

*Школа молодых ученых «Математические модели,
высокоточные алгоритмы и программное
обеспечение для суперкомпьютеров»*

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

11–13 декабря 2017 года

Сергей Трофимов

к.ф.-м.н., научный сотрудник
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

**60 лет спустя: механика
космического полета в XXI веке**



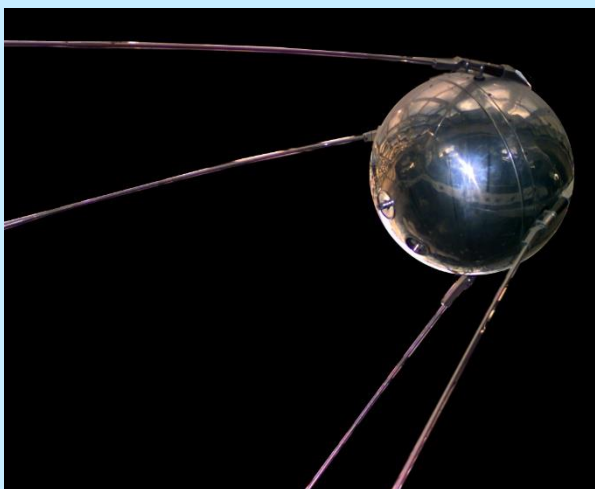
Наш коллектив в секторе «Ориентация и управление движением» (отдел №5)



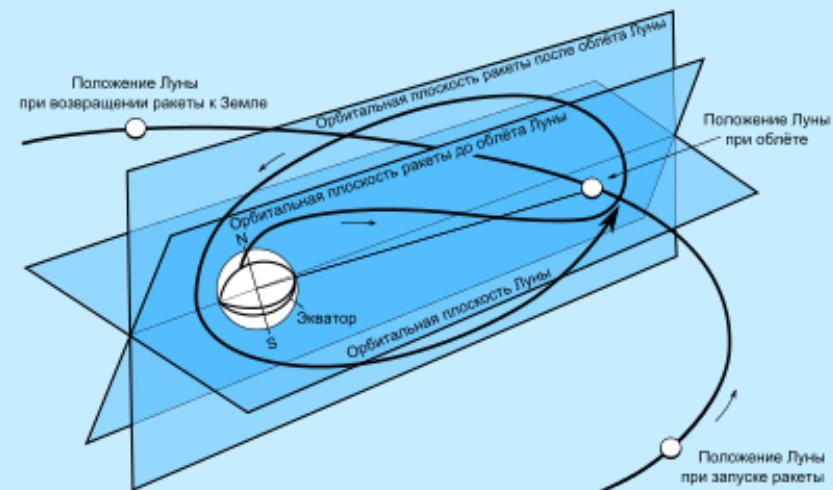
Начало космической эры

Первый спутник, ПС-1, был запущен 4 октября 1957 года. Для этого потребовалось решить задачи:

- определения орбиты по наземным измерениям
- создания модели верхних слоев атмосферы
- оценки времени жизни спутника



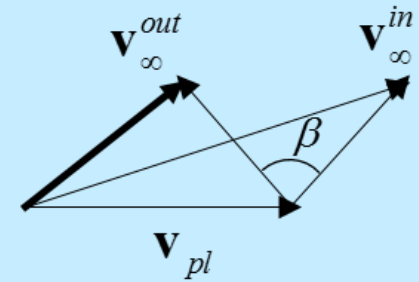
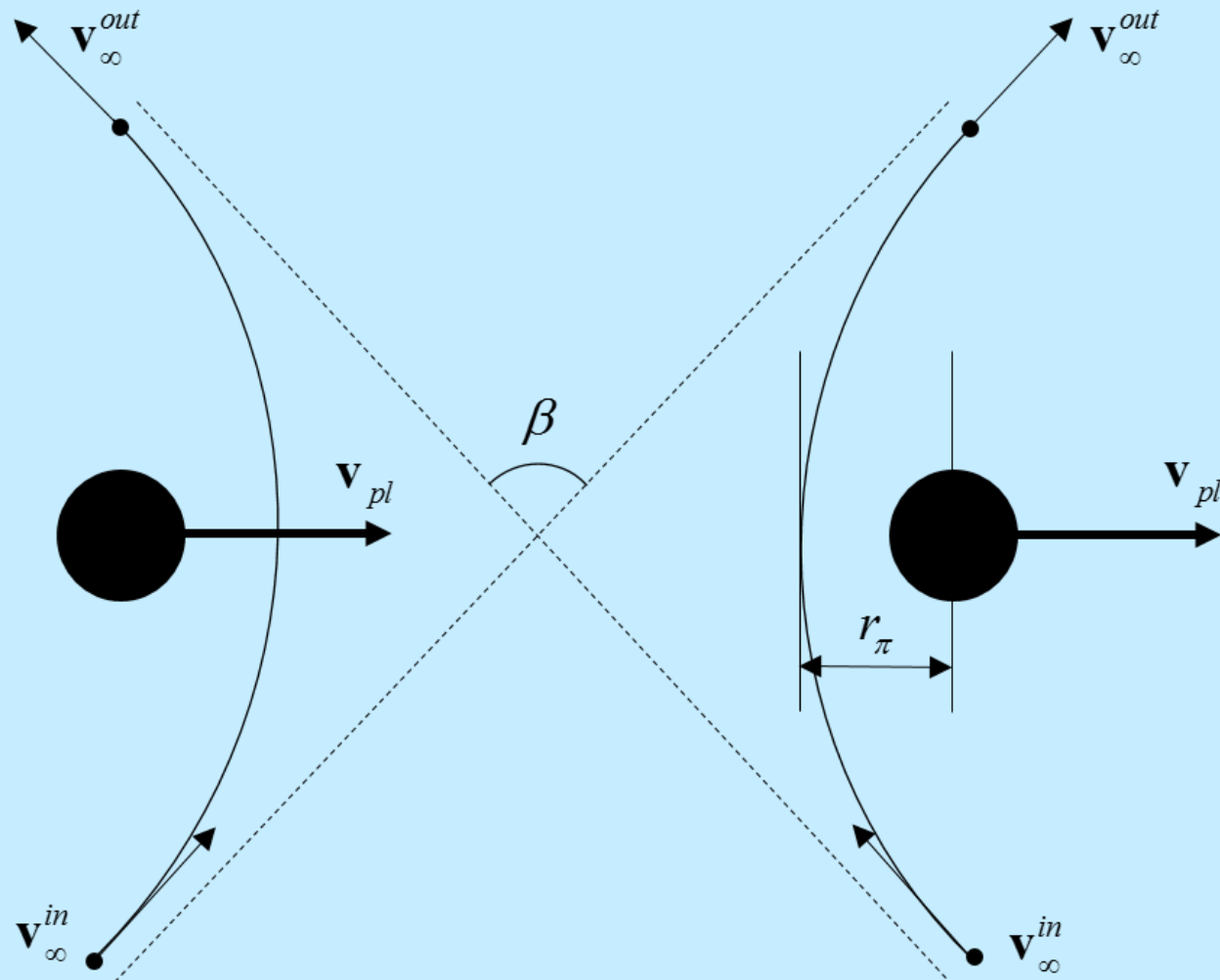
Источник: Википедия



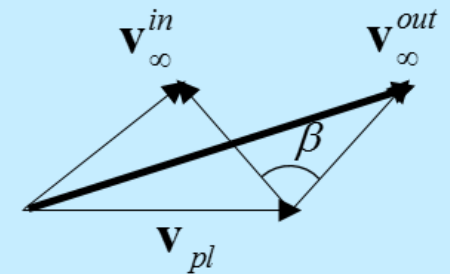
Источник: Википедия

Уже через два года, 4 октября 1959 года, запущена станция Луна-3, выполнившая первый в истории гравитационный маневр и впервые сфотографировавшая обратную сторону Луны.

Геометрия гравитационных маневров



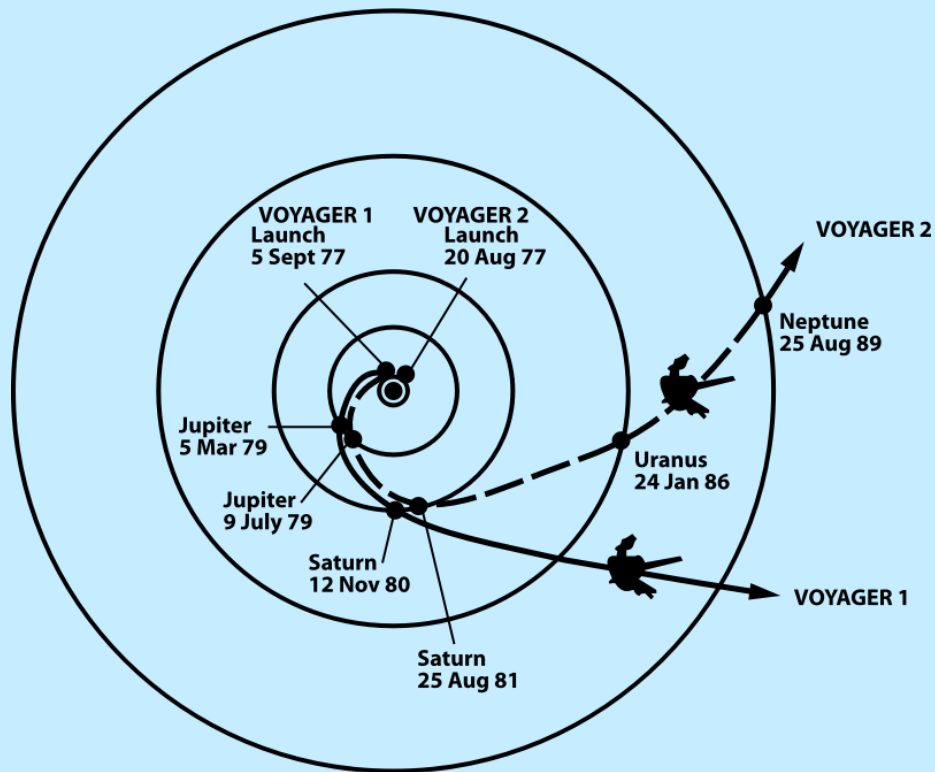
Final heliocentric velocity (bold)
for energy-reducing GA maneuver



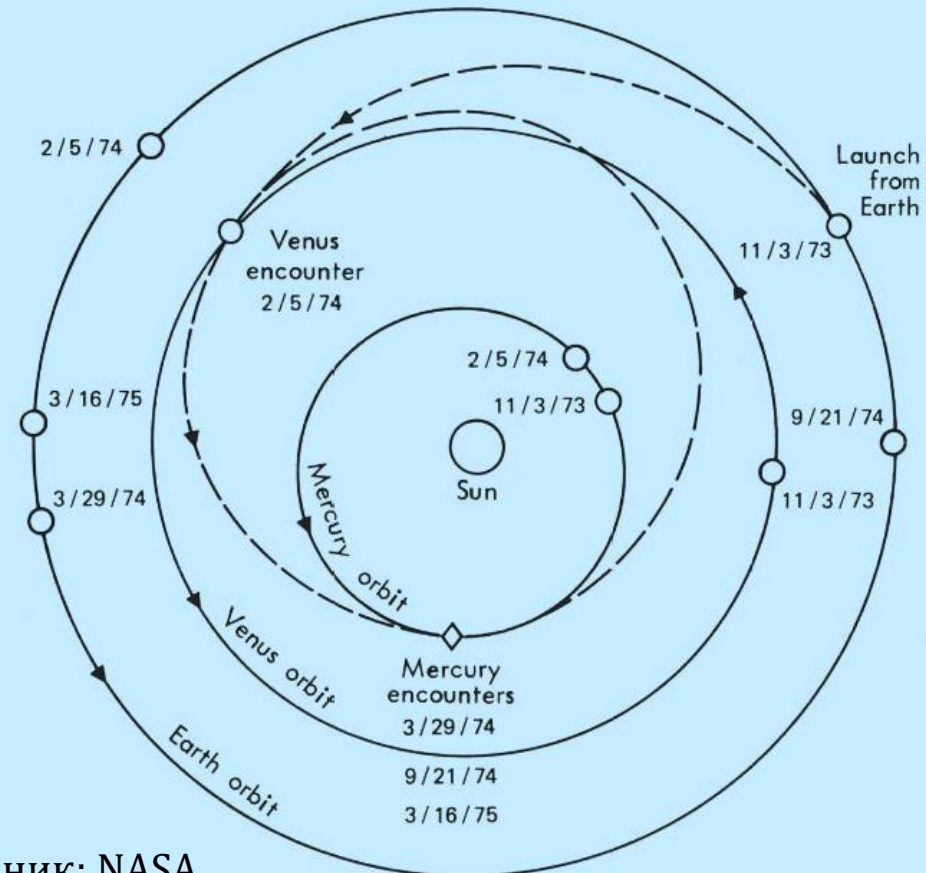
Final heliocentric velocity (bold)
for energy-increasing GA maneuver

Траектории миссий с несколькими гравитационными маневрами

Траектории полета МКА Voyager-1 и Voyager-2



Траектория МКА Mariner-10

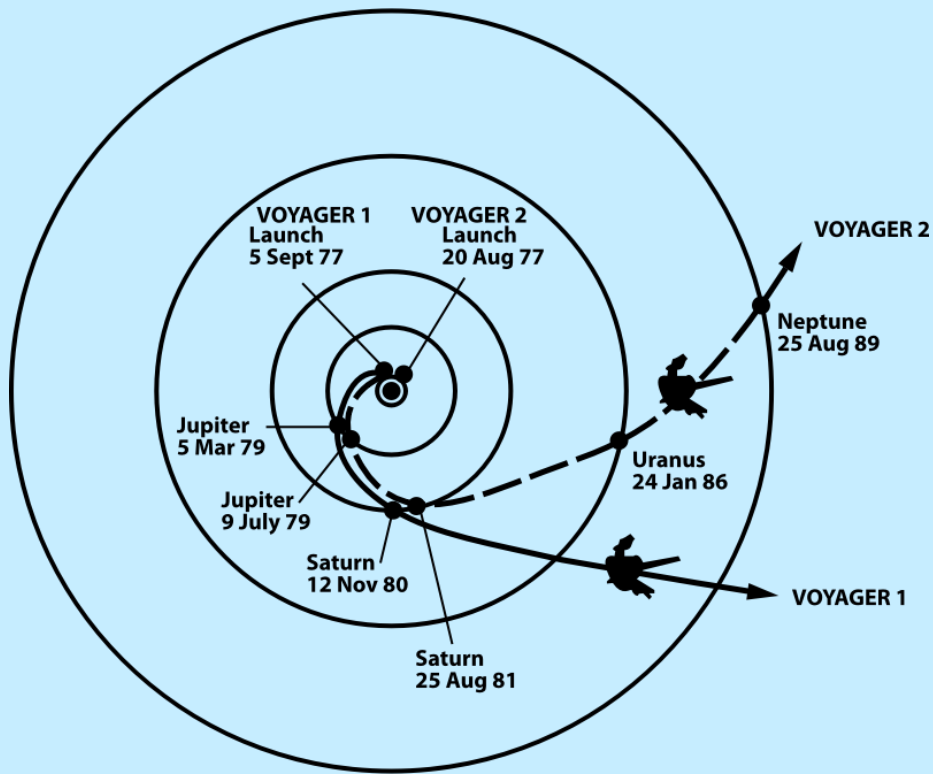


Источник: Википедия

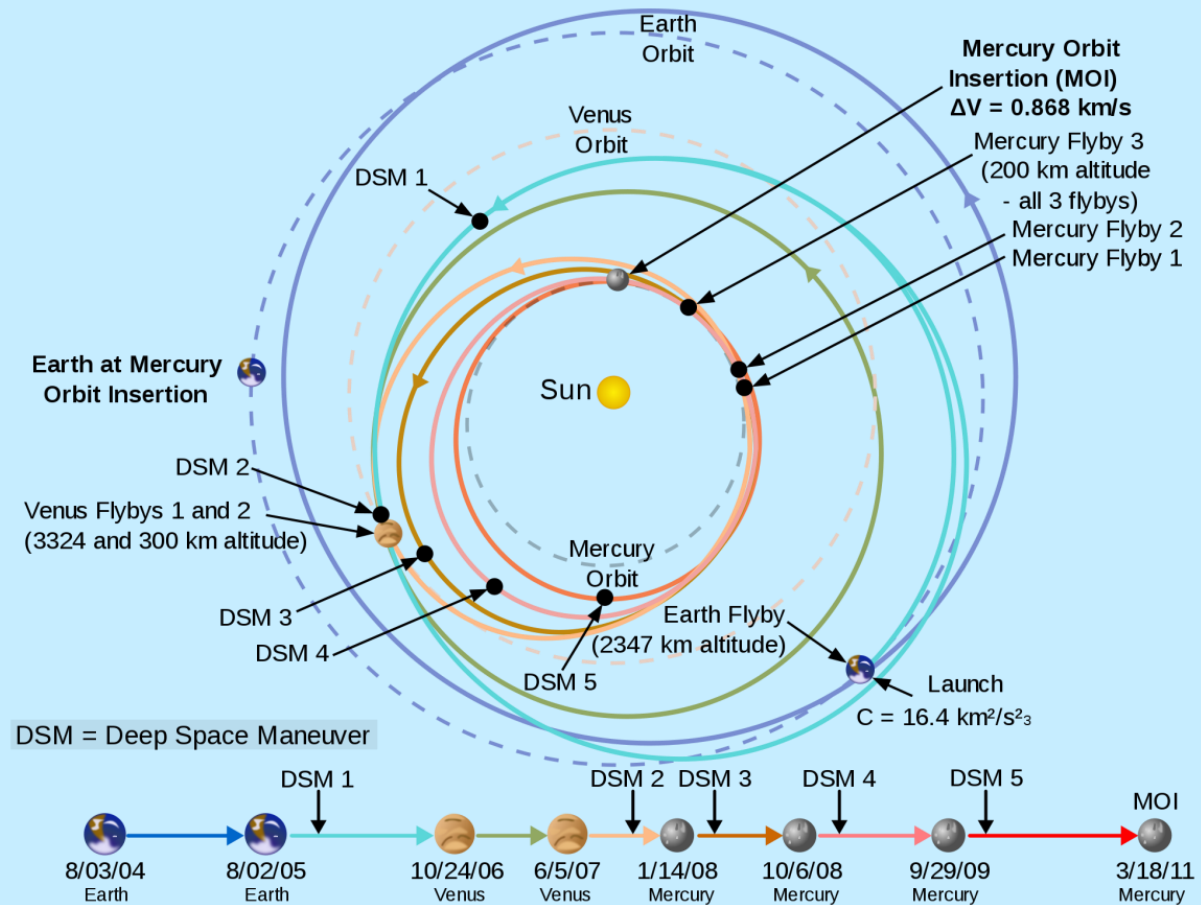
Источник: NASA

Траектории миссий с несколькими гравитационными маневрами

Траектории полета МКА Voyager-1 и Voyager-2



Траектория МКА MESSENGER



Источник: Википедия

Источник: McAdams, J.V., et al., "Trajectory Design and Maneuver Strategy for the MESSENGER Mission to Mercury," Journal of Spacecraft and Rockets, 2006, Vol. 43, No. 5, pp. 1054-1064.

