $q+1 \le k \le q+r$, найдется два натуральных числа (не обязательно различных) i и j, $1 \le i \le k-1$, $1 \le j \le k-1$, таких, что $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ (сложение векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1q}), (a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2q}), \ldots, (a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pq})\} \subseteq$ $\subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{q+r}\}$.

Число r называется длиной цепочки. Минимальную длину аддитивной цепочки для матрицы A будем называть *аддитивной сложностью* (*вычисления*) *матрицы* A и обозначать через $l(A)$.

Задача об аддитивной сложности матриц по-существу совпадает с известной (см., например, [10, 11, 13, 15, 24, 34]) задачей о сложности вычисления систем одночленов, которая определяется следующим образом.

Пусть, по-прежнему, $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$ с неотрицательными элементами без нулевых строк. Минимально возможное число операций умножения, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ и заданной матрице A системы одночленов

$$f_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, \quad f_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \quad \ldots, \quad f_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$$

(при этом допускается многократное использование промежуточных результатов) будем называть *сложностью вычисления* (или просто *сложностью*) системы одночленов $f_1, f_2, \ldots f_p$, и будем обозначать через $l(f_1, f_2, \ldots, f_p)$.

Очевидно, что для любой целочисленной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ с неотрицательными элементами без нулевых строк сложность вычисления системы одночленов, задаваемой матрицей A, и аддитивная сложность этой матрицы совпадают, т. е. справедливо равенство

$$l(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}) = l(A).$$

Величину $l(A)$ можно также интерпретировать как минимально возможную сложность (число элементов) схемы из функциональных элементов (необходимые определения можно найти в [20, 21]), на входы которой подаются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_q$, на выходах схемы вычисляются одночлены $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, задаваемые целочисленной матрицей наборов показателей степеней A размера $p \times q$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, реализующих произведение одночленов, подаваемых на входы элемента. В дальнейшем будем, как правило, использовать именно эту интерпретацию.

II. Вычисление системы целочисленных линейных форм.
Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$.

Аддитивной 2*-цепочкой* (число "2" означает, что наряду с операцией сложения разрешено использование и операции вычитания) для матрицы A будем называть последовательность q-мерных векторов (наборов) вида

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{v}_q = (0, 0, \ldots, 1),$$
$$\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, \ldots, \mathbf{v}_{q+r},$$

начинающуюся с q единичных векторов и удовлетворяющую условиям:

1) для каждого k, $q+1 \le k \le q+r$, найдется два натуральных числа (не обязательно различных) i и j, $1 \le i \le k-1$, $1 \le j \le k-1$, таких, что либо $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$, либо $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ (сложение и вычитание векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1q}), (a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2q}), \ldots, (a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pq})\} \subseteq$
$\subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{q+r}\}$.

Число r называется длиной цепочки. Минимальную длину аддитивной 2-цепочки для матрицы A будем называть 2*-сложностью* (*вычисления*) *матрицы* A и обозначать через $l_2(A)$.

Задача о 2-сложности матриц по-существу совпадает с известной (см., например, [4, 22]) задачей о сложности вычисления систем целочисленных линейных форм, которая определяется следующим образом.

Пусть задана система из p линейных форм от q переменных

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q,$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q,$$

$$\ldots$$

$$y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q,$$

описываемая целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$. Минимальное число операций сложения и вычитания, достаточное для вычисления по заданным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ системы линейных форм $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ (разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений) будем называть 2-*сложностью вычисления* (или просто 2-*сложностью*) системы целочисленных линейных форм $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ и будем обозначать через $l_2(y_1, y_2, \ldots, y_p)$.

Очевидно, что для любой целочисленной матрицы A 2-сложность вычисления системы линейных форм, задаваемой матрицей A, и 2-сложность этой матрицы совпадают, т. е. справедливо равенство

$$l_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q, \ldots \\ \ldots, a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q) = l_2(A).$$

В менее естественной для этой задачи, но более удобной для сравнения с другими задачами, мультипликативной постановке под величиной $l_2(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ понимается минимальное число операций умножения и деления, достаточное для вычисления по заданным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_q$ системы функций

$$z_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, \quad z_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \quad \ldots, \quad z_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$$

с целочисленными показателями степеней a_{ij} $(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q)$. Очевидно, что

$$l_2(z_1, z_2, \ldots, z_p) = l_2(A).$$

Следовательно, величину $l_2(A)$ можно интерпретировать как минимально возможную сложность (число элементов) схемы из функциональных элементов, на входы которой подаются функции $x_1, x_2, \ldots, x_q$, на выходах схемы вычисляются функции $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, задаваемые целочисленной матрицей наборов показателей степеней A размера $p \times q$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, реализующих либо произведение, либо частное функций, подаваемых на входы элемента. В дальнейшем также будем, как правило, использовать именно эту интерпретацию.

III. Вычисление системы элементов свободной абелевой группы.

Пусть по-прежнему $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$.

Аддитивной F-цепочкой (буква "F" говорит о том, что речь идет о сложности вычислений в свободной — "free" — абелевой группе) для матрицы A будем называть последовательность q-мерных векторов (наборов) вида

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots, \mathbf{v}_q = (0, 0, \ldots, 1),$$
$$\mathbf{v}_{q+1} = (-1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{v}_{q+2} = (0, -1, \ldots, 0),\ \ldots, \mathbf{v}_{2q} = (0, 0, \ldots, -1),$$
$$\mathbf{v}_{2q+1}, \mathbf{v}_{2q+2}, \ldots, \mathbf{v}_{2q+r},$$

начинающуюся с $2q$ единичных и обратных к ним векторов и удовлетворяющую условиям:

1) для каждого k, $2q+1 \le k \le 2q+r$, найдется два натуральных числа (не обязательно различных) i и j, $1 \le i \le k-1$, $1 \le j \le k-1$, таких, что $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ (сложение векторов покомпонентное);

2) $\{(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1q}), (a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2q}), \ldots, (a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pq})\} \subseteq$
$\subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{2q+r}\}$.

Число r называется длиной цепочки. Минимальную длину аддитивной F-цепочки для матрицы A будем называть *F-сложностью* (*вычисления*) *матрицы* A и обозначать через $l_F(A)$.

Задача о F-сложности целочисленной матрицы является формализацией естественной задачи о сложности вычисления системы элементов свободной абелевой группы (см., например, [16, 18]), которая определяется следующим образом.

Пусть свободная абелева группа (групповую операцию будем называть умножением) задана системой свободных образующих $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$. Минимальное число групповых операций умножения, достаточное для вычисления по образующим $x_1, x_2, \ldots, x_q$ и обратным к ним элементам $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_q^{-1}$, системы

$$\{g_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\quad g_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}},\quad \ldots,\quad g_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}\}$$

отличных от единицы элементов этой свободной абелевой группы (разрешается многократное использование промежуточных результатов вычислений) будем называть *F-сложностью вычисления* (или просто *F-сложностью*) системы $\{g_1, g_2, \ldots, g_p\}$ и будем обозначать через $l_F(g_1, g_2, \ldots, g_p)$.

Очевидно, что для любой целочисленной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ без нулевых строк F-сложность вычисления системы элементов свободной абелевой группы, задаваемой матрицей A, и F-сложность этой матрицы совпадают, т. е. справедливо равенство

$$l_F(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots,\ x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}) = l_F(A).$$

Также как и ранее, величину $l_F(A)$ можно интерпретировать как минимально возможную сложность (число элементов) схемы из функциональных элементов, на входы которой подаются функции $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_q, x_q^{-1}$, на выходах схемы вычисляются функции $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, задаваемые целочисленной матрицей наборов показателей степеней A размера $p \times q$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, реализующих произведение функций, подаваемых на входы элемента. В дальнейшем также будем, как правило, использовать именно эту интерпретацию.

Отметим, что вычисление системы элементов абелевой группы в аддитивной постановке превращается в вычисление системы целочисленных линейных форм, только в отличие от предыдущей задачи недоступна операция вычитания, зато наряду с переменными для вычислений можно использовать функции, получающиеся путем домножения переменной на -1.

Таким образом, введены три меры аддитивной сложности вычисления (порождения) целочисленных матриц и соответствующие этим мерам три вычислительные модели (интерпретируемые, например, как специальным образом устроенные схемы из функциональных элементов) и с единых позиций описаны постановки трех во многом похожих, но, вместе с тем, как будет показано ниже, все-таки содержательно разных задач. Будем исследовать эти задачи в следующей асимптотической постановке. Пусть дана последовательность $\{A(n) = (a_{ij}(n))\}$ целочисленных матриц (для первой задачи эти матрицы должны быть с неотрицательными элементами и без нулевых строк) размера $p(n) \times q(n)$, удовлетворяющая при $n \to \infty$ условию

$$\sum_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}| \to \infty.$$

Задача состоит в нахождении при $n \to \infty$ асимптотики роста функционала сложности $l(A(n))$, $l_2(A(n))$ или $l_F(A(n))$ соответственно.

В общем случае изучение асимптотики роста величин $l(A)$, $l_2(A)$ и $l_F(A)$ представляется весьма трудной задачей. Прежде чем перейти к ее обсуждению, рассмотрим вопросы об асимптотическом росте функционалов сложности, характеризующих максимальную сложность класса матриц с ограничениями на величину элементов.

Следуя Н. Пиппенджеру [34], положим $L(p, q, K) = \max l(A)$, где максимум берется по всем целочисленным матрицам $A = (a_{ij})$ с неотрицательными элементами без нулевых строк размера $p \times q$, удовлетворяющим условиям $a_{ij} \le K-1$, $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,q$. Таким образом, $L(p,q,K)$ — максимально возможная сложность таких систем из p одночленов от q переменных, что все показатели степеней переменных в одночленах не превосходят $K-1$.

С использованием результатов из [33] в работе [34] показано, что при условии $pq\log K \to \infty$ имеет место равенство[1])

$$L(p,q,K) = \min(p,\,q)\log K + \\ + \frac{pq\log K}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\,q)).$$

Теперь, как и в [4, 16], положим $L_2(p,q,K) = \max l_2(A)$, $L_F(p,q,K) = \max l_F(A)$, где максимум берется по всем целочисленным матрицам $A = (a_{ij})$ размера $p\times q$, удовлетворяющим условиям $|a_{ij}| \le K-1$, $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,q$. В работах [4, 16] показано, что при условии $pq\log K \to \infty$ справедливы равенства

$$L_2(p,q,K) = \min(p,\,q)\log K + \\ + \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\,q));$$

$$L_F(p,q,K) = \min(p,\,q+1)\log K + \\ + \frac{pq\log(2K-1)}{\log(pq\log K)}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log(pq\log K)}{\log(pq\log K)}\right)^{1/2}\right)\right) + O(\max(p,\,q)).$$

Далее нас будет интересовать случай ограниченных (или слабо растущих) значений параметров p и q. В этих условиях имеют место асимптотические равенства

$$L(p,q,K) \sim \min(p,\,q)\log K,$$
$$L_2(p,q,K) \sim \min(p,\,q)\log K,$$
$$L_F(p,q,K) \sim \min(p,\,q+1)\log K.$$

Переходя к изучению асимптотики роста величин $l(A)$, $l_2(A)$ и $l_F(A)$, предварительно укажем несколько совсем простых соотношений, связывающих введенные меры сложности.

---

[1]Здесь и далее $\log x$ означает $\log_2 x$.

Сначала отметим, что для любой матрицы A с неотрицательными элементами и без нулевых строк выполняются неравенства

$$l(A) \leq l_2(A), \quad l(A) \leq l_F(A).$$

Далее, в силу того, что при доступности операции деления систему $\{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_q^{-1}\}$ по системе $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ можно вычислить с использованием $q+1$ операции деления, для любой целочисленной матрицы A размера $p \times q$ справедливо неравенство

$$l_2(A) \leq l_F(A) + q + 1.$$

С другой стороны, введя обозначения

$$x_i^{-1} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, p;$$

$$a'_{ij} = \frac{|a_{ij}| + a_{ij}}{2}, \; a''_{ij} = \frac{|a_{ij}| - a_{ij}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \; j = 1, 2, \dots, q,$$

от произвольной целочисленной матрицы A размера $p \times q$ в соответствии с равенствами

$$x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_q^{a_{iq}} = x_1^{a'_{i1}} y_1^{a''_{i1}} x_2^{a'_{i2}} y_2^{a''_{i2}} \dots x_q^{a'_{iq}} y_q^{a''_{iq}}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

можно естественным образом перейти к целочисленной матрице $\widetilde{A}$ размера $p \times 2q$, у которой все элементы неотрицательны. Учитывая это, получаем:

$$l_F(A) \leq l(\widetilde{A}).$$

Таким образом,

$$l_2(A) - (q+1) \leq l_F(A) \leq l(\widetilde{A}).$$

Однако, как будет показано ниже, обе эти оценки величины $l_F(A)$ не являются асимптотически неулучшаемыми.

Теперь сформулируем наиболее важные результаты, имеющие непосредственное отношение к описанной проблематике.

Отправной точкой, как уже говорилось, следует считать задачу о наискорейшем возведении в степень (в наших обозначениях — случай $p = 1$, $q = 1$, мера сложности — l). В 1939 г. А. Брауэром [25] была установлена асимптотическая формула для величины $l(x^n)$:

$$l(x^n) \sim \log n,$$

а также была получена верхняя оценка

$$l(x^n) \leq \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + O\left(\frac{\log n \log\log\log n}{(\log\log n)^2}\right).$$

В 1960 г. П. Эрдёш [28] показал, что для почти всех n эта оценка величины $l(x^n)$ асимптотически неулучшаема.

После этого исследовались (как правило, на языке аддитивных цепочек) различные вопросы, связанные с задачей о наискорейшем возведении в степень; из большого числа публикаций выделим работы [27, 29, 35, 38, 39], а также обзоры [2, 24].

В 1963 г. Р. Беллман [23] сформулировал задачу о сложности вычисления одночлена от q переменных (в наших обозначениях — случай $p = 1$, мера сложности — l), т. е. нахождения величины $l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_q^{a_q})$.

В 1969 г. Д. Кнут [2, разд. 4.6.3., упр. 32] поставил задачу о сложности вычисления m степеней одной переменной (в наших обозначениях — случай $q = 1$, мера сложности — l), т. е. нахождения величины $l(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p})$.

Е. Страус [37] показал, что для любого фиксированного q

$$l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_q^{a_q}) \sim \log(\max a_i).$$

А. Яо [40] установил, что для любого фиксированного p

$$l(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}) \sim \log(\max a_i).$$

Теперь следует отметить один важный факт. В 1981 г. независимо А. Ф. Сидоренко [22], Дж. Оливосом [32], а также Д. Кнутом и К. Пападимитриу [30] было доказано, что на самом деле задачи о сложности вычисления одночлена от m переменных и набора m степеней эквивалентны (и, следовательно, достаточно исследовать одну из них). На самом деле справедливо более сильное утверждение [1, 22, 30] о двойственности меры сложности l: сложность системы одночленов $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ от q переменных, заданной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ и сложность двойственной системы одночленов $\{\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_q\}$ от p переменных, заданной транспонированной матрицей $A^T = (a_{ji})$ размера $q \times p$, для любой матрицы A без нулевых строк и столбцов связаны соотношением

$$l(f_1, f_2, \ldots, f_p) + p = l(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_q) + q,$$

т. е. для любой целочисленной матрицы A с неотрицательными элементами размера $p \times q$ без нулевых строк и столбцов выполняется равенство

$$l(A) + q = l\left(A^T\right) + p.$$

Для меры сложности l_2, как показано в [22], также имеет место свойство двойственности: для любой целочисленной матрицы A размера $p \times q$ без нулевых строк и столбцов справедливо равенство

$$l(A) + q = l\left(A^T\right) + p.$$

Теперь особо подчеркнем, что аналогичное равенство для меры сложности l_F, вообще говоря, неверно. Действительно,

$$l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)\right) = k + 1, \quad l_F\left(\left(2^k, 2^{-k}\right)^T\right) = 2k.$$

Возвращаясь к задачам Беллмана и Кнута, заметим, что из свойства двойственности меры сложности l в частности следует, что

$$l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) + 1 = l(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_m}) + m.$$

Без ограничения общности можно считать, что все степени a_i, $i = 1, \dots, m$, различны и отличны от 0, так как если $\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = \{r_1, r_2, \dots, r_s\}$ и все числа r_i, $i = 1, \dots, r$, различны и отличны от 0, то, очевидно,

$$l(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_m}) = l(x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_s}),$$
$$l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) = l(x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_s^{r_s}) + m - s.$$

Из результатов работ [1, 3, 9, 10] в предположении, что все степени a_i, $i = 1, \dots, m$, различны и $a_i \geq 1$, $i = 1, \dots, m$, следует, что при $\prod a_i \to \infty$ справедливы соотношения

$$l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}) \lesssim \log(\max a_i) + \frac{\log\left(\prod a_i\right)}{\log\log\left(\prod a_i\right)} + c(a_1, a_2, \dots, a_m)m;$$

$$l(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots x^{a_m}) \lesssim \log(\max a_i) + \frac{\log\left(\prod a_i\right)}{\log\log\left(\prod a_i\right)} + (c(a_1, a_2, \dots, a_m) - 1)m,$$

где $c(a_1, a_2, \dots, a_m)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенствам $0 \leq c(a_1, a_2, \dots, a_m) < 1$, причем, как следует из [5], для почти всех матриц $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ справедливы следующие нижние оценки:

$$l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots, x_m^{a_m}) \geq \log(\max a_i) + \frac{\log\left(\prod a_i\right)}{\log\log\left(\prod a_i\right)} \left(1 + o(1)\right);$$

$$l(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_m}) \geq \log(\max a_i) + \frac{\log\left(\prod a_i\right)}{\log\log\left(\prod a_i\right)} \left(1 + o(1)\right) - m.$$

т. е. при выполнении условия $m = o\left(\log(\max a_i) + \frac{\log(\prod a_i)}{\log\log(\prod a_i)}\right)$ для почти всех матриц $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ справедливы асимптотические равенства:

$$l(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots, x_m^{a_m}) \sim \log(\max a_i) + \frac{\log\left(\prod a_i\right)}{\log\log\left(\prod a_i\right)};$$
$$l(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_m}) \sim \log(\max a_i) + \frac{\log\left(\prod a_i\right)}{\log\log\left(\prod a_i\right)}.$$

Таким образом, в задаче о сложности вычисления систем одночленов в случае, когда либо число одночленов равно 1 (задача Р. Беллмана), либо число переменных равно 1 (задача Д. Кнута), при слабых ограничениях получены асимптотически точные решения.

