

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

На правах рукописи
УДК 629.785

Беликова Мария Сергеевна

Методы решения задачи Ламберта и их сравнительный анализ

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ Четверушкин Б.Н.

Научный руководитель

к.ф.-м.н. _____ Ширококов М.Г.

Выполнила

студентка 372 группы _____ Беликова М.С.

г. Москва
2017

Содержание

Введение	3
1 Методы решения задачи Ламберта	6
1.1 Общая процедура решения задачи Ламберта	6
1.2 Метод Бэйта	7
1.3 Метод Гудинга	8
1.4 Метод Иццо	10
2 Сравнительный анализ методов	11
2.1 Безвитковые перелеты	12
2.2 Многовитковые перелеты	12
2.3 Сравнительная характеристика	17
3 Оценка времени работы программ	18
Заключение	19
Список литературы	20

Введение

Задача Ламберта формулируется следующим образом: определить орбиту космического аппарата (КА) между точками пространства с радиус-векторами \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 в моменты времени t_0 и t_1 , соответственно, для заданных времени перелета $T = t_1 - t_0$, направлении перелета и числа полных витков вокруг притягивающего центра.

Задача Ламберта часто используется на предварительном этапе проектирования миссий и потому является важной задачей механики космического полета. К настоящему моменту разработано несколько десятков различных методов ее решения. Каждый из этих методов имеет собственные преимущества и недостатки. Например, некоторые методы гарантированно выдают решение либо только в случае одновиткового перелета, либо при значениях угловой дальности достаточно далекой от значений 0 и π , либо только для определенных типов орбит. Попытки прийти к универсальному методу, лишённому всех недостатков, привели к их широкому разнообразию.

Прежде чем обратиться к истории исследований задачи Ламберта и сравнению методов ее решения, сформулируем так называемую *теорему Ламберта* (1761 год) [1]: время перелета T между заданными точками \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 есть функция большой полуоси a , суммы расстояний $r_0 + r_1$ от притягивающего центра до этих точек и длины хорды c , их соединяющей:

$$T = T(a, r_0 + r_1, c)$$

Этим уравнением можно воспользоваться, чтобы определить орбиту. Действительно, задавшись временем полета и точками \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 , можно попытаться решить данное уравнение относительно большой полуоси и восстановить оставшиеся орбитальные элементы. Вместо большой полуоси можно использовать и другие переменные, которые позволяют однозначно определить орбиту. Вообще, уравнения вида $T = T(x)$, где x — неизвестная переменная, будем называть *уравнениями времени перелета* (transfer time equation). За исключением тривиальных случаев, эти уравнения решаются итерационными методами.

Теперь обратимся к истории исследований задачи Ламберта. Задача Ламберта возникла еще в середине XVIII века. Одно из первых решений было

предложено К. Гауссом [1]. Интересно отметить, что метод был разработан для определения положения Цереры — ближайшей к Солнцу карликовой планеты Солнечной системы. Метод имеет узкую область применимости и подходит лишь для эллиптических орбит и для значений угловой дальности меньших $\pi/2$.

Дальнейшие поиски решений задачи Ламберта приостановились почти на полтора столетия, задача актуализировалась лишь с началом космической эры в 1960-х (рисунок 1).

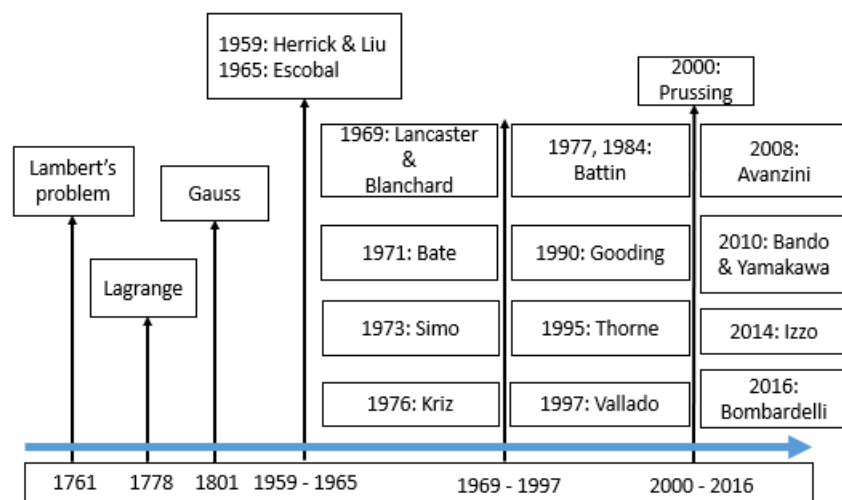


Рисунок 1. Хронология важнейших исследований задачи Ламберта (адаптировано из [9])

В основе многих современных методов лежат *уравнения Ламберта*, полученные Е. Ланкастером и Р. Бланчардом [3] в 1969 году. На этих же уравнениях основываются известные методы Гудинга [4] и Иццо [5], отличающиеся лишь процедурой решения возникающего уравнения времени перелета. В 1971 году Р. Бэйт [6] предложил иной подход, связав коэффициенты разложения конечного радиус-вектора по начальным радиус-вектору и скорости с параметрами орбиты. В 1977 году Р. Бэттин [7] разработал оригинальный подход к решению задачи Ламберта, основанный на гипергеометрических функциях и цепных дробях. Японские исследователи М. Бандо и Х. Ямакава [8] рассмотрели задачу Ламберта как задачу оптимального управления и свели краевую задачу к последовательности линейных уравнений в част-

ных производных, которые можно решать приближенными методами. Такой нетипичный подход может быть применен и к задаче с потенциальными возмущениями. В 2013 году американские математики Н. Арора и Р. Рассел [9] модифицировали метод Бэйта, предложив использовать новый геометрический параметр и более точные начальные приближения. Это позволило упростить уравнение времени перелета и ускорить процедуру его решения. Один из самых последних методов был предложен группой испанских исследователей под руководством К. Бомбарделли [10] в 2016 году. Авторы предложили сначала определить наименьшее приращение скорости (в начальной точке), которое необходимо для достижения конечной точки, а затем слегка скорректировать полученное приращение, чтобы обеспечить перелет за заданное время.