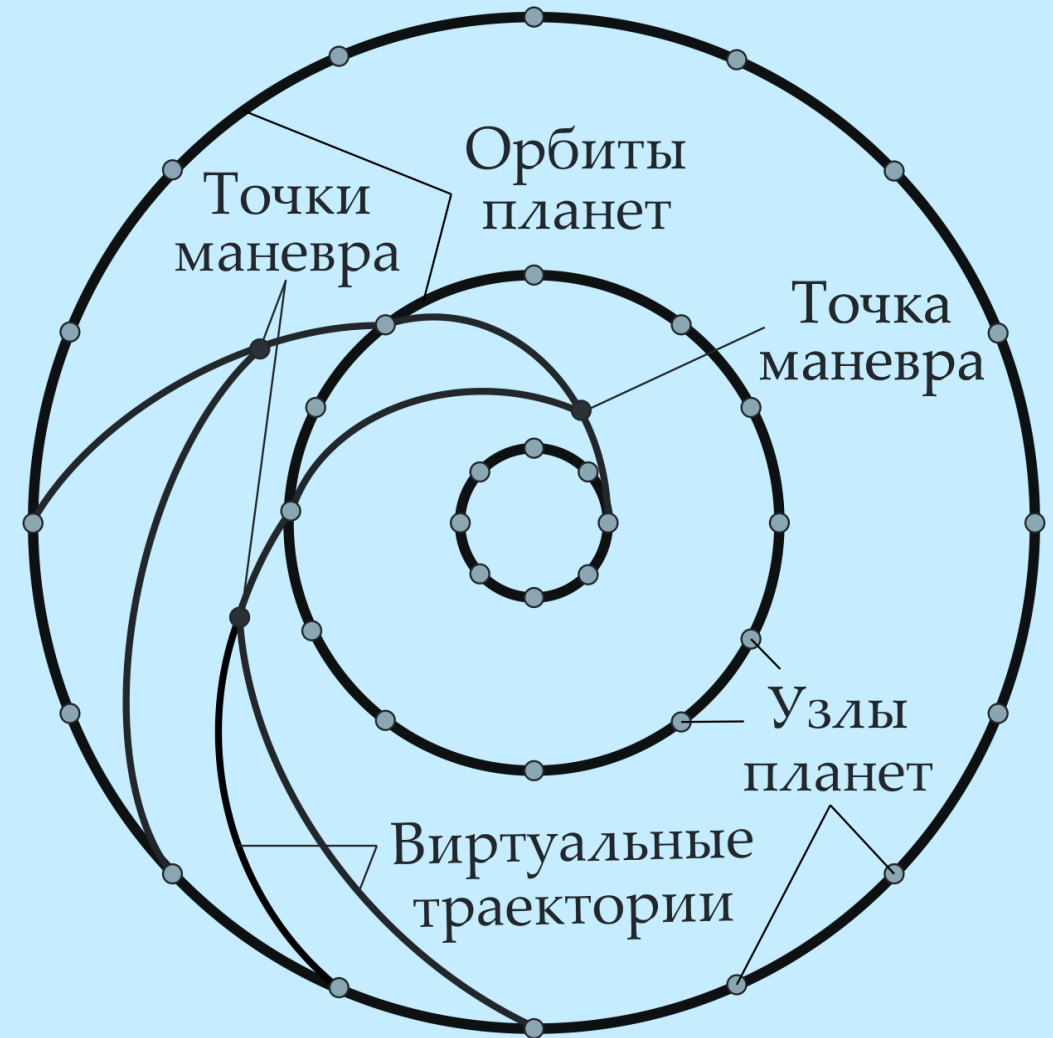
Метод виртуальных траекторий

Идея метода очень проста:

- 1) Орбиты планет считаются неизменными во времени кеплеровыми эллипсами
- 2) На этих эллипсах отмечаются с некоторым шагом точки (узлы)
- 3) Виртуальная траектория – траектория, проходящая через узлы на орбитах планет согласно выбранному планетному маршруту
- 4) Базу виртуальных траекторий для каждого планетного маршрута достаточно рассчитать один раз

Две модификации метода:

- а) с активными гравитационными маневрами
- б) с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе



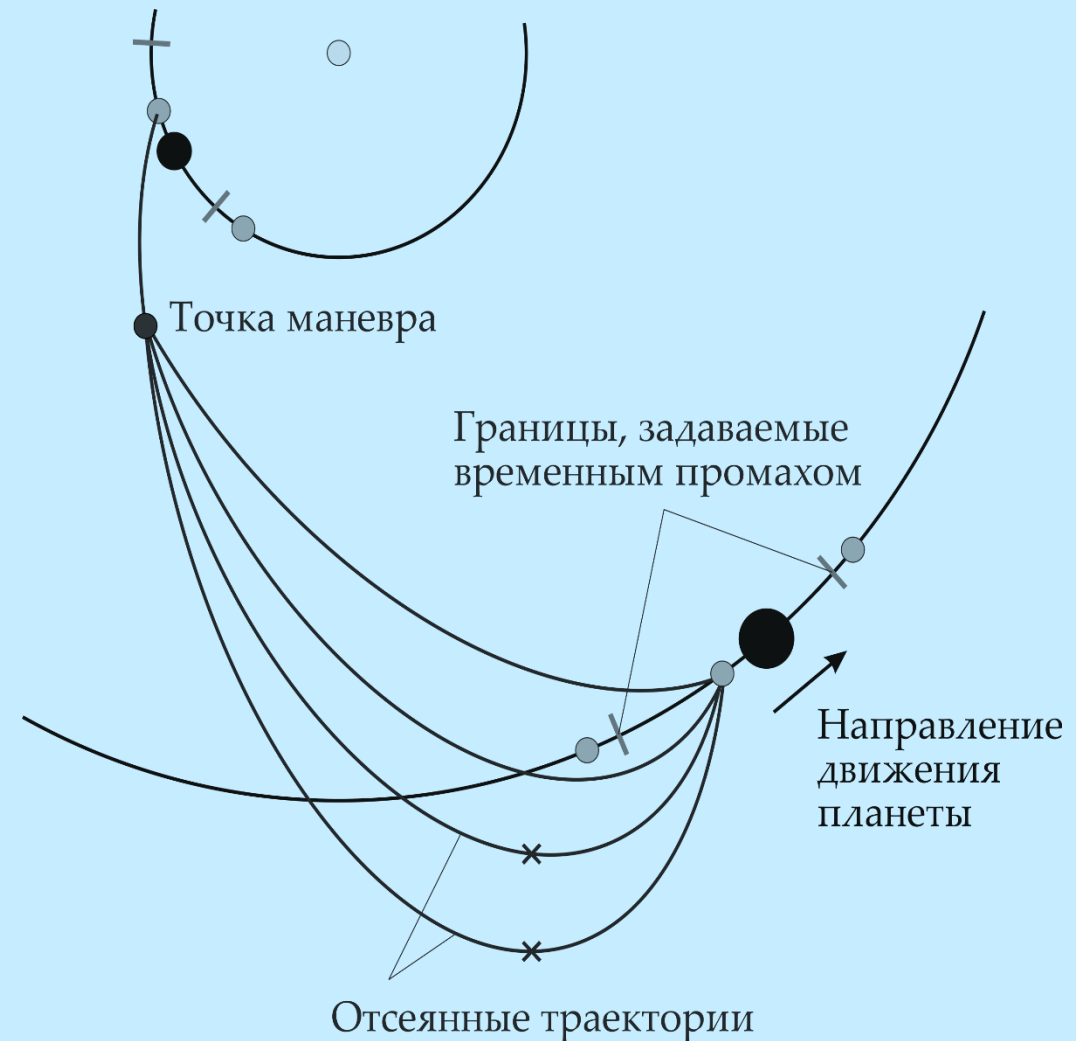
Метод виртуальных траекторий

Идея метода очень проста:

- 1) Орбиты планет считаются неизменными во времени кеплеровыми эллипсами
- 2) На этих эллипсах отмечаются с некоторым шагом точки (узлы)
- 3) Виртуальная траектория – траектория, проходящая через узлы на орбитах планет согласно выбранному планетному маршруту
- 4) Базу виртуальных траекторий для каждого планетного маршрута достаточно рассчитать один раз

Две модификации метода:

- а) с активными гравитационными маневрами
- б) с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе

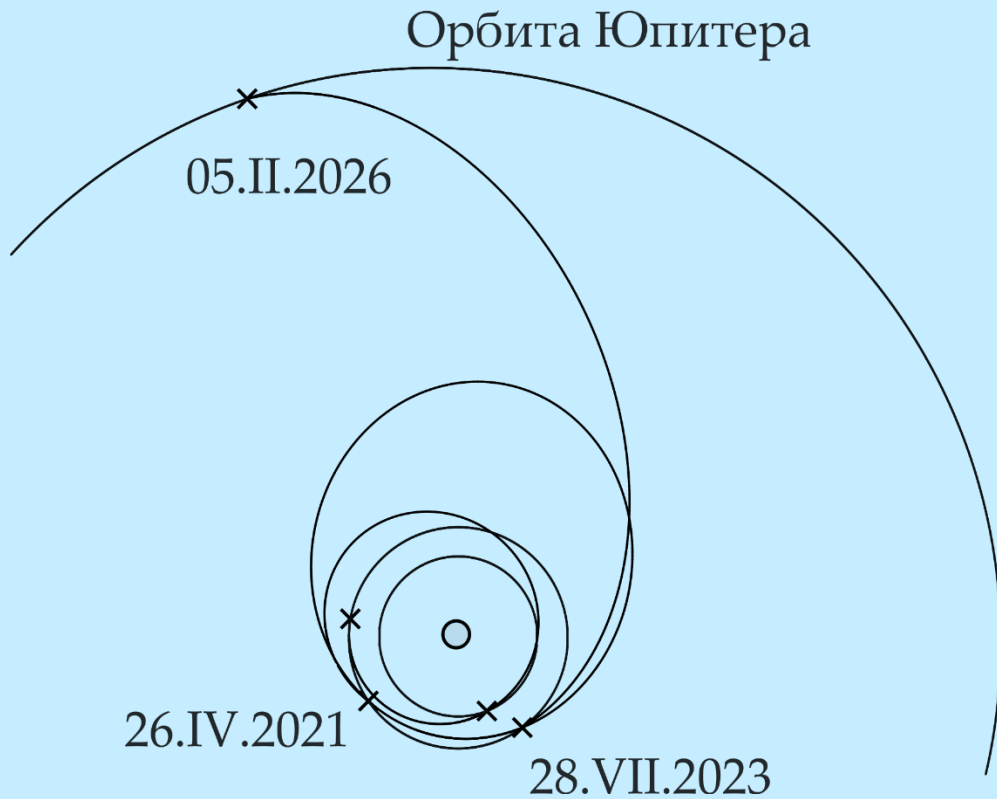


На пути к онлайн-оптимизации траекторий

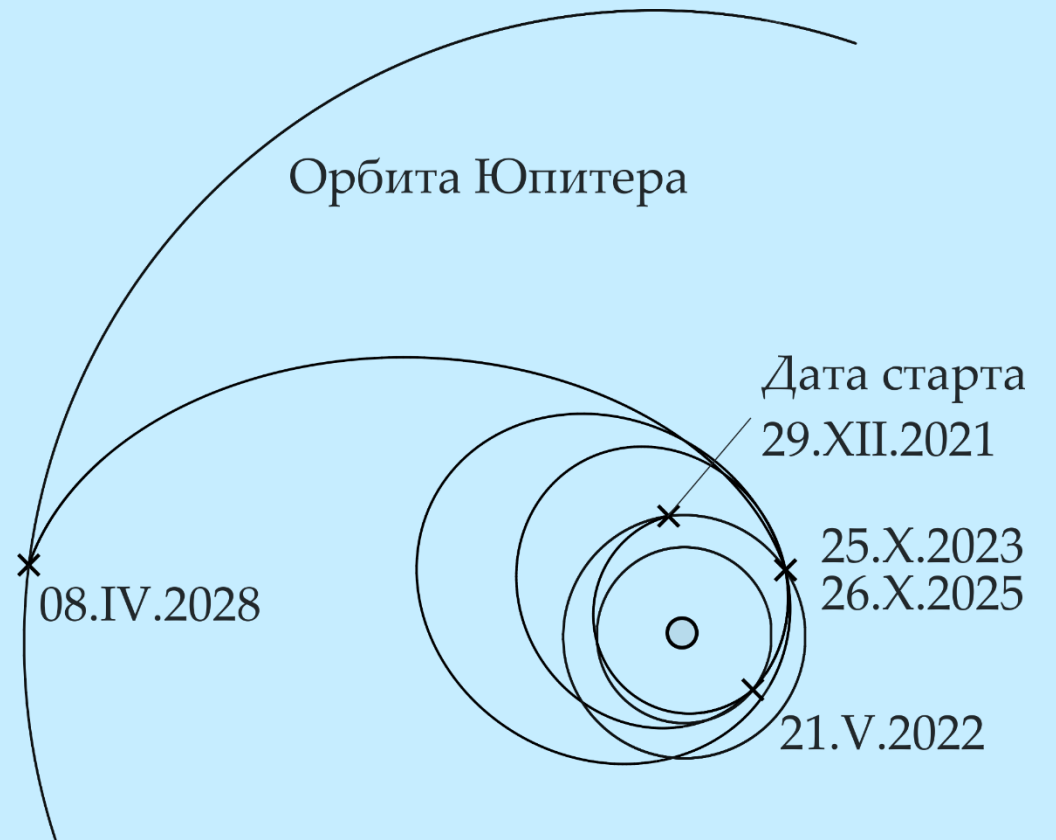
Число гравитационных маневров	Время на просев и уточнение базы виртуальных траекторий, минут*
1	0.5–1
2	2–5
3	10–25
4	50-100

*Абсолютные значения затраченного времени получены для процессора Intel Core i7-5500U с тактовой частотой 2.40 ГГц. Все вычисления проводились последовательно на одном ядре. Объем оперативной памяти 8 Гб (в процессе расчетов загрузка обычно не превышала 1000 Мб).

Траектории перелета к Юпитеру. Маршрут Земля-Венера-Земля-Земля-Юпитер

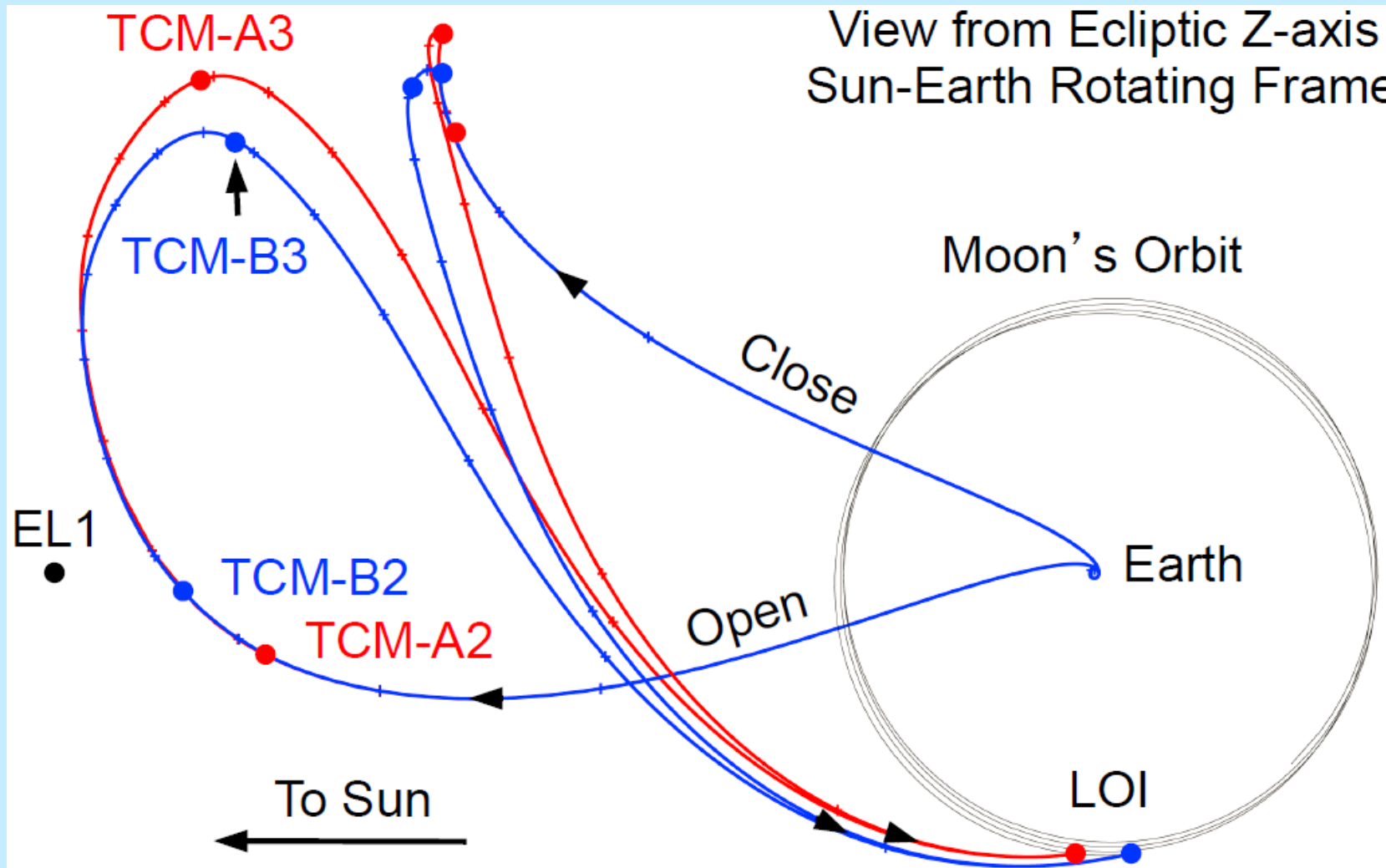


Оптимальная траектория с датой прилета в 2026 году

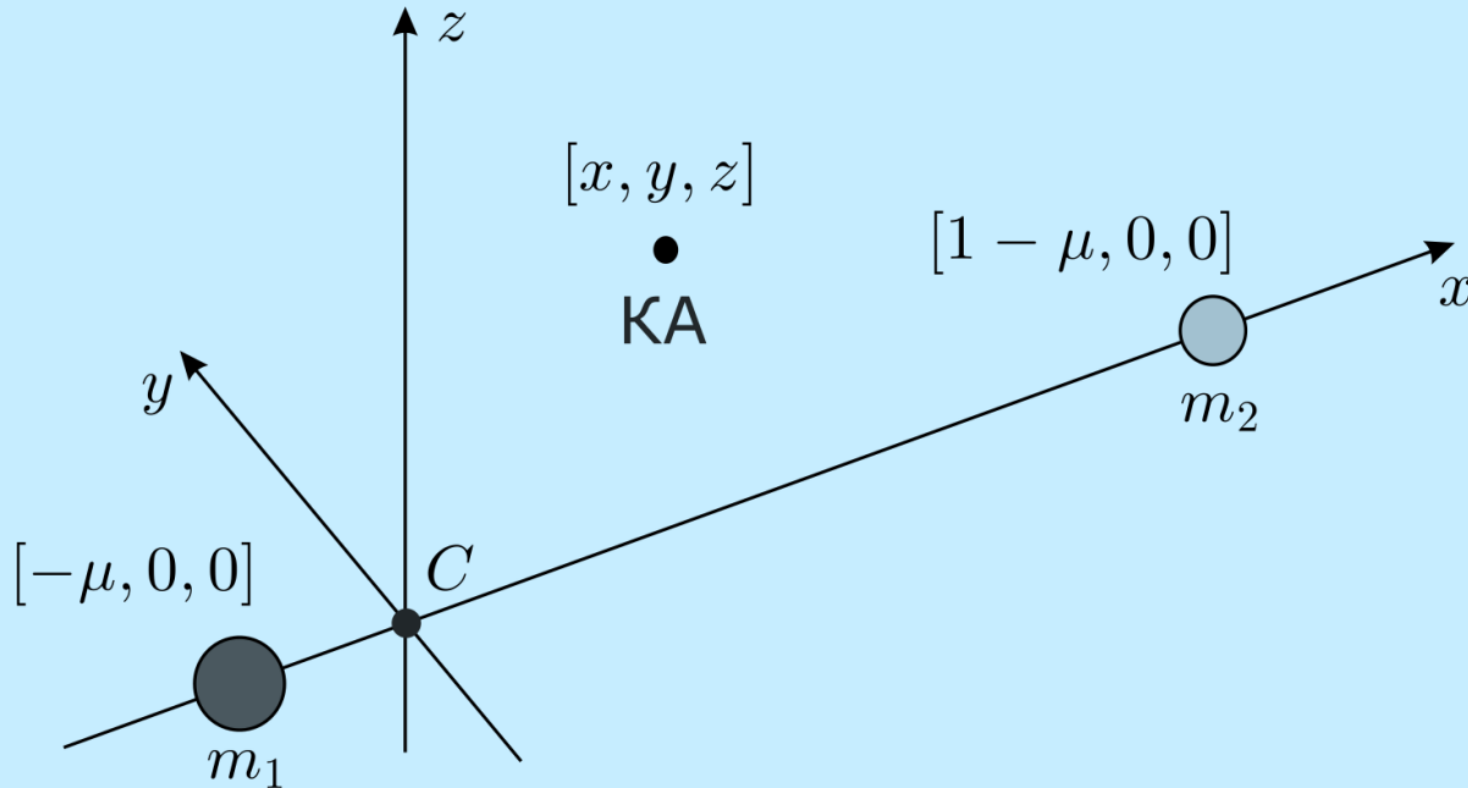


Оптимальная траектория с датой прилета в 2028 году

Низкоэнергетическая траектория перелета к Луне в миссии GRAIL (NASA, 2011)



