59-я научная конференция МФТИ
27 ноября 2016 года

Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе

Динамика и управление движением космических аппаратов

Методы решения задачи Ламберта

М.С.Беликова, студентка 4 курса ФУПМ

Научный руководитель: М.Г. Широбоков

Содержание

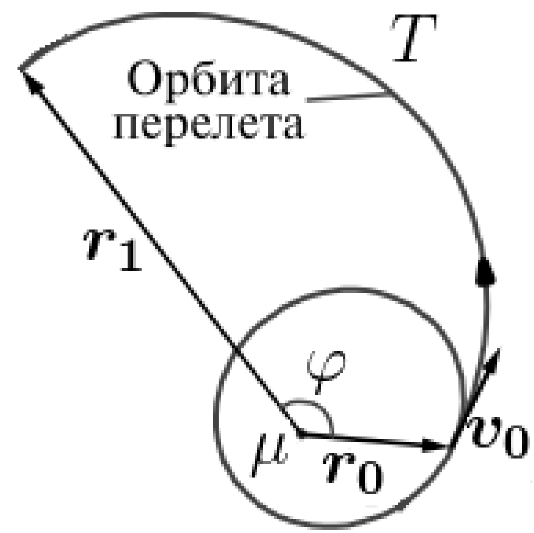
- Постановка задачи
- История исследований задачи Ламберта
- Классические методы: Гаусса, универсальной переменной
- Современные методы: Гудинга и Иццо
- Метод пристрелки
- Демонстрация работы метода простой пристрелки и метода Гаусса, их сравнение

Постановка задачи Ламберта

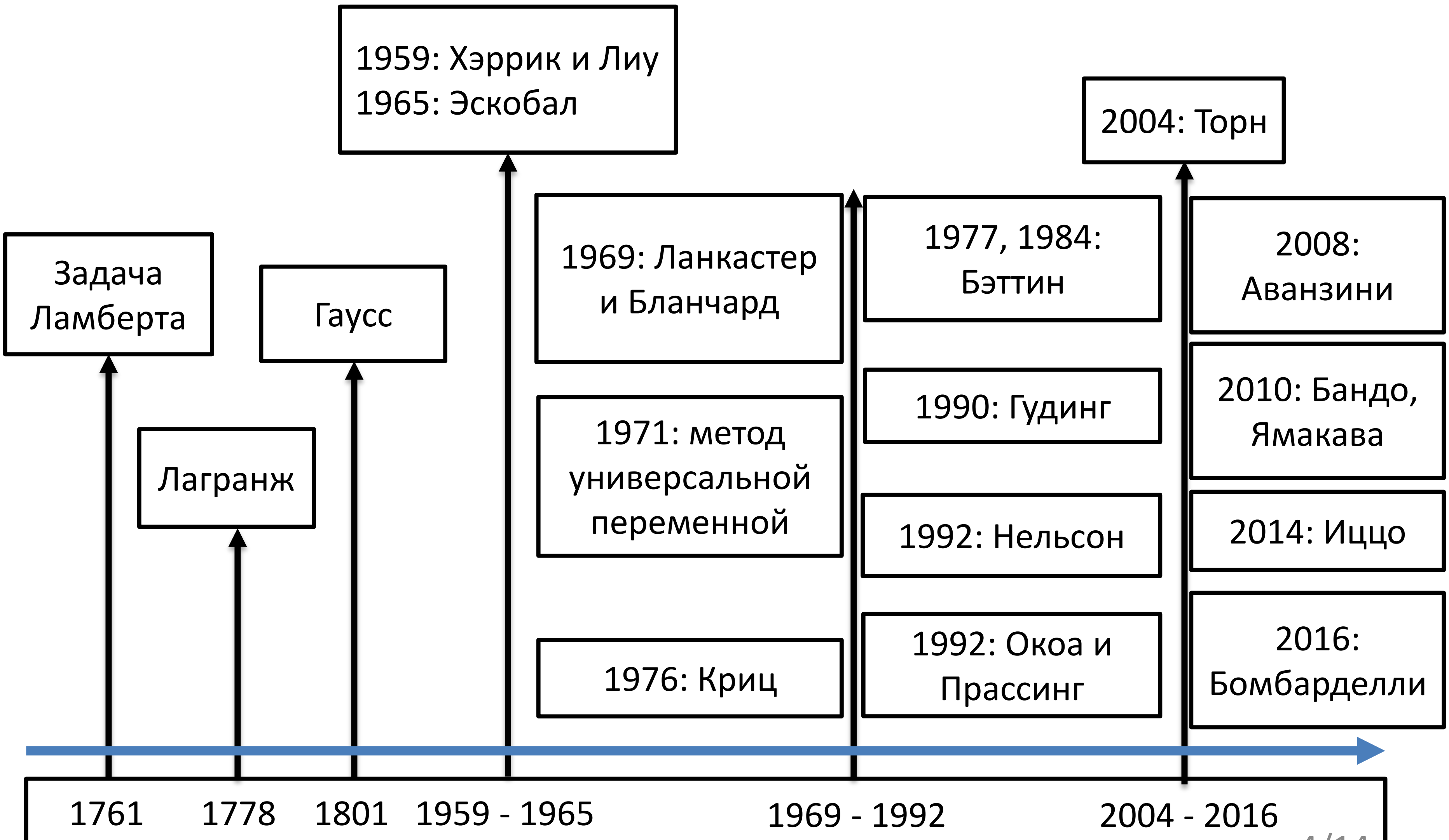
Дано: начальное $\boldsymbol{r_0}$ и конечное $\boldsymbol{r_1}$ положения КА, направление перелета, количество витков вокруг центрального тела m и время перелета $T = (t_1 - t_0)$