Задача определения орбиты может быть также сведена к решению трех нелинейных уравнений: действительно, при заданных начальном и конечном положениях КА достаточно найти скорость в начальный момент времени, которая бы обеспечивала попадание аппарата в нужную точку в конечный момент времени. Такой способ решения краевых задач называется *методом пристрелки*.

Наиболее важные методы решения задачи Ламберта удастся сгруппировать в несколько семейств методов (см. рисунок 2). В большинстве методов в качестве переменной берется так называемая *универсальная переменная*. Другие семейства методов избирают в качестве переменной большую полуось, фокальный параметр орбиты или эксцентриситет.

В данной работе подробно рассматриваются три различных алгоритма: Р. Гудинга [11], Д. Иццо [5] и Р. Бэйта [12]. Все они принадлежат семейству методов, использующих в качестве переменной универсальную переменную. Методы именно этого семейства оказались наиболее эффективными согласно исследованиям [2, 11]. В работе [2] было показано, что метод Бэйта является одним из наиболее быстрых методов, но не всегда сходится к решению в случае гиперболических орбит и больших значений угловой дальности. В работе [11] утверждается, что метод Гудинга сходится при любых начальных данных. Метод Иццо согласно [5] является чрезвычайно быстрым, но может не сойтись при больших значениях числа витков. Глава 1 подробно описывает

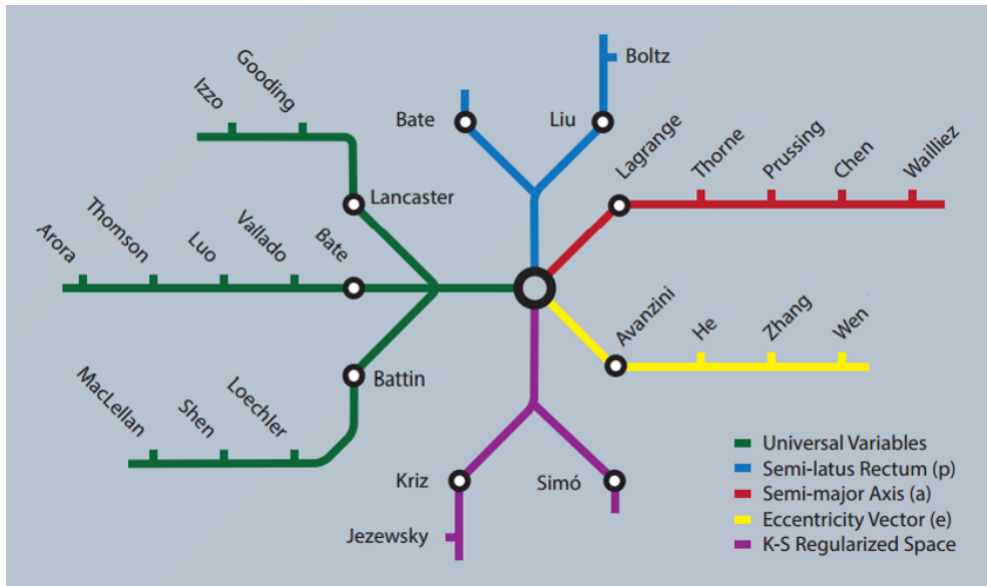


Рисунок 2. Семейства методов решения задачи Ламберта [2]

каждый из рассматриваемых методов. В главе 2 выполнен сравнительный анализ эффективности данных методов с точки зрения количества итераций при различных значениях параметров задачи: положений краевых точек, времени перелета и угловой дальности. Кроме того, устанавливаются области сходимости методов. Глава 3 посвящена оценке времени работы алгоритмов. В заключении перечислены выводы данного исследования.

1 Методы решения задачи Ламберта

1.1 Общая процедура решения задачи Ламберта

Для каждого из трех выбранных методов процедуру решения задачи Ламберта можно разбить на 4 этапа:

1. Вычисление необходимых величин, определяемых входными данными;
2. Определение начального приближения для неизвестной переменной x (в различных методах в качестве x выступают различные переменные);
3. Итерационное решение уравнения времени перелета. Расчеты продол-

жаются до тех пор, пока для некоторого n не будет выполнено

$$\left| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right| < \varepsilon$$

или пока не превышено максимальное число итераций, где $x^{(n)}$ и $x^{(n+1)}$ — значения переменной x на n -ом и $(n+1)$ -м шагах итерации, ε — наперед заданное значение допустимой абсолютной ошибки определения x ;

4. Вычисление векторов скоростей в начале и конце перелета.

1.2 Метод Бэйта

Опишем метод, разработанный американским исследователем Р. Бэйтом в 1971 году [6].