Круговая ограниченная задача трех тел



Массовый параметр

$$\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$$

Безразмерные единицы:

$$m_1 = 1 - \mu \quad x_{m_1} = -\mu$$

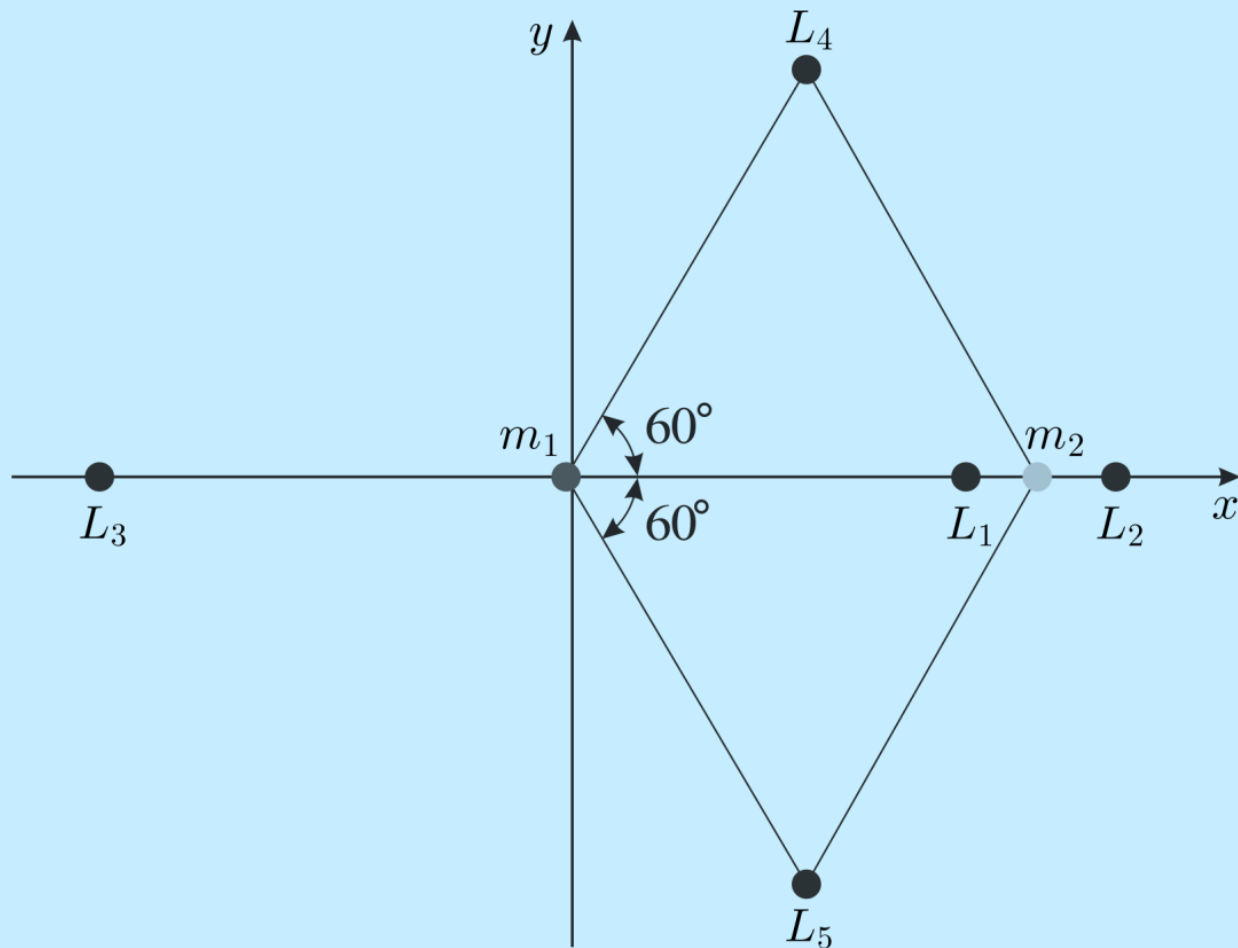
$$m_2 = \mu \quad x_{m_2} = 1 - \mu$$

$$\omega_0 = 1$$

Для системы Земля-Луна $\mu = 1.2150668 \cdot 10^{-2}$

Для системы Солнце-Земля $\mu = 3.0393890 \cdot 10^{-6}$

Уравнения движения во вращающейся СК



Уравнения движения

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \quad \ddot{z} = U_z$$

с обобщенным потенциалом

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}$$

Положения равновесия
соответствуют условиям

$$U_x = U_y = U_z = 0$$

и называются *точками либрации*

Динамика в окрестности коллинеарных точек либрации

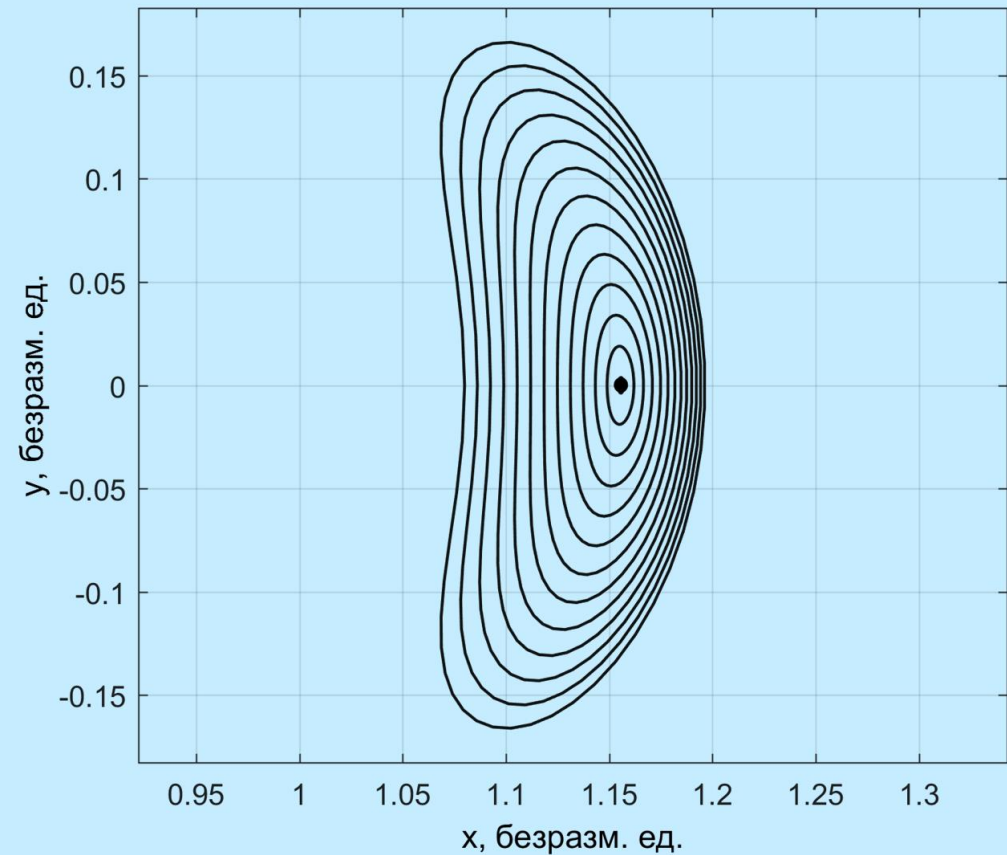
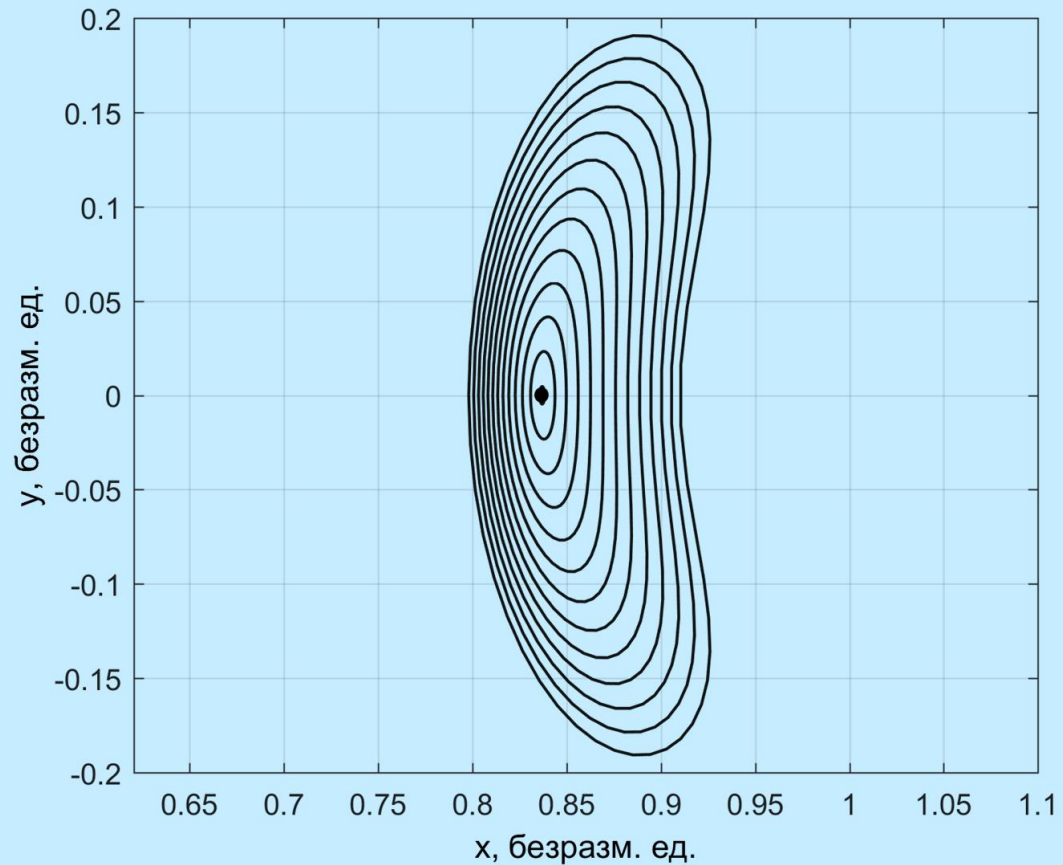
Матрица линеаризованной системы уравнений движения имеет две пары чисто мнимых корней и одну пару действительных корней разных знаков.

Поэтому:

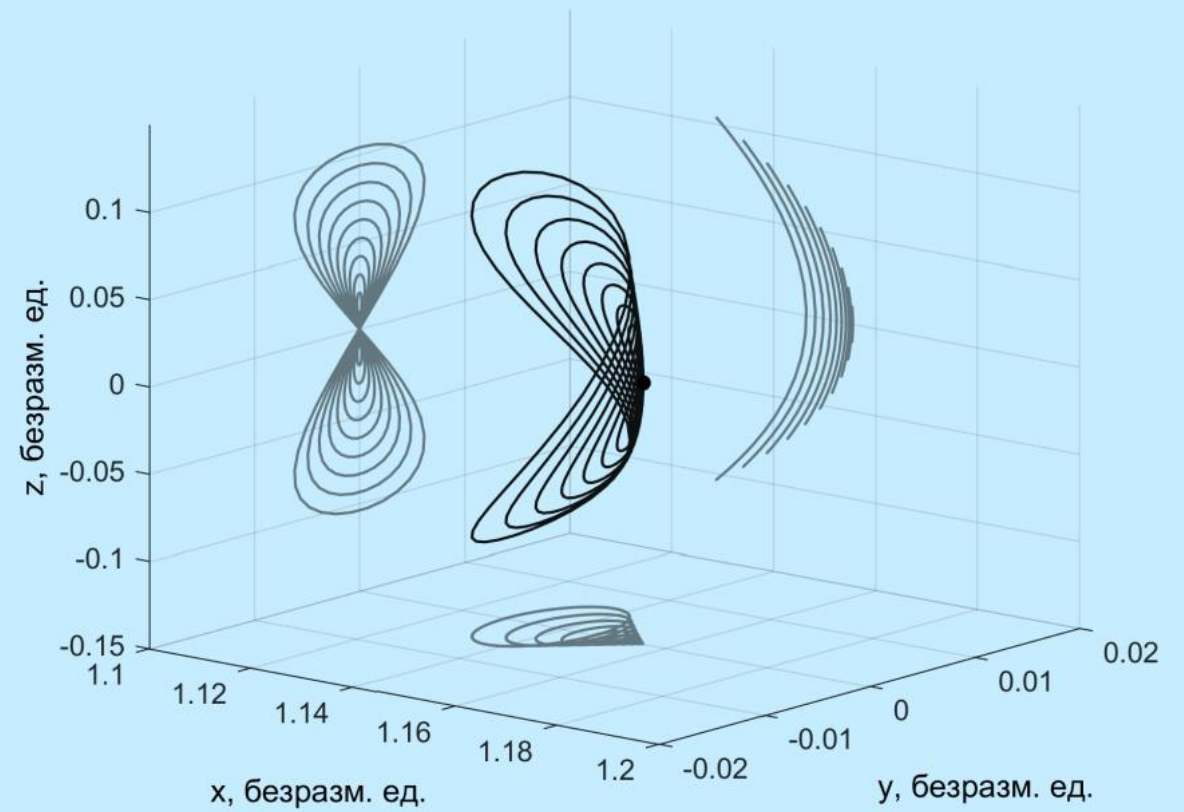
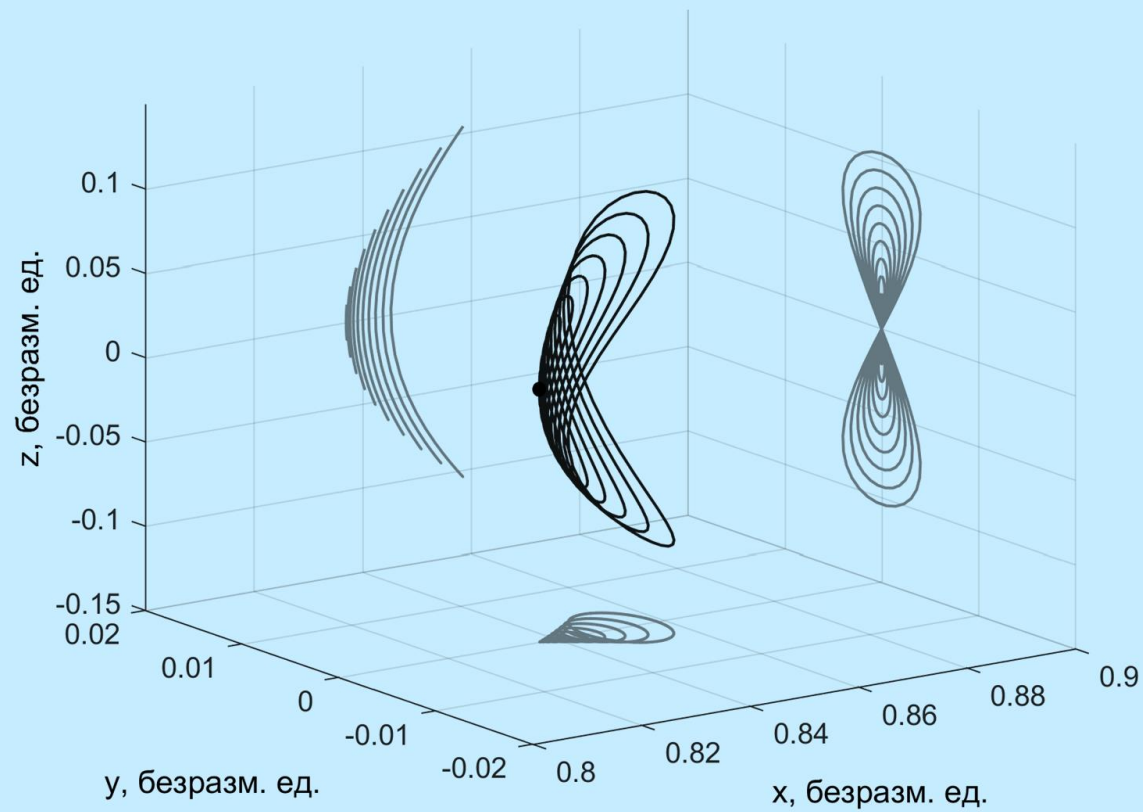
- коллинеарные точки либрации неустойчивы в линейном приближении;
- структура фазового пространства имеет вид седло \times центр \times центр.

