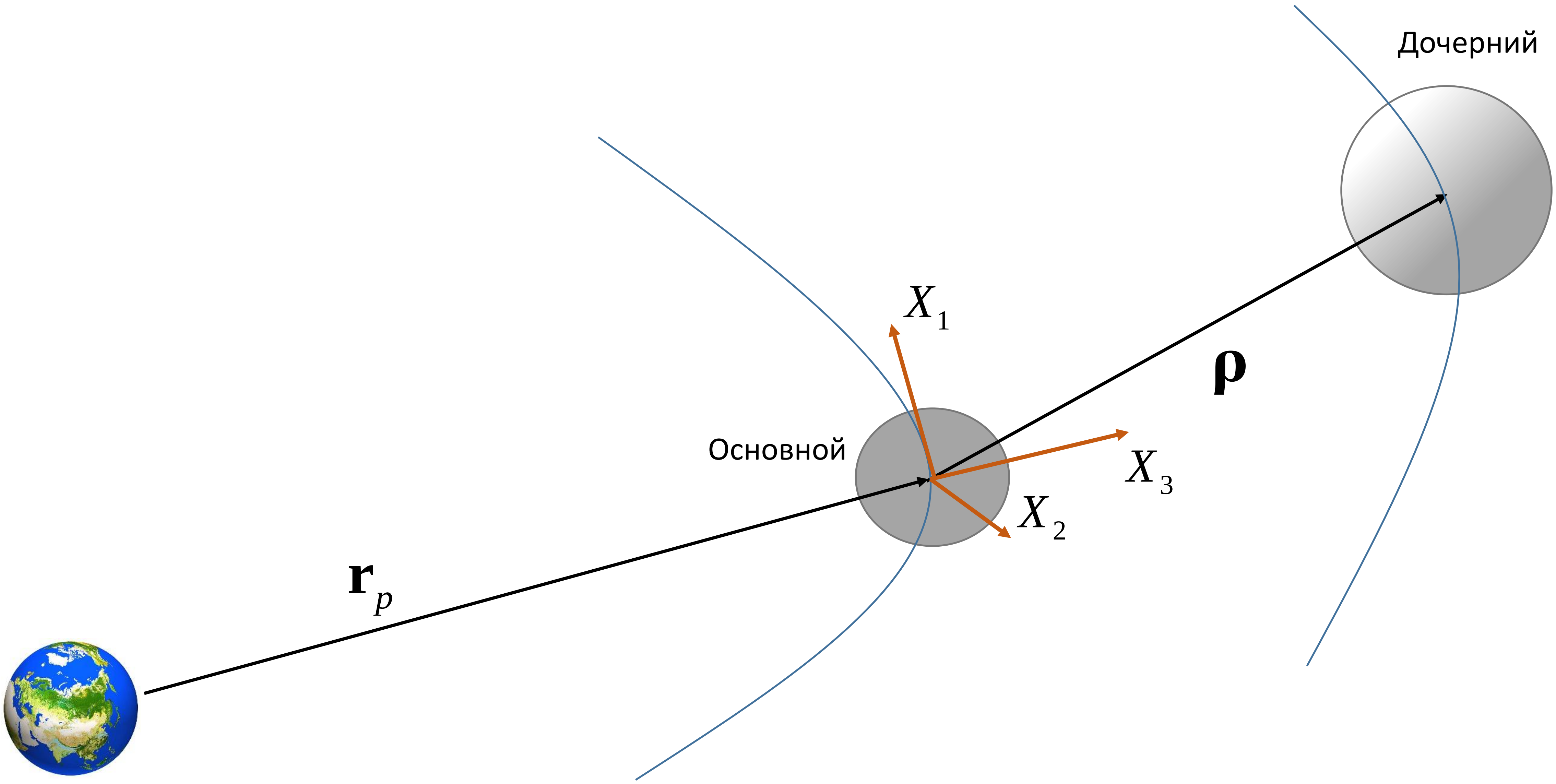
Исследование алгоритмов управления движением системы двух спутников с использованием силы солнечного давления

Р.В. Досаев, С.С. Ткачев

Содержание:

Орбитальная система координат



Постановка задачи:

Уравнение Хилла в векторной форме:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} + 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\rho}}] = 3\omega^2(\mathbf{n}_r, \boldsymbol{\rho})\mathbf{n}_r$$

$\boldsymbol{\omega}$ – *угловая скорость вращения основного спутника вокруг Земли,*

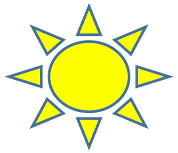
$\mathbf{n}_r$ – *единичный орт вдоль оси* OX_3.