Напомним, что универсальная переменная s (фиктивное время, обобщенная эксцентрическая аномалия) определяется соотношением $\dot{s} = \frac{1}{r}$. Введем переменную $\chi_0 = \sqrt{\mu}s$ и так называемые *функции Штумпфа* [13]

$$c_n = c_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!}, n = 0, 1, \dots$$

где $x = -hs^2$, $h = v^2 - \frac{2\mu}{r}$ — константа энергии. Коэффициенты Лагранжа f и g разложения конечного радиус-вектора и вектора скорости через начальные

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0 \end{cases}$$

легко выражаются через параметры задачи, новую переменную χ_0 и функции Штумпфа:

$$f = 1 - \frac{\chi_0}{r_0}c_2, \quad g = T - \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}}c_3$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_0r_1}\chi_0(xc_3 - 1), \quad \dot{g} = 1 - \frac{\chi_0^2}{r_1}c_2$$

С другой стороны, коэффициенты Лагранжа можно выразить через геометрические параметры задачи и фокальный параметр p следующим образом:

$$f = 1 - \frac{r_1}{p}(1 - \cos \varphi), \quad g = \frac{r_0r_1 \sin \varphi}{\sqrt{\mu p}}$$

$$\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{p} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right), \quad \dot{g} = 1 - \frac{r_0}{p}(1 - \cos \varphi)$$

Тогда, приравняв f в первом и втором случае, получим $\chi_0 = \sqrt{\frac{r_1 r_0 (1 - \cos \varphi)}{p c_2}}$.

Теперь приравняем выражения для \dot{f} , используя полученное выражение:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \left(\frac{1 - \cos \varphi}{p} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{r_0 r_1}} \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{p c_2}} (x c_3 - 1)$$

Преобразуя это соотношение и определив 2 новые переменные:

$$y \equiv \frac{r_0 r_1 (1 - \cos \varphi)}{p}, \quad A \equiv \frac{\sqrt{r_1 r_0} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

получим $y = r_0 + r_1 + \frac{A(x c_3 - 1)}{\sqrt{c_2}}$, а для времени перелета

$$T = g + \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}} c_3 = \frac{r_0 r_1 \sin \varphi}{\sqrt{\mu p}} + \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}} c_3 = \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}} c_3 + \frac{A \sqrt{y}}{\sqrt{\mu}}$$

Нелинейное уравнение вида $F(x) = 0$, где

$$F(x) = T - \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}} c_3(x) - \frac{A \sqrt{y(x)}}{\sqrt{\mu}}, \quad y(x) = r_0 + r_1 + \frac{A(x c_3(x) - 1)}{\sqrt{c_2(x)}}$$

предлагается решать методом бисекции [12].

1.3 Метод Гудинга

Теперь перейдем к описанию эффективного алгоритма решения задачи Ламберта, предложенного Р. Гудингом [4] в 1990 году.

Вначале вычисляется квадрат расстояния между начальной и конечной точками

$$c^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2r_0 r_1 \cos \varphi$$

где φ — угловая дальность. Длины радиус-векторов связаны с соответствующими им эксцентрическими аномалиями E_1 и E_2

$$r_0 = a(1 - e \cos E_0)$$

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1)$$

Средние и эксцентрические аномалии связаны уравнением Кеплера

$$n(t_0 - t_p) = E_0 - e \sin E_0$$

$$n(t_1 - t_p) = E_1 - e \sin E_1$$

где $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, t_p — момент времени прохождения КА перицентра. Преобразуя данные соотношения и вводя обозначения

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = e \cos \frac{E_0 + E_1}{2}, \quad 0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$$

$$\alpha - \beta = E_1 - E_0 - 2\pi m, \quad 0 \leq \alpha - \beta \leq 2\pi$$

для безразмерного времени перелета $T = (t_1 - t_0) \sqrt{\frac{\mu}{(s/2)^3}}$ можно получить выражения

$$\begin{cases} T \sin^3 \frac{\alpha}{2} = 2\pi m + \alpha - \beta - \sin \alpha + \sin \beta, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \sin \frac{\beta}{2} = q \sin \frac{\alpha}{2}, & -\pi \leq \beta \leq \pi \end{cases}$$

в которых параметры s и q полностью определяются из входных данных. Они называются уравнениями Ламберта для эллиптического движения и были получены Е. Ланкастером и Р. Бланчардом еще в 1969 году [3]. Похожие уравнения можно получить и для остальных типов орбит. Замена $x = \cos \frac{\alpha}{2}$ позволяет свести систему к одному уравнению

$$F(x) = T - \frac{2}{U(x)}(x - qz(x) - d(x)) = 0$$

в котором U, z и d — известные функции x . Полученное уравнение типа $F(x) = 0$ предлагается решать численно методом Хэлли

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2F_n F'_n}{2(F'_n)^2 - F_n F''_n}$$

Для определения начального приближения неизвестной переменной x Р. Гудинг разработал собственную схему [11], обеспечивающую быструю сходимость при любых начальных данных.

1.4 Метод Иццо

Наконец рассмотрим очень популярный и современный метод, разработанный Д. Иццо в 2010 году [5].

Этот метод, так же как и предыдущий, опирается на уравнения Ламберта, которые для эллиптического движения выглядят следующим образом

$$\begin{cases} T \sin^3 \frac{\alpha}{2} = 2\pi m + \alpha - \beta - \sin \alpha + \sin \beta, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \sin \frac{\beta}{2} = q \sin \frac{\alpha}{2}, & -\pi \leq \beta \leq \pi \end{cases}$$

Различие методов Гудинга и Иццо состоит в процедуре решения уравнения времени перелета

$$F(x) = T - \frac{2}{U(x)}(x - qz(x) - d(x)) = 0$$

в котором U, z и d — известные функции x . Уравнение вида $F(x) = 0$ автор предлагает решать, используя *метод ложного положения* (Regula Falsi method). Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки в окрестности решения уравнения $F(x) = 0$ — точки x_0 , причем для определенности $x_1 < x_0 < x_2$. Тогда выполняется

$$F'(x_0) \approx \frac{0 - F(x_1)}{x_0 - x_1} \approx \frac{F(x_2) - 0}{x_2 - x_0}$$