Как доказал Ч. Конли (Conley, 1968) на основе теоремы Ляпунова о центре и теоремы Мозера, такая структура фазового пространства сохраняется и в нелинейной динамике.

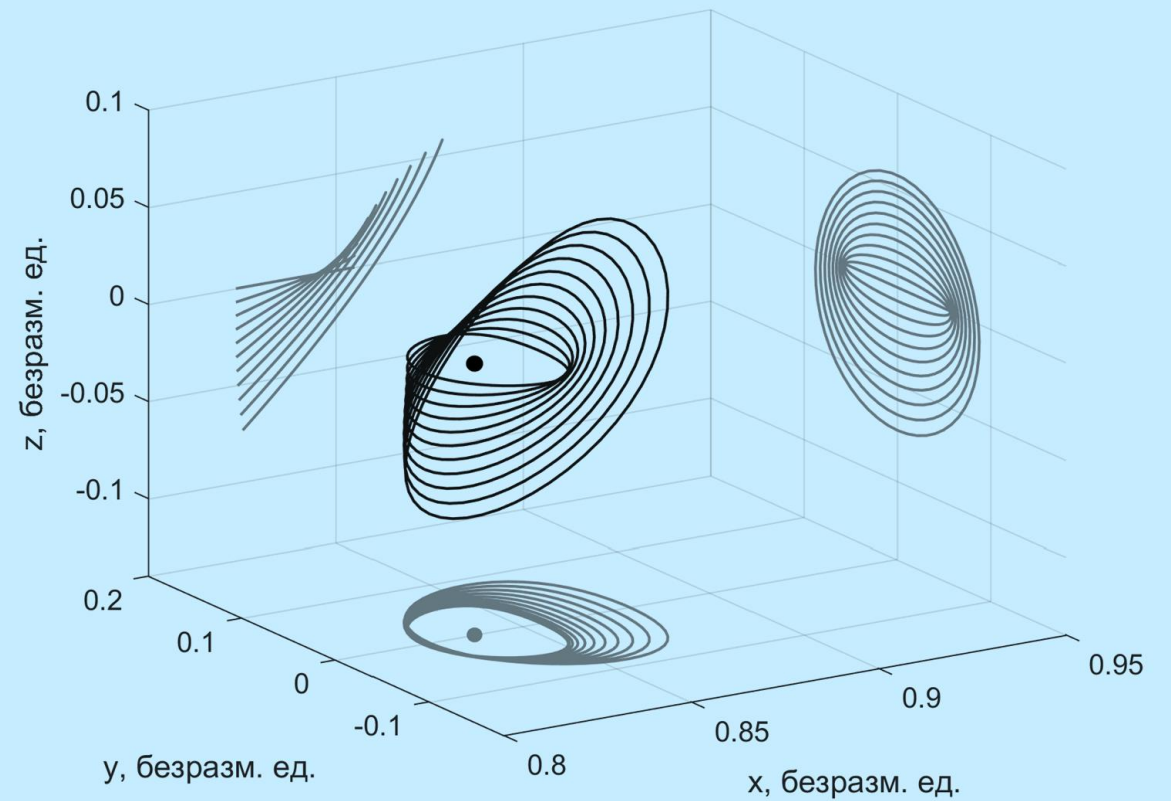
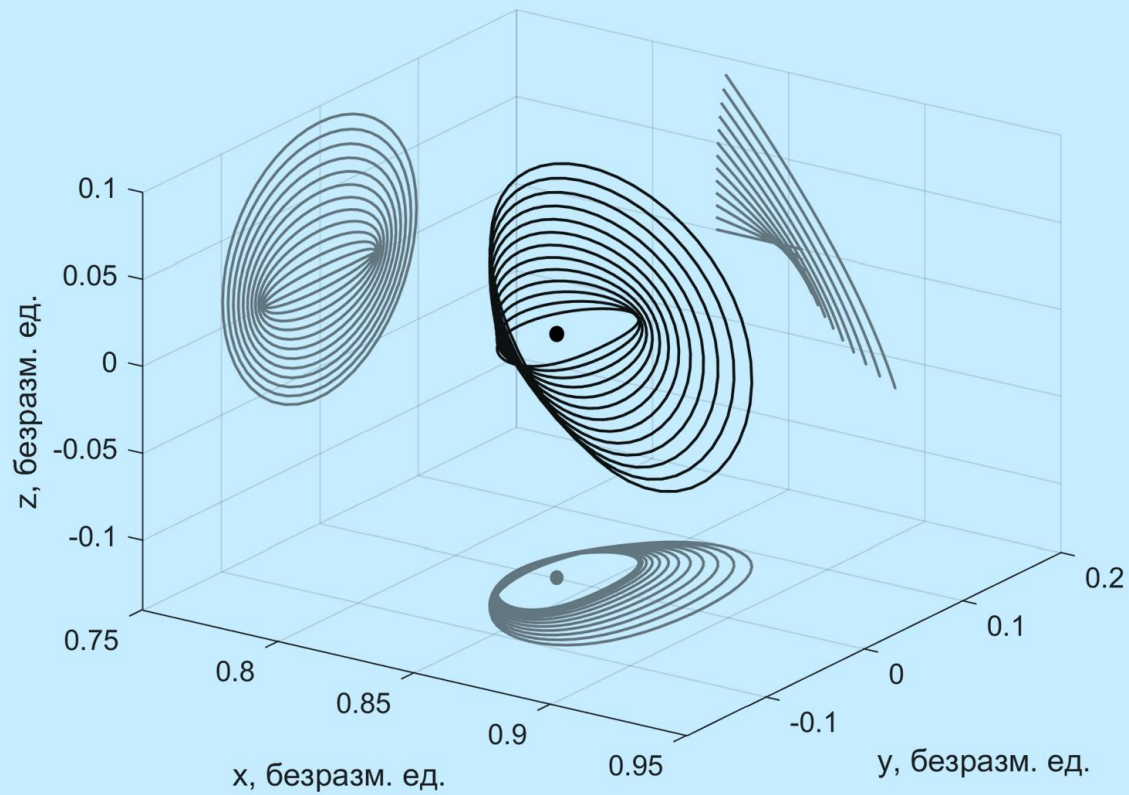
Плоские орбиты Ляпунова вокруг точек L1 и L2 системы Земля-Луна



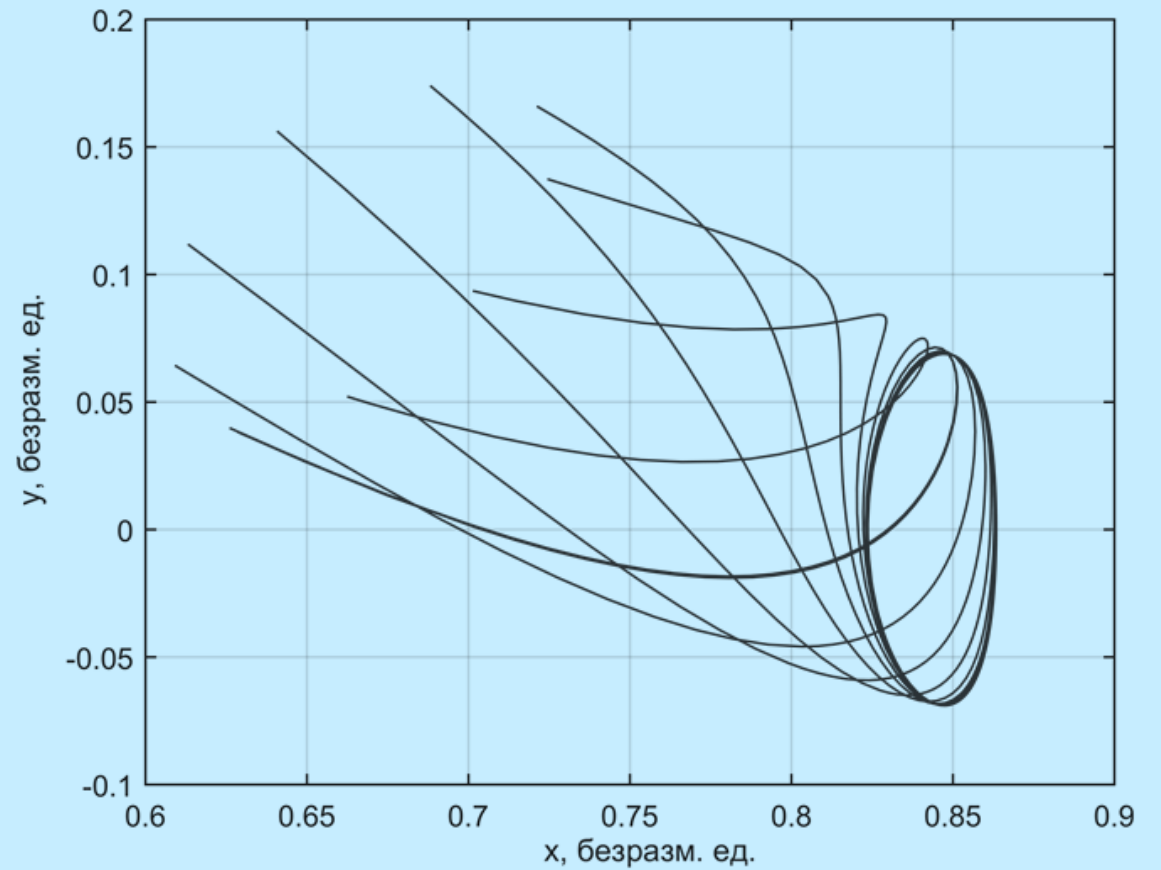
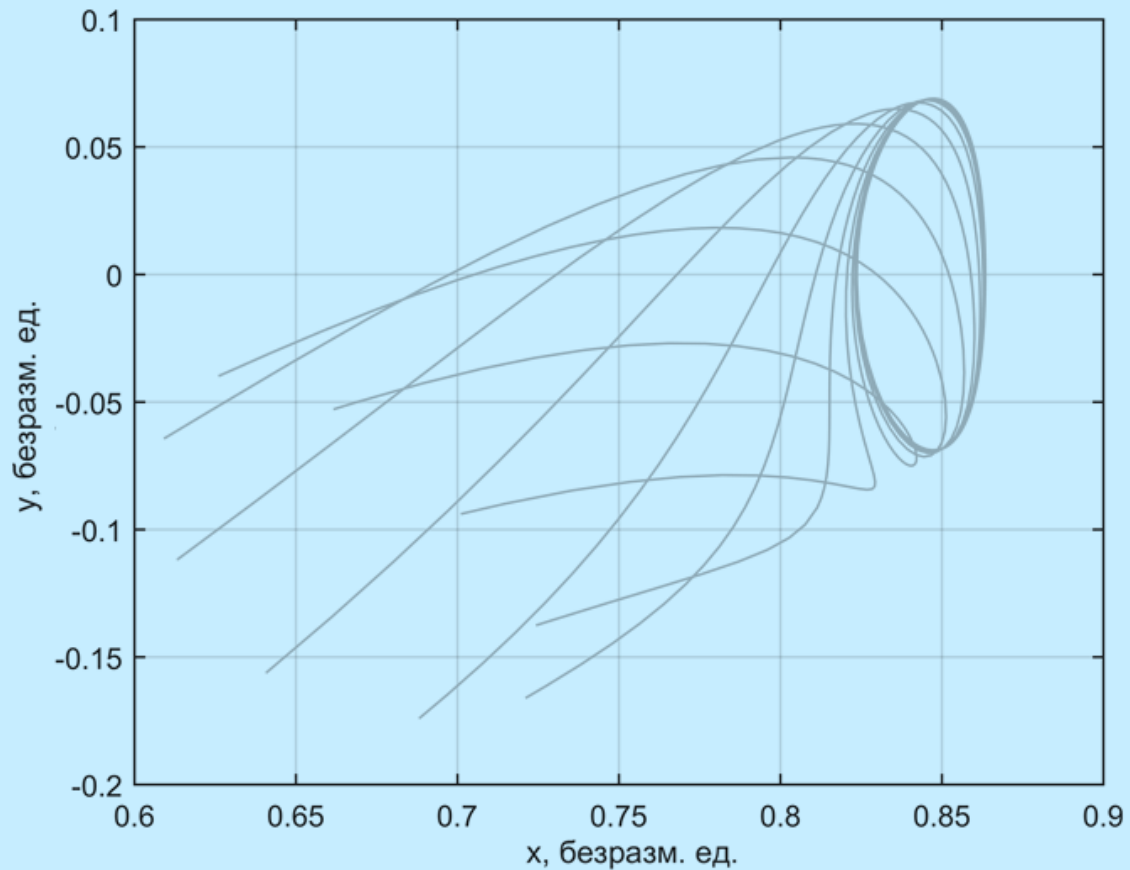
Вертикальные орбиты Ляпунова вокруг точек L1 и L2 системы Земля-Луна



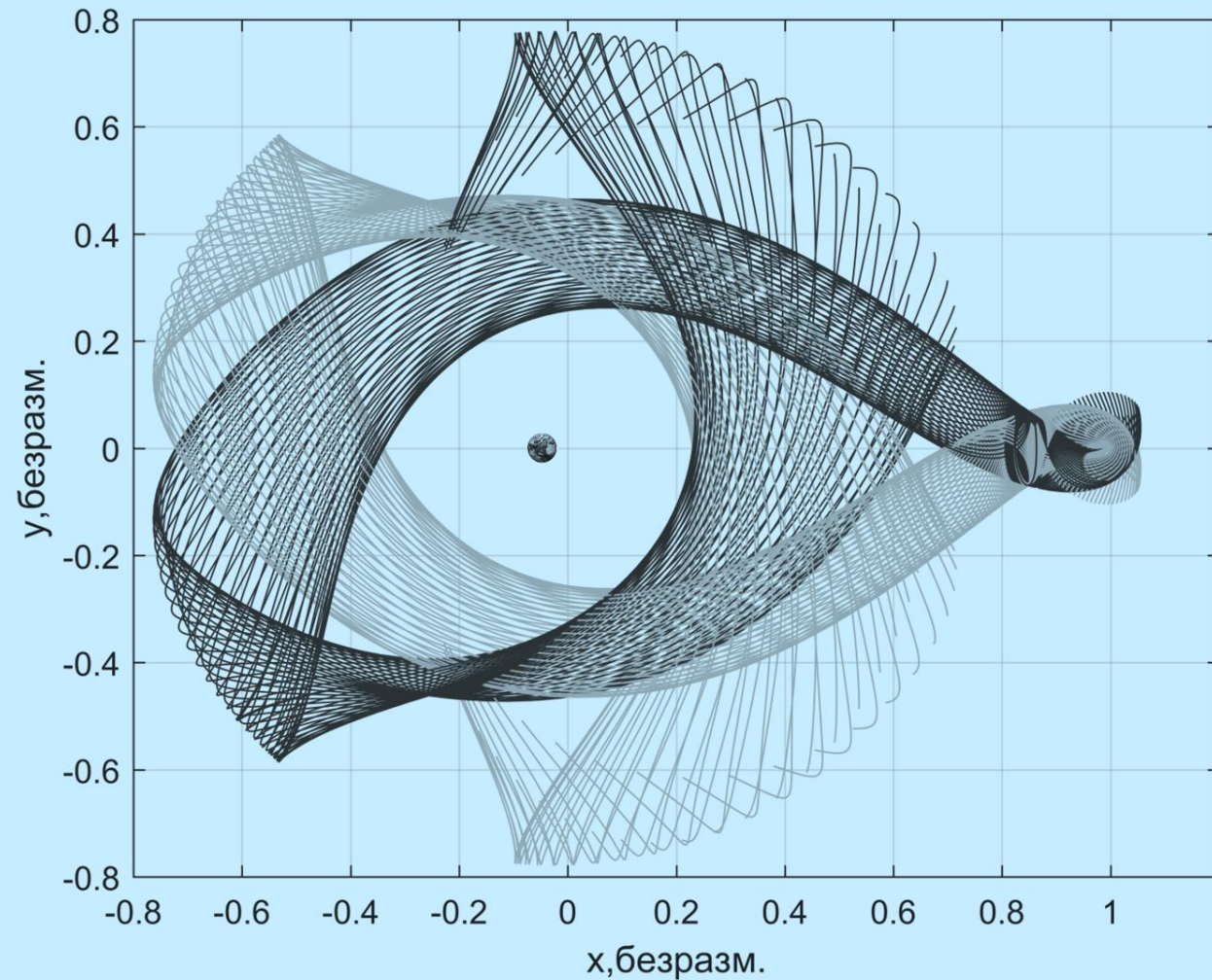
Северные и южные гало-орбиты вокруг точек L1 и L2 системы Земля-Луна