Эти результаты, используя технику доказательства нижних оценок из [5] и очевидные неравенства

$$l_2(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_q^{a_q}) \le l(x_1^{|a_1|} x_2^{|a_2|} \ldots x_q^{|a_q|}) + q + 1,$$
$$l_2(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}) \le l(x^{|a_1|}, x^{|a_2|}, \ldots, x^{|a_p|}) + p + 1,$$

$$l_F(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_q^{a_q}) \le l(x_1^{|a_1|} x_2^{|a_2|} \ldots x_q^{|a_q|}),$$
$$l_F(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}) \le l\left(\{x^{a_i} \mid a_i > 0\}\right) + l\left(\{x^{|a_i|} \mid a_i < 0\}\right) + 1,$$

можно перенести без качественных изменений на случай мер сложности l_2 и l_F. В ослабленной форме они будут выглядеть таким образом — при выполнении условия $q = o\left(\log\log\left(\max|a_i|\right)\right)$ или, соотвественно, $p = o\left(\log\log\left(\max|a_i|\right)\right)$, имеют место асимптотические равенства:

$$l_2(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_q^{a_q}) \sim \log\max|a_i|,$$
$$l_2(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}) \sim \log\max|a_i|,$$
$$l_F(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_q^{a_q}) \sim \log\max|a_i|,$$
$$l_F(x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}) \sim \log\max\{1, a_1, a_2, \ldots, a_p\} + \\ + \log\max\{1, -a_1, -a_2, \ldots, -a_p\}.$$

Теперь от случая матриц, состоящих либо из одной строки, либо из одного столбца, перейдем к общему случаю. Докажем универсальную нижнюю оценку, справедливую для всех трех изучаемых мер сложности целочисленных матриц. Для этого введем вспомогательную вычислительную модель, сочетающую возможности всех трех введенных ранее.

Пусть $A = (a_{ij})$ — целочисленная матрица размера $p \times q$. Обозначим через $\widetilde{l}(A)$ минимально возможную сложность (число элементов) схемы из функциональных элементов, на входы которой подаются функции $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_q, x_q^{-1}$, на выходах схемы вычисляются функции $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots,$ $x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, а сама схема состоит из двухвходовых элементов, реализующих либо произведение, либо частное функций, подаваемых на входы элемента.

В силу данного определения имеют место неравенства $l_2(A) \geq \widetilde{l}(A)$ и $l_F(A) \geq \widetilde{l}(A)$, а если в матрице A все элементы неотрицательные, и в ней нет нулевых строк, то справедливо и неравенство $l(A) \geq \widetilde{l}(A)$.

Сформулируем утверждение, являющееся основой для доказательства нужных нижних оценок. Впервые, по-видимому, аналогичный результат был получен в работе [31]. В более общем виде он содержится в [12, 15].

Лемма 1. *Пусть в k вершинах схемы S, состоящей из элементов умножения и деления, со входами $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}$ реализуется система функций*

$$\{x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_k^{a_{2k}},\ \ldots,\ x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \ldots x_k^{a_{kk}}\},$$

задаваемая целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $k \times k$. Тогда

$$2^{\widetilde{l}(S)} \geq |\det A|.$$

Доказательство. Зафиксируем множество

$$\{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}\}$$

символов, приписываемых входам схем. Утверждение леммы будем доказывать индукцией по сложности схемы S, т. е. по величине $\widetilde{l}(S)$.

Если $\widetilde{l}(S) = 0$, то в вершинах схемы S (а в схеме есть только входные вершины) вычисляются функции $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}$ и, следовательно, в каждой строке матрицы A, задающей такую систему функций, по одному ненулевому элементу и по $n-1$ нулей, причем ненулевые элементы по абсолютной величине равны 1. Поэтому $|\det A| \leq 1$ и доказываемое неравенство выполняется.

Докажем утверждение леммы для произвольной схемы S сложности $\widetilde{l}(S)$, $\widetilde{l}(S) \geq 1$, в предположении, что для любой схемы сложности менее $\widetilde{l}(S)$ лемма справедлива. Пусть v_1 — невходовая вершина (элемент) схемы S, в которой реализуется функция, не использующаяся для дальнейших вычислений в схеме S, т. е. эта функция не подается на вход никакого элемента схемы.

Схему, получающуюся из схемы S удалением вершины v_1 и ребер, входящих в эту вершину, обозначим через S'. Очевидно, что $\widetilde{l}(S') = \widetilde{l}(S) - 1$.

Пусть в схеме S произвольным образом выбраны k вершин. Если среди выбранных вершин нет вершины v_1, то утверждение леммы для этих k вершин следует из предположения индукции, так как $2^{\widetilde{l}(S)} > 2^{\widetilde{l}(S')} \geq |\det A|$. Если вершина v_1 выбрана более одного раза, то утверждение леммы также выполняется, так как в этом случае в соответствующей матрице будут две одинаковые строки, и определитель этой матрицы будет равен 0. Поэтому можно считать, что среди выбранных вершин вершина v_1 содержится ровно один раз. Пусть в вершине v_1 вычисляется функция $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}}$, а в остальных выбранных вершинах $v_2, v_3, \ldots, v_k$ — соответственно, функции $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_k^{a_{2k}}$, $x_1^{a_{31}} x_2^{a_{32}} \ldots x_k^{a_{3k}}, \ldots, x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \ldots x_k^{a_{kk}}$.

Пусть на входы элемента, соответствующего вершине v_1, подаются функции $x_1^{a'_{11}} x_2^{a'_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}}$ и $x_1^{a''_{11}} x_2^{a''_{12}} \ldots x_k^{a''_{1k}}$, вычисляемые в вершинах v' и v'', соответственно. Тогда в зависимости от того, какая операция приписана вершине v_1 — умножение или деление — имеет место либо равенство

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}} = x_1^{a'_{11}+a''_{11}} x_2^{a'_{12}+a''_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}+a''_{1k}},$$

либо равенство

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_k^{a_{1k}} = x_1^{a'_{11}-a''_{11}} x_2^{a'_{12}-a''_{12}} \ldots x_k^{a'_{1k}-a''_{1k}}.$$

Обозначим через A' и A'' матрицы, получающиеся из матрицы A заменой первой строки на строки $(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{1k})$ и $(a''_{11}, a''_{12}, \ldots, a''_{1k})$ соответственно. Обозначив через $\pi(\sigma)$ число транспозиций в подстановке σ, получаем:

$$\begin{aligned} |\det A| &= \left| \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} (a'_{1,\sigma(1)} \pm a''_{1,\sigma(1)}) a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{k,\sigma(k)} \right| = \\ &= \left| \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} a'_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{k,\sigma(k)} \pm \right. \\ &\qquad \left. \pm \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\pi(\sigma)} a''_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{k,\sigma(k)} \right| = \end{aligned}$$

$$= |\det A' \pm \det A''| \le |\det A'| + |\det A''| \,.$$

Для наборов вершин $(v', v_2, \ldots, v_k)$ и $(v'', v_2, \ldots, v_k)$ схемы S' по предположению индукции справедливо утверждение леммы. Поэтому

$$|\det A| \le |\det A'| + |\det A''| \le 2^{\widetilde{l}(S')} + 2^{\widetilde{l}(S')} = 2^{\widetilde{l}(S)}.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $p \times q$, а число k удовлетворяет неравенствам $1 \le k \le \min(p, q)$. Для наборов индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, таких что $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le p$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le q$, обозначим через $A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)$ квадратную $(k \times k)$-матрицу, состоящую из элементов, находящихся на пересечении k строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Положим

$$D(A) = \max_{k:\ 1 \le k \le \min(p,q)} \left(\max_{(i_1, \ldots, i_k;\, j_1, \ldots, j_k)} |\det A(i_1, i_2, \ldots, i_k;\, j_1, j_2, \ldots, j_k)| \right).$$

Таким образом, $D(A)$ — это максимум абсолютных величин миноров матрицы A, где максимум берется по всем минорам.

Из леммы 1 нетрудно вывести (подробнее см., например, лемму 1 и теорему 1 из [12]) справедливость для любой ненулевой целочисленной матрицы A неравенства $\widetilde{l}(A) \ge \log D(A)$. В свою очередь, из этого соотношения следует

Теорема 1. *Для любой ненулевой целочисленной матрицы A справедливы неравенства*:

$$l(A) \ge \log D(A), \quad l_2(A) \ge \log D(A), \quad l_F(A) \ge \log D(A)$$

(*в первом неравенстве подразумевается, что в матрице A нет нулевых строк и все ее элементы неотрицательны*).

Забегая вперед, скажем, что все известные верхние оценки сложности матриц для мер сложности l и l_2 в случае, когда размеры матриц A ограничены (или слабо растут), имеют вид $\log D(A) + o(\log D(A))$. Тем самым для первых двух вычислительных моделей необходимые нижние оценки доказаны.

Для меры сложности l_F нижняя оценка $l_F(A) \ge \log D(A)$ не является асимптотически неулучшаемой, что демонстрирует уже упоминавшийся пример: с одной стороны имеет место равенство, $l_F\left((2^k, 2^{-k})^T\right) =$

$2k$, а с другой — выполняется соотношение $\log D\left((2^k, 2^{-k})\right) = k$. Таким образом, доказанная нижняя оценка для меры сложности l_F нуждается в усилении, и это в какой-то степени будет сделано ниже.

А теперь приступим к доказательству асимптотически точных верхних оценок. Будем его вести также используя язык схем из функциональных элементов. И опять введем вспомогательную вычислительную модель, точнее даже три, следующим образом — при построении схем из функциональных элементов во всех трех основных вычислительных моделях дополнительно разрешим использовать одновходовые элементы, реализующие по подаваемой на вход элемента функции f ее степень f^r, где r — рациональное число, удовлетворяющее условию $0 \le r \le 2$ (значение r, вообще говоря, свое для каждого такого элемента). Будем называть такие схемы *обобщенными*, а схемы, не использующие такие одновходовые элементы иногда будем называть *обычными*.

Заметим, что при таком усилении вычислительных возможностей также расширяется и класс вычисляемых матриц: обобщенными схемами можно вычислить любую матрицу с рациональными элементами (при этом для первой модели элементы матрицы по-прежнему должны быть неотрицательными).

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $p \times q$ с неотрицательными рациональными элементами. Обозначим через $\lambda(A)$ минимально возможную сложность обобщенной схемы из функциональных элементов, на входы которой подаются функции $x_1, x_2, \ldots, x_q$, на выходах схемы вычисляются функции $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}}$, $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}, \ldots,$ $x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \ldots x_q^{a_{pq}}$, а сама схема состоит из одновходовых элементов описанного выше вида и двухвходовых элементов, реализующих произведение функций, подаваемых на входы элемента. Меру сложности λ будем называть λ-*сложностью*.

Соответствующим образом для произвольной матрицы A с рациональными элементами определяются величины $\lambda_2(A)$ и $\lambda_F(A)$. Очевидно, что имеют место неравенства $\lambda(A) \le l(A)$, $\lambda_2(A) \le l_2(A)$ и $\lambda_F(A) \le l_F(A)$. Отметим также, что величины $\lambda(A)$, $\lambda_2(A)$ и $\lambda_F(A)$, как и величины $l(A)$, $l_2(A)$ и $l_F(A)$, ограничены снизу значением $\log D(A)$ — в случае вычисления обобщенными схемами этот факт устанавливается так же, как и в лемме 1 для случая реализации обычными схемами.

Ключевым свойством обобщенных схем является полная определенность со сложностью возведения в степень: при $0 \le \alpha < 1$ выполняется равенство $\lambda(x^\alpha) = 1$, а при $\alpha \ge 1$ — равенство $\lambda(x^\alpha) = \lceil \log \alpha \rceil$ (такие же равенства справедливы и для мер сложности λ_2 и λ_F).

Вспомогательные модели введены для того, чтобы разделить описание процесса вычисления матриц (систем функций) на две составляющие — "содержательную" и "техническую". Поясним это на примере.

Пусть построена схема S_1 (в этом примере считаем, что вход x^{-1} и операция деления недоступны), вычисляющая степень x^m; надо построить схему S, вычисляющую x^n, $n > m$.

Если речь идет о построении обобщенной схемы, то достаточно построить обобщенную схему $\widehat{S}_2$, вычисляющую функцию $x^{n/m}$ (это можно сделать с λ-сложностью $\lceil \log(n/m) \rceil$), и на вход схемы $\widehat{S}_2$ подать выход схемы S_1, т. е. степень x^m. Полученная таким образом обобщенная схема $\widehat{S}$ будет вычислять степень x^n, причем $\lambda(\widehat{S}) = l(S_1) + \lambda(\widehat{S}_2) = l(S_1) + \lceil \log(n/m) \rceil$.

Можно ли построить обычную схему S, с использованием схемы S_1 вычисляющую степень x^n со сложностью $l(S_1) + \log(n/m) + o(\log n)$, т. е. без асимптотического увеличения сложности по сравнению со случаем обобщенных схем? Если при этом использовать только выход схемы S_1 и переменную x, то это сделать, вообще говоря, нельзя — в случае, когда $n = 2m - 1$, при построении схемы S потребуется дополнительно к схеме S_1 не менее $\log(m-1)$ элементов умножения, при этом $\log(n/m) = O(1)$, а $\log(m-1) \sim \log n$. Однако, если использовать не только степень, реализованную на выходе схемы S_1, но и некоторые степени, вычисленные элементами схемы S_1, то можно добиться желаемого эффекта. Покажем как это можно сделать.

Запишем число n в таком виде:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor m + \left(\frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right) m.$$

Положим $u = \lfloor \log\log n - 2\log\log\log n \rfloor$. Представим число $\lfloor n/m \rfloor$ в системе счисления по основанию 2^u:

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \mu_0 + \mu_1 2^u + \mu_2 2^{2u} + \ldots + \mu_{t-1} 2^{(t-1)u},$$

где $0 \le \mu_i < 2^u$, $i = 0, 1, \ldots, t-1$; $\mu_{t-1} \ne 0$. Тогда справедливы неравенства $2^{(t-1)u} \le \lfloor n/m \rfloor < 2^{tu}$.

Положим $s = \lfloor (\log m)/u \rfloor + 1$. Тогда выполняются соотношения $2^{(s-1)u} \le m < 2^{su}$. Для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, s-1$, через m_i обозначим наименьшее из чисел r, удовлетворяющих условиям: 1) $2^{iu} \le r < 2^{iu+1}$; 2) в схеме S_1 есть элемент, вычисляющий степень x^r. Очевидно, что такое число существует. Тогда число $((n/m) - \lfloor n/m \rfloor)\, m$ можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{n}{m} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right) m = \nu_0 + \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \ldots + \nu_{s-1} m_{s-1},$$

где $0 \le \nu_i < 2^{u+1}$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

Таким образом,

$$n = \sum_{i=0}^{t-1} \mu_i m 2^{iu} + \sum_{i=0}^{s-1} \nu_i m_i.$$

Построим схему S_2, которая по степеням $x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_{s-1}}, x^m$ и переменной x вычисляет степень x^n. Сначала, потратив $(t-1)u$ элементов умножения, последовательно возводим в квадрат степень x^m, реализуя тем самым степени $x^{m2^u}, x^{m2^{2u}}, \ldots, x^{m2^{(t-1)u}}$. После этого для вычисления степени x^n в силу представления

$$x^n = \prod_{i=0}^{t-1} \left(x^{m2^{iu}}\right)^{\mu_i} \times \prod_{i=0}^{s-1} (x^{m_i})^{\nu_i}$$

достаточно $s+t+2^{u+1}$ операций умножения. Действительно, вычислить одночлен $z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \ldots z_{s+t}^{\beta_{s+t}}$, где $0 \le \beta_i \le 2^{u+1}-1$, $i = 1, 2, \ldots, s+t$, от заданных выражений $z_1, z_2, \ldots, z_{s+t}$ можно следующим образом.

Положим

$$I_k = \{i : 1 \le i \le s+t,\ \beta_i = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^{u+1}-1.$$

Очевидно, что $|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_{2^{u+1}-1}| \le s+t$.

Последовательно определим одночлены $f_{2^{u+1}-1}, f_{2^{u+1}-2}, \ldots, f_1$ от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_{s+t}$:

$$f_{2^{u+1}-1} = \prod_{i \in I_{2^{u+1}-1}} z_i; \qquad f_k = f_{k+1} \prod_{i \in I_k} z_i, \quad k = 2^{u+1}-2, 2^u-3, \ldots, 1.$$

Теперь, считая, что произведение пустого множества сомножителей по определению равно единице, вычислим последовательно все отличные от единицы одночлены

$$\prod_{i \in I_{2^{u+1}-1}} z_i,\ \prod_{i \in I_{2^{u+1}-2}} z_i,\ \ldots, \prod_{i \in I_1} z_i,$$

потратив на это не более $s + t - |\{I_k : |I_k| \ne 0\}|$ операций умножения. Далее с использованием не более $|\{I_k : |I_k| \ne 0\}|$ операций умножения можно вычислить все одночлены $f_{2^{u+1}-1}, f_{2^{u+1}-2}, \ldots, f_1$.