Отсюда легко выразить

$$x_0 \approx \frac{x_1 F(x_2) - x_2 F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)}$$

Тогда итерационная схема будет иметь вид

$$x_2^{(n+1)} = \frac{x_1^{(n)} F(x_2^{(n)}) - x_2^{(n)} F(x_1^{(n)})}{F(x_2^{(n)}) - F(x_1^{(n)})}, \quad x_1^{(n+1)} = x_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$
$$x_1^{(0)} = x_1, \quad x_2^{(0)} = x_2$$

В качестве начального приближения переменной x Д. Иццо рекомендует брать конкретные значения: для безвиткового перелета $x_1 = -0.5233$ и $x_2 = 0.5233$. Если перелет многовитковый, то $x_1 = -0.5234$, $x_2 = -0.2234$ в случае выбора левой ветви решения и $x_1 = 0.7234$, $x_2 = 0.5234$ в случае правой.

2 Сравнительный анализ методов

Исследуем подробно работу выбранных методов отдельно для случаев безвитковых и многовитковых перелетов. Оценим области сходимости и эффективность каждого из трех рассматриваемых методов. Для удобства в работе используется безразмерная система единиц, в которой за единицу расстояния принят экваториальный радиус Земли $R_0 = 6378.1$ км, а за единицу скорости — круговая скорость $V_0 = \sqrt{\mu/R_0} \approx 7.9$ км/с. Единица времени $T_0 = R_0/V_0 \approx 806.8$ с. В такой системе единиц угловая скорость орбитального движения равна 1 и, двигаясь по круговой орбите радиуса R_0 , КА совершает один оборот вокруг Земли за время 2π .

Для определения областей сходимости будем варьировать параметры задачи и определять, сколько итераций выполняет каждый метод. Если метод обеспечивает точность $\varepsilon = 10^{-8}$ определения неизвестной переменной x в пределах 25 итераций, то будем говорить, что метод сходится. В противном случае, будем считать, что метод расходится. Под эффективностью метода будем понимать эффективность с точки зрения количества итераций в случае сходимости метода. Будем говорить, что метод обладает высокой эффективностью, если он сходится за малое число итераций (в пределах 5 итераций). Средней эффективности поставим в соответствие сходимость за 6 — 10 итераций, и наконец низкой — сходимость за 11 и более итераций.

Все три алгоритма реализованы на языке программирования C в среде Microsoft Visual Studio Community 2015. Задание матрицы начальных данных и отрисовка результатов проводились в программе MATLAB R2015a. В работе используется реализация алгоритма Бэйта, предложенная Д. Валладо [14], также используется адаптированная автором диссертации реализация алгоритма метода Иццо [5]. Алгоритм метода Гудинга был полностью реализован автором диссертации самостоятельно.

Параметры используемой вычислительной машины: операционная система Windows 10, процессор Intel® Core™ i3 – 3120M, частота 2.5 ГГц, оперативная память 6.0 ГБ.

2.1 Безвитковые перелеты

Для определения областей сходимости варьировались время перелета от $\pi/60$ до 3π и угловая дальность от 0 до 2π при заданном начальном положении и отношении длин конечного и начального радиус-векторов. В результате оказалось, что метод Бэйта имеет очень большую область расходимости: он практически не работает при значениях угловой дальности больше π (рисунок 3). Также небольшие области расходимости возникли у метода Гудинга (рисунок 4). Метод Иццо сошелся во всех случаях, причем не более чем за 7 итераций (рисунок 5).

Для оценки эффективности методов варьировались время перелета и отношение длин конечного и начального радиус-векторов при фиксированных начальном положении и угловой дальности. Оказалось, что метод Бэйта в области сходимости выдает решение в среднем после 6 итераций (рисунок 6). Метод Гудинга в большинстве случаев сходится за 3 — 4 итерации (рисунок 7), что говорит о высокой эффективности алгоритма в области сходимости. Метод Иццо же сходится всюду и не более чем за 10 итераций (рисунок 8).

2.2 Многовитковые перелеты

При рассмотрении многовитковых перелетов число полных витков варьировалось от 1 до 10, а время перелета от 20π до 40π . Все три алгоритма не сошлись в одной и той же области: при больших значениях числа витков и малом времени перелета. Методы Бэйта (рисунок 9) и Иццо (рисунок 10) выдали очень схожие результаты: они оба в большинстве случаев сходятся не более чем за 8 итераций. Метод Гудинга с точки зрения количества итераций гораздо эффективнее, т.к. в случае сходимости он делает не более 5 итераций (рисунок 11).

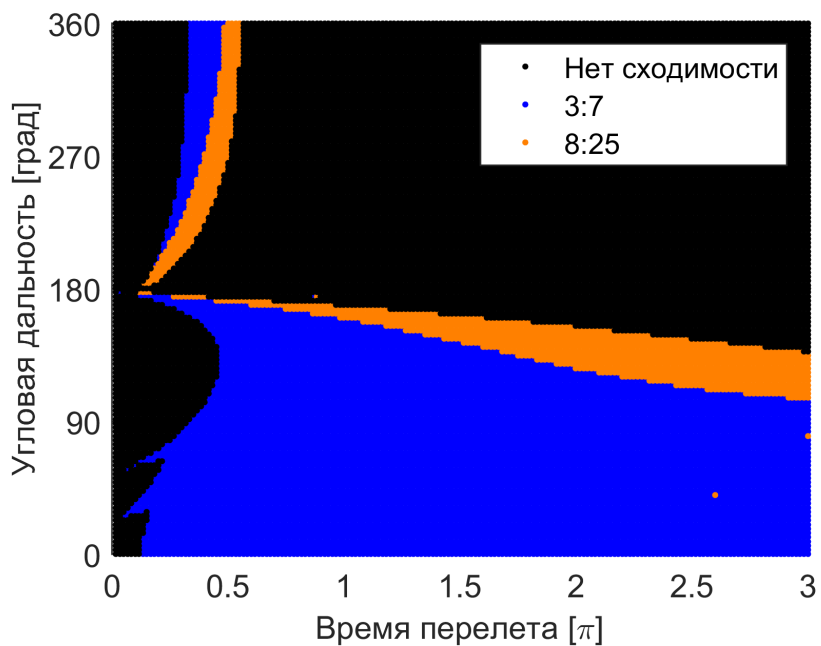


Рисунок 3. Число итераций при различных значениях угловой дальности и времени перелета для метода Бэйта