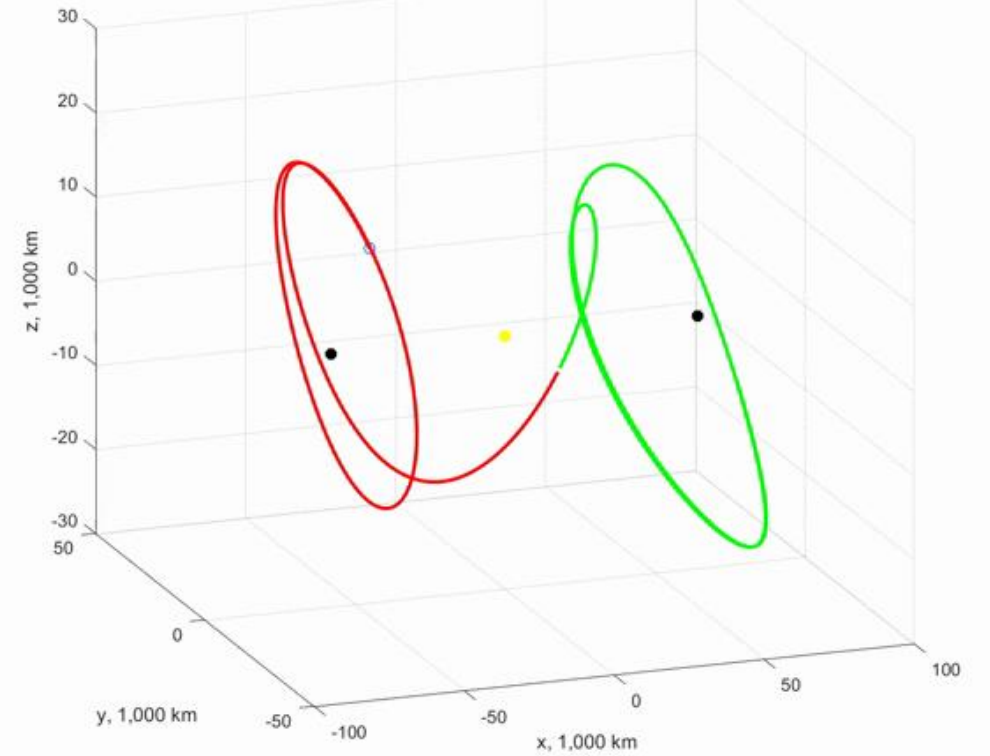
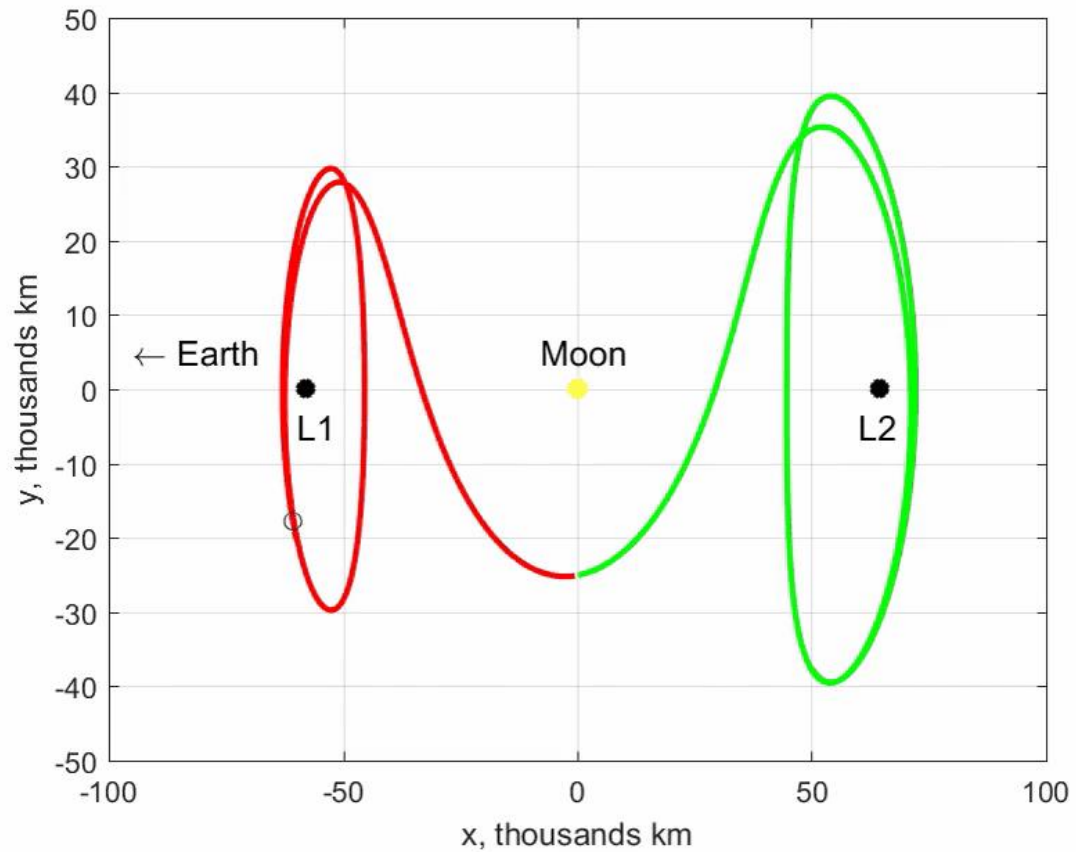
Устойчивое и неустойчивое многообразие гало-орбиты вокруг точки L1 Земля-Луна



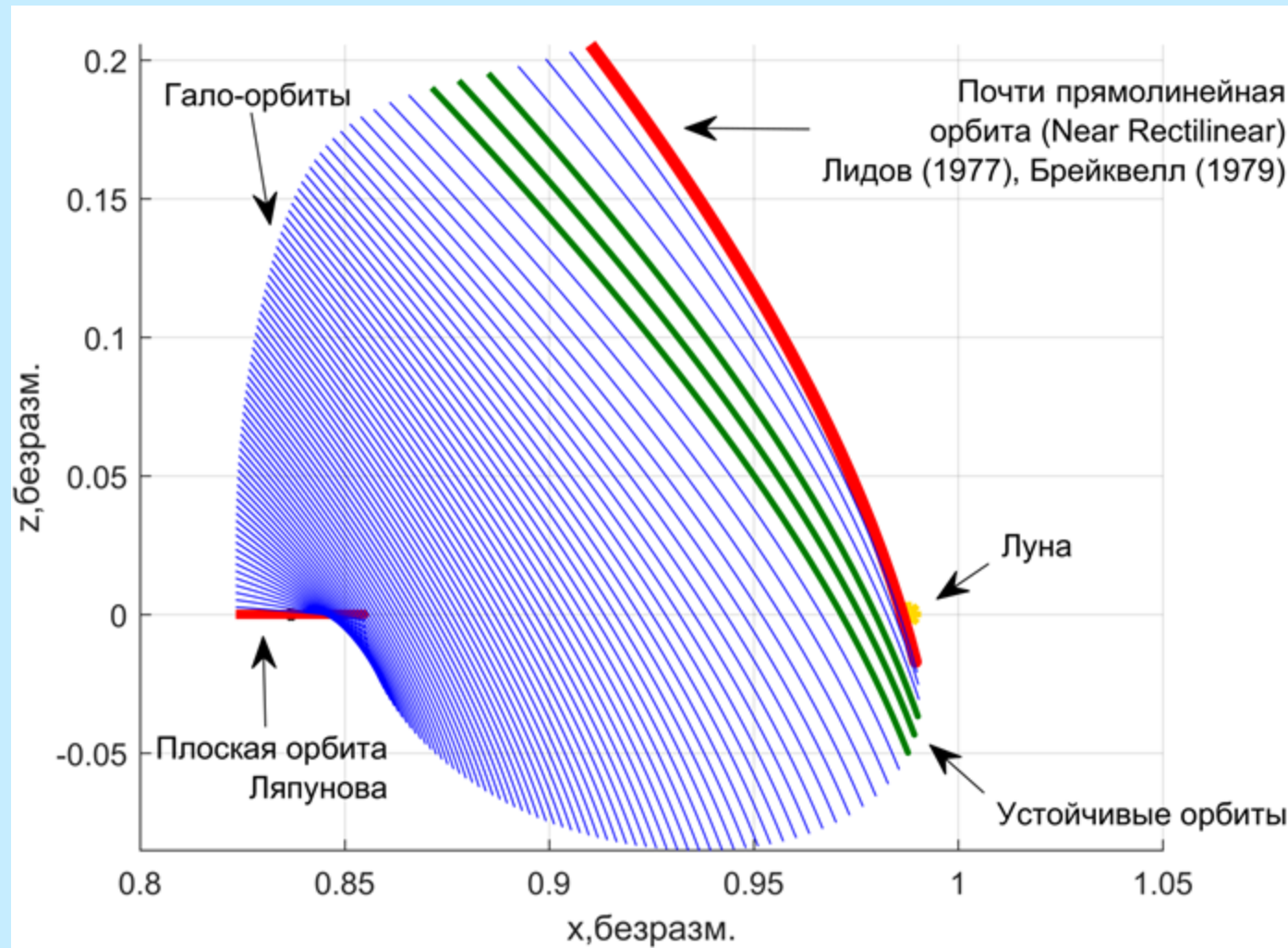
Устойчивое и неустойчивое многообразие гало-орбиты вокруг точки L1 Земля-Луна



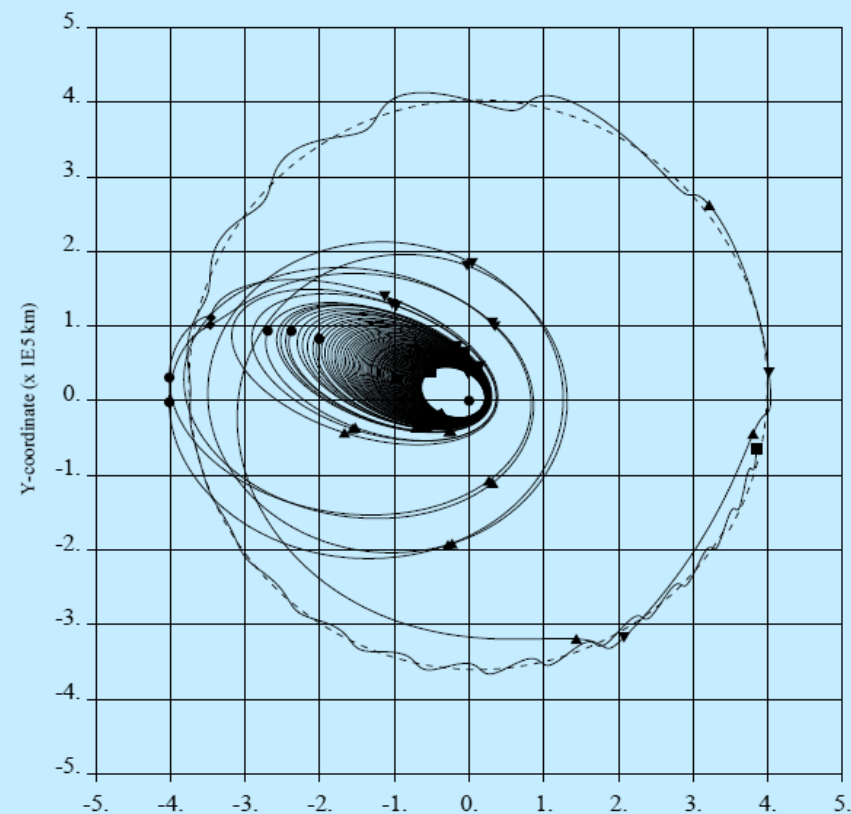
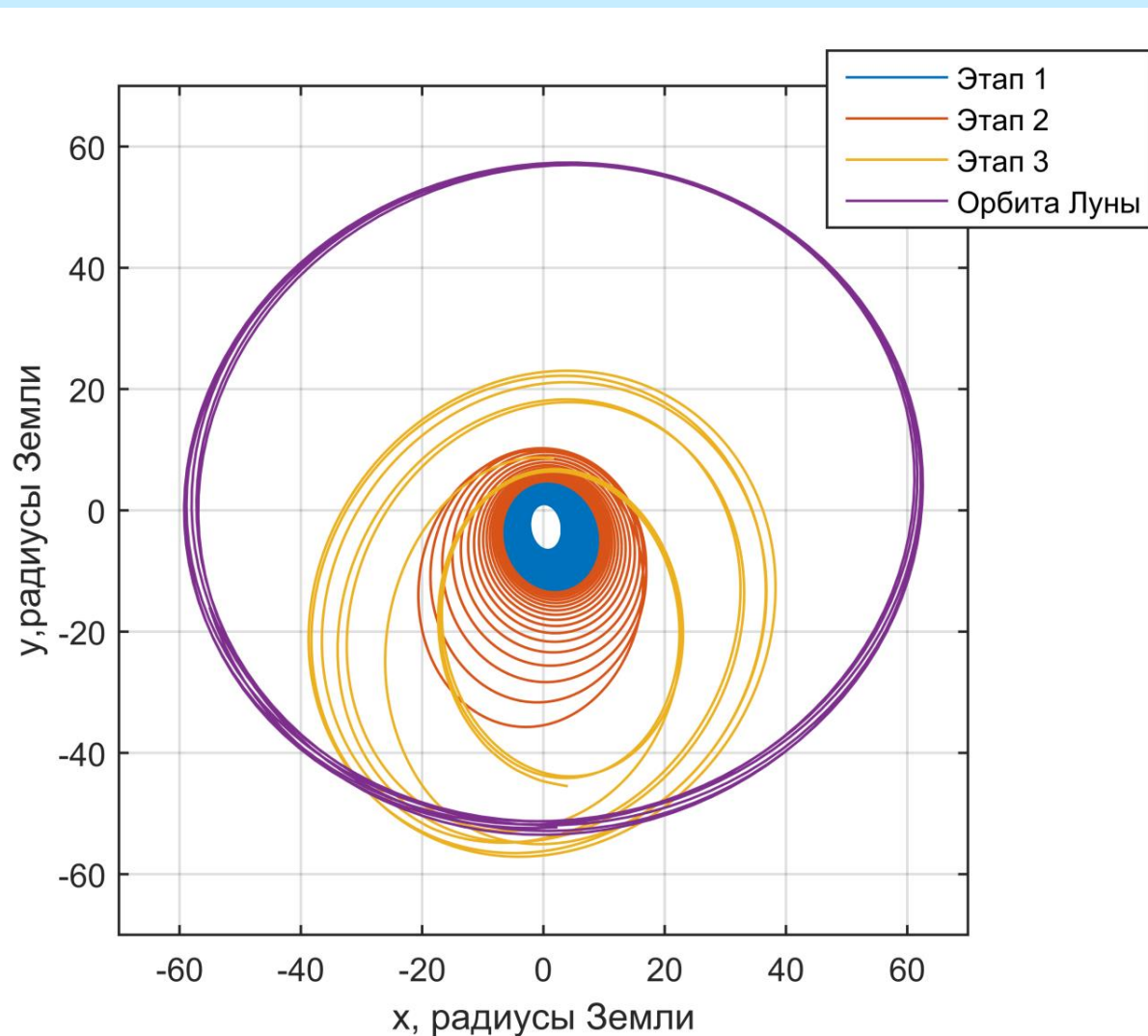
Перелет между лунными гало-орбитами



Семейство гало-орбит вокруг точки L1 системы Земля-Луна ($A_z = 0 \dots 80000$ км)

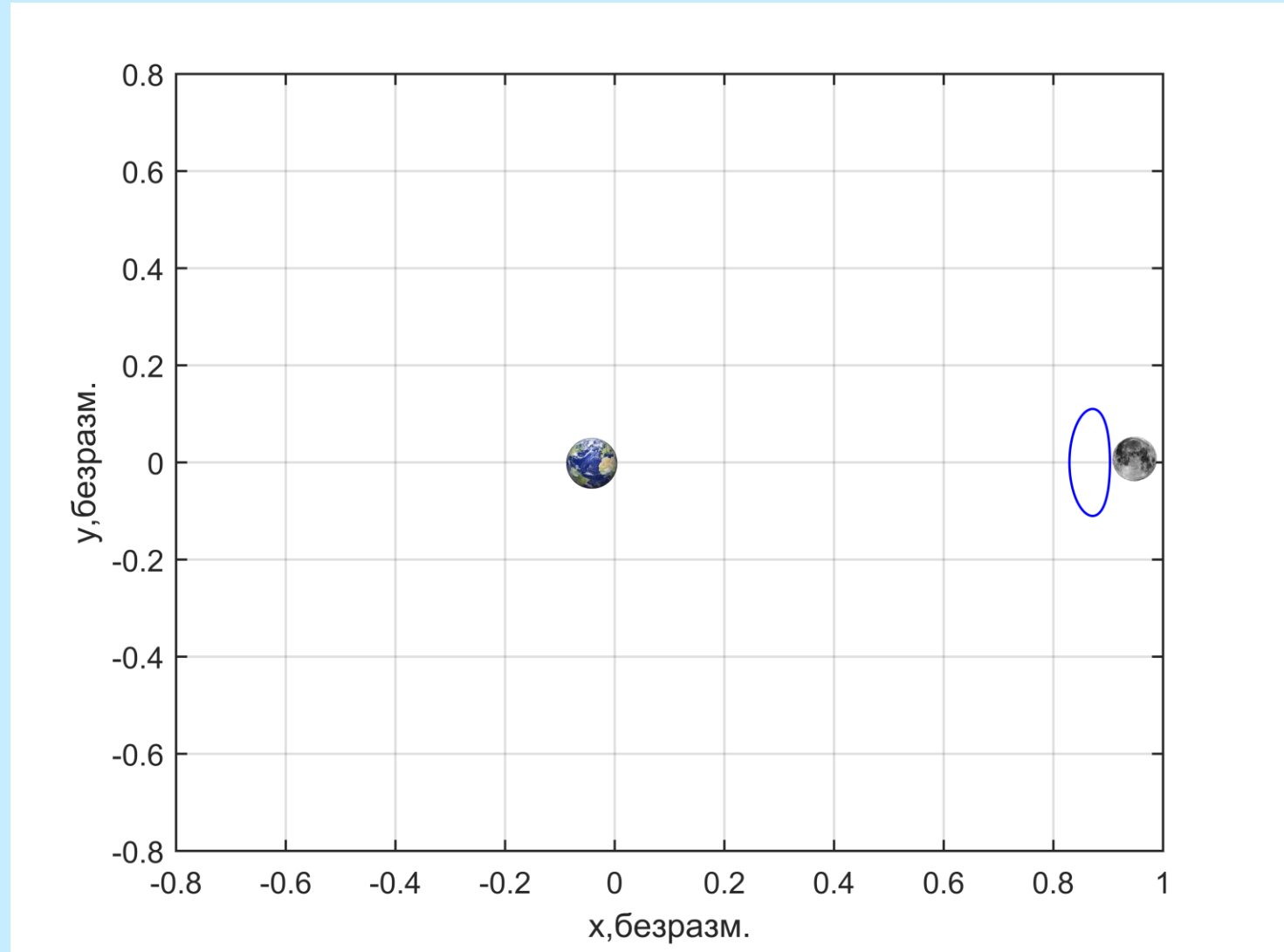


Траектория перелета к Луне с малой тягой



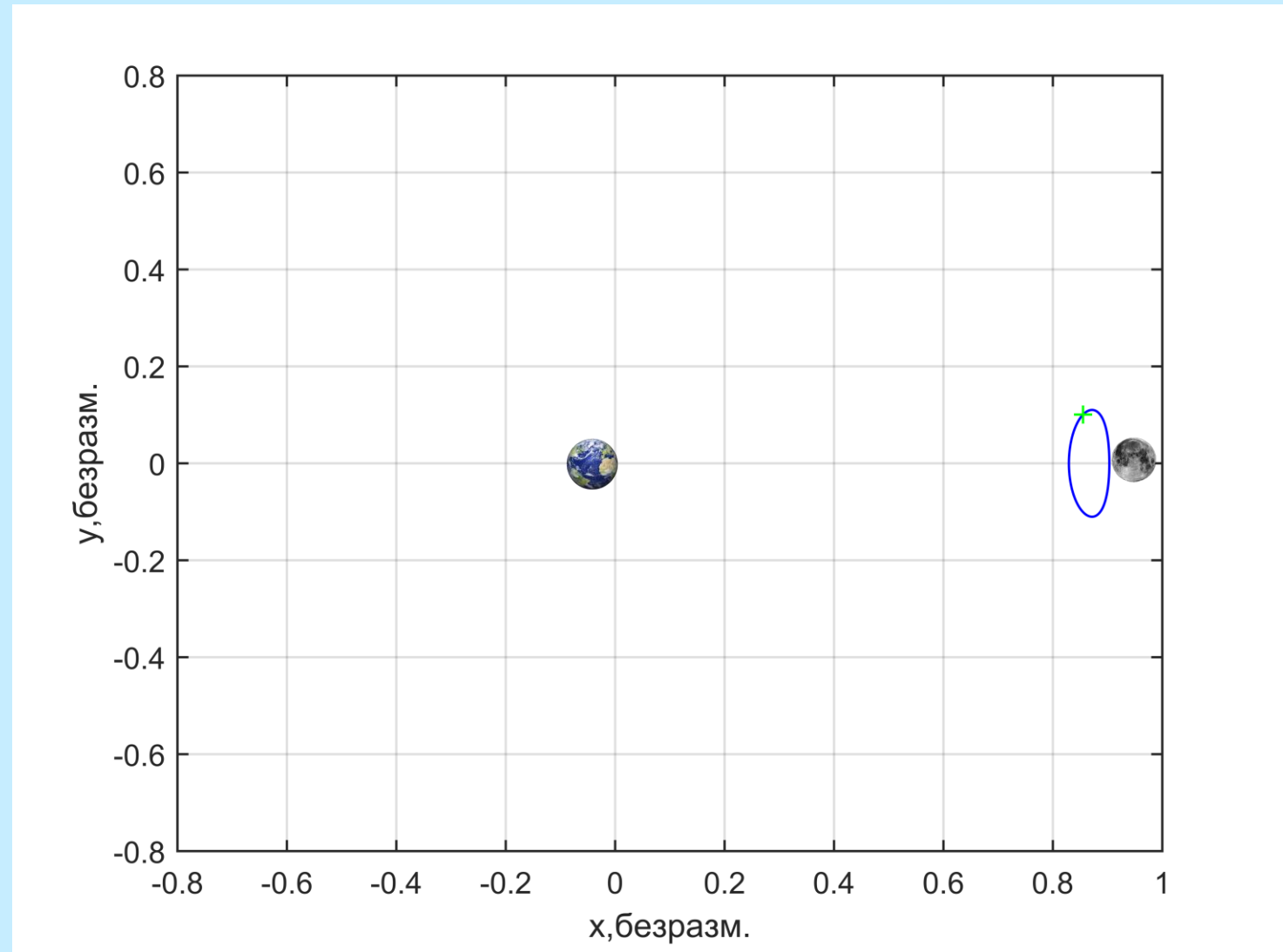
Для сравнения – траектория КА SMART-1 (ESA, 2003)

Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)



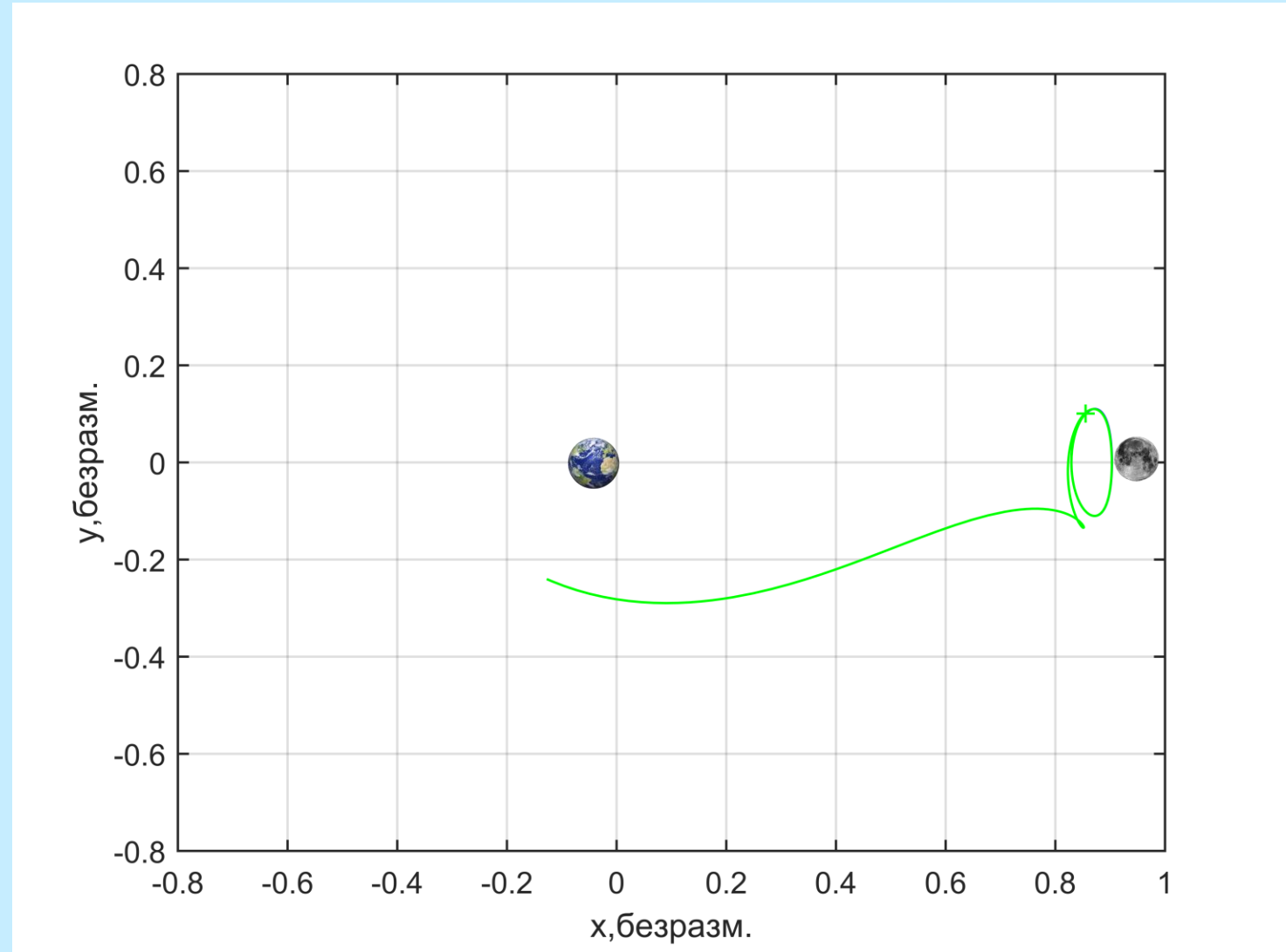
Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$



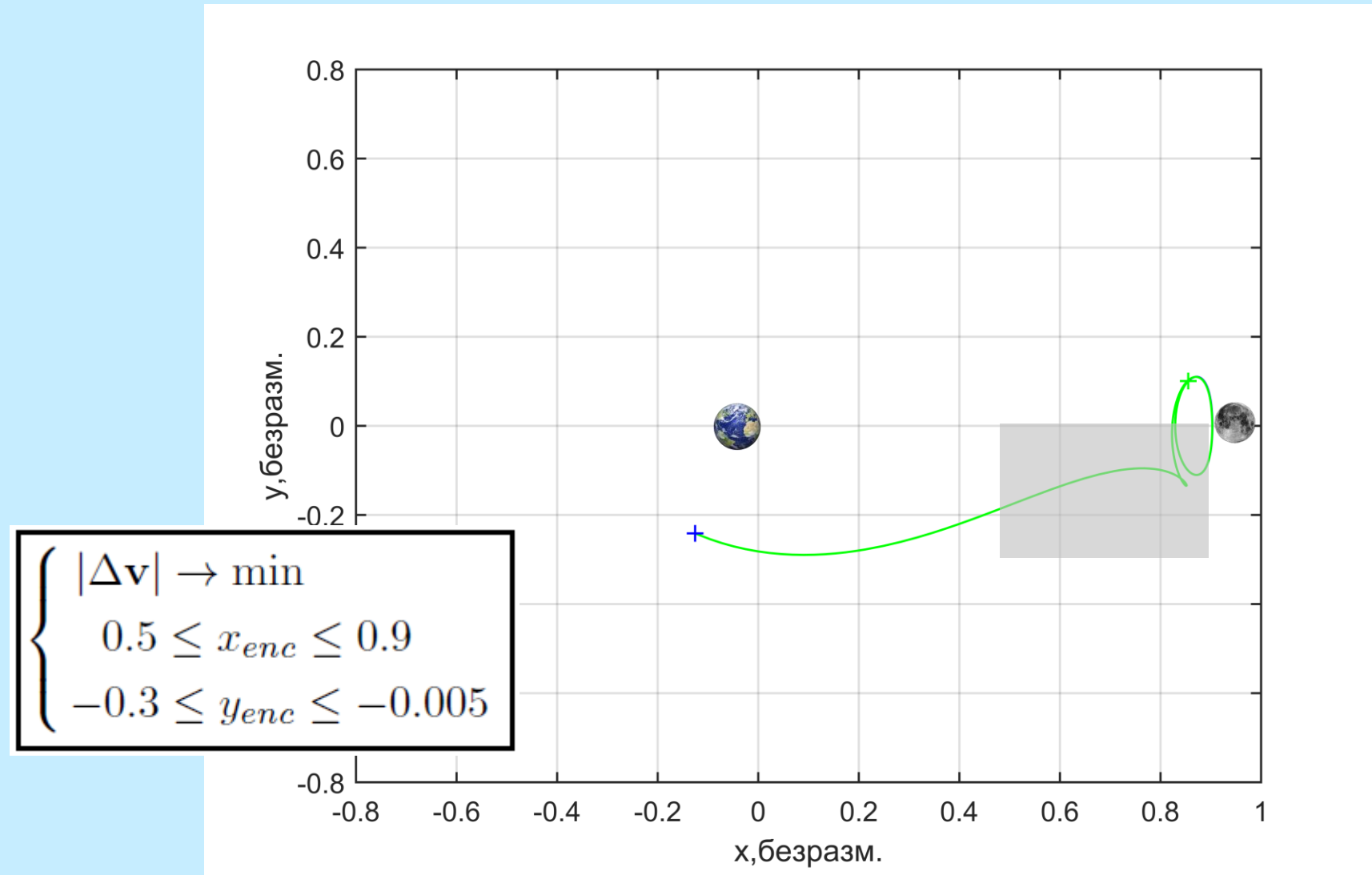
Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$



Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

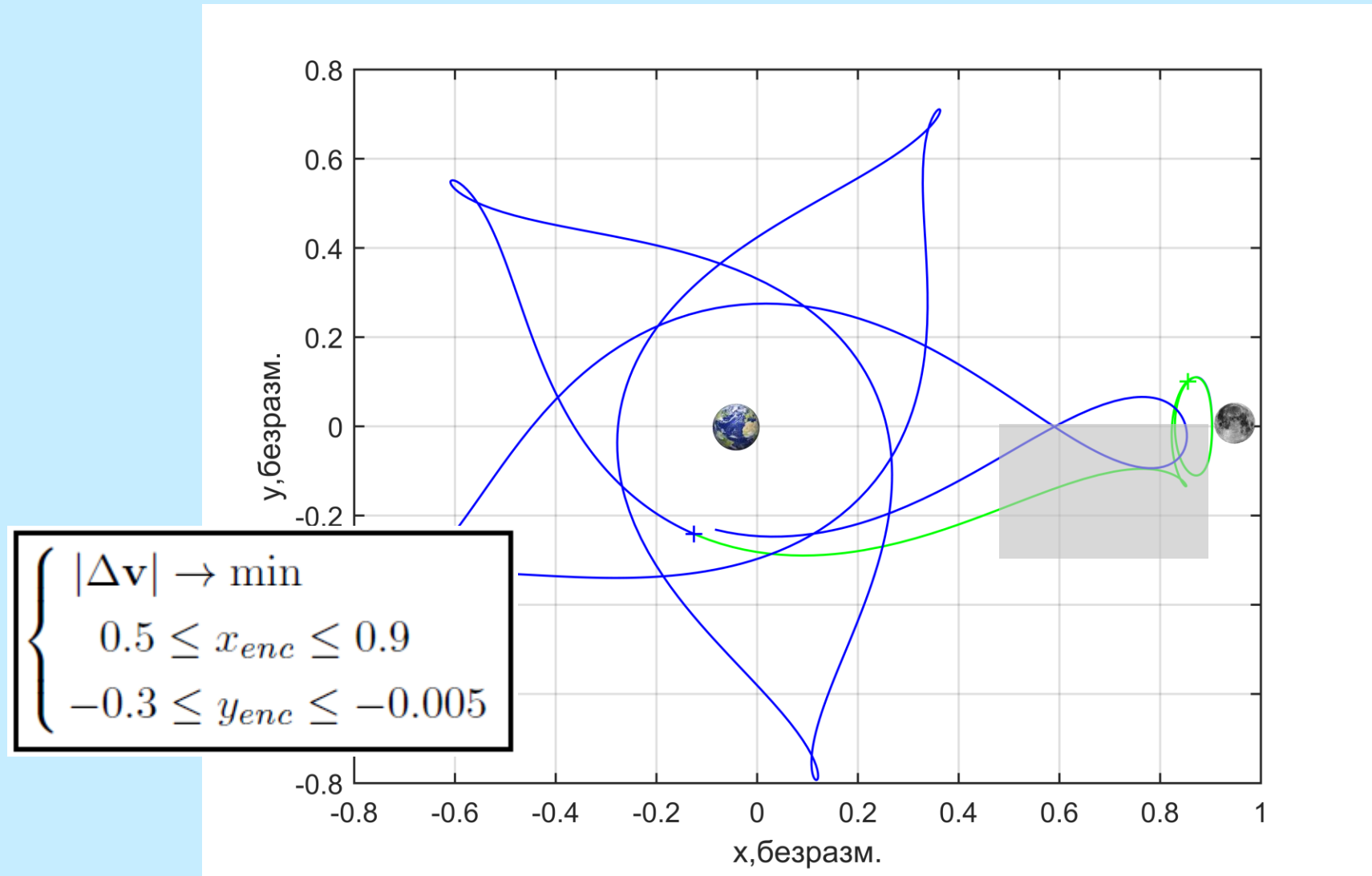
$$\varphi = 0.2$$



Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$

$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

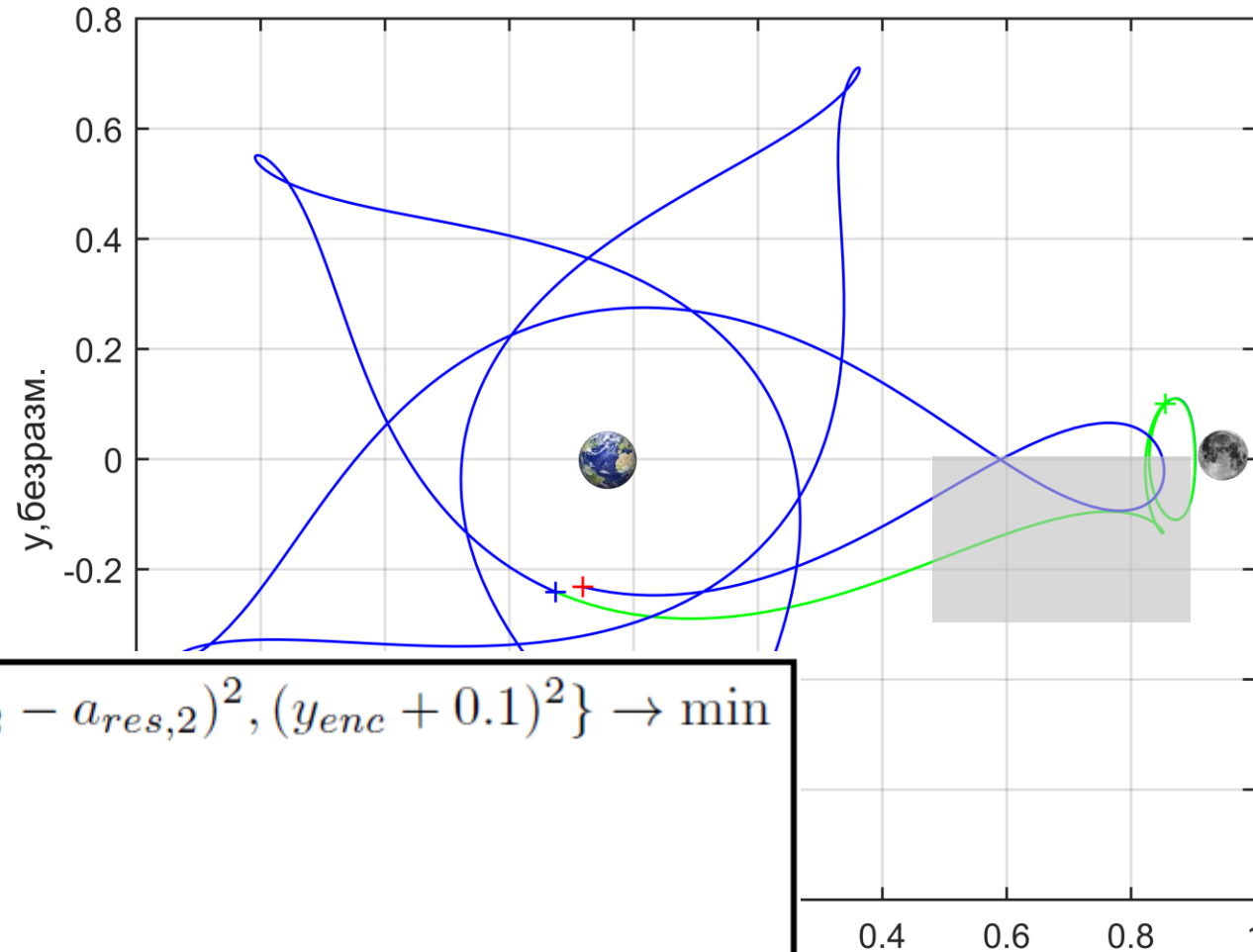


Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$

$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

5 : 2 \rightarrow 3 : 1



$$\begin{cases} \max\{(a_1 - a_{res,1})^2, (a_2 - a_{res,2})^2, (y_{enc} + 0.1)^2\} \rightarrow \min \\ |\Delta \mathbf{v}| \leq \Delta v_{\max} \\ 0.5 \leq x_{enc} \leq 0.9 \\ -0.3 \leq y_{enc} \leq -0.005 \end{cases}$$

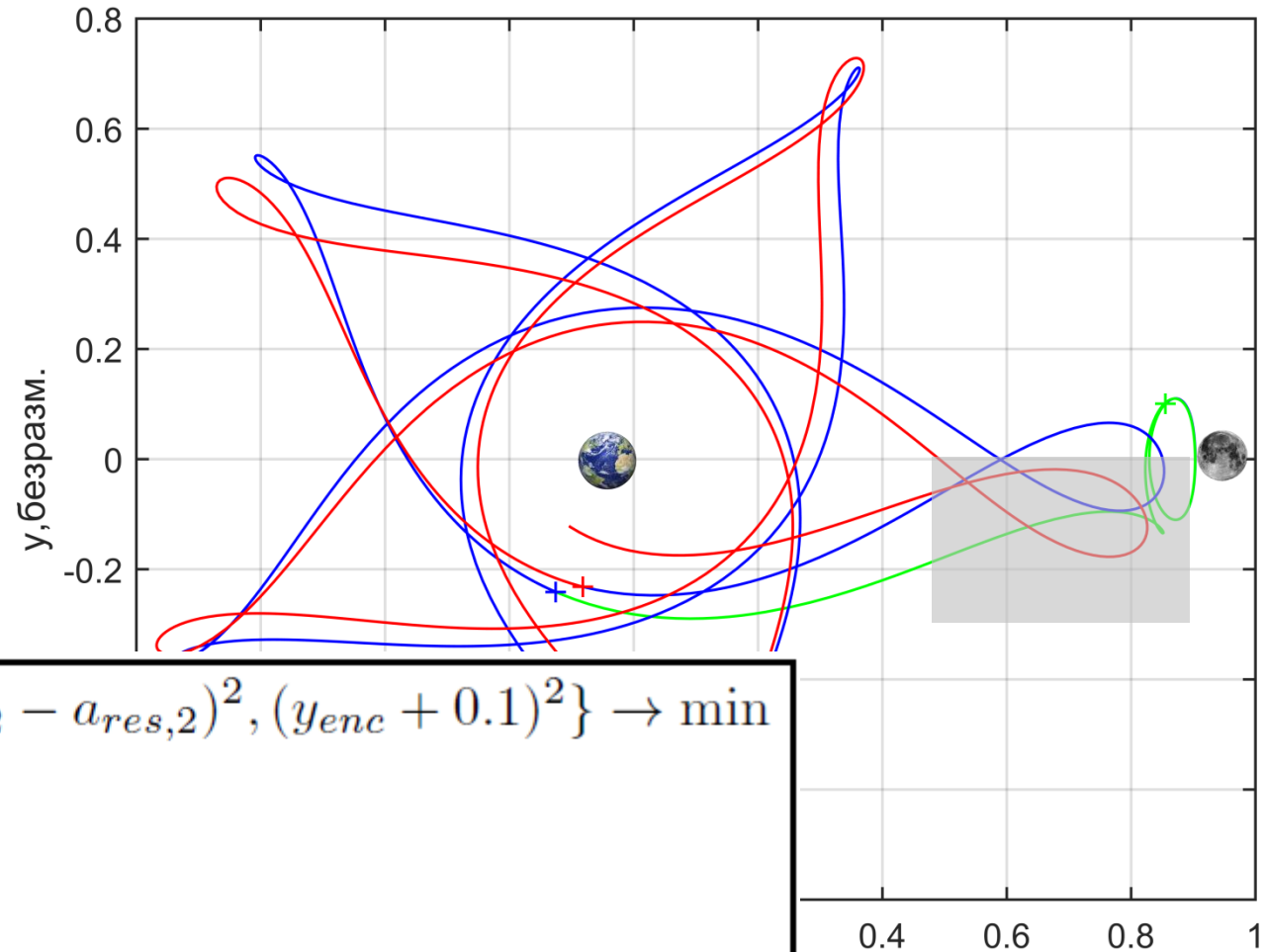
Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$