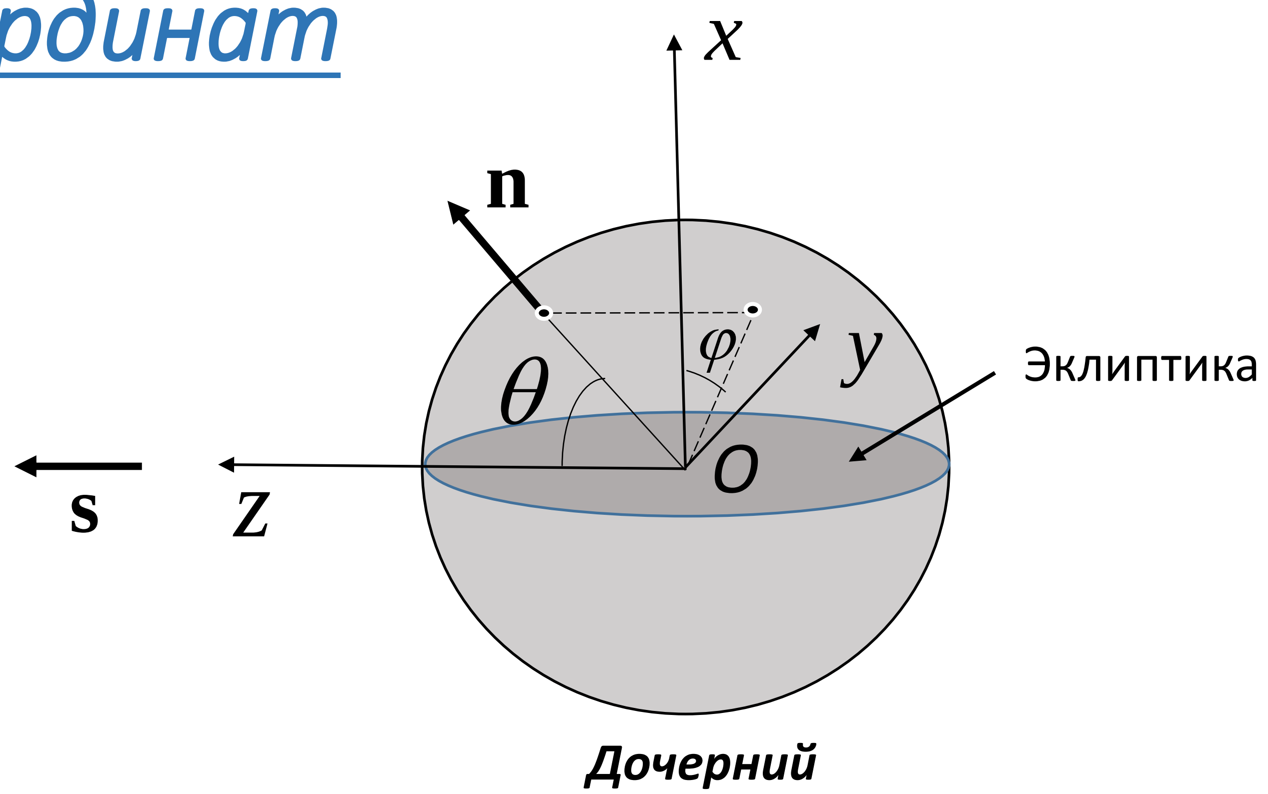
Решение – относительный вековой уход вдоль оси OX_1.

Задача: построить опорное (замкнутое) движение

с помощью силы солнечного давления.