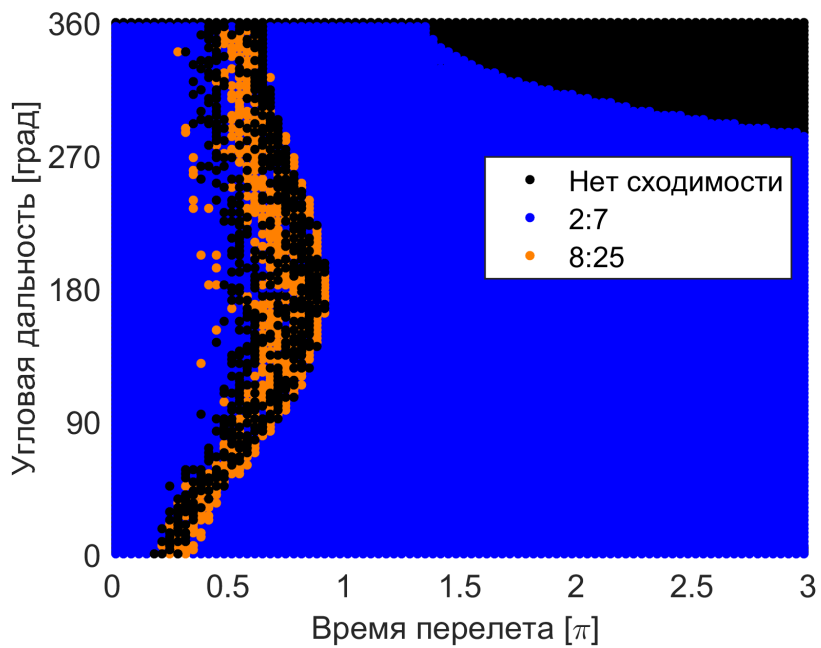


Рисунок 4. Число итераций при различных значениях угловой дальности и времени перелета для метода Гудинга

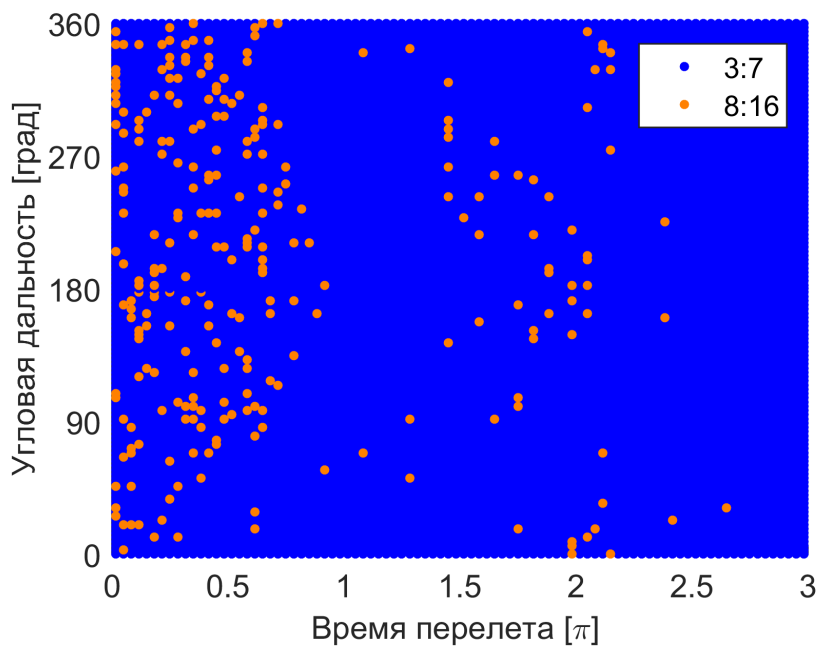


Рисунок 5. Число итераций при различных значениях угловой дальности и времени перелета для метода Иццо