$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

$$5 : 2 \rightarrow 3 : 1$$

$$\Delta v_1 = 47.5 \text{ м/с}$$



$$\begin{cases} \max\{(a_1 - a_{res,1})^2, (a_2 - a_{res,2})^2, (y_{enc} + 0.1)^2\} \rightarrow \min \\ |\Delta \mathbf{v}| \leq \Delta v_{\max} \\ 0.5 \leq x_{enc} \leq 0.9 \\ -0.3 \leq y_{enc} \leq -0.005 \end{cases}$$

Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

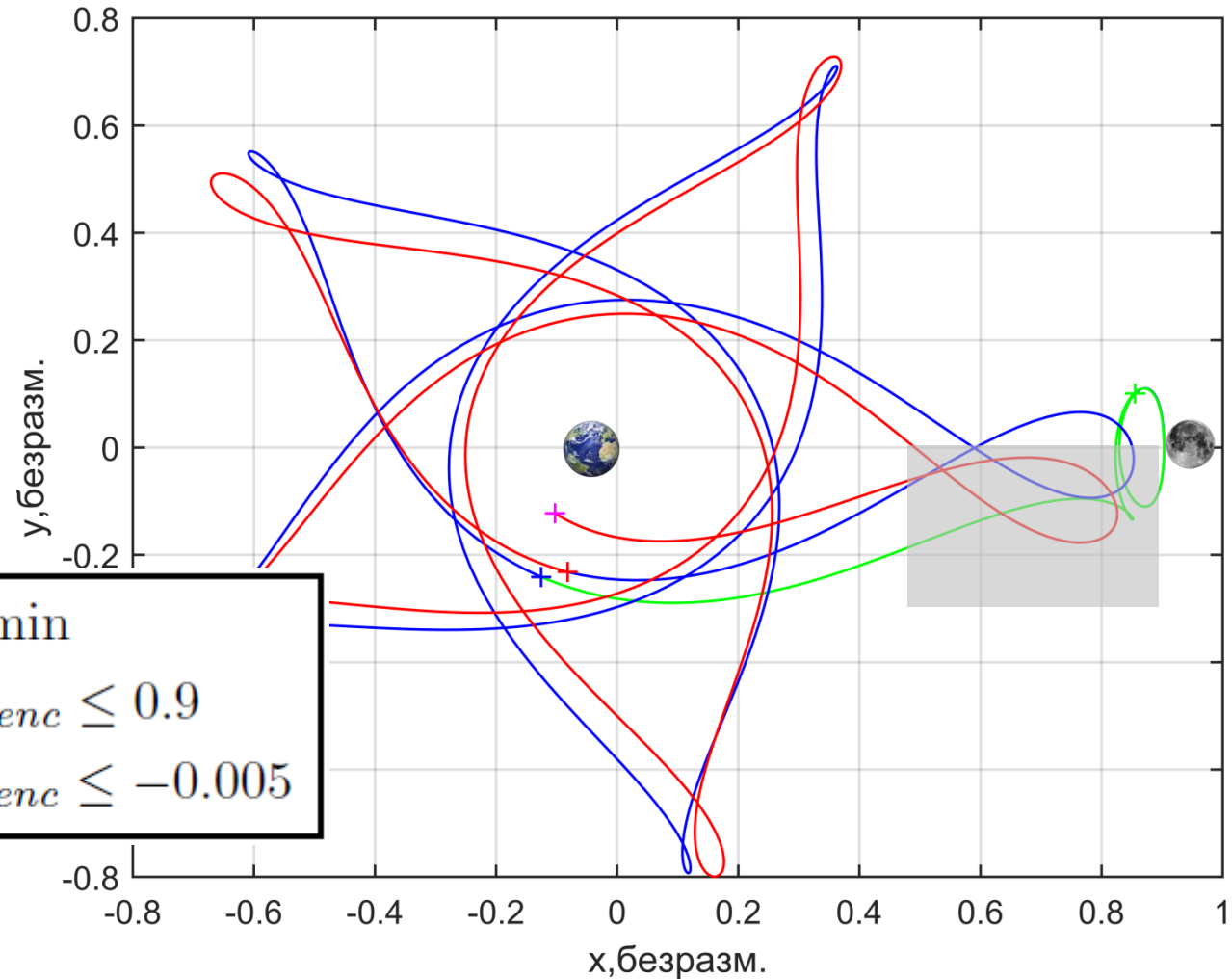
$$\varphi = 0.2$$

$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

$$5 : 2 \rightarrow 3 : 1$$

$$\Delta v_1 = 47.5 \text{ м/с}$$

$$\begin{cases} |\Delta \mathbf{v}| \rightarrow \min \\ 0.5 \leq x_{enc} \leq 0.9 \\ -0.3 \leq y_{enc} \leq -0.005 \end{cases}$$



Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$

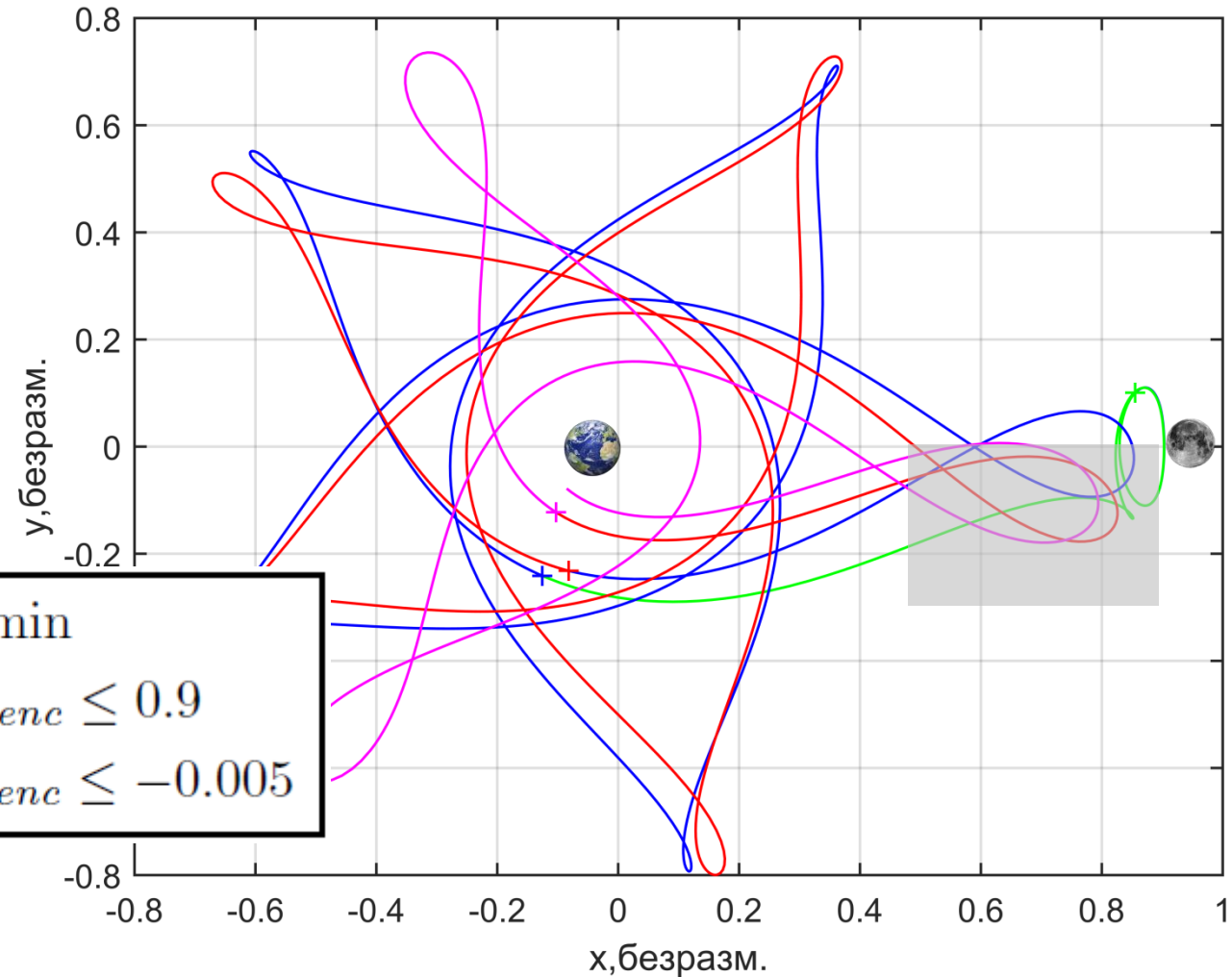
$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

$$5 : 2 \rightarrow 3 : 1$$

$$\Delta v_1 = 47.5 \text{ м/с}$$

$$\Delta v_2 = 0 \text{ м/с}$$

$$\begin{cases} |\Delta \mathbf{v}| \rightarrow \min \\ 0.5 \leq x_{enc} \leq 0.9 \\ -0.3 \leq y_{enc} \leq -0.005 \end{cases}$$



Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 → 3:1)

$$\varphi = 0.2$$

$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

$$5 : 2 \rightarrow 3 : 1$$

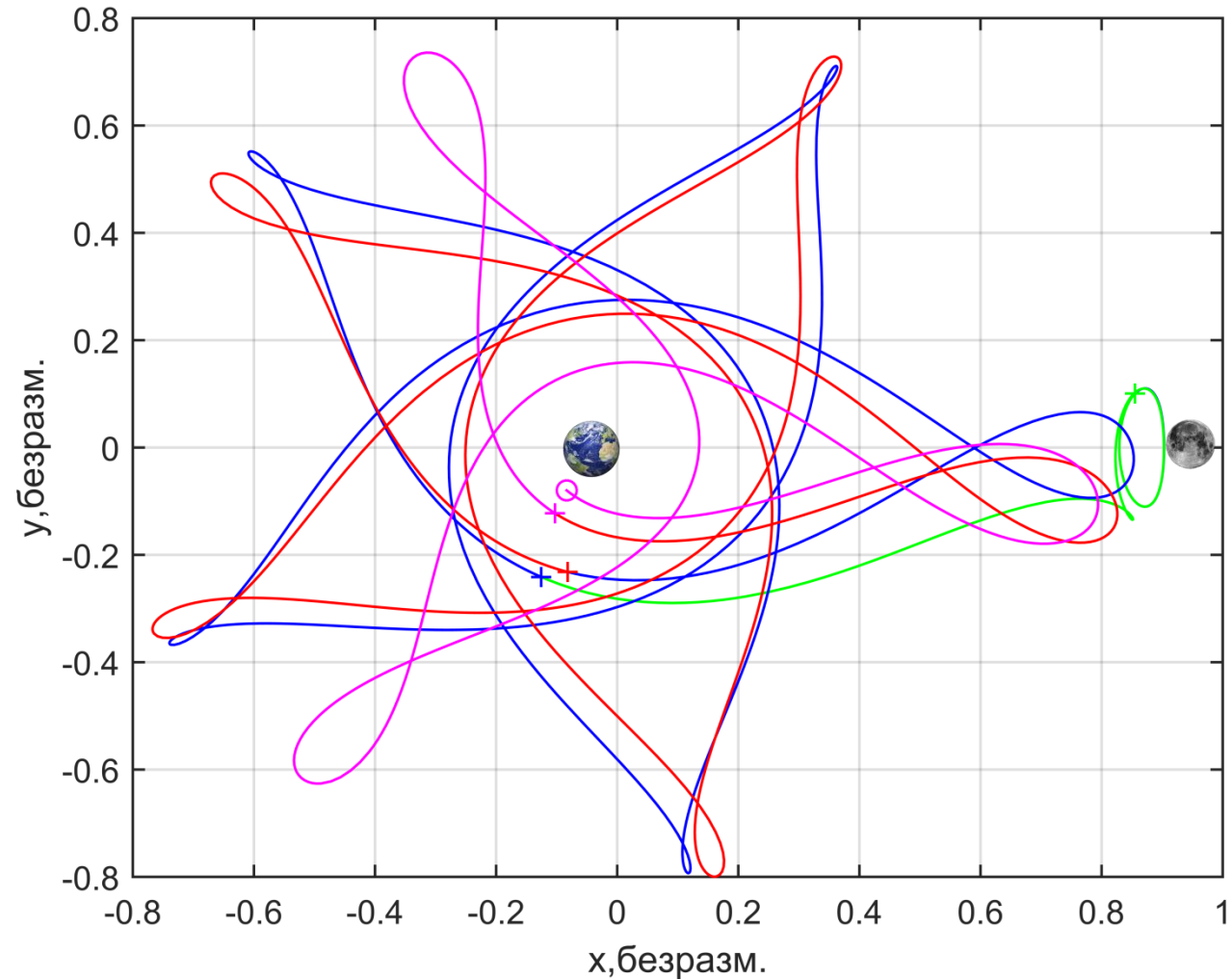
$$\Delta v_1 = 47.5 \text{ м/с}$$

$$\Delta v_2 = 0 \text{ м/с}$$

$$r_\pi = 41\,127 \text{ км}$$

$$r_\alpha = 300\,600 \text{ км}$$

$$\text{TOF} = 163.4 \text{ дней}$$



Расчет резонансных сближений (пример для последовательности 5:2 \rightarrow 3:1)

