

XI Всероссийский съезд по механике

Управление групповым полетом спутников без затрат топлива

**Д.С. Иванов, Р.В. Досаев, М.С. Кушнирук,
С.А. Шестаков, А.И. Шестоперов**

Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)



Содержание

- Что такое групповой полет
- Способы управления без затрат топлива:
 - Аэродинамическая сила сопротивления
 - Электростатические силы
 - Световое давление
 - Обмен импульсом
- Заключение

Групповой полет спутников

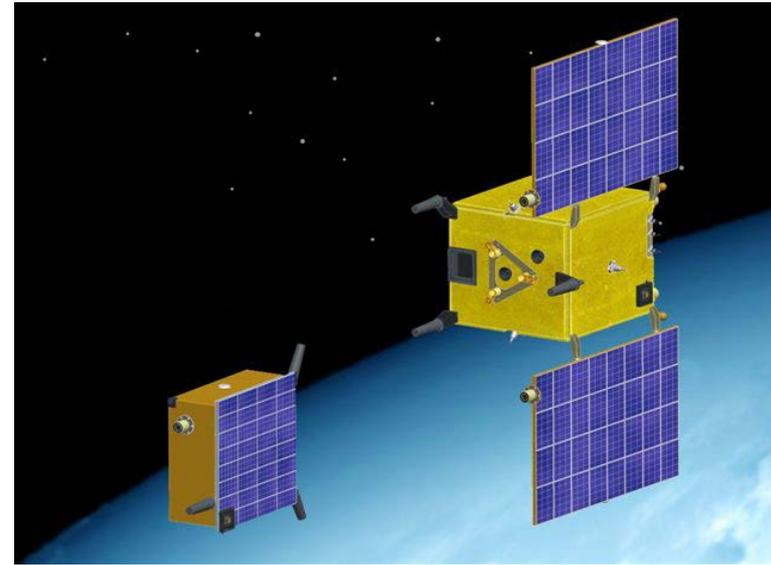
Групповой полет:

- движение двух и более спутников на расстояниях много меньше радиуса орбиты
- выполнение единой задачи
- повышение надежности миссии
- удешевление за счет миниатюризации спутников и кластерного запуска



Управление движением

- Традиционная система:
Двигатели малой тяги
- Альтернативные системы без затрат топлива с использованием :
 - *Аэродинамической силы сопротивления*
 - *Силы Кулона*
 - *Солнечного давления*
 - *Обмена импульса*



Миссия Prisma

Уравнения относительного движения, линейная модель

На начальном этапе исследования применяются
уравнения Клохесси-Уилтшира:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4 \\ y = C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t \\ z = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t \end{cases}$$

$-3C_1\omega t$ - дрейф спутника

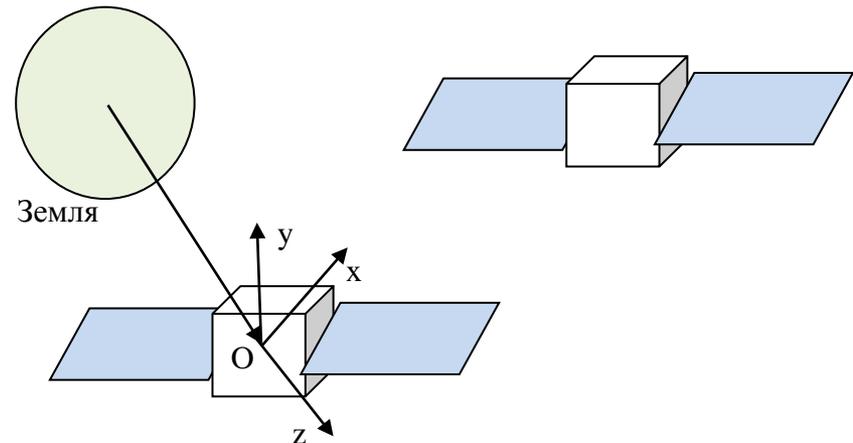
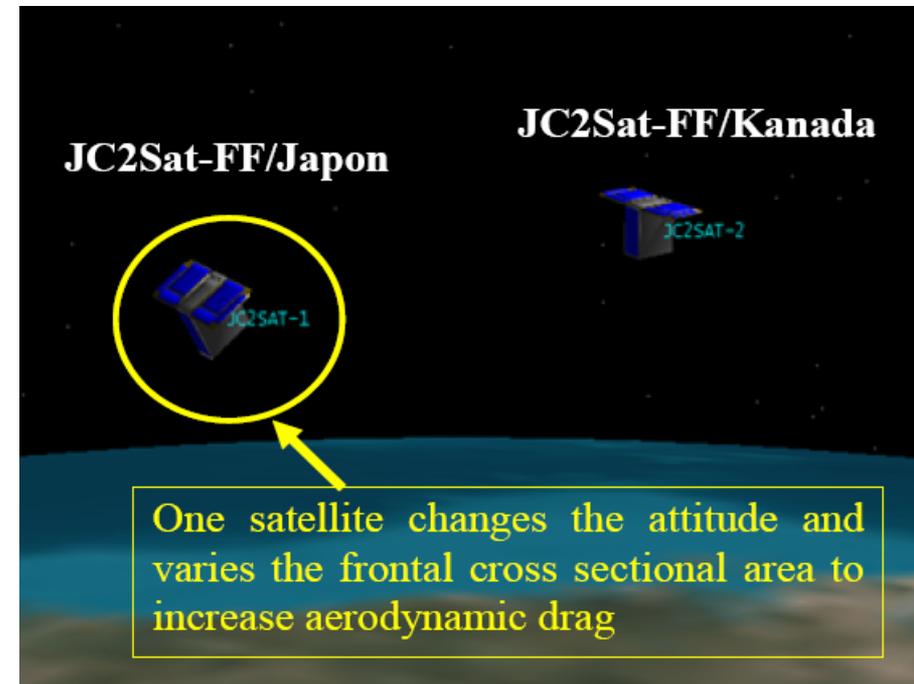