Окончательно, потратив еще не более $2^{u+1}-1$ операций умножения, получаем одночлен

$$f_{2^{u+1}-1} f_{2^{u+1}-2} \ldots f_1 =$$

$$= \left(\prod_{i \in I_{2^{u+1}-1}} z_i \right)^{2^{u+1}-1} \left(\prod_{i \in I_{2^{u+1}-2}} z_i \right)^{2^{u+1}-2} \cdots \left(\prod_{i \in I_1} z_i \right)^1 =$$
$$= \left(\prod_{i \in I_{2^{u+1}-1}} z_i^{\beta_i} \right) \left(\prod_{i \in I_{2^{u+1}-2}} z_i^{\beta_i} \right) \cdots \left(\prod_{i \in I_1} z_i^{\beta_i} \right) = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \ldots z_{s+t}^{\beta_{s+t}}.$$

Итак, для вычисления одночлена $z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \ldots z_{s+t}^{\beta_{s+t}}$ было потрачено не более $s + t + 2^{u+1}$ операций умножения.

Таким образом,

$$l(S) = l(S_1) + l(S_2) \le l(S_1) + (t-1)u + s + t + 2^{u+1}.$$

Учитывая соотношения

$$(t-1)u \le \log\left(\frac{n}{m}\right), \quad s \le \frac{\log m}{u}, \quad t \le \frac{\log\left(\frac{n}{m}\right)}{u},$$

и подставляя значение параметра u, получаем:

$$l(S) = l(S_1) + \log\left(\frac{n}{m}\right) + \frac{\log n}{u} + 2^{u+1} \le l(S_1) + \log\left(\frac{n}{m}\right) + O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right),$$

следовательно,

$$l(S) = \lambda(\widehat{S}) + O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

Приведенный пример иллюстрирует способ перехода от вычисления обобщенными схемами к вычислению обычными схемами без асимптотического увеличения сложности.

Отметим также, что при построении схемы S_1 информация о том, что выходы некоторых элементов схемы S_1 будут использованы при дальнейших вычислениях, может давать дополнительные преимущества (если не по сложности, то, по крайней мере, в удобстве использования) при переходе от обобщенных схем к обычным. Именно так и будем поступать в общем случае.

Итак, последующие доказательства верхних оценок будут формально состоять из двух частей.

Первая — содержательная — заключается в построении для матрицы A обобщенной схемы нужной сложности (скажем, сложности $\log D(A) + O(1)$ для первых двух вычислительных моделей), причем эта обобщенная схема помимо ограничения на сложность должна обладать еще одним важным свойством — допускать разбиение на ограниченное (напомним, что речь идет о вычислении последовательности матриц) или слаборастущее число подсхем, каждая из которых либо состоит из одного двухвходового функционального элемента, либо имеет один вход, один выход, и, соответственно, вычисляет некоторую степень подаваемой на вход подсхемы функции. Подсхемы этих двух типов будем называть *простейшими*. Отметим, что тип простейшей обобщенной схемы полностью определяется числом входов.

Вторая — техническая — заключается в перестроении без асимптотического увеличения сложности уже имеющейся обобщенной схемы, состоящей из небольшого числа простейших подсхем, в обычную схему, вычисляющую ту же матрицу, что и исходная обобщенная схема.

Основное внимание уделим содержательной составляющей, но сначала в общих чертах опишем процесс перехода от обобщенной схемы к обычной, взяв за основу раздел "Вспомогательные утверждения" работы [15], в котором этот процесс описан подробно, но только для случая вычисления матриц размера 3×3 в первой вычислительной модели.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_q$ — рациональные числа, u — некоторый натуральный параметр. Обозначим через $G_0\left(x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, \ldots x_q^{b_q}, u\right)$ множество всех отличных от тождественной единицы функций[2])

$$\begin{gathered}
x_1^{\operatorname{sgn}(b_1)\lfloor |b_1| \rfloor} x_2^{\operatorname{sgn}(b_2)\lfloor |b_2| \rfloor} \ldots x_q^{\operatorname{sgn}(b_q)\lfloor |b_q| \rfloor},\\
x_1^{\operatorname{sgn}(b_1)\lfloor |b_1|/2^u \rfloor} x_2^{\operatorname{sgn}(b_2)\lfloor |b_2|/2^u \rfloor} \ldots x_q^{\operatorname{sgn}(b_q)\lfloor |b_q|/2^u \rfloor},\\
\ldots,\\
x_1^{\operatorname{sgn}(b_1)\lfloor |b_1|/2^{ku} \rfloor} x_2^{\operatorname{sgn}(b_2)\lfloor |b_2|/2^{ku} \rfloor} \ldots x_q^{\operatorname{sgn}(b_q)\lfloor |b_q|/2^{ku} \rfloor}, \quad \ldots
\end{gathered}$$

Очевидно, что

$$\left|G_0\left(x_1^{b_1}, x_2^{b_2}, \ldots x_q^{b_q}, u\right)\right| = \left\lceil \frac{\log \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_q|\}}{u} \right\rceil.$$

По множеству функций $G_0\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}, u\right)$ построим множество функций $G\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}, u\right)$, добавив к исходному множеству все отличные от единицы функции вида $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_q^{\beta_q}$ с целочисленными по-

[2]) Здесь и далее $\operatorname{sgn} x$ означает 1, если выполняется неравенство $x \geq 0$, и -1 в остальных случаях.

казателями степеней, такие, что для каждой функции $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_q^{\beta_q}$ из множества $G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)$ найдется функция $x_1^{\beta_1'}x_2^{\beta_2'}\dots x_q^{\beta_q'}$ из множества $G_0\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)$, удовлетворяющая условиям $|\beta_1-\beta_1'|\le 1$, $|\beta_2-\beta_2'|\le 1,\dots,|\beta_q-\beta_q'|\le 1$. Очевидно, что

$$\left|G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)\right|\le q^3\left|G_0\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)\right|.$$

Следующие несколько лемм и заключительное утверждение (теорема 2) устанавливают для каждой из трех вычислительных моделей возможность преобразования произвольной обобщенной схемы, вычисляющей целочисленную матрицу и состоящую из небольшого числа простейших подсхем, в обычную схему, вычисляющую эту же матрицу, без асимптотического увеличения сложности путем пошаговой замены простейших обобщенных подсхем на обычные посхемы, имеющие уже, вообще говоря, много входов и вычисляющие не одну функцию, а целый класс функций, "пропорциональных" (в введенном выше смысле) вычисляемой исходной простейшей подсхемой функции, при этом "густота" вычисляемого класса с каждым шагом несколько уменьшается.

Лемма 2. *Пусть $b_{ij}\ge 0$, $i=1,2$, $j=1,2,\dots,q$; u_2 делится на u_1. Тогда для вычисления в первой модели по множествам одночленов $G\left(x_1^{b_{11}}x_2^{b_{12}}\dots x_q^{b_{1q}},u_1\right)$, $G\left(x_1^{b_{21}}x_2^{b_{22}}\dots x_q^{b_{2q}},u_2\right)$ и $\{x_1,x_2,\dots,x_q\}$ системы одночленов $G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}}x_2^{b_{12}+b_{22}}\dots x_q^{b_{1q}+b_{2q}},u_2\right)$ можно построить схему S, сложность которой удовлетворяет соотношению*

$$l(S)\le 2\left|G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}}x_2^{b_{12}+b_{22}}\dots x_q^{b_{1q}+b_{2q}},u_2\right)\right|+3^q.$$

Доказательство. Заметим, что в силу условий леммы справедливо включение

$$G\left(x_1^{b_{21}}x_2^{b_{22}}\dots x_q^{b_{2q}},u_2\right)\subseteq G\left(x_1^{b_{21}}x_2^{b_{22}}\dots x_q^{b_{2q}},u_1\right).$$

Схема S сначала вычисляет все одночлены множества

$$H=\left\{x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_q^{\beta_q}\mid \beta_i\in\{0,1,2\},\ i=1,2,\dots,q,\right\}\setminus\{x_1^0x_2^0\dots x_q^0\}.$$

Для вычисления системы H достаточно 3^q-q-1 операций умножения.

При $k = 0, 1, \ldots, \left|G_0\left(x_1^{b_{11}+b_{21}} x_2^{b_{12}+b_{22}} \ldots x_q^{b_{1q}+b_{2q}}, u_2\right)\right| - 1$ для получения одночлена

$$x_1^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{11}+b_{21}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} x_2^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{12}+b_{22}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} \ldots x_q^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1q}+b_{2q}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}}$$

в силу справедливости при всех $j = 1, 2, \ldots, q$ соотношений

$$\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1j}}{2^{ku_2}}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} + \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{2j}}{2^{ku_2}}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1j}+b_{2j}}{2^{ku_2}}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} \le \left\lfloor\frac{b_{1j}}{2^{ku_2}} + \frac{b_{2j}}{2^{ku_2}}\right\rfloor \le$$
$$\le \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1j}}{2^{ku_2}}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} + \max\left\{\left\lfloor\frac{b_{2j}}{2^{ku_2}}\right\rfloor - 1,\ 0\right\} + 2,$$

достаточно домножить произведение

$$x_1^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{11}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} x_2^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{12}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} \ldots x_q^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{1q}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} \times$$
$$\times\, x_1^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{21}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} x_2^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{22}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}} \ldots x_q^{\max\left\{\left\lfloor\frac{b_{2q}}{2^{ku_2}}\right\rfloor-1,\ 0\right\}}$$

имеющихся одночленов на некоторый одночлен из множества H.

Очевидно, что для получения оставшихся одночленов из множества $G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}} x_2^{b_{12}+b_{22}} \ldots x_q^{b_{1q}+b_{2q}}, u_2\right)$ достаточно использовать по одной операции умножения на каждый одночлен. Поэтому для сложности схемы S получаем такую оценку:

$$l(S) \le 2\left|G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}} x_2^{b_{12}+b_{22}} \ldots x_q^{b_{1q}+b_{2q}}, u_2\right)\right| + 3^q.$$

Лемма 2 доказана.

Сформулируем для вычислений во второй и третьей моделях аналогичные утверждения.

Лемма 3. *Пусть u_2 делится на u_1. Тогда для вычисления во второй модели по множествам функций $G\left(x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \ldots x_q^{b_{1q}}, u_1\right)$, $G\left(x_1^{b_{21}} x_2^{b_{22}} \ldots x_q^{b_{2q}}, u_2\right)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ любой из следующих трех систем функций*

$$G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}} x_2^{b_{12}+b_{22}} \ldots x_q^{b_{1q}+b_{2q}}, u_2\right),$$

$$G\left(x_1^{b_{11}-b_{21}}x_2^{b_{12}-b_{22}}\dots x_q^{b_{1q}-b_{2q}},u_2\right),$$
$$G\left(x_1^{b_{21}-b_{11}}x_2^{b_{22}-b_{12}}\dots x_q^{b_{2q}-b_{1q}},u_2\right)$$

можно построить схему S, сложность которой удовлетворяет соотношению

$$l_2(S)\le 2\,|G|+3^q,$$

где $|G|$ — число элементов в вычисляемой системе функций.

Лемма 4. *Пусть u_2 делится на u_1. Тогда для вычисления в первой модели по множествам функций $G\left(x_1^{b_{11}}x_2^{b_{12}}\dots x_q^{b_{1q}},u_1\right)$, $G\left(x_1^{b_{21}}x_2^{b_{22}}\dots x_q^{b_{2q}},u_2\right)$ и $\{x_1,x_2,\dots,x_q,x_1^{-1},x_2^{-1},\dots,x_q^{-1}\}$ системы функций $G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}}x_2^{b_{12}+b_{22}}\dots x_q^{b_{1q}+b_{2q}},u_2\right)$ можно построить схему S, сложность которой удовлетворяет соотношению*

$$l_F(S)\le 2\left|G\left(x_1^{b_{11}+b_{21}}x_2^{b_{12}+b_{22}}\dots x_q^{b_{1q}+b_{2q}},u_2\right)\right|+3^q.$$

Доказательства лемм 3 и 4 получаются небольшой модификацией доказательства леммы 2.

Замечание. В силу неравенств

$$\left|G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)\right|\le 3^q\left|G_0\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)\right|,$$
$$\left|G_0\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q},u\right)\right|\le\frac{\log\max\{|b_1|,|b_2|,\dots,|b_q|\}}{u}+1$$

сложность схем из лемм 2 и 4 можно оценить величиной

$$O\left(3^q\frac{\log\max\{|b_{11}+b_{21}|,|b_{12}+b_{22}|,\dots,|b_{1q}+b_{2q}|\}}{u_2}\right),$$

а сложность схемы из леммы 3 — соответственно, либо такой же величиной, либо величиной

$$O\left(3^q\frac{\log\max\{|b_{11}-b_{21}|,|b_{12}-b_{22}|,\dots,|b_{1q}-b_{2q}|\}}{u_2}\right).$$

Лемма 5. *Пусть натуральные параметры q,c,d,u_1,u_2 и рациональные параметры $a,\alpha,b_1,b_2,\dots,b_q$ удовлетворяют условиям*

$$a\ge\alpha>0,\quad b_1\ge b_2\ge\dots\ge b_q\ge 0,\quad b_1>0,\quad a\ge\alpha b_1,\quad c\le d-3,$$

$$
\begin{aligned}
q &\le \frac{1}{2d}\log\log\log a,\\
u_1 &= \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil \right)^{c-1},\\
u_2 &= \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil \right)^{c}.
\end{aligned}
$$

Тогда для вычисления в первой модели по множеству одночленов $G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q}, u_1\right)$ и переменным $x_1, x_2, \dots, x_q$ системы одночленов $G\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q}\right)^{\alpha}, u_2\right)$ можно построить схему S, сложность которой при условии $a \to \infty$ удовлетворяет соотношениям

$$
l(S) = \log\alpha + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right) = \lambda\left(x^{\alpha}\right) + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).
$$

Доказательство. Обозначим через t_i, $i = 1, 2$, количество знаков в разложении числа $\lfloor\alpha\rfloor$ по основанию 2^{u_i}, а через s_i, $i = 1, 2$, обозначим величину $\left|G_0\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q}, u_i\right)\right|$. Очевидно, что $b_1 \le 2^{s_i u_i}$. Тогда

$$
\left\lfloor \frac{\alpha b_1}{2^{(t_i+s_i)u_i}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{t_i u_i}} \frac{b_1}{2^{s_i u_i}} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{t_i u_i}} \right\rfloor = 0, \quad i = 1, 2,
$$

т. е. $\left|G_0\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q}\right)^{\alpha}, u_i\right)\right| \le s_i + t_i$, $i = 1, 2$.

Далее, если выполняется неравенство $s_2 + t_2 \le (\log\log a_{11})^{1/(2d)}$, то в качестве искомой схемы S можно взять схему, на входы которой подаются только переменные $x_1, x_2 \dots x_q$, а сама схема раздельно вычисляет все одночлены из множества $G\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_q^{b_q}\right)^{\alpha}, u_2\right)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
l(S) &\le O\left(3^q(s_2+t_2)(\log(\alpha b_1) + q)\right) \le\\
&\le O\left(3^q(s_2+t_2)^2 u_2 + 3^q(s_2+t_2)q\right) \le O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом далее можно считать, что выполняется неравенство $s_2 + t_2 > (\log\log a)^{1/(2d)}$. Отметим, что в этом случае при $a \to \infty$ выполняется условие $s_2 + t_2 \to \infty$, а следовательно и условие $s_1 + t_1 \to \infty$.

Зафиксируем натуральный параметр v, удовлетворяющий условию $0 \le v \le s_2 + t_2 - 1$. Положим

$$
\beta_j = \beta_j(v) = \max\left\{ \left\lfloor \frac{\alpha b_j}{2^{q u_1}} \right\rfloor - 1,\ 0 \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, q.
$$

Для всех $k = -(s_1-1), -(s_1-2), \ldots, t_1-1$ справедливы соотношения

$$\frac{\lceil b_1 2^{(k+1)u_1} \rceil}{\lceil b_1 2^{ku_1} \rceil} < \frac{b_1 2^{(k+1)u_1} + 1}{b_1 2^{ku_1}} \le 2^{u_1} + 1.$$

Поэтому в силу соотношений $\beta_1 < \lfloor \alpha b_1 \rfloor \le \alpha b_1 < 2^{t_1 u_1} b_1$ величину β_1 можно представить в таком виде:

$$\beta_1 = \sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k \lceil b_1 2^{ku_1} \rceil ,$$

где $0 \le \rho_k \le 2^{u_1}$, $k = -(s_1-1), -(s_1-2), \ldots, t_1-1$.