Найти траекторию перелета, удовлетворяющую заданным условиям

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r_0} \\ \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r_1} \end{cases}$$

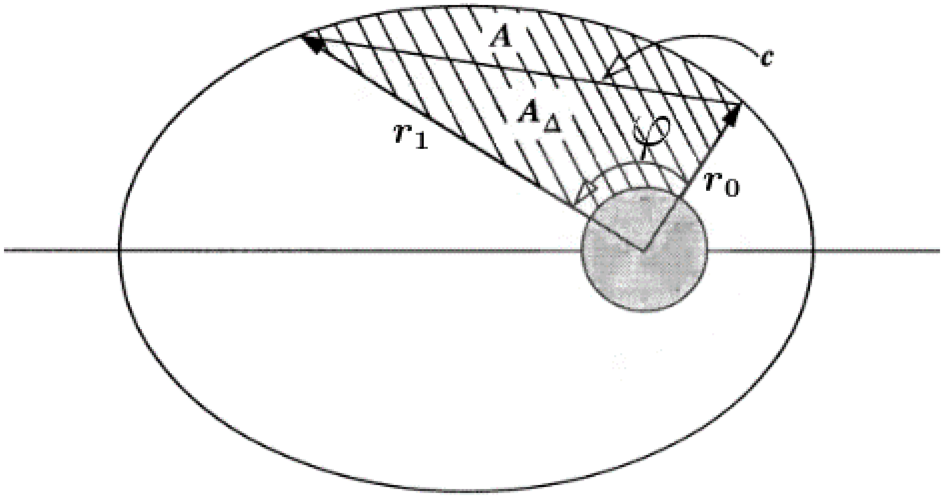


История исследований задачи Ламберта



Метод Гаусса

$$y = \frac{S_A}{S_{A_\Delta}} = \frac{\sqrt{\mu p}T}{r_0 r \sin\varphi}$$



$$z = \frac{E_1 - E_0}{2}$$

$$l = \frac{r_0 + r_1}{4\sqrt{r_0 r_1}\cos\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2};\ \ k = \frac{\mu T^2}{(2\sqrt{r_0 r_1}\cos\frac{\varphi}{2})^3}$$

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{k}{l + \sin^2\frac{z}{2}} \\ y^3 - y^2 = k\dfrac{2z - \sin 2z}{\sin^3 z} \end{cases} \Longrightarrow y, z \Longrightarrow \boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{v_1}$$

Метод универсальной переменной

$$\begin{cases} \boldsymbol{r_1} = f\boldsymbol{r_0} + g\boldsymbol{v_0} \\ \boldsymbol{v_1} = \dot{f}\boldsymbol{r_0} + \dot{g}\boldsymbol{v_0} \end{cases}$$