Солнечная система координат





Ось Oz направлена по вектору на Солнце **s**,
Ox перпендикулярна плоскости эклиптики,
Oy дополняет до правой тройки.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Сила солнечного давления

$$d\mathbf{F} = -P_c\left[(1-k)(\mathbf{n},\mathbf{s})\,dS + 2k(\mathbf{n},\mathbf{s})^2\,\mathbf{n}\,dS\right]$$

Полная сила:

$$\mathbf{F} = -P_c\left[\mathbf{s}\int_{S^+}(1-k)(\mathbf{s},\mathbf{n})dS + 2\int_{S^+}k\mathbf{n}(\mathbf{s},\mathbf{n})^2\,dS\right]$$

k – *коэффициент отражения*, $0 < k < 1.$

$P_c \approx 4.56\cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ – *солнечная постоянная*,

S^+ – *освещенная часть поверхности, где выполнено*: $(\mathbf{n},\mathbf{s}) > 0.$

Сферические координаты: $x = R\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = R\cos\theta.$

$$(\mathbf{n},\mathbf{s}) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\quad \varphi\in(0;2\pi).$$

Коэффициент отражения k:

1) $k = const$:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\pi R^2 P_c\mathbf{s}.}$$

2) $k = k(\varphi,\theta)$:

$$\mathbf{F} = -P_c R^2[\mathbf{s}\iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le2\pi\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}(1-k(\varphi,\theta))\cos\theta\sin\theta d\varphi d\theta + 2\iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le2\pi\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}}\mathbf{n}\,k(\varphi,\theta)\cdot(\cos\theta)^2\sin\theta d\varphi d\theta].$$

При заданном **F** это **интегральное уравнение** относительно функции $k(\varphi,\theta)$.

Компоненты результирующей силы:

$$k(\varphi,\theta) = g(\varphi)\cdot h(\theta)$$

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= \int_0^{2\pi} d\varphi\, g(\varphi)\cos\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta)\cos^2\theta \sin^2\theta d\theta,\\
F_y &= \int_0^{2\pi} d\varphi\, g(\varphi)\sin\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta)\cos^2\theta \sin^2\theta d\theta,\\
F_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta)\cos^3\theta \sin\theta d\theta
\end{aligned}\right\} \textit{коэффициенты ряда Фурье} \Rightarrow$$

Компоненты результирующей силы:

$$\boxed{k(\varphi,\theta)=\left(A\cos(\varphi+\alpha)+B\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right)} \Rightarrow$$

где $A,\ B,\ \alpha$ – неизвестные параметры

$$F_x=-\frac{\pi^2}{32}R^2P_cA\cos\alpha;$$

$$F_y=\frac{\pi^2}{32}R^2P_cA\sin\alpha;$$

$$F_z=-\frac{P_c\pi^2R^2}{4}B-P_c\pi R^2.$$

$$\text{Если } \mathbf{F}_1 - \textit{сила, действующая на дочерний спутник},$$

$$\mathbf{F}_2 - \textit{сила, действующая на основной спутник},$$

$$\textit{то}\quad \mathbf{F}=\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2 - \textit{результирующая сила},$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{F}=\left(-\frac{\pi^2}{32}R_1^2P_cA\cos\alpha,\ \frac{\pi^2}{32}R_1^2P_cA\sin\alpha,\ -\frac{P_c\pi^2R_1^2}{4}B+P_c\pi(R_2^2-R_1^2)\right)^T;$$

Управление через PD-регулятор:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \mathbf{u}, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 + \frac{1}{2}k_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \quad - \textit{функция Ляпунова}, \;\; k_1 > 0;$$

$$\dot{V} < 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{f} + \mathbf{u} + k_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \dot{\mathbf{v}}_0 = -k_2(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u} = -k_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - k_2(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f},$$