Далее, введем величины $\widetilde{\beta}_j = \widetilde{\beta}_j(v)$, $j = 2, \ldots, q$ следующим образом. Если $b_j = 0$, то $\beta_j = 0$, и в этом случае положим $\widetilde{\beta}_j = 0$. Пусть теперь $b_j \ne 0$. Обозначив через $s_1^{(j)}$ наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $\left\lfloor b_j / 2^{s_1^{(j)} u_1} \right\rfloor = 0$, положим

$$\widetilde{\beta}_j = \widetilde{\beta}_j(v) = \sum_{k=-(s_1^{(j)}-1)}^{t_1-1} \rho_k \left(\lfloor b_j 2^{ku_1} \rfloor - 1 \right).$$

Очевидно, что $\widetilde{\beta}_j \ge 0$. Кроме того, если $\beta_1 = 0$, то $\widetilde{\beta}_j = \beta_j = 0$, а при $\beta_1 > 0$ имеем:

$$\widetilde{\beta}_j = \sum_{k=-(s_1^{(j)}-1)}^{t_1-1} \rho_k \left(\lfloor b_j 2^{ku_1} \rfloor - 1 \right) \le \sum_{k=-(s_1^{(j)}-1)}^{t_1-1} \rho_k b_j 2^{ku_1} \quad - 1 =$$

$$= \frac{b_j}{b_1} \sum_{k=-(s_1^{(j)}-1)}^{t_1-1} \rho_k b_1 2^{ku_1} \quad - 1 \le \frac{b_j}{b_1} \beta_1 - 1 =$$

$$= \frac{b_j}{b_1} \left(\left\lfloor \frac{\alpha b_1}{2^{qu_1}} \right\rfloor - 1 \right) - 1 < \frac{\alpha b_j}{2^{qu_1}} - 1.$$

Отсюда в силу целочисленности величины $\widetilde{\beta}_j$ получаем:

$$\widetilde{\beta}_j \le \left\lfloor \frac{\alpha b_j}{2^{qu_1}} \right\rfloor - 1 = \beta_j.$$

С другой стороны,

$$\beta_j - \widetilde{\beta}_j \le \frac{\alpha b_j}{2^{qu_1}} - \sum_{k=-(s_1^{(j)}-1)}^{t_1-1} \rho_k \left(\left\lfloor b_j 2^{ku_1}\right\rfloor - 1\right) <$$

$$< \frac{\alpha b_j}{2^{qu_1}} - \sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k \left(b_j 2^{ku_1} - 2\right) =$$

$$= \frac{b_j}{b_1}\left(\frac{\alpha b_j}{2^{qu_1}} - \sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k b_1 2^{ku_1}\right) + 2\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k\right) <$$

$$< \frac{b_j}{b_1}\left((\beta_1+2) - \sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k \left(\left\lceil b_1 2^{ku_1}\right\rceil - 1\right)\right) + 2\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k\right) =$$

$$= \frac{b_j}{b_1}\left(2 + \sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k\right) + 2\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k\right) \le$$

$$\le 3\left(\sum_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \rho_k\right) + 2 \le 5(s_1+t_1-1)2^{u_1}.$$

Теперь для $k = -(s_1-1), -(s_1-2), \ldots, t_1-1$, введем обозначения

$$r_{1k} = \left\lceil b_1 2^{ku_1}\right\rceil; \qquad r_{jk} = \max\left\{\left\lceil b_j 2^{ku_1}\right\rceil - 1, 0\right\}, \quad j = 2, \ldots, q.$$

Заметим, что для $j = 1, 2, \ldots, q$ и $k = 0, 1, \ldots, t_1-2$, с одной стороны, справедливы соотношения

$$\left\lfloor b_j 2^{(k+1)u_1}\right\rfloor \ge \left\lfloor \left\lfloor b_j 2^{ku_1}\right\rfloor 2^{u_1}\right\rfloor = \left\lfloor b_j 2^{ku_1}\right\rfloor 2^{u_1},$$

а с другой — соотношения

$$\left\lfloor b_j 2^{(k+1)u_1}\right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor b_j 2^{ku_1}\right\rfloor 2^{u_1}\right\rfloor < b_j 2^{(k+1)u_1} - \left(b_j 2^{ku_1} - 1\right) 2^{u_1} = 2^{u_1}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\max\left\{\left\lfloor b_j 2^{ku_1}\right\rfloor - 1, 0\right\} 2^{u_1} \le \max\left\{\left\lfloor b_j 2^{(k+1)u_1}\right\rfloor - 1, 0\right\} <$$

$$< \max\left\{\left\lfloor b_j 2^{ku_1}\right\rfloor - 1, 0\right\} 2^{u_1} + 2\cdot 2^{u_1} - 1.$$

Таким образом, для $k = 0, 1, \ldots, t_1-2$ имеем:

$$\left\lfloor b_1 2^{ku_1}\right\rfloor 2^{u_1} \le \left\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\right\rfloor < \left\lfloor b_1 2^{ku_1}\right\rfloor 2^{u_1} + 2^{u_1};$$

$$r_{jk}2^{u_1} \le r_{j,k+1} < r_{jk}2^{u_1} + 2 \cdot 2^{u_1} - 1, \quad j = 2, \ldots, q,$$

и, следовательно,

$$0 \le \left\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1} \right\rfloor - \left\lfloor b_1 2^{ku_1} \right\rfloor 2^{u_1} < 2^{u_1};$$
$$0 \le r_{j,k+1} - r_{jk}2^{u_1} < 2 \cdot 2^{u_1} - 1, \quad j = 2, \ldots, q,$$

Перейдем непосредственно к описанию процесса вычисления по множеству одночленов $G\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}, u_1\right)$ системы одночленов $G\left(\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}\right)^{\alpha}, u_2\right)$. Это вычисление будет состоять из шести этапов. Обозначим через l_i число операций умножения, используемых на этапе с номером i.

Этап 1. Вычисление систем степеней

$$x_1^{\left\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1} \right\rfloor - \left\lfloor b_1 2^{ku_1} \right\rfloor 2^{u_1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2;$$
$$x_2^{r_{2,k+1} - r_{2k}2^{u_1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$x_q^{r_{q,k+1} - r_{qk}2^{u_1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, t_1 - 2;$$

Применяя теорему 1 из [1] для каждой системы и используя установленные оценки для показателей степеней систем, получаем:

$$l_1 \le q \left(\log\left(2^{u_1+1}\right) + \frac{\log\left(t_1 2^{u_1+1}\right)}{\log\log\left(t_1 2^{u_1+1}\right)}(1 + o(1)) + O(t_1) \right) = O(q(u_1 + t_1)).$$

Этап 2. Вычисление системы одночленов

$$x_1^{r_{1k}} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}, \quad k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, t_1 - 1.$$

Система $G\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}, u_1\right)$ для всех $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, 0$ содержит одночлены $x_1^{\left\lfloor b_1 2^{ku_1} \right\rfloor} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}$ и $x_1^{\left\lfloor b_1 2^{ku_1} \right\rfloor + 1} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}$. Но величина $\left\lceil b_1 2^{ku_1} \right\rceil$ равна либо $\left\lfloor b_1 2^{ku_1} \right\rfloor$, либо $\left\lfloor b_1 2^{ku_1} \right\rfloor + 1$, и, следовательно, система $G\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}, u_1\right)$ содержит одночлены $x_1^{r_{1k}} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}$ при $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, 0$.

Вычислим одночлены $x_1^{r_{1k}} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}$ при $k = 1, 2, \ldots, t_1 - 1$.

Отметим, что среди элементов множества $G\left(x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_q^{b_q}, u_1\right)$ есть одночлен $x_1^{\lfloor b_1 \rfloor} x_2^{r_{20}} \ldots x_q, r_{q0}$.

Пусть уже вычислен одночлен $x_1^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}$ $(0 \le k \le t_1 - 2)$. Покажем, как тогда можно вычислить одночлен

$$x_1^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} x_2^{r_{2,k+1}} \ldots x_q^{r_{q,k+1}}.$$

Сначала одночлен $x_1^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}$ возведем u_1 раз в квадрат. Получим одночлен

$$\left(x_1^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor} x_2^{r_{2k}} \ldots x_q^{r_{qk}}\right)^{2^{u_1}} = \left(x_1^{\lfloor b_1 2^{ku_1}\rfloor 2^{u_1}} x_2^{r_{2k} 2^{u_1}} \ldots x_q^{r_{qk} 2^{u_1}}\right).$$

Далее, для вычисления одночлена $x_1^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} x_2^{r_{2,k+1}} \ldots x_q^{r_{q,k+1}}$ с использованием степеней, вычисленных на первом этапе, достаточно не более q операций умножения.

Таким образом, для каждого k, $0 \le k \le t_1 - 2$, на вычисление следующего одночлена $x_1^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} x_2^{r_{2,k+1}} \ldots x_q^{r_{q,k+1}}$ с помощью уже вычисленных, требуется не более $u_1 + q$ операций умножения. Еще одна операция умножения может потребоваться для того, чтобы по одночлену $x_1^{\lfloor b_1 2^{(k+1)u_1}\rfloor} x_2^{r_{2,k+1}} \ldots x_q^{r_{q,k+1}}$ получить одночлен $x_1^{r_{2,k+1}} x_2^{r_{2,k+1}} \ldots x_q^{r_{q,k+1}}$. Следовательно,

$$l_2 \le (t_1 - 1)(u_1 + q).$$

Этап 3. Вычисление системы одночленов

$$x_1^{\beta_1(v)} x_2^{\widetilde{\beta}_2(v)} \ldots x_q^{\widetilde{\beta}_q(v)}, \quad v = -(s_2 - 1), -(s_2 - 2), \ldots, t_2 - 1.$$

При вычислении одночлена $x_1^{\beta_1(v)} x_2^{\widetilde{\beta}_2(v)} \ldots x_q^{\widetilde{\beta}_q(v)}$, для каждого v, $v = -(s_2 - 1), -(s_2 - 2), \ldots, t_2 - 1$, воспользуемся равенством

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\widetilde{\beta}_2} \ldots x_q^{\widetilde{\beta}_q} = \prod_{k=-(s_1-1)}^{t_1-1} \left(x_1^{r_{1,k}} x_2^{r_{2,k}} \ldots x_q^{r_{q,k}}\right)^{\rho_k}.$$

Одночлены $x_1^{r_{1,k}} x_2^{r_{2,k}} \ldots x_q^{r_{q,k}}$, $k = -(s_1 - 1), -(s_1 - 2), \ldots, t_1 - 1$, уже вычислены на втором этапе. Поэтому, используя теорему 1 из [1], получаем:

$$l_3 \le (s_2 + t_2 - 1) \times$$
$$\times \left(\log(2^{u_1}) + \frac{\log((s_1 + t_1 - 1)2^{u_1})}{\log\log((s_1 + t_1 - 1)2^{u_1})}(1 + o(1)) + O(s_1 + t_1 - 1)\right) =$$

$$= O\left((s_2+t_2)(u_1+s_1+t_1)\right).$$

Этап 4. Вычисление системы одночленов

$$x_2^{\beta_2(v)-\widetilde{\beta}_2(v)}\ldots x_q^{\beta_q(v)-\widetilde{\beta}_q(v)},\quad v=-(s_2-1),-(s_2-2),\ldots,t_2-1.$$

В силу неравенств $0\le\beta_j(v)-\widetilde{\beta}_j(v)\le 5(s_1+t_1-1)2^{u_1}$, $j=2,\ldots,q$, из теоремы 1 из [1] следует, что для вычисления каждой из $q-1$ систем степеней

$$\left\{x_j^{\beta_j(v)-\widetilde{\beta}_j(v)}\mid v=-(s_2-1),-(s_2-2),\ldots,t_2-1\right\},\quad j=2,\ldots,q,$$

достаточно

$$\log(5(s_1+t_1)2^{u_1})+\frac{\log\left((s_2+t_2)(s_1+t_1)2^{u_1}\right)}{\log\log\left((s_2+t_2)(s_1+t_1)2^{u_1}\right)}(1+o(1))+O(s_2+t_2)$$

операций умножения. Далее для получения нужной системы одночленов достаточно потратить не более $q-1$ операций умножения на каждый из (s_2+t_2-1) одночленов. Таким образом,

$$l_4=O\left(q(u_1+s_2+t_2+\log(s_1+t_1))\right).$$

Этап 5. Вычисление системы одночленов

$$G_0\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q}\right)^{\alpha},u_2\right).$$

С использованием одночленов, вычисленных на третьем и четвертом этапах, нужную систему можно получить, потратив не более s_2+t_2-1 операций умножения, т. е. $l_5=O(s_2+t_2)$.

Этап 6. Вычисление системы одночленов

$$G\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q}\right)^{\alpha},u_2\right).$$

С использованием одночленов, вычисленных на пятом этапе, нужную систему можно получить, потратив не более $3^q(s_2+t_2-1)$ операций умножения, т. е. $l_6=O\left(3^q(s_2+t_2)\right)$.

Таким образом, можно построить схему S, на вход которой подаются переменные $x_1,x_2,\ldots,x_q$ и множество одночленов $G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q},u_1\right)$, реализующую систему одночленов $G\left(x_1^{\alpha b_1} x_2^{\alpha b_2} \ldots x_q^{\alpha b_q}, u_2\right)$, причем величину $l(S)$ можно оценить так:

$$
\begin{aligned}
l(S) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 \le \\
&\le u_1 t_1 + O\left((s_2+t_2)(u_1+s_1+t_1)\right) + \\
&+ O\left(q(u_1+t_1)\right) + O\left(q\log(s_1+t_1)\right) + O\left(3^q(s_2+t_2)\right).
\end{aligned}
$$

Тогда, в силу неравенств

$$2^{(t_1-1)u_1} \le \alpha, \quad 2^{(s_1+t_1-1)u_1} \le \alpha b_1, \quad 2^{(s_2+t_2-1)u_2} \le \alpha b_1$$

справедливо соотношение

$$
\begin{aligned}
l(S) = \log\alpha + O\left(\frac{\log(\alpha b_1)}{u_2}\left(u_1 + \frac{\log(\alpha b_1)}{u_1}\right)\right) + \\
+ O\left(q\left(u_1 + \frac{\log\alpha}{u_1}\right)\right) + O\left(q\log\left(\frac{\log(\alpha b_1)}{u_1}\right)\right) + O\left(3^q\left(\frac{\log(\alpha b_1)}{u_2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Теперь, подставив значения параметров u_1 и u_2 и используя неравенства $\alpha b_1 \le a$, $\alpha \le a$ и $q \le \frac{1}{2d}\log\log\log a$, получаем:

$$l(S) = \log\alpha + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).$$

Для завершения доказательства осталось учесть справедливость при $\alpha \ge 1$ равенства $\lambda(x^\alpha) = \lceil\log\alpha\rceil$. Лемма 5 доказана.

Сформулируем для вычислений во второй и третьей моделях утверждения, аналогичные лемме 5.

Лемма 6. *Пусть натуральные параметры* q, c, d, u_1, u_2 *и рациональные параметры* $a, \alpha, b_1, b_2, \ldots, b_q$ *удовлетворяют условиям*

$$a \ge |\alpha| > 0, \quad |b_1| \ge |b_2| \ge \ldots \ge |b_q| \ge 0, \quad |b_1| > 0, \quad a \ge |\alpha b_1|, \quad c \le d-3,$$

$$q \le \frac{1}{2d}\log\log\log a,$$

$$u_1 = \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil\right)^{c-1},$$

$$u_2 = \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil\right)^{c}.$$

Тогда для вычисления во второй модели по множеству функций $G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q}, u_1\right)$ *и прееременным* $x_1, x_2, \ldots, x_q$ *системы функций* $G\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q}\right)^{\alpha}, u_2\right)$ *можно построить схему* S*, сложность которой при условии* $a \to \infty$ *удовлетворяет соотношениям*

$$l_2(S) = \log|\alpha| + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right) = \lambda_2\left(x^{\alpha}\right) + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).$$

Лемма 7. *Пусть натуральные параметры* q, c, d, u_1, u_2 *и рациональные параметры* $a, \alpha, b_1, b_2, \ldots, b_q$ *удовлетворяют условиям*

$$a \geq \alpha > 0, \quad |b_1| \geq |b_2| \geq \ldots \geq |b_q| \geq 0, \quad |b_1| > 0, \quad a \geq \alpha|b_1|, \quad c \leq d-3,$$
$$q \leq \frac{1}{2d}\log\log\log a,$$

$$u_1 = \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil\right)^{c-1},$$
$$u_2 = \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left(\left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil\right)^{c}.$$

Тогда для вычисления в третьей модели по множеству функций

$$G\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q}, u_1\right) \cup \left\{x_1, x_2, \ldots, x_q, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_q^{-1}\right\}$$

системы функций $G\left(\left(x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_q^{b_q}\right)^{\alpha}, u_2\right)$ *можно построить схему* S*, сложность которой при условии* $a \to \infty$ *удовлетворяет соотношениям*

$$l_F(S) = \log\alpha + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right) = \lambda_F\left(x^{\alpha}\right) + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right).$$

Доказательства лемм 6 и 7 получаются небольшой модификацией доказательства леммы 5.

Теорема 2. *Пусть последовательность целочисленных матриц* $A(n) = (a_{ij}(n))$ *размера* $p(n) \times q(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющая при* $n \to \infty$ *условию*

$$\max_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)| \to \infty,$$

вычисляется в одной из трех моделей обобщенными схемами $\widehat{S}(n)$, состоящими из $k(n)$ простейших подсхем, причем выполняются неравенства

$$k(n) \le \left(\log\log\log \max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)|\right)^{1/2},$$

$$q(n) \le \frac{1}{8}\left(\log\log\log \max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)|\right)^{1/2}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$l^*\left(A(n)\right) \le \lambda^*\left(\widehat{S}(n)\right) + o\left(\frac{\log \max\limits_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)|}{\log\log\log \max\limits_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)|}\right),$$

где под мерами сложности l^* и λ^* в зависимости от выбранной вычислительной модели понимаются либо l и λ, либо l_2 и λ_2, либо l_F и λ_F.

Доказательство. Пусть обобщенная схема $\widehat{S}$, вычисляющая (в одной из трех моделей) целочисленную матрицу A, состоит из простейших подсхем $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \ldots, \widehat{S}_k$. Без ограничения общности будем считать, что каждый выход обобщенной схемы $\widehat{S}$ является выходом одной из подсхем $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \ldots, \widehat{S}_k$. Также будем полагать, что эти подсхемы занумерованы таким образом, чтобы ни у какой подсхемы выход не подавался на вход подсхемы с меньшим номером. Положим

$$a = \max_{a_{ij}\in A} |a_{ij}|.$$

Пусть при $i = 1, 2, \ldots, k$ на выходе подсхемы $\widehat{S}_i$ обобщенной схемы $\widehat{S}$ реализуется функция $f_i = x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \ldots x_q^{b_{iq}}$. Будем последовательно преобразовывать обобщенные схемы $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \ldots, \widehat{S}_k$ в обычные схемы $S_1, S_2, \ldots, S_k$ таким образом, чтобы на выходах подсхемы S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, реализовывалась система функций

$$G\left(x_1^{b_{i1}}, x_2^{b_{i2}}, \ldots x_q^{b_{iq}}, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil^{t_i}\right),$$

где $d = k + 3$, а натуральные параметры t_i, удовлетворяющие условию $t_i \le k$ (и, следовательно, условию $t_i \le d-3$), определим позже. Заметим, что при таком определении параметра d справедливы соотношения

$$q \le \frac{1}{8}\left(\log\log\log a\right)^{1/2} \le \frac{1}{8}\,\frac{\log\log\log a}{k} =$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{\log\log\log a}{d-3} \le \frac{1}{2d}\log\log\log a,$$

тем самым выполняется одно из условий леммы 5, 6 или 7.