$$\varphi = 0.2$$

$$\Delta v_0 = 0.78 \text{ м/с}$$

$$5 : 2 \rightarrow 3 : 1$$

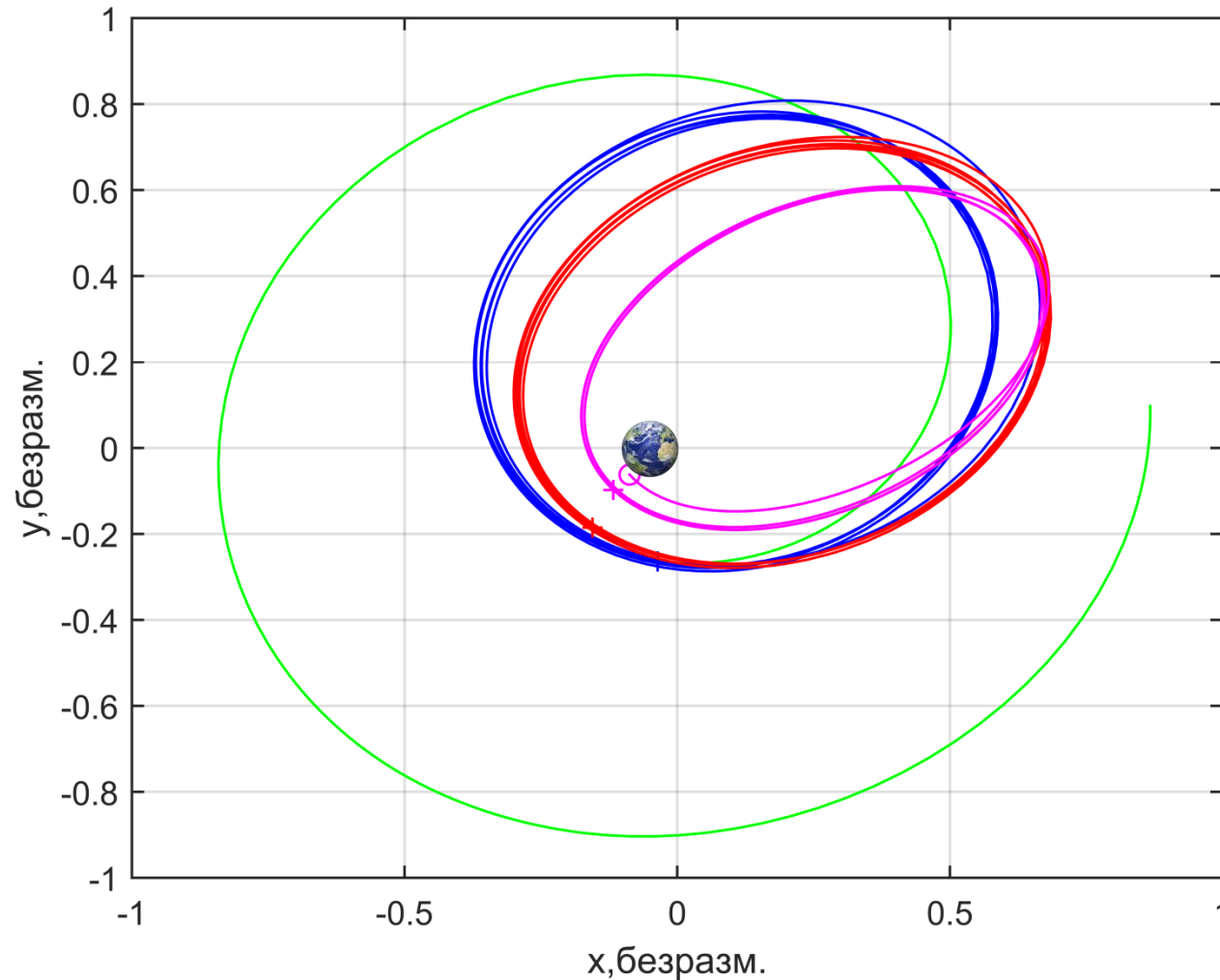
$$\Delta v_1 = 47.5 \text{ м/с}$$

$$\Delta v_2 = 0 \text{ м/с}$$

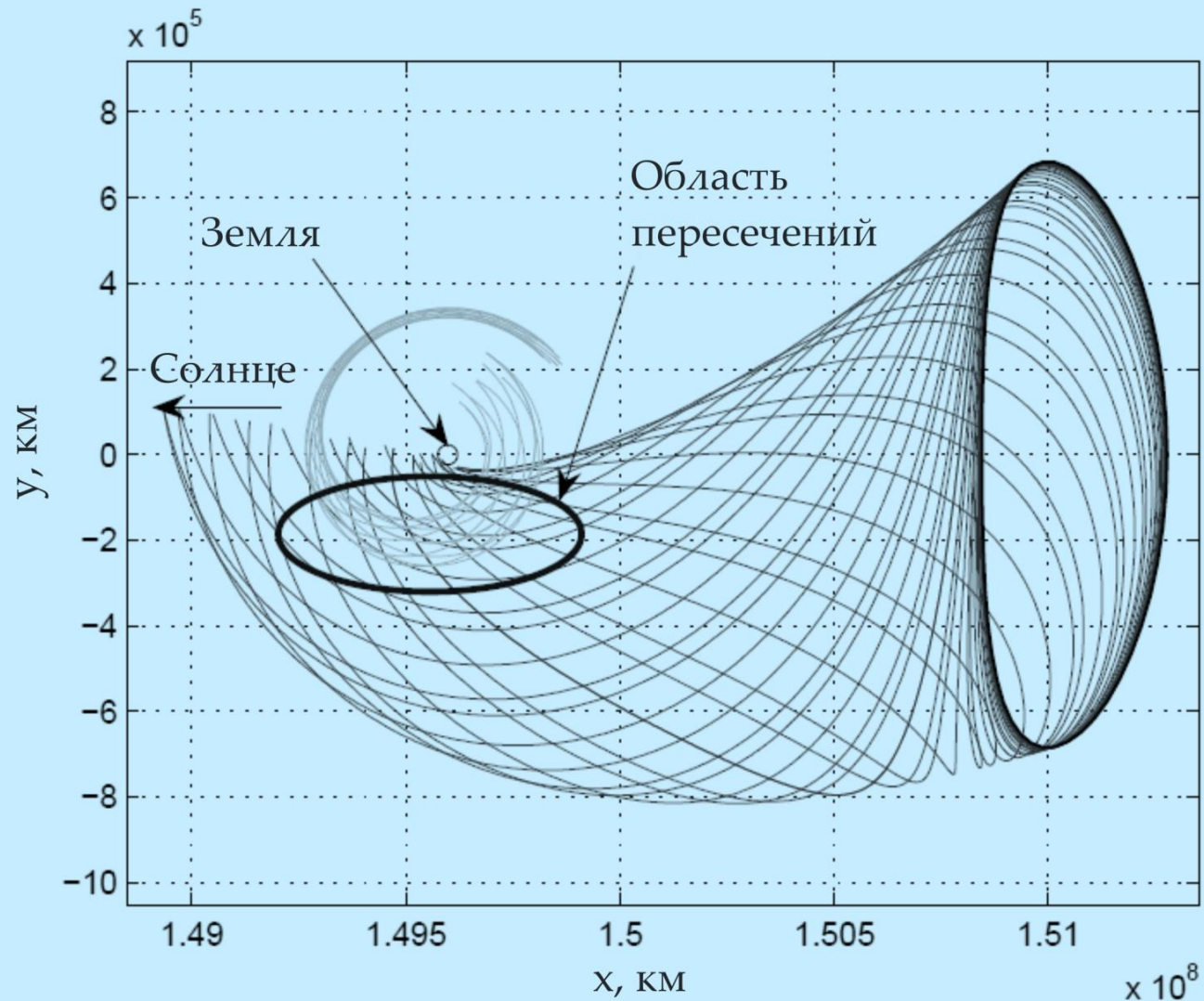
$$r_\pi = 41\,127 \text{ км}$$

$$r_\alpha = 300\,600 \text{ км}$$

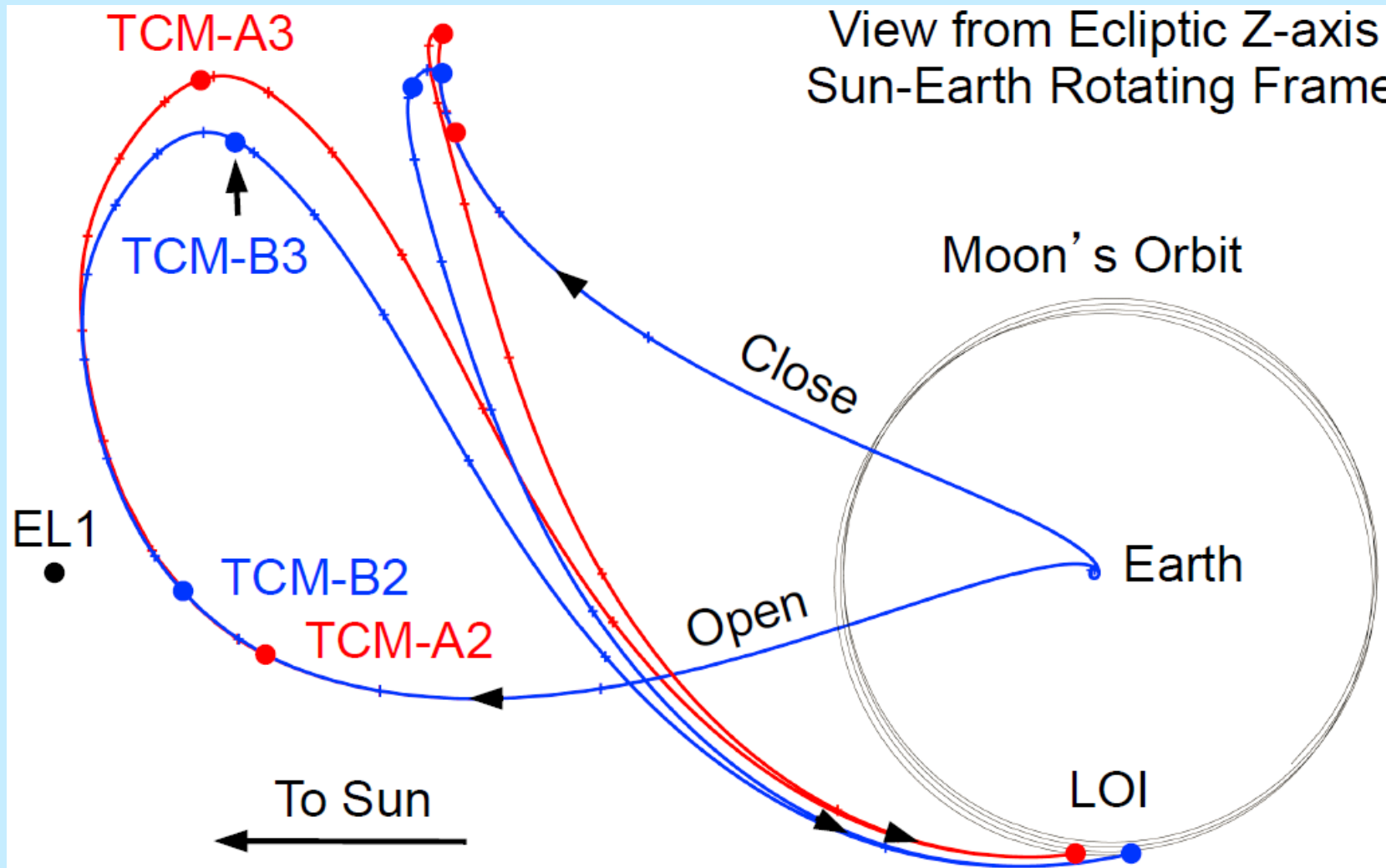
$$\text{TOF} = 163.4 \text{ дней}$$



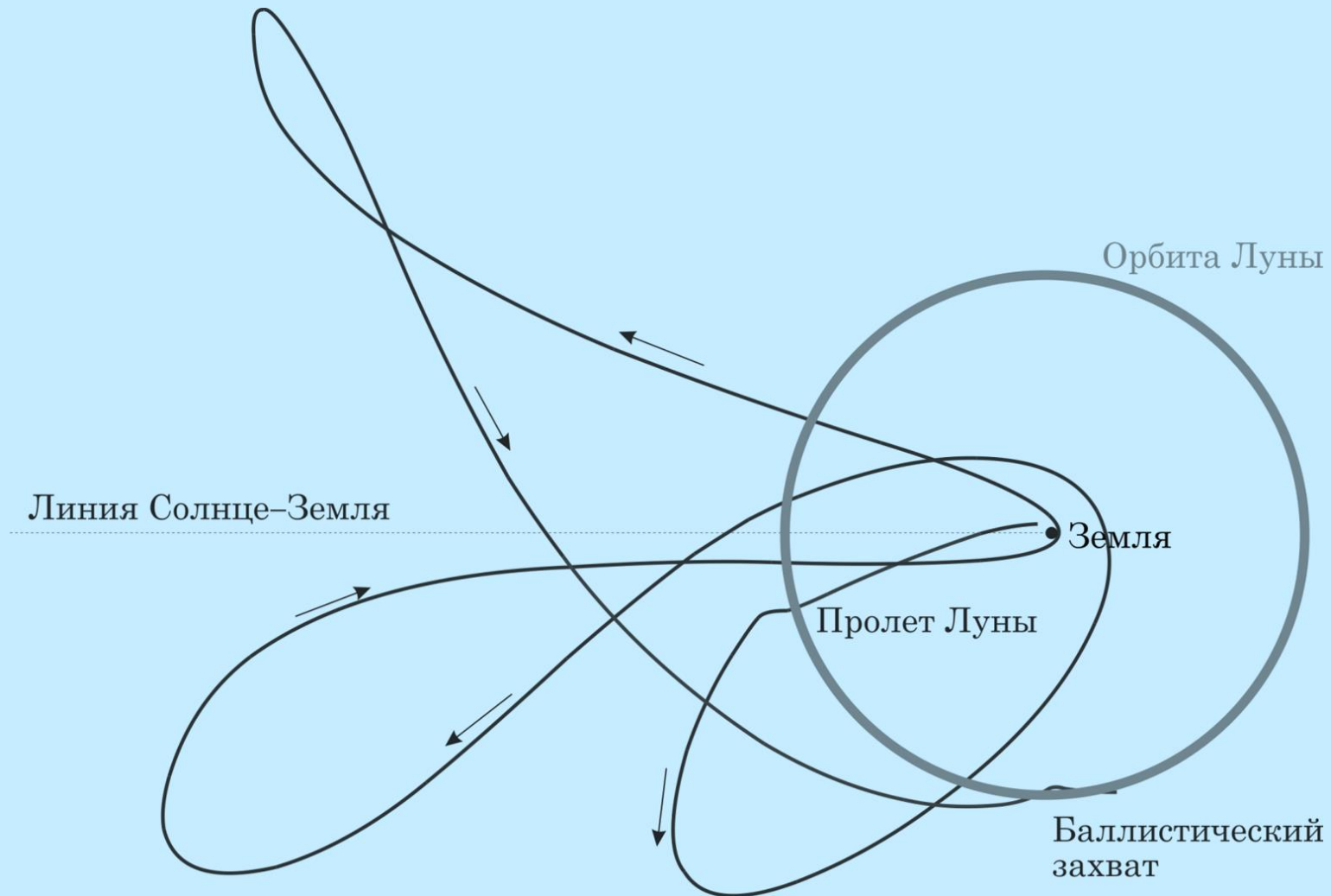
Низкоэнергетические перелеты между системами Земля-Луна и Солнце-Земля



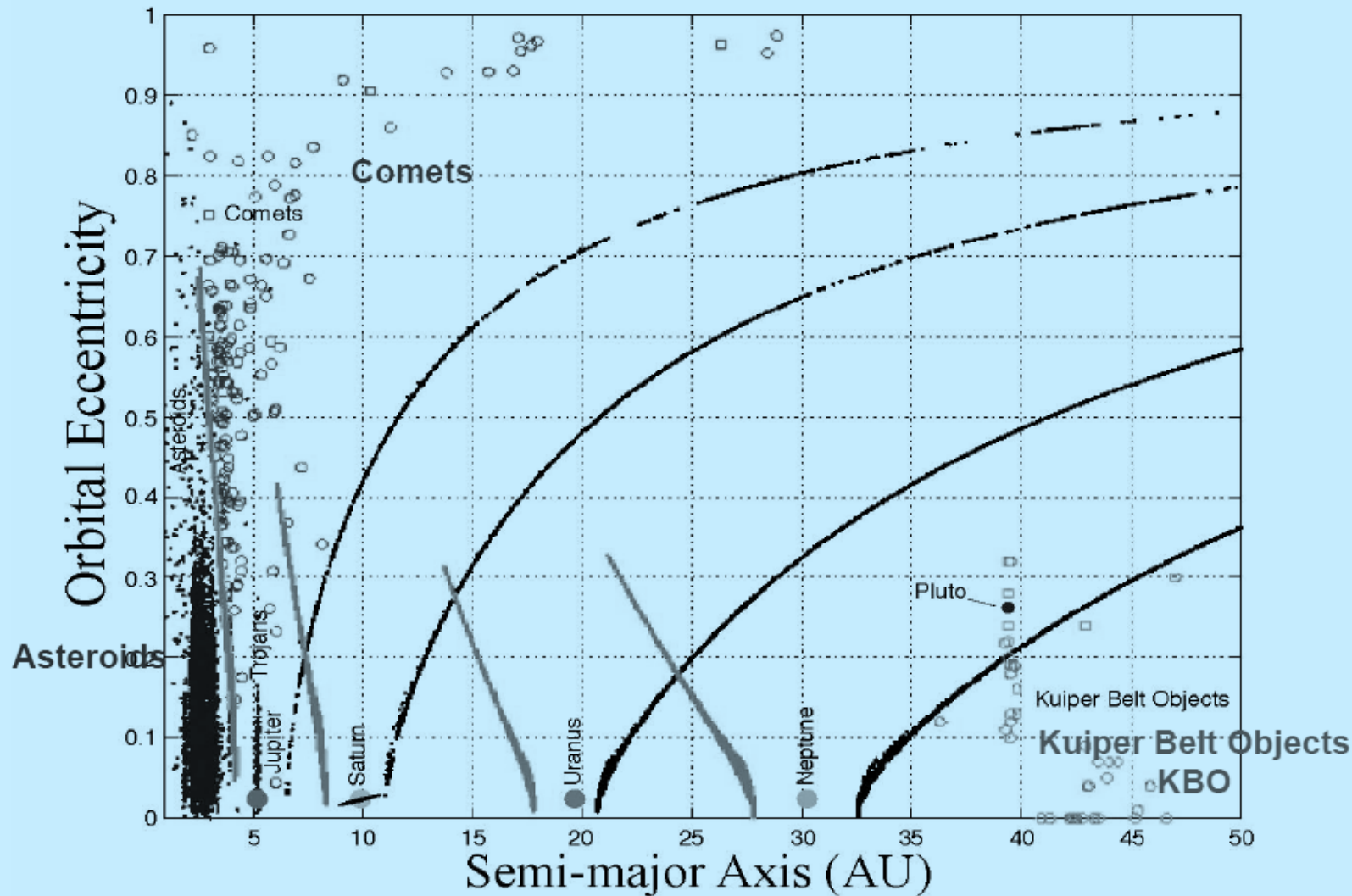
Низкоэнергетическая траектория перелета к Луне в миссии GRAIL (NASA, 2011)



Низкоэнергетическая траектория перелета к Луне в миссии Lunar IceCube (NASA, 2019)

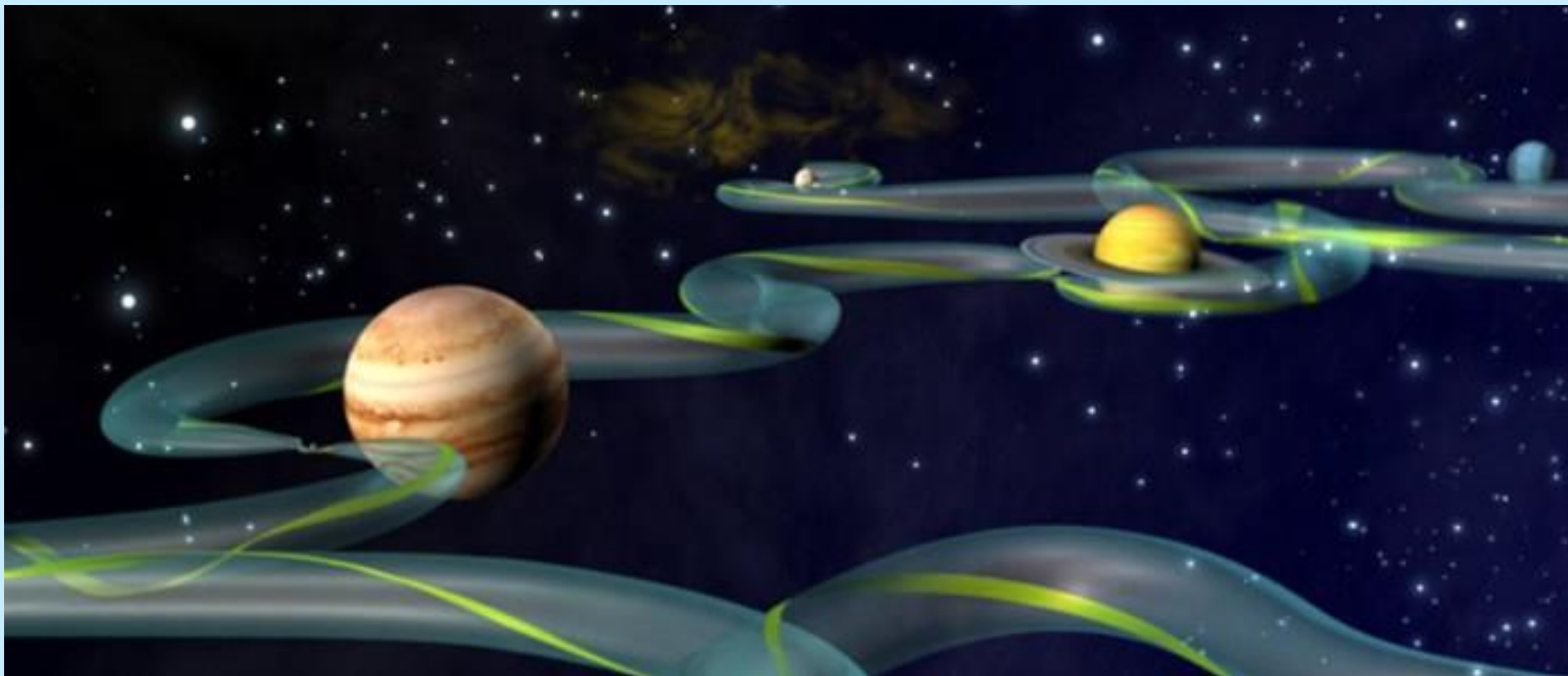


Перелеты между системами трех тел и перемещение по Солнечной системе



Источник: M.W. Lo. The interplanetary superhighway and the origins program // Aerospace Conference Proceedings. — Vol. 7. — IEEE, 2002. — pp. 3543–3562.

Спасибо за внимание!



Источник: NASA

Доклад поддержан грантом РФФ 14-11-00621