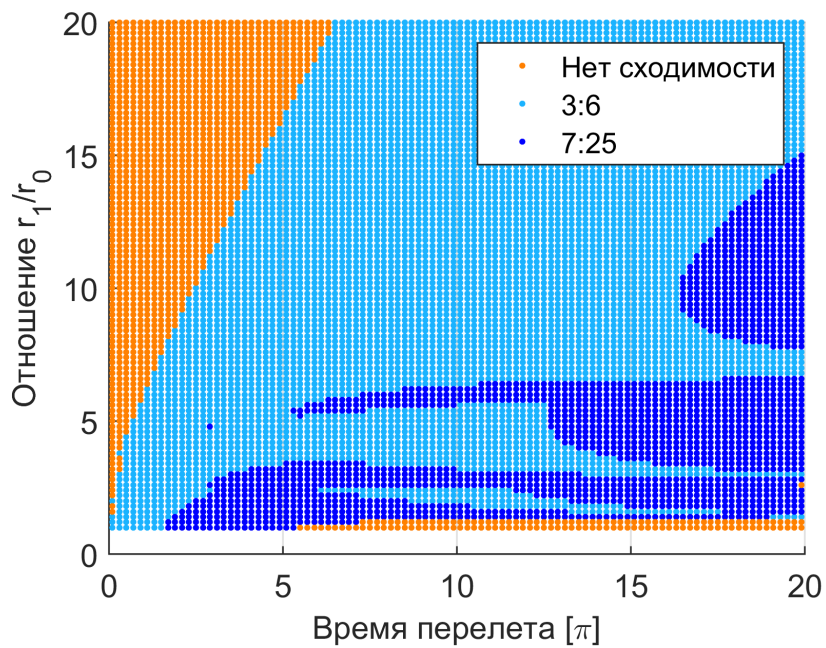


Рисунок 6. Число итераций при различных значениях отношения длин и времени перелета для метода Бэйта

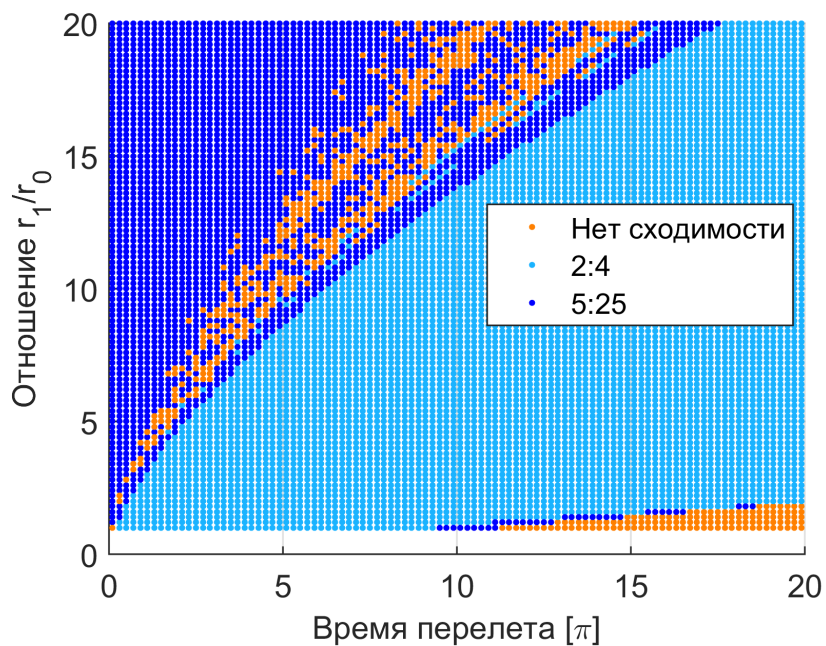


Рисунок 7. Число итераций при различных значениях отношения длин и времени перелета для метода Гудинга

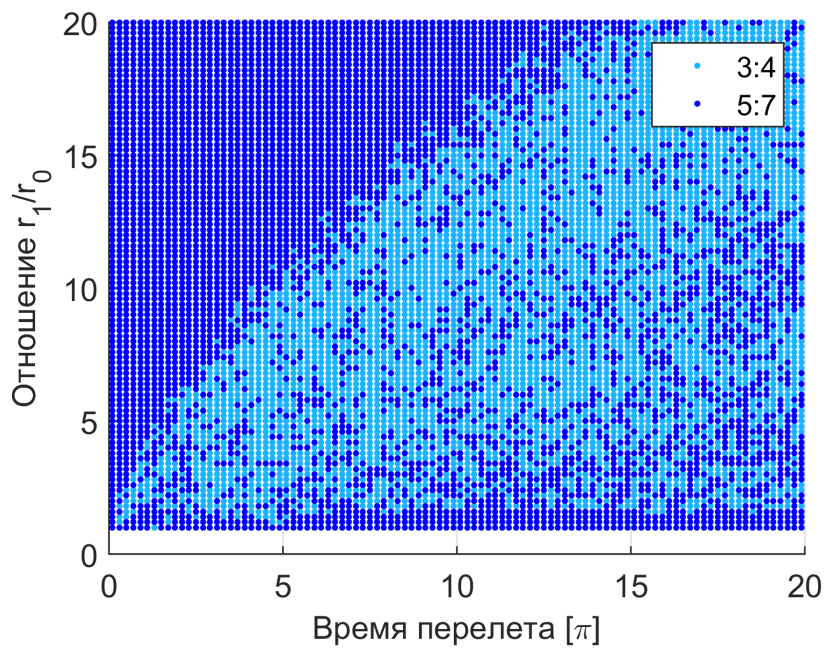


Рисунок 8. Число итераций при различных значениях отношения длин и времени перелета для метода Иццо