Отметим также, что произвольный вход обобщенной схемы $\widehat{S}$, которому приписан символ x_s^ε (здесь либо $\varepsilon = 1$, либо $\varepsilon = -1$), можно рассматривать как тривиальную (не содержащую функциональных элементов) подсхему, на единственном выходе которой реализована система функций $G_0\left(x_s^\varepsilon, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil \left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil^0\right) = \{x_s^\varepsilon\}$, которую можно расширить до системы $G\left(x_s^\varepsilon, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil \left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil^0\right)$, потратив $O\left(3^q\right)$ функциональных элементов.

Итак, пусть обобщенные схемы $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \ldots, \widehat{S}_{i-1}$ уже преобразованы в обычные схемы $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$.

Если обобщенная схема $\widehat{S}_i$ состоит из одного двухвходового элемента, на входы которого подаются выходы подсхем $\widehat{S}_{j_1}$ и $\widehat{S}_{j_2}$, реализующих функции f_{j_1} и f_{j_2}, то подсхема S_i будет иметь следующий вид: входами подсхемы S_i будут все входы исходной схемы $\widehat{S}$ и все выходы схем S_{j_1} и S_{j_2}, на которых реализованы, соответственно, системы функций

$$G\left(f_{j_1}, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil \left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil^{t_{j_1}}\right),$$
$$G\left(f_{j_2}, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil \left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil^{t_{j_2}}\right);$$

на выходах подсхемы S_i будет реализована система функций

$$G\left(f_{j_1} * f_{j_2}, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a}\right\rceil \left\lceil(\log\log a)^{1/d}\right\rceil^{\max\{t_{j_1}, t_{j_2}\}}\right),$$

где под символом $*$ понимается операция (умножение или деление), соответствующая единственному функциональному элементу схемы $\widehat{S}_i$. В этом случае полагаем $t_i = \max\{t_{j_1}, t_{j_2}\}$.

Из замечания к леммам 2, 3 и 4 следует, что такую подсхему S_i можно построить, используя

$$O\left(3^q\left(\log\log a\right)^{1-(t_i/d)}\right) = O\left(\log\log a\right)$$

функциональных элементов.

Если обобщенная схема $\widehat{S}_i$ имеет один вход, на который подается функция f_j, реализованная на выходе некоторой обобщенной схемы $\widehat{S}_j$

(при этом выполняется условие $j < i$), и один выход, на котором вычисляется функция f_i, удовлетворяющая при некотором рациональном r равенству $f_i = (f_j)^r$, то подсхема S_i будет иметь следующий вид: входами подсхемы S_i будут все входы схемы $\widehat{S}$ и все выходы схемы S_j, на которых реализована система функций

$$G_0\left(f_j, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil^{t_j}\right);$$

на выходах подсхемы S_i будет реализована система функций

$$G_0\left(f_i, \left\lceil \frac{\log a}{\log\log a} \right\rceil \left\lceil (\log\log a)^{1/d} \right\rceil^{\max\{t_j+1\}}\right).$$

В этом случае полагаем $t_i = t_j + 1$.

В зависимости от используемой вычислительной модели из леммы 5, 6 или 7 следует, что такую подсхему S_i можно построить, используя $\log r + O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right)$ функциональных элементов. Заметим, что в силу очевидных при $r \neq 1$ неравенств

$$\begin{aligned} \lambda(x^r) &\geq \lceil \log \max\{|r|, 2\} \rceil, \\ \lambda_2(x^r) &\geq \lceil \log \max\{|r|, 2\} \rceil, \\ \lambda_F(x^r) &\geq \lceil \log \max\{|r|, 2\} \rceil \end{aligned}$$

в исходной обобщенной схеме $\widehat{S}_i$ не менее $\log \max\{|r|, 2\}$ элементов. Следовательно, при перестроении обобщенной схемы $\widehat{S}_i$ в обычную схему S_i в этом случае будет использовано дополнительно не более $O\left(\frac{\log a}{(\log\log a)^{1/d}}\right)$ функциональных элементов.

Закончив процесс перестроения обобщенных схем $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \ldots, \widehat{S}_k$, получим обычную схему S, состоящую из построенных подсхем $S_1, S_2, \ldots, S_k$, которая среди прочих вычисляет функции, заданные исходной целочисленной матрицей A.

Отметим, что действительно неравенства $t_i \leq k$, $i = 1, 2, \ldots, k$, выполняются.

При описанном перестроении число функциональных элементов возросло не более, чем на

$$O\left(q3^q + k\left(\log\log a + \frac{\log a}{(\log\log a)^{1/(k+1)}}\right)\right) = o\left(\frac{\log a}{\log\log\log a}\right).$$

Теорема 2 доказана.

В силу доказанной универсальной нижней оценки (теорема 1) и очевидного неравенства $a \leq D(A)$ получается, что перестроение из доказательства теоремы 2 происходит без асимптотического увеличения сложности.

Завершая обсуждение технической составляющей доказательства верхних оценок следует отметить, что при перестроении обобщенных схем в обычные при всей прозрачности общей идеи приходится преодолевать некоторые трудности, часть из которых здесь осталась за кадром. Кроме того стоит отметить, что в теореме 2 можно значительно ослабить условия и несколько понизить порядок остаточного члена $(o(\log D(A)/\log\log\log D(A))$ — числа дополнительных функциональных элементов), однако добиться того, чтобы остаточный член имел порядок $\log D(A)/\log\log D(A)$ (забегая несколько вперед — именно такой порядок остаточного члена получается при непосредственном доказательстве верхних оценок в наиболее простых случаях) при таком подходе невозможно.

Теперь перейдем к доказательству верхних оценок, основанных на построении обобщенных схем описанного выше вида — с ограничениями на сложность и структуру, — в некоторых частных случаях.

Начнем с оценки сложности реализации целочисленных матриц размера 2×2 в первой вычислительной модели.

Лемма 8. *Найдется такая константа c, что для произвольной матрицы A размера 2×2 с рациональными неотрицательными элементами можно построить вычисляющую ее в первой модели обобщенную схему S, удовлетворяющую условию*

$$\lambda_2(S) \leq \log D(A) + c$$

и состоящую не более, чем из 8 простейших подсхем.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $a_{11} = \max\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}$. Положим

$$a'_{22} = a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}}.$$

Строение обобщенной схемы S, вычисляющей систему функций $\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\}$, будет зависеть от значения величины a'_{22}.

Случай 1. Пусть выполняется неравенство $a'_{22} < 1$.

Схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $a_{21} \neq 0$), S_2 (при $a'_{22} \neq 0$), S_3 (при $a'_{22} \neq 0$), S_4 (при $a_{22} \neq 0$), S_5 (при $a_{21}a_{22} \neq 0$), S_6 (при $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$), S_7 (при $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$), и S_8.

Подсхема S_1 при $a_{21} \neq 0$ возводит переменную x_1 в степень a_{21}.

Подсхема S_2 при $a'_{22} \neq 0$ возводит переменную x_2 в степень a'_{22}.

Подсхема S_3, при $a'_{22} \neq 0$ состоящая из одного элемента умножения, по функциям $x_1^{a_{21}}$ и $x_2^{a'_{22}}$ вычисляет функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a'_{22}}$.

Подсхема S_4 при $a_{22} \neq 0$ возводит переменную x_2 в степень $a_{22} - a'_{22}$ (величина $a_{22} - a'_{22}$ положительна, поскольку $a_{22} \geq 1$, $a'_{22} < 1$).

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, при $a_{21}a_{22} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$ по функциям $x_1^{a_{21}} x_2^{a'_{22}}$ и $x_2^{a_{22}-a'_{22}}$ вычисляет функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}}$, при $a_{21}a_{22} \neq 0$, $a'_{22} = 0$ по функциям $x_1^{a_{21}}$ и $x_2^{a_{22}-a'_{22}}$ также вычисляет функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}}$. Отметим, что эта функция уже вычислена при $a_{21} = 0$ на выходе подсхемы S_4, а при $a_{22} = 0$ — на выходе подсхемы S_1.

Подсхема S_6 при $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$ возводит переменную x_1 в степень a_{11}/a_{12}.

Подсхема S_7,при $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$ состоящая из одного элемента умножения, по функции $x_1^{a_{11}/a_{12}}$ и переменной x_2 вычисляет функцию $x_1^{a_{11}/a_{12}} x_2$.

Подсхема S_8 при $a'_{22} \neq 0$ возводит функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a'_{22}}$ в степень a_{11}/a_{21}; при $a_{12} \neq 0$, $a_{21} = 0$ возводит функцию $x_1^{a_{11}/a_{12}} x_2$ в степень a_{12}; при $a_{12} = 0$, $a_{21} \neq 0$ возводит функцию $x_1^{a_{21}}$ в степень a_{11}/a_{21}; при $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$ возводит переменную x_1 в степень a_{11}. На выходе подсхемы S_8 вычисляется функция $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}}$.

Полагая, что обобщенные схемы S_1, S_2, S_4, S_6 и S_8 минимальны, имеем:

$$\lambda(S) = \log a_{11} + \log \max\{a'_{22} - a_{22}, 1\} + O(1).$$

С л у ч а й 2. Пусть выполняются неравенства $a_{22} > a'_{22} \geq 1$.

В этом случае также имеют место соотношения $a_{12} \geq 1$ и $a_{21} \geq 1$.

Схема S будет состоять из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 и S_6.

Подсхема S_1 возводит переменную x_1 в степень a_{11}/a_{12}.

Подсхема S_2, состоящая из одного элемента умножения, по функции $x_1^{a_{11}/a_{12}}$ и переменной x_2 вычисляет функцию $x_1^{a_{11}/a_{12}} x_2$.

Подсхема S_3 возводит функцию $x_1^{a_{11}/a_{12}} x_2$ в степень a'_{22}, тем самым вычисляя функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a'_{22}}$.

Подсхема S_4 возводит переменную x_2 в степень $a_{22} - a'_{22}$.

Подсхема S_5, состоящая из одного элемента умножения, по функциям $x_1^{a_{21}} x_2^{a'_{22}}$ и $x_2^{a_{22}-a'_{22}}$ вычисляет функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}}$.

Подсхема S_6 возводит функцию $x_1^{a_{21}} x_2^{a'_{22}}$ в степень a_{11}/a_{21}, тем самым вычисляя функцию $x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}}$.

Полагая, что обобщенные схемы S_1, S_3, S_4 и S_6 минимальны, и учитывая условия рассматриваемого случая, имеем:

$$\lambda(S) = \log\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right) + \log a'_{22} + \log\max\{a_{22} - a'_{22}, 1\} + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1) = \\ + \log a_{11} + \log\max\{a_{22} - a'_{22}, 1\} + O(1).$$

С л у ч а й 3. Пусть выполняется неравенство $a'_{22} \geq \max\{a_{22}, 1\}$.

Заметим, что тогда имеют место соотношения $a_{12} \geq 1$ и $a_{21} \geq 1$. Схема S будет состоять из подсхем S_1 (при $a_{22} \neq 0$), S_2 (при $a_{22} \neq 0$), S_3, S_4 (при $a_{22} < a'_{22}$), S_5 (при $a_{22} < a'_{22}$) и S_6.

Подсхема S_1 при $a_{22} \neq 0$ возводит переменную x_1 в степень a_{21}/a_{22}.

Подсхема S_2, при $a_{22} \neq 0$ состоящая из одного элемента умножения, по функции $x_1^{a_{21}/a_{22}}$ и переменной x_2 вычисляет функцию $x_1^{a_{21}/a_{22}}x_2$.

Подсхема S_3 при $a_{22} \neq 0$ возводит функцию $x_1^{a_{21}/a_{22}}x_2$ в степень a_{22}, а при $a_{22} = 0$ возводит переменную x_1 в степень a_{21}; в обоих случаях на выходе подсхемы S_3 вычисляется функция $x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}$.

Подсхема S_4 при $a_{22} < a'_{22}$ возводит переменную x_2 в степень $a'_{22} - a_{22}$.

Подсхема S_5, при $a_{22} < a'_{22}$ состоящая из одного элемента умножения, по функциям $x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}$ и $x_2^{a'_{22}-a_{22}}$ вычисляет функцию $x_1^{a_{21}}x_2^{a'_{22}}$.

Подсхема S_6 возводит функцию $x_1^{a_{21}}x_2^{a'_{22}}$, реализованную либо подсхемой S_3 (при $a_{22} = a'_{22}$), либо подсхемой S_5 (при $a_{22} < a'_{22}$), в степень a_{11}/a_{21}, тем самым вычисляя функцию $x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}$.

При $a_{22} \neq 0$, полагая, что обобщенные схемы S_1, S_3, S_4 и S_6 минимальны, и используя неравенство $a_{21} \geq a_{22}$, вытекающее из соотношения $a'_{22} \geq a_{22}$, имеем:

$$\lambda(S) = \log\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right) + \log a_{22} + \log\max\{a'_{22} - a_{22}, 1\} + \log\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) + O(1) = \\ = \log a_{11} + \log\max\{a'_{22} - a_{22}, 1\} + O(1).$$

Если условие $a_{22} \neq 0$ не выполняется, то такая же окончательная оценка (с меньшим числом слагаемых в промежуточном выражении) получается аналогично.

Таким образом, в любом случае для вычисления системы функций $\{x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}, x_1^{a_{21}}x_2^{a_{22}}\}$ можно построить обобщенную схему S, удовлетворяющую условию

$$\lambda(S) = \log a_{11} + \log\max\{|a'_{22} - a_{22}|, 1\} + O(1) =$$

$$= \log\max\{|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|, a_{11}\} + O(1)$$

и состоящую не более, чем из 8 простейших подсхем.

Лемма 8 доказана.

Теперь полученную обобщенную схему в соответствии с теоремой 2 можно перестроить в обычную без асимптотического увеличения сложности. Этот факт вместе с доказанной общей нижней оценкой (теорема 1) устанавливает для первой модели асимптотику роста в случае матриц размера 2×2.

Теорема 3. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера 2×2 с неотрицательными элементами и без нулевых строк, удовлетворяющей при $n \to \infty$ условию*

$$\max_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)| \to \infty,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$l(A(n)) \sim \log D(A(n)).$$

Прямое доказательство верхней оценки с непосредственным предъявлением способа вычисления (и лучшей оценкой остаточного члена) дано в [11]. В работе [13] содержится следующее обобщение этого результата на случаи матриц рамеров $p \times 2$ и $2 \times q$.

Теорема 4. *Для произвольных последовательностей целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ и $B(n) = (b_{ij}(n))$ размеров, соответственно, $2 \times q(n)$ и $p(n) \times 2$ с неотрицательными элементами и без нулевых строк, удовлетворяющих при $n \to \infty$ условиям*

$$\max_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)| \to \infty, \qquad \max_{b_{ij} \in B(n)} |b_{ij}(n)| \to \infty,$$

справедливы оценки

$$\log D(A(n)) \le l\left(A(n)\right) \le \log D(A(n)) + O\left(\frac{p \log \max\limits_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)|}{\log\log \max\limits_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)|}\right),$$

$$\log D(B(n)) \le l\left(B(n)\right) \le \log D(B(n)) + O\left(\frac{q \log \max\limits_{b_{ij} \in B(n)} |b_{ij}(n)|}{\log\log \max\limits_{b_{ij} \in B(n)} |b_{ij}(n)|}\right).$$

Тем самым при условии $p = o(\log\log\max a_{ij})$ (или, соответственно, $q = o(\log\log\max b_{ij})$) для первой вычислительной модели установлена асимптотика роста сложности матриц размера $p \times 2$ и $2 \times q$.

Теперь временно перейдем ко второй модели вычислений, т. е. к модели, допускающей операцию деления. Этот переход связан с тем, что для данной модели, в отличие от первой и, тем более, от третьей, описанный выше подход приводит к асимптотически точному решению задачи в случае любых фиксированных значений p и q.

Лемма 9. *Для произвольной матрицы A размера $p \times q$ с рациональными элементами можно построить вычисляющую ее во второй модели обобщенную схему S, удовлетворяющую условию*

$$\lambda_2(S) \le \log D(A) + 3(p+q)^2$$

и состоящую не более, чем из $2(p+q)^2$ простейших подсхем.

Доказательство. Будем вести индукцию по величине $\min\{p, q\}$.

База индукции. Пусть выполняется условие $\min\{p, q\} = 1$.

Рассмотрим случай $p = 1$, т. е. случай вычисления функции $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$. Без ограничения общности будем считать, что $|a_1| \ge |a_2| \ge \dots \ge |a_q| > 0$. Предварительно для всех j, $j = 1, 2, \dots, q$, для которых выполняется условие $a_j < 0$, построим подсхему (состоящую из двух элементов деления), возводящую переменную x_j в степень -1. Положим $y_j = x_j^{\operatorname{sgn} a_j}$, $j = 1, 2, \dots, q$. Теперь построим обобщенную схему, вычисляющую по функциям $y_1, y_2, \dots, y_q$ функцию $y_1^{|a_1|} y_2^{|a_2|} \dots y_q^{|a_q|} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$. Сначала переменную y_1 возведем в степень $|a_1/a_2|$, а полученную функцию домножим на переменную y_2, тем самым вычисляя функцию $y_1^{|a_1/a_2|} y_2$, затем эту функцию возведем в степень $|a_2/a_3|$, а полученную функцию домножим на переменную y_3, тем самым вычисляя функцию $y_1^{|a_1/a_3|} y_2^{|a_2/a_3|} y_3$, и т. д. На предпоследнем шаге вычислим функцию $y_1^{|a_1/a_q|} y_2^{|a_2/a_q|} \dots y_{q-1}^{|a_{q-1}/a_q|} y_q$, а на последнем, возведя эту функцию в степень $|a_q|$, получим функцию $y_1^{|a_1|} y_2^{|a_2|} \dots y_q^{|a_q|}$.