$$k_1, \;\; k_2 > 0.$$

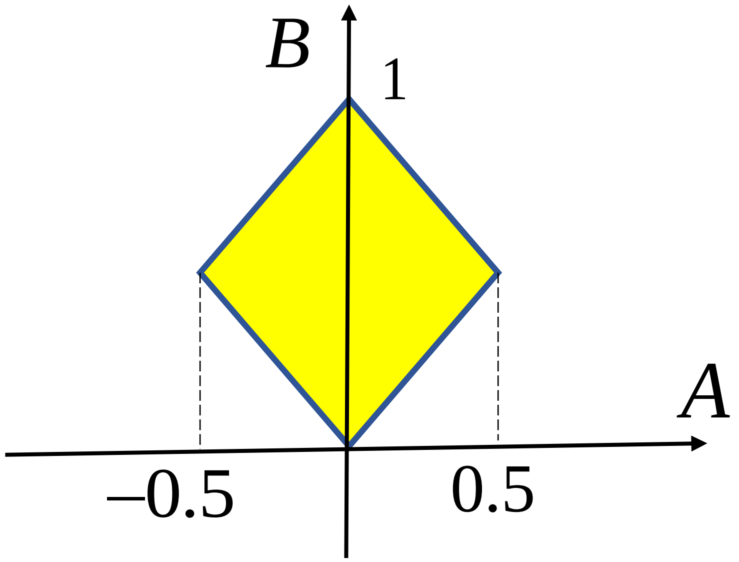
Ограничения на параметры:

$$0 < k < 1 \Rightarrow$$

$$0 < \left(A\cos(\varphi+\alpha)+B\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < A\cos(\varphi+\alpha)+B < 1$$

Последнее условие должно выполняться для всех $\varphi \in [0;\ 2\pi]$.

Поэтому $\begin{cases} 0 < A+B < 1, \\ 0 < B-A < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$



$$\alpha \in [0,\ 2\pi].$$

$$F_x = -\frac{\pi^2}{32} R^2 P_c A\cos\alpha, \qquad A = -\frac{32}{\pi^2 P_c R_1^2}\sqrt{U_x^2 + U_y^2},$$

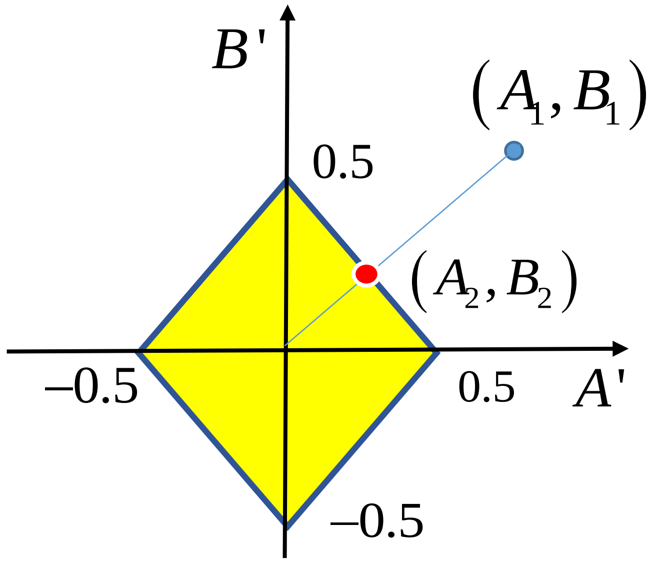
$$F_y = \frac{\pi^2}{32} R^2 P_c A\sin\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{4}{\pi^2 P_c R_1^2} U_z - \frac{4}{\pi R_1^2}\left(R_2^2 - R_1^2\right),$$

$$F_z = -\frac{P_c \pi^2 R^2}{4} B - P_c \pi R^2 \qquad \alpha = arctg\left(-\frac{U_y}{U_x}\right)$$

где $\mathbf{U} = D\mathbf{u}$, D *– матрица перехода из ОСК в ССК.*

Если $\dfrac{4}{\pi R_1^2}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = \dfrac{1}{2}$, *то*