$\chi_0 = \sqrt{\mu}s$ универсальная переменная

$x = -hs^2; c_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!}$ функции Штумпфа

$$f = 1 - \frac{\chi_0}{r_0}c_2 \qquad g = T - \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}}c_3$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{rr_0}\chi_0(xc_3 - 1) \qquad \dot{g} = 1 - \frac{\chi_0^2}{r}c_2$$

$$F(x) = T - \frac{\chi_0^3 c_3}{\sqrt{\mu}} - \frac{r_0 r \sin\varphi}{\sqrt{\mu p}}$$

$x_{n+1} = x_n - \frac{2F_nF_n'}{2(F_n')^2 - F_nF_n''}$ итерационная схема Хэлли

Метод Гудинга

$$\begin{cases} \cos\frac{(\alpha+\beta)}{2} = e\cos\frac{E_0+E_1}{2}, 0 \le \alpha+\beta \le 2\pi \\ \alpha-\beta = E_1 - E_0 - 2m\pi, 0 \le \alpha-\beta \le 2\pi \end{cases}$$

Уравнения Ламберта для эллиптического движения:

$$\begin{cases} T\sin^3(\frac{\alpha}{2}) = 2\pi m + \alpha - \beta - \sin(\alpha) + \sin(\beta) \\ \sin(\frac{\beta}{2}) = q\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

$$-\pi \le \beta \le \pi; 0 \le \alpha \le 2\pi$$

$$T = (t_2 - t_1)\sqrt{\frac{\mu}{(\frac{s}{2})^3}}$$ Безразмерное время перелета

Замена $x = \cos\dfrac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $T(x) = \dfrac{2}{U(x)}\left(x - qz(x) - d(x)\right)$

Сравнение метода универсальной переменной и метода Гудинга[1]

Среднее число требуемых итераций для 4 тестов на временах перелета 0.1, 2, 5 и 10 лет соответственно

	Метод Гудинга	Метод универсальной переменной
Тест 1	2.99	3.77
Тест 2	2.51	3.88
Тест 3	2.05	3.87
Тест 4	1.45	3.98

Число неудач при использовании метода на примере миссии Земля – Марс

	Метод Гудинга	Метод универсальной переменной
Число неудач	0	80.219
Процент неудач	0	3.20e-1

[1]Wagner S.A., «Automated trajectory design for impulsive and low thrust interplanetary mission analysis» (2014). Graduate Theses and Dissertations. Iowa State University.

Метод Иццо

$$T(x) = \frac{2}{U(x)} \left(x - qz(x) - d(x)\right)$$

Уравнение такое же, как и в методе Гудинга

$$f(x) = f_0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln \frac{f(x)}{f_0} = 0$$

$$x_1 - x_0 \approx -\frac{F(x_1)}{F'(x_0)}; x_2 - x_0 \approx -\frac{F(x_2)}{F'(x_0)}$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{x_1^{(n)} F(x_2^{(n)}) - x_2^{(n)} F(x_1^{(n)})}{F(x_2^{(n)}) - F(x_1^{(n)})}$$

$$x_1^{(n+1)} = x_2^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_1^{(0)} = x_1; x_2^{(0)} = x_2$$

Метод пристрелки

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v_0} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r_f} - \boldsymbol{r_1} = 0$$

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{-1}_{\boldsymbol{x}_n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_f}{\partial \boldsymbol{v}_0}$$

Берем из матрицы перехода P:

$$P(T,0) = \frac{\partial \boldsymbol{x_f}}{\partial \boldsymbol{x_0}}$$

Уравнения в вариациях:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ \dot{P} = \begin{pmatrix} O_{3\times3} & I_{3\times3} \\ -\frac{\mu I_{3\times3}}{r^3} + \frac{3\mu(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}})}{r^5} & O_{3\times3} \end{pmatrix} P \end{cases}$$