Таким образом построенная обобщенная схема S вычисляет функцию $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_q^{a_q}$, состоит не более чем из $3q-1$ простейших подсхем и удовлетворяет соотношению (здесь предполагаем, что все подсхемы возведения в степень минимальны)

$$\lambda_2(S) \le 2q + \left\lceil \log\left|\frac{a_1}{a_2}\right| \right\rceil + \left\lceil \log\left|\frac{a_2}{a_3}\right| \right\rceil + \dots + \left\lceil \log\left|\frac{a_{q-1}}{a_q}\right| \right\rceil + \lceil \log|a_q| \rceil + q + 1,$$

из которого следует, что $\lambda_2(S) \le \log|a_1| + 4q$.

Теперь перейдем к случаю $q = 1$, т. е. к случаю вычисления системы степеней $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}$. Снова без ограничения общности будем считать, что $|a_1| \ge |a_2| \ge \ldots \ge |a_p| > 0$. Построим обобщенную схему, вычисляющую систему степеней $x^{|a_1|}, x^{|a_2|}, \ldots, x^{|a_p|}$. Эта схема будет состоять из цепочки подсхем, каждая из которых возводит подаваемую на вход подсхемы функцию, соответственно, в степени $|a_q|$, $|a_{q-1}/a_q|$, …, $|a_2/a_1|$, а на вход первой из них подается переменная x.

Далее для всех i, $i = 1, 2, \ldots, p$, для которых выполняется условие $a_i < 0$, построим подсхему (состоящую из двух элементов деления), возводящую функцию $x^{|a_i|}$ в степень -1.

Таким образом построенная обобщенная схема S вычисляет систему степеней $x^{a_1}, x^{a_2}, \ldots, x^{a_p}$, состоит не более чем из $2p$ простейших подсхем и удовлетворяет соотношению (здесь снова предполагаем, что все подсхемы возведения в степень минимальны)

$$\lambda_2(S) \le \lceil \log|a_p| \rceil + \left\lceil \log\left|\frac{a_{p-1}}{a_p}\right| \right\rceil + \ldots + \left\lceil \log\left|\frac{a_1}{a_2}\right| \right\rceil + 2p,$$

из которого следует, что $\lambda_2(S) \le \log|a_1| + 3p$.

Для завершения доказательства базы индукции осталось учесть равенство $D(A) = a_1$.

Шаг индукции. Без ограничения общности будем считать, что имеет место равенство

$$|a_{11}| = \max|a_{ij}|.$$

При $|a_{11}| < 1$ утверждение очевидно. Далее будем считать, что $|a_{11}| \ge 1$.

Не изменяя абсолютных значений элементов исходной матрицы A, определим еще одну матрицу размера $p \times q$ с рациональными элементами — матрицу $B = (b_{ij})$ — следующим образом:

$$b_{i1} = a_{i1} \operatorname{sgn} a_{i1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p;$$

$$b_{ij} = a_{ij} \operatorname{sgn}(a_{i1} a_{11} a_{1j}), \quad i = 2, 3, \ldots, p, \ j = 1, 2, \ldots, q.$$

Отметим, что в матрице B все элементы первого столбца и все элементы первой строки неотрицательны. Кроме того, имеет место равенство $b_{11} = \max|b_{ij}|$.

Матрицу A по матрице B можно восстановить таким образом. Сначала i-ю строку матрицы B, $i = 1, 2, \ldots, p$, домножим на $\operatorname{sgn} a_{i1}$ (это соответствует переходу от функции $x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \ldots x_q^{b_{iq}}$ к функции

$x_1^{-b_{i1}}x_2^{-b_{i2}}\dots x_q^{-b_{iq}} = \left(x_1^{b_{i1}}x_2^{b_{i2}}\dots x_q^{b_{iq}}\right)^{-1}$ в случае, когда выполняется неравенство $a_{i1} < 0$), а затем j-й столбец полученной матрицы, $j = 1, 2, \dots, q$, домножим на величину $\mathrm{sgn}(a_{1j}a_{11})$ (это соответствует замене переменной x_j на x_j^{-1} во всех функциях в случае, когда выполняется неравенство $a_{1j}a_{11} < 0$). Поэтому, в частности, имеет место равенство

$$D(A) = D(B).$$

Таким образом, если во второй вычислительной модели построена обобщенная схема S, реализующая матрицу B, то на ее основе построить обобщенную схему S', вычисляющую матрицу A, можно следующим образом. Сначала к i-му выходу схемы S, $i = 2, 3, \dots, p$, в случае, если выполняется неравенство $a_{i1} < 0$, присоединим подсхему (состоящую из двух элементов деления), возводящую подаваемую на вход функцию в степень -1, а затем на j-й вход полученной схемы, $j = 1, 2, \dots, q$, в случае, если выполняется неравенство $a_{1j}a_{11} < 0$, вместо переменной x_j подадим выход подсхемы (состоящей из двух элементов деления), возводящей переменную x_j в степень -1. Следовательно, для построения по обобщенной схеме, вычисляющей матрицу B, обобщенной схемы, вычисляющей матрицу A, достаточно к входам и выходам схемы присоединить не более $p+q$ одновходовых обобщеных схем с общим числом элементов не более $2(p+q)$.

Докажем требуемую оценку для матрицы B.

Положим

$$b'_{ij} = b_{i1}\frac{b_{1j}}{b_{11}}, \qquad i = 2, 3, \dots, p, \quad j = 2, 3, \dots, q.$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$0 \le b'_{ij} \le \min(b_{i1}, b_{1j}), \quad i = 2, 3, \dots, p, \quad j = 2, 3, \dots, q.$$

В силу равенств

$$x_1^{b_{i1}}x_2^{b_{i2}}\dots x_q^{b_{iq}} = x_1^{b_{i1}}x_2^{b'_{i2}}\dots x_q^{b'_{iq}}x_2^{b_{i2}-b'_{i2}}x_3^{b_{i3}-b'_{i3}}\dots x_q^{b_{iq}-b'_{iq}}, \quad i = 2, 3, \dots, p,$$

для построения обобщенной схемы S, вычисляющей матрицу B достаточно построить обобщенную схему S_1, вычисляющую систему функций

$$\left\{x_1^{b_{11}}x_2^{b_{12}}\dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}}x_2^{b'_{22}}\dots x_q^{b'_{2q}}, \dots, x_1^{b_{p1}}x_2^{b'_{p2}}\dots x_q^{b'_{pq}}\right\},$$

и обобщенную схему S_2, вычисляющую систему функций

$$\Big\{x_2^{b_{22}-b'_{22}}x_3^{b_{23}-b'_{23}}\dots x_q^{b_{2q}-b'_{2q}}, x_2^{b_{32}-b'_{32}}x_3^{b_{33}-b'_{33}}\dots x_q^{b_{3q}-b'_{3q}}, \dots$$

$$\dots, x_2^{b_{p2}-b'_{p2}}x_3^{b_{p3}-b'_{p3}}\dots x_q^{b_{pq}-b'_{pq}}\Big\},$$

а затем с помощью $p-1$ одноэлементной подсхемы для $i=2,3,\dots,p$ перемножить i-й выход схемы S_1 и $(i-1)$-й выход подсхемы S_2.

Схема S_1, в свою очередь, при наличии среди неотрицательных чисел b_{i1}, $i=2,3,\dots,p$, хотя бы одного отличного от 0 числа будет состоять из двух подсхем S'_1 и S''_1.

Подсхема S'_1 по переменным $x_1,x_2,\dots,x_q$ для некоторого i_0, $1\le i_0\le p$, удовлетворяющего условию $b_{i_01}\ne 0$, вычисляет функцию $x_1^{b_{i_01}}x_2^{b'_{i_02}}\dots x_q^{b'_{i_0q}}$. В силу базы индукции (случай $p=1$) можно считать, что схема S'_1 состоит не более чем из $3q-1$ простейших подсхем и удовлетворяет в силу очевидных неравенств $b_{i_01}\ge b'_{i_0j}$, $j=2,3,\dots,q$, соотношению $\lambda_2(S'_1)\le\log b_{i_01}+4q$.

Подсхема S'_2 возводит функцию $x_1^{b_{i_01}}x_2^{b'_{i_02}}\dots x_q^{b'_{i_0q}}$ в степени b_{i1}/b_{i_01}, $i=1,2,\dots,p$, тем самым вычисляя систему всех отличных от единичной функций из множества

$$\Big\{x_1^{b_{11}}x_2^{b_{12}}\dots x_q^{b_{1q}}, x_1^{b_{21}}x_2^{b'_{22}}\dots x_q^{b'_{2q}},\dots, x_1^{b_{p1}}x_2^{b'_{p2}}\dots x_q^{b'_{pq}}\Big\}.$$

В силу базы индукции (случай $q=1$) можно считать, что схема S'_2 состоит не более чем из $2p$ простейших подсхем и удовлетворяет соотношению $\lambda_2(S'_1)\le\log\left(b_{11}/b_{i_01}\right)+3p$.

Таким образом, можно считать, что обобщенная схема S_1 состоит не более чем из $2p+3q$ простейших подсхем и удовлетворяет условию $\lambda_2(S_1)\le\log b_{11}+3p+4q$.

Переходя к описанию подсхемы S_2, обозначим матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{22}-b'_{22} & b_{23}-b'_{23} & \dots & b_{2q}-b'_{2q}\\ b_{32}-b'_{32} & b_{33}-b'_{33} & \dots & b_{3q}-b'_{3q}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{p2}-b'_{p2} & b_{p3}-b'_{p3} & \dots & b_{pq}-b'_{pq}\end{pmatrix}$$

размера $(p-1)\times(q-1)$ через $\widetilde{B}$. По предположению индукции для системы функций, заданной матрицей B, можно построить вычисляющую эту систему обобщенную схему S_2, состоящую не более, чем из $2(p+q-2)^2$ простейших подсхем и удовлетворяющую соотношению

$$\lambda(S_2)\le\log D\left(\widetilde{B}\right)+3(p+q)^2.$$

Пусть число s и наборы индексов $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и $j_1, j_2, \ldots, j_s$, удовлетворяющие условиям $1 \le s \le \min(p,q) - 1$, $2 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le p$, $2 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_s \le q$, выбраны таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$D\left(\widetilde{B}\right) = \left| \det \begin{pmatrix} b_{i_1,j_1} - b'_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} - b'_{i_1,j_2} & \ldots & b_{i_1,j_s} - b'_{i_1,j_s} \\ b_{i_2,j_1} - b'_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} - b'_{i_2,j_2} & \ldots & b_{i_2,j_s} - b'_{i_2,j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_s,j_1} - b'_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2} - b'_{i_s,j_2} & \ldots & b_{i_s,j_s} - b'_{i_s,j_s} \end{pmatrix} \right|.$$

Обозначим через B_j, $j = 1, j_1, j_2, \ldots, j_s$, вектор-столбец

$$(b_{i_1,j}, b_{i_2,j}, \ldots, b_{i_s,j})^T$$

высоты s. Тогда

$$\det \widetilde{B} = \det \begin{pmatrix} b_{i_1,j_1} - b_{i_1,1}\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}} & b_{i_1,j_2} - b_{i_1,1}\frac{b_{1,j_2}}{b_{11}} & \ldots & b_{i_1,j_s} - b_{i_1,1}\frac{b_{1,j_s}}{b_{11}} \\ b_{i_2,j_1} - b_{i_2,1}\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}} & b_{i_2,j_2} - b_{i_2,1}\frac{b_{1,j_2}}{b_{11}} & \ldots & b_{i_2,j_s} - b_{i_2,1}\frac{b_{1,j_s}}{b_{11}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_s,j_1} - b_{i_s,1}\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}} & b_{i_s,j_2} - b_{i_s,1}\frac{b_{1,j_2}}{b_{11}} & \ldots & b_{i_s,j_s} - b_{i_s,1}\frac{b_{1,j_s}}{b_{11}} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left(B_{j_1} - \frac{b_{1,j_1}}{b_{11}}B_1, B_{j_2} - \frac{b_{1,j_2}}{b_{11}}B_1, \ldots, B_{j_s} - \frac{b_{1,j_s}}{b_{11}}B_1\right) =$$

$$= \det(B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_s}) - \det\left(\frac{b_{1,j_1}}{b_{11}}B_1, B_{j_2}, \ldots, B_{j_s}\right) -$$

$$- \det\left(B_{j_1}, \frac{b_{1,j_2}}{b_{11}}B_1, B_{j_3}, \ldots, B_{j_s}\right) - \ldots - \det\left(B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_{s-1}}, \frac{b_{1,j_s}}{b_{11}}B_1\right) =$$

$$= \frac{1}{b_{11}}\Big(b_{11}\det(B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_s}) - -b_{1,j_1}\det(B_1, B_{j_2}, \ldots, B_{j_s}) +$$

$$+ b_{1,j_2}\det(B_1, B_{j_1}, B_{j_3}, \ldots, B_{j_s}) - \ldots (-1)^s b_{1,j_s}\det\left(B_1, B_{j_1}, \ldots, B_{j_{s-1}}\right)\Big).$$

С другой стороны, используя формулу разложения определителя по первой строке, получаем:

$$\det \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,j_1} & b_{1,j_2} & \ldots & b_{1,j_s} \\ b_{i_1,1} & b_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} & \ldots & b_{i_1,j_s} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} & \ldots & b_{i_2,j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_s,1} & b_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2} & \ldots & b_{i_s,j_s} \end{pmatrix} = b_{11}\det(B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_s}) -$$

$$- b_{1,j_1}\det(B_1, B_{j_2}, \ldots, B_{j_s}) + b_{1,j_2}\det(B_1, B_{j_1}, B_{j_3}, \ldots, B_{j_s}) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^s b_{1,j_s} \det\left(B_1, B_{j_1}, \ldots, B_{j_{s-1}}\right).$$

Следовательно,

$$D\left(\widetilde{B}\right) = \frac{1}{b_{11}} \left| \det \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,j_1} & b_{1,j_2} & \ldots & b_{1,j_s} \\ b_{i_1,1} & b_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} & \ldots & b_{i_1,j_s} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} & \ldots & b_{i_2,j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i_s,1} & b_{i_s,j_1} & b_{i_s,j_2} & \ldots & b_{i_s,j_s} \end{pmatrix} \right| \le \frac{D(B)}{b_{11}} = \frac{D(A)}{b_{11}}.$$

Окончательно имеем: схема S состоит не более чем из $(2p + 3q) + 2(p + q - 2)^2 + (p - 1) + (p + q) \le 2(p + q)^2$ простейших схем, причем справедливы соотношения

$$\lambda_2(S) \le (\log b_{11} + 3p + 4q) + \left(\log\left(\frac{D(A)}{b_{11}}\right) + 3(p + q - 2)^2\right) +$$
$$+ (p - 1) + 2(p + q) \le \log D(A) + 3(p + q)^2.$$

Лемма 9 доказана.

Таким образом, при выполнении условия

$$p + q = o\left((\log\log\log\max|a_{ij}|)^{1/4}\right)$$

полученную обобщенную схему в соответствии с теоремой 2 можно перестроить в обычную без асимптотического увеличения сложности, и следовательно справедлива

Теорема 5. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера $p(n) \times q(n)$, удовлетворяющей при $n \to \infty$ условию*

$$\frac{p(n) + q(n)}{\left(\log\log\log\max_{a_{ij}\in A(n)}|a_{ij}|\right)^{1/4}} \to 0,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$l_2(A(n)) \sim \log D(A(n)).$$

Отметим, что в работе [12] это асимптотическое равенство за счет непосредственного построения обычных схем (без промежуточного построения обобщенных схем) установлено при более слабом условии

$p+q=o\left((\log\log D(A))^{1/2}\right)$ (при этом, разумеется, доказательство верхней оценки технически более сложное). Однако, наиболее важным представляется сам факт, что для любых фиксированных (и даже слаборастущих) значениях размеров задающей систему функций матрицы верхняя оценка асимптотически совпадает с нижней.

Использованную нами для второй вычислительной модели идею построения почти оптимальных обобщенных схем, состоящую в вычислении сначала системы функций, "пропорциональных- функции, содержащей в качестве множителя степень с максимальным по абсолютной величине показателем, а затем — системы функций, "подправляющих- эти функции и состоящей из меньшего, чем исходная вычисляемая система, числа функций от меньшего числа переменных, не удается перенести на случай первой вычислительной модели даже для матриц размера 3×3 (при $p=2$ или $q=2$ сделать это удается — см. леммы 1 и 8 из [15]). И связано это не только с невозможностью вычисления степеней с отрицательными показателями в первой модели, что показывает следующий пример, в котором даже возможность использовать при вычислении функции, обратные к переменным, не приводит к получению асимптотически неулучшаемой верхней оценки при применении описанного выше подхода.

Пусть в моделях, не использующих операцию деления, надо вычислить систему одночленов, заданную матрицей

$$\begin{pmatrix} 2^{k+3} & 2^{k+2} & 2^{k+2} \\ 2^{k+2} & 2^{k+1}+2^{k} & 2^{k+1} \\ 2^{k+1} & 0 & 2^{k} \end{pmatrix}$$

(здесь элементы матрицы подобраны таким образом, чтобы вычисления обобщенными и обычными схемами не отличались).

Если следовать подходу, использовавшемуся для построения обобщенных схем при изучении меры сложности λ_2, то сначала надо реализовать одночлены $x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}}$, $x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}}x_3^{2^{k+1}}$ и $x_1^{2^{k+1}}x_2^{2^{k}}x_3^{2^{k}}$, затем — функции $x_2^{2^k}$ и $x_2^{-2^k}$, после чего перемножить соответствующие результаты вычислений. Этот подход в силу равенств

$$l_F\left(x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}},\ x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}}x_3^{2^{k+1}},\ x_1^{2^{k+1}}x_2^{2^{k}}x_3^{2^{k}}\right)=k+5,$$
$$l_F\left(x_2^{2^k},x_2^{-2^k}\right)=2k$$

(первое из них почти очевидно, а второе будет формально доказано ниже) для величины $l_F\left(x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}},\ x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}+2^k}x_3^{2^{k+1}},\ x_1^{2^{k+1}}x_3^{2^k}\right)$ дает верхнюю оценку $3k+7$.