область ограничений упрощается $\Rightarrow$



(A_1, B_1) *– требуемые параметры,*

(A_2, B_2) *– альтернативные параметры.*

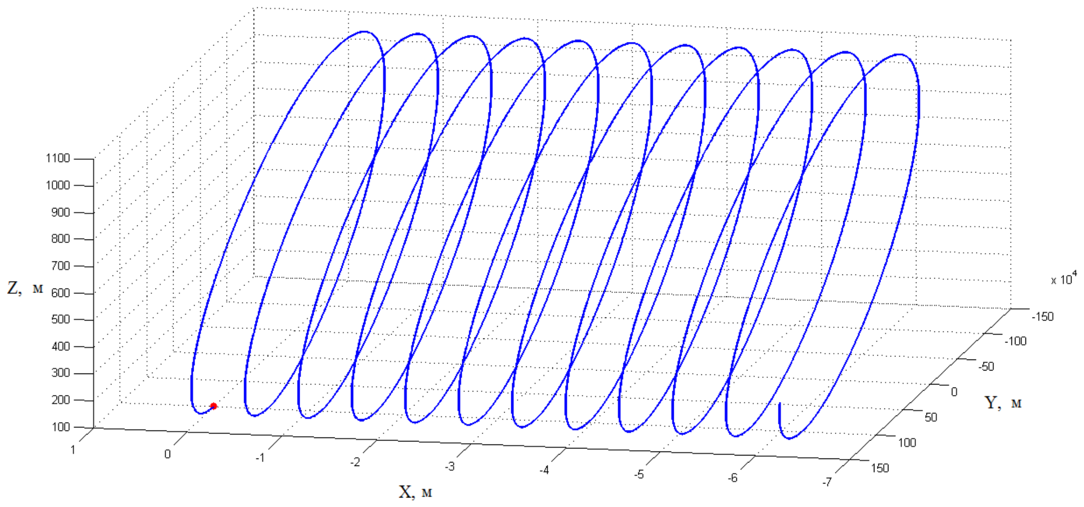


Рис.1 Пример траектории без управления

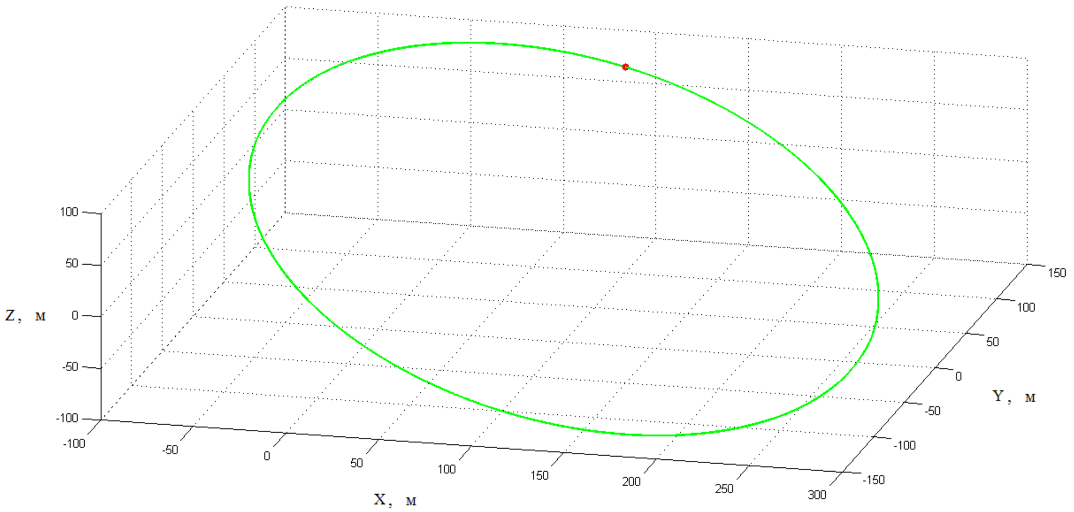


Рис.2 Пример опорной траектории

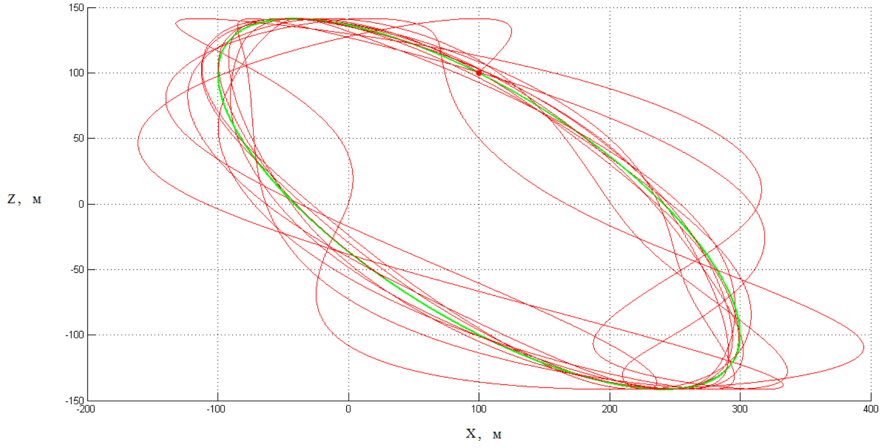


Рис.3 Управляемое и опорное движения

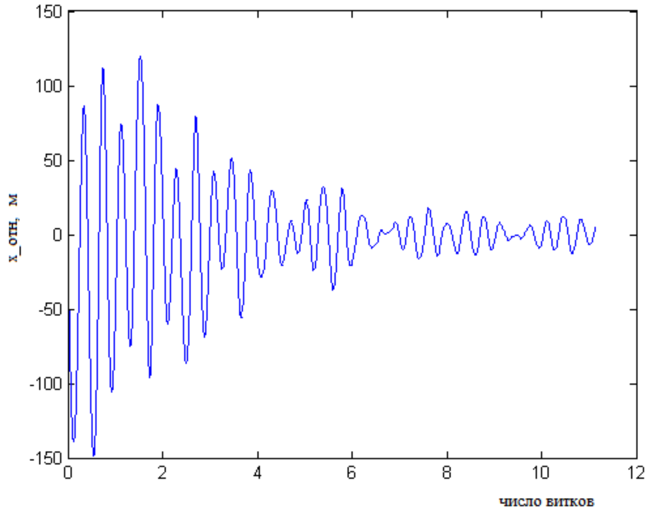