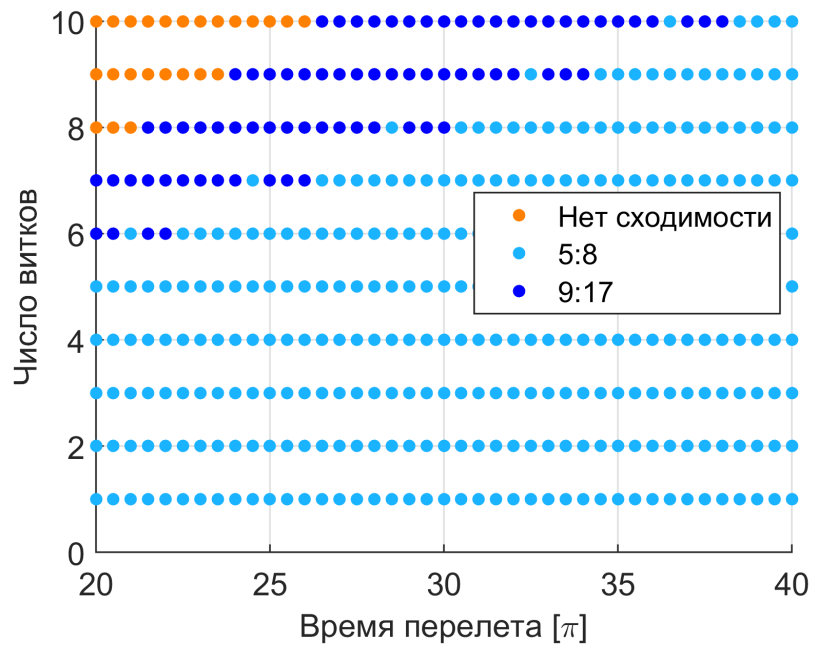


Рисунок 9. Число итераций при различных значениях числа полных витков и времени перелета для метода Бэйта

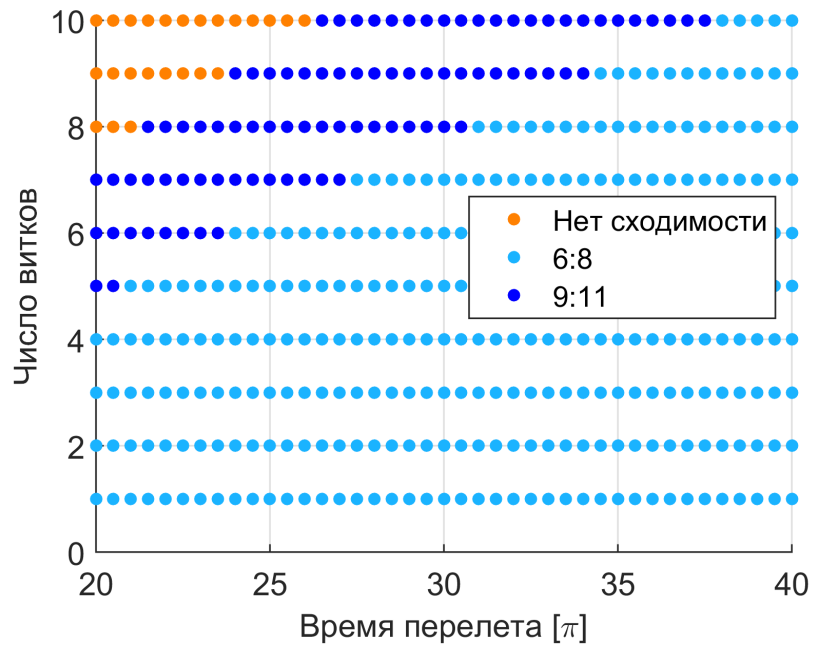


Рисунок 10. Число итераций при различных значениях числа полных витков и времени перелета для метода Иццо

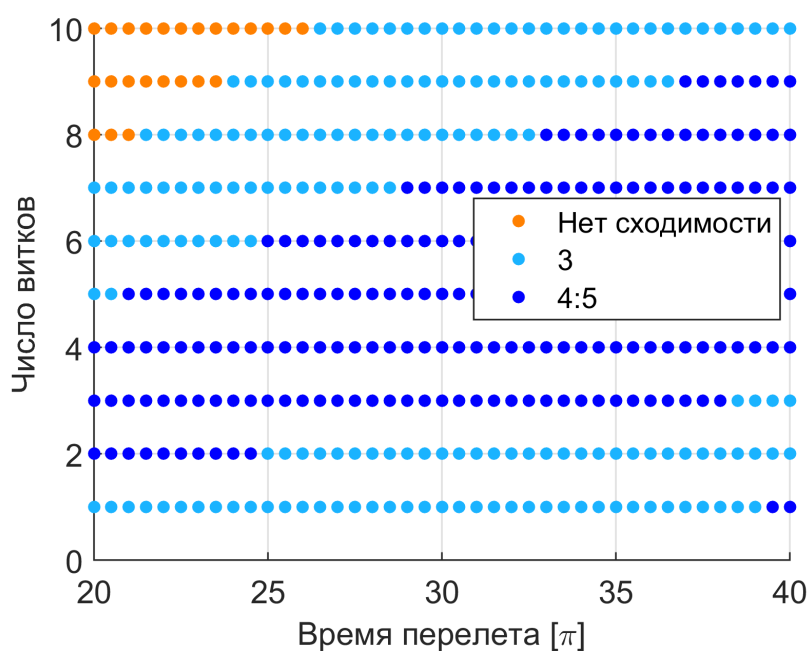


Рисунок 11. Число итераций при различных значениях числа полных витков и времени перелета для метода Гудинга

2.3 Сравнительная характеристика

В таблице 1 собраны полученные данные об областях сходимости и эффективности методов. Можно сделать вывод, что предпочтительнее всего для решения задачи Ламберта использовать метод Иццо, поскольку он не имеет ограничений на входные данные и является достаточно эффективным с точки зрения количества итераций. Но надо отметить, что он все же немного уступает методу Гудинга в степени эффективности.