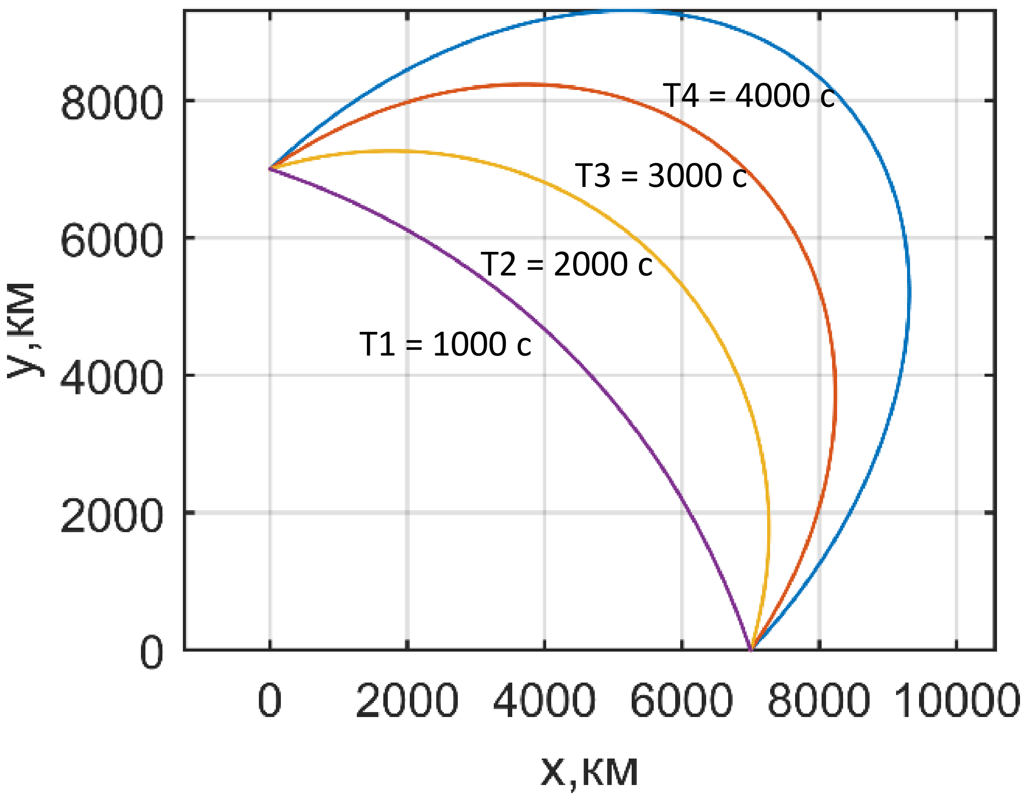
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v_0}, P(0) = I_{6\times6}$$

Траектории перелета на различных временах, полученные методом пристрелки

Параметры задачи:

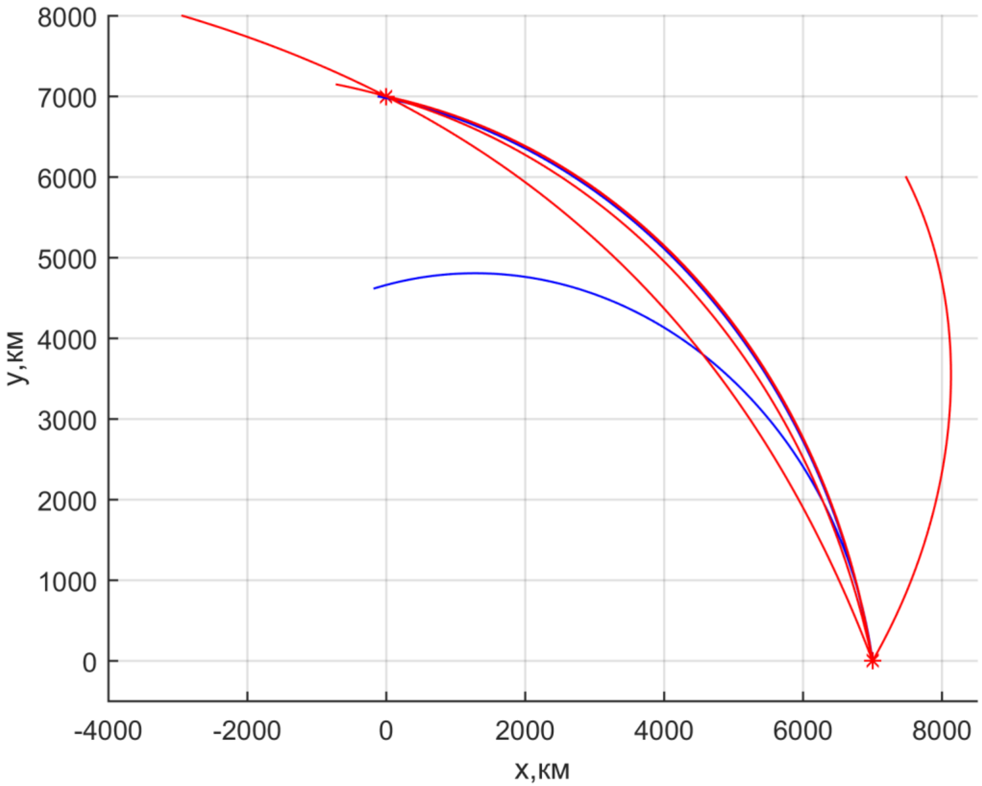
$$\boldsymbol{r_0} = [7000; 0; 0] \quad \boldsymbol{r_1} = [0; 7000; 0] \quad m = 0$$