С другой стороны, для более слабой вычислительной модели, не допускающей использование ни операции деления, ни функций, обратных к переменным, эту систему одночленов можно вычислить с использованием всего $2k+7$ операций умножения, последовательно вычисляя одночлены: $x_1^2x_3$ (используем 2 операции умножения); $x_1^{2^{k+1}}x_3^{2^k}$ (k умножений); $x_1^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+1}}$ (1 умножение); $x_2^{2^k}$ (k умножеий); $x_2^{2^{k+1}}$ (1 умножеие); $x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}}x_3^{2^{k+1}}$ (1 умножение); $x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}+2^k}x_3^{2^{k+1}}$ (1 умножение); $x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}}$ (1 умножение). Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&l_F\left(x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}},\ x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}+2^k}x_3^{2^{k+1}},\ x_1^{2^{k+1}}x_3^{2^k}\right)\le\\
&\qquad\le l\left(x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}},\ x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}+2^k}x_3^{2^{k+1}},\ x_1^{2^{k+1}}x_3^{2^k}\right)\le 2k+7.
\end{aligned}
$$

Эта верхняя оценка уже асимптотически неулучшаема:

$$
\begin{aligned}
&l\left(x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}},\ x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}+2^k}x_3^{2^{k+1}},\ x_1^{2^{k+1}}x_3^{2^k}\right)\ge\\
&\qquad\ge l_F\left(x_1^{2^{k+3}}x_2^{2^{k+2}}x_3^{2^{k+2}},\ x_1^{2^{k+2}}x_2^{2^{k+1}+2^k}x_3^{2^{k+1}},\ x_1^{2^{k+1}}x_3^{2^k}\right)\ge\\
&\ge\log D\begin{pmatrix}2^{k+3} & 2^{k+2} & 2^{k+2}\\ 2^{k+2} & 2^{k+1}+2^k & 2^{k+1}\\ 2^{k+1} & 0 & 2^k\end{pmatrix}\ge\log\left|\det\begin{pmatrix}2^{k+3} & 2^{k+2}\\ 2^{k+1} & 0\end{pmatrix}\right|=2k+3.
\end{aligned}
$$

Этот пример в какой-то степени иллюстрирует трудности, возникающие при попытке доказывать в первой вычислительной модели верхние оценки, асимптотически совпадающие с установленной нижней оценкой. В работе [15] эти трудности преодолены в случае вычисления систем из трех одночленов от трех переменных. С помощью уже описанного перехода к обобщенным схемам и рассмотрения большого числа различных случаев соотношения параметров систем в [15] установлена асимптотика роста сложности матриц размера 3×3 в первой вычислительной модели.

Теорема 6. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n)=(a_{ij}(n))$ размера 3×3 с неотрицательными элементами и без нулевых строк, удовлетворяющей при $n\to\infty$ условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)}|a_{ij}(n)|\to\infty,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$l(A(n)) \sim \log D(A(n)).$$

По-видимому, асимптотическое равенство $l(A) \sim \log D(A)$ справедливо для любых матриц (с неотрицательными элементами и без нулевых строк) фиксированного размера $p \times q$, однако при $p \geq 3$, $q \geq 3$, $pq \geq 12$ это остается только гипотезой.

Таким образом, для мер сложности l и l_2 все известные асимптотически точные оценки сложности матриц A фиксированного размера $p \times q$ имеют вид $\log D(A) + o(\log D(A))$. При переходе к мере сложности l_F, как уже отмечалось, ситуация меняется.

Далее, для матрицы A размера $p \times q$ определим величину $T(A)$ равенством

$$T(A) = \max_{j\colon 1 \leq j \leq q} \{\max\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}, 0\} \left|\min\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}, 0\}\right|\}.$$

Таким образом, $T(A)$ — это максимум абсолютных величин попарных произведений элементов матрицы A, где максимум берется по всем парам элементов, удовлетворяющих двум условиям — эти элементы должны находиться в одном столбце и иметь разные знаки.

Лемма 10. *Для любой целочисленной матрицы A справедливо неравенство*

$$l_F(A) \geq \log \max\{T(A), 1\}.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $T(A) = |a_{11}a_{21}|$, причем $a_{11} \leq 1$, $a_{21} \leq -1$. Рассмотрим схему S со входами $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1} \ldots, x_q, x_q^{-1}$, вычисляющую матрицу A и удовлетворяющую условию $l_F(S) = l_F(A)$. Преобразуем схему S в схему S' следующим образом. Входу, которому был приписан символ x_1, припишем символ новой переменной u, а входу которому был приписан символ x_1^{-1}, — символ новой переменной v. Тогда в вершинах, соответствующих в исходной схеме первым двум строкам матрицы A, будут вычисляться функции вида $u^{a_{11}+\alpha_1} v^{\alpha_1} x_2^{a_12} \ldots x_q^{a_1q}$ и $u^{\alpha_2} v^{|a_{21}|+\alpha_2} x_2^{a_22} \ldots x_q^{a_2q}$, где α_1 и α_2 — некоторые неотрицательные целые числа. Поэтому, применяя лемму 1, имеем:

$$l_F(A) = l_F(S) = l_F(S') \geq \log \left|\det \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & |a_{21}| + \alpha_2 \end{pmatrix}\right| \geq$$
$$\geq \log |a_{11}a_{21}| = \log T(A).$$

Лемма 10 доказана.

Отметим, что оценка из леммы 10 может вдвое превосходить оценку из леммы 1 — например, для матрицы $A = \left(2^k, -2^k\right)^T$. В терминах величин $D(A)$ и $T(A)$ уже можно сформулировать утверждение об асимптотическом росте F-сложности целочисленных матриц, состоящих из двух строк, предварительно доказав техническую лемму.

Лемма 11. *Пусть в целочисленной матрице $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ для элемента a_{ij} найдется индекс s, $1 \le s \le p$, такой, что выполняется условие $a_{ij}a_{sj} \le 0$. Тогда для любого t, $1 \le t \le q$, справедливо неравенство*

$$\max\{|a_{ij}a_{st}|, |a_{it}a_{sj}|\} \le 2\max\{D(A), T(A)\}.$$

Доказательство. При выполнении условия $a_{ij}a_{st}a_{it}a_{sj} \le 0$, справедливы соотношения

$$\max\{|a_{ij}a_{st}|, |a_{it}a_{sj}|\} \le |a_{ij}a_{st}| + |a_{it}a_{sj}| = |a_{ij}a_{st} - a_{it}a_{sj}| \le D(A).$$

Пусть теперь выполняется неравенство $a_{ij}a_{st}a_{it}a_{sj} > 0$. Без ограничения общности будем считать, что

$$|a_{ij}a_{st}| \ge |a_{it}a_{sj}|.$$

Тогда при $|a_{ij}a_{st}| \ge 2|a_{it}a_{sj}|$ верны соотношения

$$|a_{it}a_{sj}| \le |a_{ij}a_{st}| \le 2|a_{it}a_{sj} - a_{ij}a_{st}| \le 2D(A).$$

Если же выполняется условие $|a_{ij}a_{st}| < 2|a_{it}a_{sj}|$, то справедливо хотя бы одно из неравенств: $|a_{ij}| \le 2|a_{it}|$ или $|a_{st}| \le 2|a_{sj}|$. Тогда при выполнении первого неравенства имеем:

$$|a_{it}a_{sj}| \le |a_{ij}a_{st}| \le 2|a_{it}a_{st}| \le 2T(A),$$

а при выполнении второго — получаем:

$$|a_{it}a_{sj}| \le |a_{ij}a_{st}| \le 2|a_{ij}a_{sj}| \le 2T(A).$$

Лемма 11 доказана.

Теорема 7. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n) = (a_{ij}(n))$ размера $2 \times q(n)$, удовлетворяющей при $n \to \infty$ условию*

$$\frac{q(n)}{\log\log \max\limits_{a_{ij} \in A(n)} |a_{ij}(n)|} \to 0,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$l_F(A(n)) \sim \log\max\{D(A(n)), T(A(n))\}.$$

Доказательство. Нижняя оценка

$$\log D(A(n)) \geq \log \max\{D(A(n)), T(A(n))\}$$

непосредственно следует из лемм 1 и 10.

Верхняя оценка. В силу очевидного соотношения

$$\log D(A) \geq \log \max |a_{ij}|$$

достаточно доказать справедливость неравенства

$$l(A(n)) \leq \log \max\{D(A(n)), T(A(n))\} + O\left(\frac{q(n) \log \max\{a_{ij} \mid a_{ij} \in A(n)\}}{\log \log \max\{a_{ij} \mid a_{ij} \in A(n)\}}\right).$$

По целочисленной матрице $A = A(n)$ размера $2 \times q$ определим целочисленную матрицу B с неотрицательными элементами, последовательно преобразуя столбцы исходной матрицы следующим образом.

1. Если в столбце $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$ элементы имеют один знак, т. е. $a_{1i}a_{2i} \geq 0$, то включаем в матрицу B вместо этого столбца столбец $\begin{pmatrix} |a_{1i}| \\ |a_{2i}| \end{pmatrix}$.

2. Если в столбце $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$ элементы имеют разные знаки, т. е. $a_{1i}a_{2i} < 0$, то включаем в матрицу B вместо этого столбца матрицу $\begin{pmatrix} |a_{1i}| & 0 \\ 0 & |a_{2i}| \end{pmatrix}$.

Таким образом, B — целочисленная матрица с неотрицательными элементами размера $2 \times r$, где r удовлетворяет условию $q \leq r \leq 2q$.

В силу определения матрицы B имеем:

$$\begin{aligned} l_F(A) = l_F(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \ldots x_q^{a_{1q}},\ x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \ldots x_q^{a_{2q}}) \leq \\ \leq l(z_1^{b_{11}} z_2^{b_{12}} \ldots z_r^{b_{1r}},\ z_1^{b_{21}} z_2^{b_{22}} \ldots z_r^{b_{2r}}). \end{aligned}$$

Далее, применяя теорему 4 (или следствие к теореме 2 из [13]), получаем:

$$\begin{aligned} l(z_1^{b_{11}} z_2^{b_{12}} \ldots z_r^{b_{1r}},\ z_1^{b_{21}} z_2^{b_{22}} \ldots z_r^{b_{2r}}) \leq \log D(B) + O\left(r \frac{\log \max b_{ij}}{\log \log \max b_{ij}}\right) = \\ = \log D(B) + O\left(q \frac{\log \max |a_{ij}|}{\log \log \max |a_{ij}|}\right). \end{aligned}$$

Покажем, что $D(B) \leq 2D(A)$. Действительно, если $D(B) = b_{ij}$, для некоторых i и j, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq r$, то справедливо неравенство $D(B) \leq D(A)$.

Пусть теперь для некоторых j и t, $1 \le j < t \le r$ выполняется условие

$$D(B) = |b_{1j}b_{2t} - b_{1t}b_{2j}|.$$

Тогда в случае $b_{1j}b_{2t}b_{1t}b_{2j} \ne 0$ для некоторых j' и t', $1 \le j', t' \le q$, справедливо равенство

$$a_{1j'}a_{2t'} - a_{1t'}a_{2j'} = b_{1j}b_{2t} - b_{1t}b_{2j},$$

и, следовательно, $D(B) \ge D(A)$.

Рассмотрим случай выполнения условия $b_{1j}b_{2t}b_{1t}b_{2j} = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $b_{1j} = 0$. Тогда, с одной стороны, справедливо равенство $D(B) = |b_{1t}b_{2j}|$, а с другой — найдутся j' и t', $1 \le j', t' \le q$, для которых выполняются условия:

$$|a_{2j'}| = b_{2j}, \quad a_{1j'}a_{2j'} \le 0; \quad |a_{1t'}| = b_{1t}.$$

Поэтому, применяя лемму 11, получаем:

$$D(B) = |b_{1t}b_{2j}| = |a_{1t'}a_{2j'}| \le \max\{D(A), T(A)\}.$$

Таким образом окончательно имеем:

$$l_F(A) \le \log D(A) + O\left(q \frac{\log \max |a_{ij}|}{\log\log \max |a_{ij}|}\right).$$

Теорема 7 доказана.

Пусть теперь матрица A имеет размеры 3×2, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Для удобства договоримся под записью a_{st} при $s > 3$ и/или $t > 2$ понимать элемент a_{ij}, где i и j определяются из условий $1 \le i \le 3$, $i \equiv s \pmod 3$; $1 \le j \le 2$, $j \equiv t \pmod 2$.

Элемент a_{ij} матрицы A размера 3×2 назовем *особым*, если выполняются следующие условия:

$$a_{ij} \ne 0, \quad a_{ij}a_{i+1,j} \le 0, \quad a_{ij}a_{i+2,j} \le 0, \quad |a_{i+1,j}| + |a_{i+2,j}| \ne 0.$$

Отметим, что особых элементов в одном столбце может быть либо 0, либо 1, либо 2, причем последний вариант реализуется только в случае, когда в столбце ровно по одному положительному, отрицательному и нулевому элементу.

Далее, обозначив через $A(s,t)$ матрицу размера 2×2, в которой первой строкой является строка матрицы A, содержащая элемент a_{s1}, а второй — строка матрицы A, содержащая элемент a_{t1}, установим важное свойство особого элемента.

Лемма 12. *Если элемент a_{ij} матрицы A размера 3×2 является особым, то выполняется хотя бы одно из неравенств*:

$$\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i)\geq 0,\quad \det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1)\geq 0.$$

Доказательство. Из равенств

$$0=\det\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i,j+1} & a_{ij}\\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,j}\\ a_{i+2,j} & a_{i+2,j+1} & a_{i+2,j}\end{pmatrix}=$$
$$=a_{ij}\det A(i+1,i+2)-a_{i+1,j}\det A(i,i+2)+a_{i+2,j}\det A(i,i+1)$$

ввиду соотношения $a_{ij}\neq 0$ имеем:

$$\det A(i+1,i+2)=-\frac{a_{i+1,j}}{a_{ij}}\det A(i+2,i)-\frac{a_{i+2,j}}{a_{ij}}\det A(i,i+1),$$

где, в силу свойств особого элемента, значения $-a_{i+1,j}/a_{ij}$ и $-a_{i+2,j}/a_{ij}$ неотрицательны.

Если $\det A(i+1,i+2)=0$, то утверждение леммы очевидно. Если же выполняется условие $\det A(i+1,i+2)\neq 0$, то

$$\left(-\frac{a_{i+1,j}}{a_{ij}}\right)\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i)+$$
$$+\left(-\frac{a_{i+2,j}}{a_{ij}}\right)\det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1)=(\det A(i+1,i+2))^2>0.$$

Поэтому в этом случае неравенства $\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i)<0$ и $\det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1)<0$ одновременно выполняться не могут.

Лемма 12 доказана.

Пусть a_{ij} — особый элемент матрицы A размера 3×2. Определим величину $r(a_{ij})$ следующим образом:

1) если выполняются неравенства $\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i)\geq 0$ и $\det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1)\geq 0$, то полагаем

$$r(a_{ij})=|a_{ij}\det A(i+1,i+2)|\,;$$

2) если выполняется неравенство $\det A(i+1,i+2)\det A(i+2,i)<0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij}\det A(i+1,i+2)|\,\frac{\max\{|a_{i1}|,|a_{i2}|,|a_{i+2,1}|,|a_{i+2,2}|\}}{D(A(i+2,i))};$$

3) если выполняется неравенство $\det A(i+1,i+2)\det A(i,i+1)<0$, то полагаем

$$r(a_{ij}) = |a_{ij}\det A(i+1,i+2)|\,\frac{\max\{|a_{i1}|,|a_{i2}|,|a_{i+1,1}|,|a_{i+1,2}|\}}{D(A(i,i+1))}.$$

В силу леммы 12 такое определение корректно.

Для элементов a_{ij}, не являющихся особыми в матрице A размера 3×2, определим величину $r(a_{ij})$ как равную 1.

Наконец, для целочисленных матриц размера 3×2 введем еще одну характеристику следующим образом:

$$R(A) = \max_{a_{ij}\in A} r(a_{ij}).$$

Теперь в терминах величин $D(A)$, $T(A)$ и $R(A)$ можно сформулировать утверждение об асимптотическом росте F-сложности целочисленных матриц размера 3×2.

Теорема 8. *Для произвольной последовательности целочисленных матриц $A(n)=(a_{ij}(n))$ размера 3×2, удовлетворяющей при $n\to\infty$ условию*

$$\max_{a_{ij}\in A(n)} |a_{ij}(n)| \to 0,$$

справедливо асимптотическое равенство

$$l_F(A(n)) \sim \log\max\{D(A(n)), T(A(n)), R(A(n))\}.$$

Доказательство этой теоремы содержится в [18]. В общем случае оно довольно длинное и сложное. Здесь мы разберем один простой случай, который, тем не менее, дает достаточно полное представление об идее и технике доказательства.

Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

являющейся членом исходной последовательности, есть ровно один особый элемент. Без ограничения общности можно считать, что это элемент a_{11}, причем

$$a_{11} < 0, \quad a_{21} \geq 0, \quad a_{31} \geq 0;$$
$$a_{12} \geq 0, \quad a_{22} \geq 0, \quad a_{32} \geq 0.$$

Будем также считать, что справедливо соотношение $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geq 0$ (если выполняется неравенство $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} < 0$, то поменяем местами в матрице A вторую и третью строки). Тогда

$$\begin{aligned} \det A(2,3) &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geq 0, \\ \det A(3,1) &= a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} = |a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geq 0; \\ \det A(2,3)\det A(1,2) &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ &= -(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})(|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом в этом случае величина $r(a_{11})$ определяется следующими равенствами:

$$r(a_{11}) = |a_{11}||\det A(2,3)| \frac{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\}}{\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|, |\det A(1,2)|\}} =$$
$$= |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}}.$$

Н и ж н я я о ц е н к а. В силу теоремы 1 и леммы 10 достаточно доказать неравенство

$$l_F(A) \geq \log R(A) - 1.$$

Если выполняется условие $r(a_{11}) \leq 1$, то это соотношение очевидно. Поэтому далее считаем, что $R(A) = r(a_{11}) > 1$, откуда, в частности следует, что $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geq 1$.