Рис.4 Зависимость ошибки x-координаты от времени

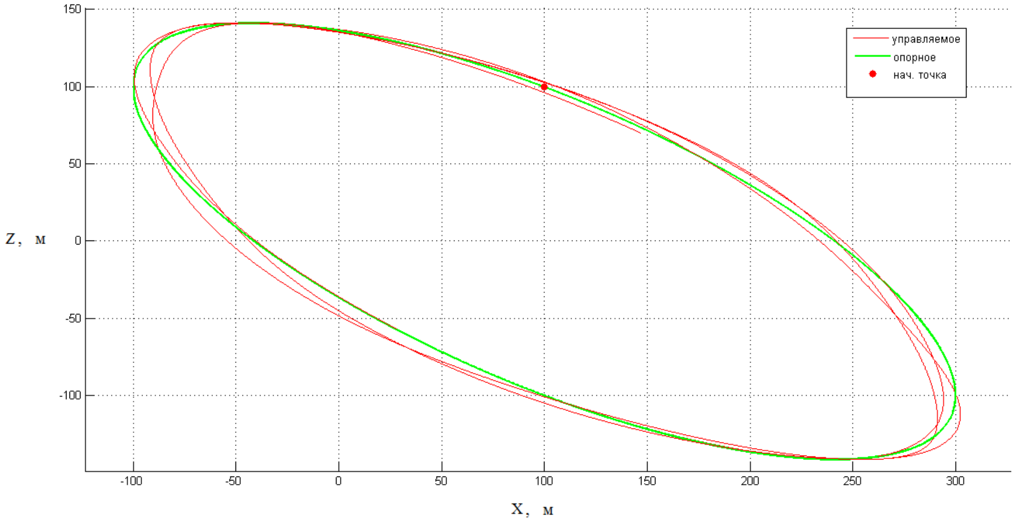


Рис.5 Управляемое и опорное движения (последние три витка)

Заключение

- Получены ограничения на параметры коэффициента отражения и общий вид силы солнечного давления в случае сферической поверхности;
- Построено управление через PD-регулятор с учетом ограничений и на основе этого получены новые параметры для коэффициента отражения.

Спасибо за внимание!