Направление перелета: против часовой стрелки



	Число итераций	Время работы, с
Тест 1	5	2.05
Тест 2	5	1.95
Тест 3	6	2.26
Тест 4	6	2.27

Сравнение работы метода Гаусса и метода пристрелки



Параметры задачи: $\boldsymbol{r_0} = [7000; 0; 0]$; $\boldsymbol{r_1} = [0; 7000; 0]$; $m = 0$

$T = 1200$ с; направление перелета: против часовой стрелки

Ограничения на использование рассмотренных методов

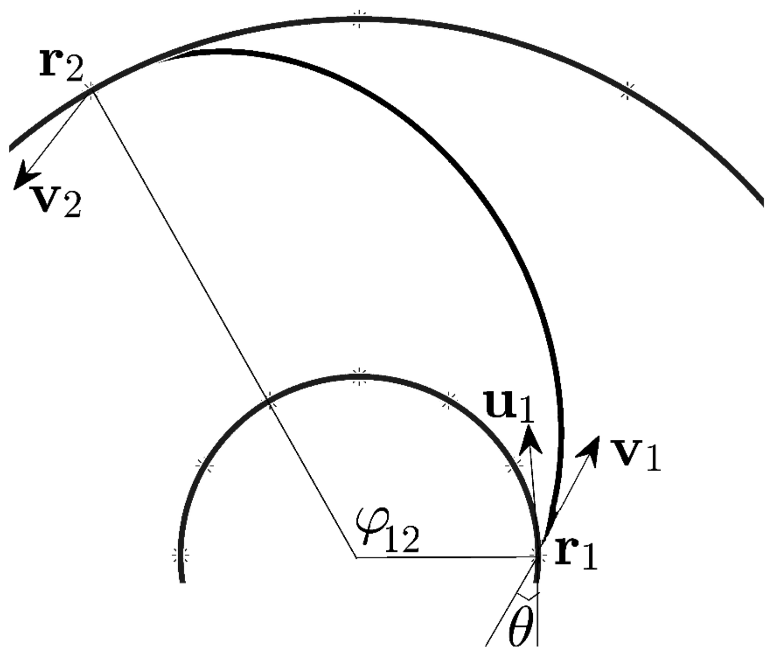
	Ограничения на входные данные	Тип орбиты перелета	Ограничения на число витков
Метод Гаусса	❌ Угол между заданными радиус-векторами не больше 90 градусов	❌ Только эллиптические	❌ 0 витков
Метод универсальной переменной	❌ Не желательно использовать для гиперболических орбит и больших времен перелета	✓ Любые	✓ Нет
Метод Гудинга	✓ Нет	✓ Любые	✓ Нет
Метод Иццо	✓ Нет	✓ Любые	✓ Нет
Метод пристрелки	✓ Нет	✓ Любые	✓ Нет

Заключение

- Были рассмотрены основные методы решения задачи Ламберта: метод Гаусса, метод универсальной переменной, методы Гудинга и Иццо
- Была дана сравнительная характеристика данных методов
- Выполнена реализация метода Гаусса и метода простой пристрелки и произведено их сравнение
- Показано, что метод Гаусса быстрее метода пристрелки более чем в 1.5 раза

Спасибо за внимание!

Формула Охоцимского



$v_{par} = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_1}}$ местная параболическая скорость

$$\left(\frac{v_1}{v_{\text{par}}}\right)^2 = \frac{1}{2\cos\theta}\frac{1-\cos\varphi_{12}}{r_1\cos\theta/r_2 - \cos(\theta+\varphi_{12})},$$

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \sin\theta \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} + v_1\cos\theta \frac{(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\times\mathbf{r}_1}{|(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\times\mathbf{r}_1|}\operatorname{sgn}\left(\mathbf{c}_1\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\right),$$