Рассмотрим схему S со входами x, x^{-1}, y и y^{-1}, вычисляющую матрицу A и удовлетворяющую условию $l_F(S) = l_F(A)$. На выходах этой схемы будут реализованы функции $x^{a_{11}}y^{a_{12}}$, $x^{a_{21}}y^{a_{22}}$ и $x^{a_{31}}y^{a_{32}}$. Теперь преобразуем схему S в схему S' следующим образом. Входу, которому был приписан символ x, припишем символ новой переменной u, а входу которому был приписан символ x^{-1}, — символ новой переменной v. Полученная схема S' со входами u, u^{-1}, v, v^{-1}, y и y^{-1} (при этом входы, которым приписаны символы u^{-1} и v^{-1} не используются) той же сложности, что и исходная схема S, вычисляет систему функций

$$\left\{u^{|a_{11}|+\alpha'_1}v^{\alpha'_1}y^{a_{1,2}},\ u^{\alpha'_2}v^{|a_{21}|+\alpha'_2}y^{a_{22}},\ u^{\alpha'_3}v^{|a_{31}|+\alpha'_3}y^{a_{31}}\right\},$$

где α_1', α_2' и α_3' — некоторые целые неотрицательные числа.

Через $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где α_1, α_2 и α_3 — целые неотрицательные числа, обозначим матрицу

$$\begin{pmatrix} |a_{11}| + \alpha_1 & \alpha_1 & a_{12} \\ \alpha_2 & a_{21} + \alpha_2 & a_{22} \\ \alpha_3 & a_{31} + \alpha_3 & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Тогда, применяя теорему 1, имеем:

$$l_F(A) = l_F(S) = l_F(S') \geq l_F\left(M(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')\right) \geq$$

$$\geq \log D\left(M(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')\right) \geq \log \min_{(\alpha_i,\, \alpha_{i+1},\, \alpha_{i+2})} D\left(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\right).$$

Для матрицы $M = M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в представлении

$$|\det M| = \big|(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \\ + \alpha_2(|a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31}) - \alpha_3(|a_{11}|a_{22} + |a_{12}|a_{21})\big|$$

выполняются следующие соотношения:

$$a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \geq 1, \quad |a_{11}|a_{32} + a_{12}a_{31} \geq 0, \quad |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21} \geq 0.$$

Если выполняется неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} + |a_{11}|a_{21}) \leq \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то справедливы соотношения

$$D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geq |\det M| \geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}, |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}\}};$$

если же выполняется обратное неравенство

$$\alpha_3(a_{12}a_{21} + |a_{11}|a_{21}) > \frac{1}{2}(|a_{11}| + \alpha_1)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

то справедлива такая же оценка:

$$D(M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \geq |\det M(1,3;1,2)| \geq \alpha_3|a_{11}| \geq$$

$$\frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|}{|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}}.$$

Далее, так как $a_{21} \neq 0$, то верно следующее равенство:

$$|a_{11}|a_{32}+a_{12}a_{31} = \frac{a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}) + \frac{|a_{11}|}{a_{21}}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Поэтому

$$|\det M| = \Big|(|a_{11}|+\alpha_1+\alpha_2\frac{|a_{11}|}{a_{21}})(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) -$$
$$- \frac{\alpha_3 a_{21}-\alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21})\Big|.$$

Теперь, если выполняется неравенство

$$\frac{\alpha_3 a_{21}-\alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}) \leq \frac{1}{2}(|a_{11}|+\alpha_1)(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),$$

то справедливы соотношения

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geq |\det M| \geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}};$$

если же выполняется обратное неравенство

$$\frac{\alpha_3 a_{21}-\alpha_2 a_{31}}{a_{21}}(|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}) > \frac{1}{2}(|a_{11}|+\alpha_1)(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),$$

то справедлива такая же оценка:

$$D(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)) \geq |\det M(1,3;2,3)| \geq \alpha_3 a_{21}-\alpha_2 a_{31} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{a_{21}}{|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{a_{21}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}}.$$

Таким образом, имеем:

$$l_F(A) \ge \log \min_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} D\big(M(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\big) \ge$$
$$\ge \log\left(|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{\max\{|a_{11}|,a_{21}\}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}}\right)-1.$$

С другой стороны, справедливы оценки:

$$|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{a_{12}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}} \le$$
$$\le \frac{|a_{11}|a_{21}a_{32}a_{12}}{|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}} \le |a_{11}|a_{32} \le D(A);$$
$$|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{a_{22}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}} \le$$
$$\le (a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{|a_{11}|a_{22}}{|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}} \le a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \le D(A).$$

Поэтому, применяя теорему 1, при $a_{12}+a_{22}\ne 0$ имеем:

$$l_F(A) \ge \log D(A) \ge$$
$$\ge \log\left(|a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\frac{\max\{a_{12},a_{22}\}}{\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22},|a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}\}}\right).$$

Следовательно, объединяя оценки, получаем:

$$l_F(A) \ge \log r(a_{11}) - 1.$$

Нижняя оценка доказана.

В е р х н я я о ц е н к а. Если в матрице A есть нулевая строка, то для получения требуемой верхней оценки достаточно применить теорему 7. Далее будем полагать, что в матрице A нет нулевых строк. Тогда из условия $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\ge 0$ следует неравенство $a_{21}\ge 1$. Действительно, при $a_{21}=0$ выполняется хотя бы одно из условий $a_{22}=0$, $a_{31}=0$, и, следовательно, либо вторая строка матрицы A является нулевой, либо в первом столбце матрицы A два нулевых элемента. Первый случай противоречит отсутствию в матрице A нулевых строк, а второй — тому, что элемент a_{11} является особым.

С л у ч а й 1. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|,a_{12},a_{21},a_{22}\} > |a_{11}|a_{22}+a_{12}a_{21}.$$

Тогда

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Далее, в силу неравенства $a_{21} \geq 1$ в условиях случая 1 имеем:

$$a_{12} < \frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} - |a_{11}|a_{22}}{a_{21}}.$$

Из этого соотношения с учетом условий $|a_{11}| \geq 1$ и $a_{21} \geq 1$ вытекает, с одной стороны, неравенство $\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} \neq a_{12}$, а, с другой, при любом из условий $\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = |a_{11}|$, $\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = a_{21}$, $\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = a_{22}$ следует неравенство $a_{12} < |a_{11}|$.

Используя теорему 3 и последнее соотношение, получаем:

$$\begin{gathered} l_F(A) = l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leq \\ \leq l(x^{|a_{11}|}y^{a_{12}}) + l(x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leq \\ \leq (1+o(1)) \log |a_{11}| + (1+o(1)) \log \max\{a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\} \leq \\ \leq (1+o(1)) \log \max \Big\{ |a_{11}|a_{21}, a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}, \\ |a_{11}|a_{31}, a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}, |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \Big\} \leq \\ \leq (1+o(1)) \log \max\{D(A), T(A), R(A)\}. \end{gathered}$$

С л у ч а й 2. Пусть выполняется неравенство

$$\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} \leq |a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}.$$

Тогда

$$r(a_{11}) = |a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \frac{\max\{|a_{11}|, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}}{|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}}.$$

Положим

$$\alpha = \frac{|a_{11}|(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}{|a_{11}|a_{22} + a_{12}a_{21}}.$$

С использованием теоремы 6 получаем:

$$\begin{aligned} l_F(A) &= l_F(x^{a_{11}}y^{a_{12}}, x^{a_{21}}y^{a_{22}}, x^{a_{31}}y^{a_{32}}) \leq \\ &\leq l(u^{|a_{11}|}y^{a_{12}}, v^{a_{21}}y^{a_{22}}, u^{\lfloor\alpha\rfloor}v^{a_{31}+\lfloor\alpha\rfloor}y^{a_{32}}) \leq \\ &\leq \log D \begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ \lfloor\alpha\rfloor & a_{31}+\lfloor\alpha\rfloor & a_{32} \end{pmatrix} + o\left(\log \max\{\max a_{ij}, \alpha\}\right) \leq \end{aligned}$$

$$\le (1+o(1))\log D \begin{pmatrix} |a_{11}| & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ \alpha & a_{31}+\alpha & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Обозначим последнюю матрицу через M_0 и оценим сверху величину $D(M_0)$:

$$\begin{aligned}
|\det M_0| &= \big||a_{11}|(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) - \alpha(a_{21}a_{12}+|a_{11}|a_{22})\big| = 0;\\
|\det M_0(1,2;1,2)| &= |a_{11}|a_{21} \le T(A),\\
|\det M_0(1,2;1,3)| &= |a_{11}|a_{22} \le a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22} \le D(A),\\
|\det M_0(1,2;2,3)| &= a_{12}a_{21} \le a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22} \le D(A),\\
|\det M_0(1,3;1,2)| &= |a_{11}|a_{31}+|a_{11}|\alpha \le T(A)+r(a_{11}) \le T(A)+R(A),\\
|\det M_0(1,3;1,3)| &= \big||a_{11}|a_{32}-a_{12}\alpha\big| \le\\
&\le (a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})+r(a_{11}) \le D(A)+R(A),\\
|\det M_0(1,3;2,3)| &= a_{12}a_{31}+a_{12}\alpha \le\\
&\le (a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})+r(a_{11}) \le D(A)+R(A),\\
|\det M_0(2,3;1,2)| &= a_{21}\alpha \le r(a_{11}) \le R(A),\\
|\det M_0(2,3;1,3)| &= a_{22}\alpha \le r(a_{11}) \le R(A),\\
|\det M_0(2,3;2,3)| &= |a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}+a_{22}\alpha| =\\
&= |a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}|+r(a_{11}) \le D(A)+R(A).
\end{aligned}$$

Следовательно выполняется неравенство $D(M_0) \le D(A)+T(A)+R(A)$. Поэтому в условиях случая 2 имеем:

$$l_F(A) \le (1+o(1))\log\max\{D(A),T(A),R(A)\}.$$

Верхняя оценка доказана.

В заключение объединим в одной таблице все основные описанные результаты об асимптотике роста аддитивной сложности последовательности $A(n)=(a_{ij}(n))$ целочисленных матриц размера $p\times q$ (здесь считаем, что p и q фиксированы) в различных моделях при условии $\max\limits_{a_{ij}\in A(n)}|a_{ij}|\to\infty$.

Номер вычислительной модели	Размеры матриц $A(n)$	Асимптотика роста сложности
I	$2 \times q$	$l(A) \sim \log D(A)$
I	$p \times 2$	$l(A) \sim \log D(A)$
I	3×3	$l(A) \sim \log D(A)$
II	$p \times q$	$l_2(A) \sim \log D(A)$
III	$2 \times q$	$l_F(A) \sim \log \max\{D(A), T(A)\}$
III	3×2	$l_F(A) \sim \log \max\{D(A), T(A), R(A)\}$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00994) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1).

Литература

1. Гашков С. Б., Кочергин В. В. Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней // *Методы дискретного анализа в теории графов и сложности.* — Новосибирск, 1992. — Вып. 52. — С. 22–40.

2. Кнут Д. Е. *Искусство программирования для ЭВМ, т.* 2 — М.: Мир — 1977.

3. Кочергин В. В. О сложности вычислений в конечных абелевых группах // *Математические вопросы кибернетики, вып.* 4. — М.: Наука, 1992. — С. 178–217.

4. Кочергин В. В. Об аддитивных вычислениях систем целочисленных линейных форм // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 1993, № 6. — С. 97–101.

5. Кочергин В. В. О сложности вычислений одночленов и наборов степеней // *Дискретный анализ.* — Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 1994. — (Тр. РАН. Сиб. отделение. Ин-т математики; Т. 27) — С. 94–107.

6. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов с ограничениями на степени переменных // *Дискретная математика.* — 1998. — Т. 10, № 3. — С. 27–34.

7. Кочергин В. В. О порядке роста сложности вычисления систем одночленов от многих переменных // *Сибирская конференция по исследованию операций SCOR-*98 (*Новосибирск,* 22–27 *июня* 1998 *г*). Материалы конференции. — Новосибирск, 1998. — С. 129.

8. Кочергин В. В. О сложности вычисления системы одночленов специального вида // *Материалы* X *Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем-* (*Минск,* 29 *ноября* – 3 *декабря* 1999 *г.*). — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2000. — С. 12–14.

9. Кочергин В. В. О двух обобщениях задачи об аддитивных цепочках //*Труды* IV *Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"*(19–25 *июня* 2000 *г.*). — Москва, "МАКС Пресс", 2000. — С. 55–59.

10. Кочергин В. В. О некоторых обобщениях задачи об аддитивных цепочках // *Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций.* — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001. — С. 59–83.

11. Кочергин В. В. О сложности вычисления пары одночленов от двух переменных // *Дискретная математика.* — 2005. — Т. 17, вып. 4. — С. 116–142.

12. Кочергин В. В. Об асимптотике сложности аддитивных вычислений систем целочисленных линейных форм // *Дискретный анализ и исследование операций. Серия* 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 38–58.

13. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов от двух переменных // *Труды* VII *Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем-* (*Покровское,* 4–6 *марта* 2006 *г.*). — М.: МАКС Пресс, 2006. — С. 185–190.

14. Кочергин В. В. О сложности совместного вычисления двух элементов свободной абелевой группы // *Материалы* XVI *Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем-* (*Санкт-Петербург,* 26–30 *июня* 2006 *г.*). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. — С. 54–59.

15. Кочергин В. В. О сложности совместного вычисления трех одночленов от трех переменных // *Математические вопросы кибернетики, вып.* 15. — М.: Физматлит, 2006. — С. 79–155.

16. Кочергин В. В. О максимальной сложности вычисления систем элементов свободной абелевой группы // *Вестник Московского университета. Сер.* 1. *Математика. Механика.* — 2007, № 3. — С. 14–19.

17. Кочергин В. В. Об аддитивной сложности целочисленных матриц размера 3×2 // *Материалы* IX *Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", посвященного* 75-*летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова* (*Москва,* 18–23 *июня* 2007 *г.*). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. — С. 99–102.

18. Кочергин В. В. О сложности совместного вычисления трех элементов свободной абелевой группы с двумя образующими // (в печати).

19. Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах // *Доклады АН СССР.* — 1956. — Т. 111, № 6. — С. 1171–1174.

20. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // *Проблемы кибернетики, вып.* 14. — М.: Наука, 1965. — С 31–110.

21. Севидж Д. Е. *Сложность вычислений.* — М.: Изд.-во "Факториал". — 1998.

22. Сидоренко А. Ф. Сложность аддитивных вычислений семейств целочисленных линейных форм // *Записки научных семинаров ЛОМИ.* — Л.: Наука, 1981. — Т. 105. — С. 53–61.

23. Bellman R. E. Addition chains of vectors // *Amer. Math. Monthly.* — 1963. — V. 70. — P. 765.

24. Bernstein D. J. Pippenger's exponentiation algorithm // `Available at: http://cr.yp.to/papers.html.` — 2002.

25. Brauer A. On addition chains // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1939. — V. 45. — P. 736–739.

26. Dobkin D., Lipton R. J. Addition chain methods for the evaluation of specific polynomials // *SIAM J. Comput.* — 1980. — V. 9, N 1. — P. 121–125.

27. Elias M., Neri F. A note on addition chains and some related conjectures // *Sequences. Editor R. M. Capocelli.* — Springer-Verlag, 1990. — P. 166–181.

28. Erdos P. Remarks on number theory, III: On addition chains // *Acta Arith.* — 1960. — V. 6. — P. 77–81.

29. Hebb K. R. Some results on addition chains // *Notices of the American Mathematical Society.* — 1974. — V. 21. — P. A-294.

30. Knuth D. E., Papadimitriou C. H. Duality in addition chains // *Bulletin of the European association for Theoretical Computer Science.* — 1981. — V. 13. — P. 2–4.

31. Morgenstern J. Note on a lower bound of the linear complexity of the fast Fourier transform // *J. Assoc. Comput. Mach.* — 1973. — V. 20. — P. 305–306.

32. Olivos J. On vectorial addition chains // *J. Algorithms.* — 1981. — V. 2, N 1. — P. 13–21.

33. Pippenger N. The mimimum number of edges in graphs with prescribed paths // *Math. Systems Theory.* — 1979. — V. 12, № 4. — P. 325–346.

34. Pippenger N. On evaluation of powers and monomials // *SIAM J. Comput.* — 1980. — V. 9, N 2. — P. 230–250.

35. Schönhage A. A lower bound for the lenght of addition chains // *Theoretical Computer Science.* — 1975. — V. 1. — P. 1–12.

36. Southard T. H. Addition chains for the firs N squares // *Tech. Rep. CNA*-84. — Univ. of Texas at Austin, 1974.

37. Straus E. G. Addition chains of vectors // *Amer. Math. Monthly.* — 1964. — V. 71. — P. 806–808.

38. Subbarao M. V. Addition chains — some results and problems // *Number Theory and Applications. Editor R. A. Mollin. NATO Advanced Science Institutes Series: Series C.* — Kluwer Academic Publisher Group, 1989. — V. 265. — P. 555–574.

39. Thurber E. G. Efficient generation of minimal length addition chains // *SIAM Journal of Computing.* — 1999. — V. 28. — P. 1247–1263.

40. Yao A. C.-C. On the evaluation of powers // *SIAM J. Comput.* — 1976. — V. 5. — P. 100–103.