Название метода	Область сходимости	Эффективность
Метод Бэйта	Есть ограничения	Средняя (6 – 7 итераций)
Метод Гудинга	Есть ограничения	Высокая (3 – 5 итераций)
Метод Иццо	Нет ограничений	Средняя (6 – 7 итераций)

Таблица 1. Сравнительная характеристика

3 Оценка времени работы программ

Для оценки времени работы программ были проведены 3 серии испытаний. Первая серия проводилась на вычислительной машине, параметры которой были указаны ранее. Рассматриваемые методы 10 раз запускались в последовательном режиме на одном и том же наборе входных данных, включающем 10^5 задач. Многократный запуск программы на одних и тех же данных позволил определить среднее время расчетов для каждого метода, а также разброс времени расчета. Вторая серия испытаний проводилась на гибридном вычислительном кластере К-100 [15], включающем управляющую машину и 64 вычислительных узла. Параметры вычислительных узлов: процессор 2 x Intel® Xeon® X5670, 12 ядер, оперативная память 96ГБ. Программы также 10 раз запускались в последовательном режиме на одном процессоре на том же наборе входных данных. Последняя серия испытаний, как и вторая, проводилась на К-100, но программы 10 раз запускались в параллельном режиме на 4 процессорах с использованием технологии параллельного программирования *OpenMP*. Во всех случаях измерялось время работы части кода, отвечающей непосредственно за процедуру решения задачи Ламберта. В таблице 2 указаны интервалы для времени расчетов по результатам каждой серии испытаний.

Название метода	Intel® Core™ i3	К-100 (последоват.)	К-100 (паралл.)
Метод Гудинга	1.092 ± 0.023	0.145 ± 0.002	0.068 ± 0.026
Метод Иццо	0.547 ± 0.015	0.233 ± 0.002	0.093 ± 0.028
Метод Бэйта	0.811 ± 0.012	0.292 ± 0.002	0.126 ± 0.041

Таблица 2. Характерное время работы методов, в секундах

Согласно первой серии испытаний наименьшее время работы продемонстрировал метод Иццо, а наибольшее время — метод Гудинга. Но использование суперкомпьютера даже в последовательном режиме значительно изменило результаты. Время работы каждого алгоритма уменьшилось более чем в 2 раза, а наименьшее время работы наблюдалось уже у метода Гудинга. Такой противоречивый результат говорит о том, как сильно время работы програм-

мы зависит от вычислительной машины, компилятора и реализации. Использование дополнительных процессоров в третьей серии испытаний позволило сократить время выполнения каждой программы еще более чем в 2 раза, но с другой стороны, разброс величины времени расчета значительно увеличился. Возможно, такой разброс связан с тем, что чтение и запись в программе происходит из общей памяти, из-за чего работа процессоров при взаимодействии с общими переменными не синхронизована и ожидаемое ускорение в 4 раза не наблюдается. Можно сделать вывод, что при работе на суперкомпьютере в качестве алгоритма с наибольшим быстродействием следует использовать метод Гудинга.

Заключение

В ходе работы были рассмотрены существующие методы решения задачи Ламберта. Из класса методов универсальной переменной, как из класса наиболее эффективных методов решения задачи Ламберта, были выбраны и реализованы три метода: Р. Бэйта, Р. Гудинга и Д. Иццо. Определено, что наибольшей областью сходимости обладает метод Иццо, наименьшей — метод Бэйта. Выполнен сравнительный анализ эффективности выбранных методов с точки зрения количества итераций при различных значениях параметров задачи: положений краевых точек, времени перелета и угловой дальности. Метод Гудинга продемонстрировал высокую эффективность, а методы Бэйта и Иццо — среднюю. Также определено характерное время работы программ в случае запуска программ в последовательном и параллельном режимах с использованием суперкомпьютера. Сделан вывод о том, что предпочтительнее всего для решения задачи Ламберта на кластере К-100 использовать метод Гудинга, как наиболее быстрый.

Список литературы

- [1] Battin R.H. Astronautical guidance. New York: McGraw Hill Book Company, 1966. 448 p.
- [2] Sangra D., Fantino E. Review of Lambert's problem //ISSFD 2015: 25th International Symposium on Space Flight Dynamics, 19–23 October, Munich, Germany, 2015, pp. 1–15.
- [3] Lancaster E.R. and Blanchard R.C. A unified form of Lambert's theorem // NASA technical note TN D–5368, 1969, pp.1–20.
- [4] Gooding R.H. Lambert's problem // Celestial Mechanics and Dynamic Astronomy, Vol. 48, No. 2, 1990, pp. 145–165.
- [5] Izzo D. ESA Advanced Concepts team. Code used available in MGA.M, on <http://www.esa.int/gsp/ACT/inf/op/globopt.htm>. Дата обращения к сайту 26 июня 2016.
- [6] Bate R.R., Mueller D.D. and White J.E. Fundamentals of Astrodynamics. New York: Dover Publications, 1971. 470 p.
- [7] Battin R.H. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. Reston, Virginia: AIAA Education Series, 1999. 796 p.
- [8] Bando M., Yamakawa H. New Lambert Algorithm Using the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation // Journal of guidance, control, and dynamics, Vol. 33, No. 3, 2010, pp. 1000–1008.
- [9] Arora N. and Russell R.P. A fast and robust multiple revolution Lambert algorithm using a cosine transformation // Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 150, 2013, pp. 1–20
- [10] Bombardelli C., Roa J., Gonzalo J. Approximate analytical solution of the multiple revolution Lambert's targeting problem // Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 158, 2016, pp. 1–14.

- [11] Wagner S.A. Automated trajectory design for impulsive and low thrust interplanetary mission analysis. Graduate Theses and Dissertations, Iowa State University, 2014.
- [12] Vallado D.A. Fundamentals of astrodynamics and applications. El Segundo, California: Microcosm Press, 2001. 958 p.
- [13] Суханов А.А. Астродинамика //М.: ИКИ РАН Серия «Механика, управление, информатика», 2010. 202 с.
- [14] Vallado D.A. Astrodynamics Software: <https://celestrak.com/software/vallado-sw.asp>. Дата обращения к сайту 26 июня 2016.
- [15] <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.html>. Дата обращения к сайту 26 июня 2016.