Схема относительного движения
спутников

Использование аэродинамической силы

- Особенности:
 - *Низкие орбиты*
 - *Спутники с переменной площадью сечения*
 - *Управление движением только в плоскости орбиты*
- Минусы:
 - *Непродолжительное время жизни формации*



Миссия JC2Sat

Алгоритм управления

○ Аэродинамическая сила

$$f_x = -\frac{1}{2} \rho C V^2 S (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

○ Линейно-квадратичный регулятор

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

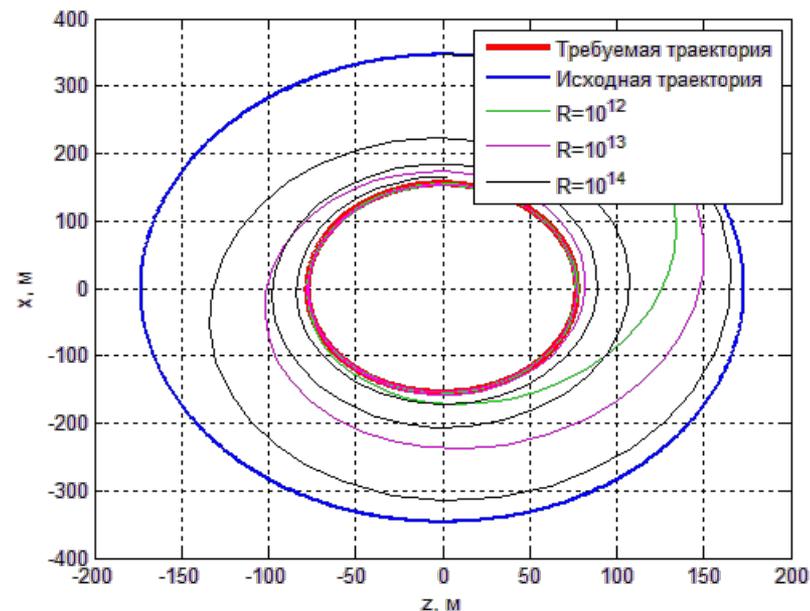
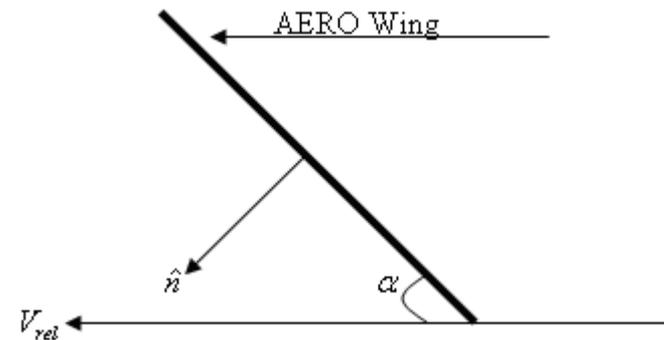
Минимизируемый функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt,$$

Для этого функционала управление

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{e}, \quad \text{где } \mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d,$$

матрица \mathbf{P} есть решение уравнения Риккати $\mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = 0$.

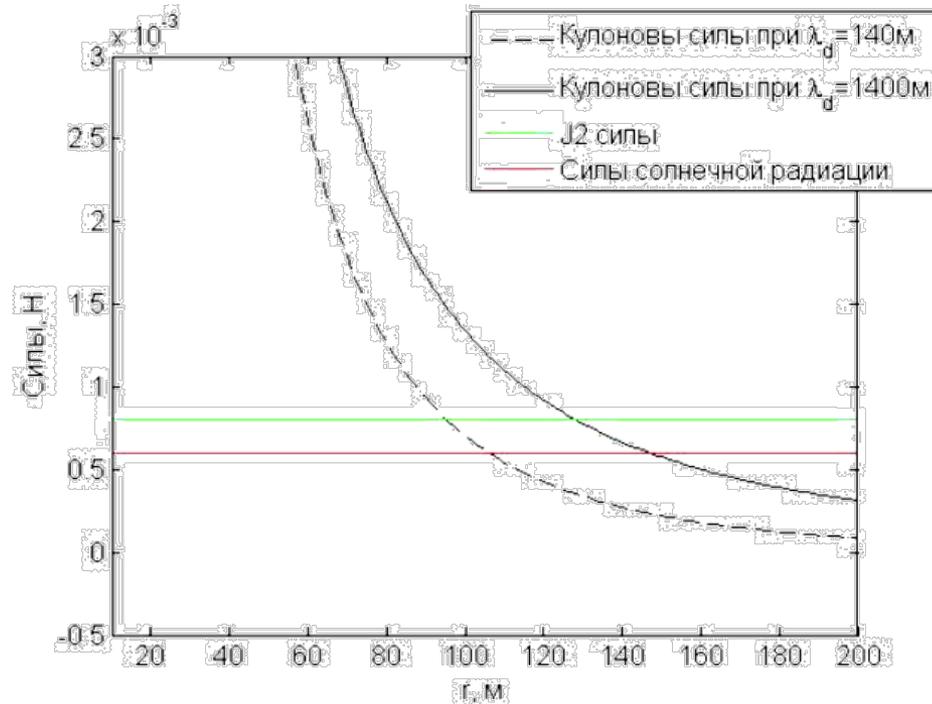
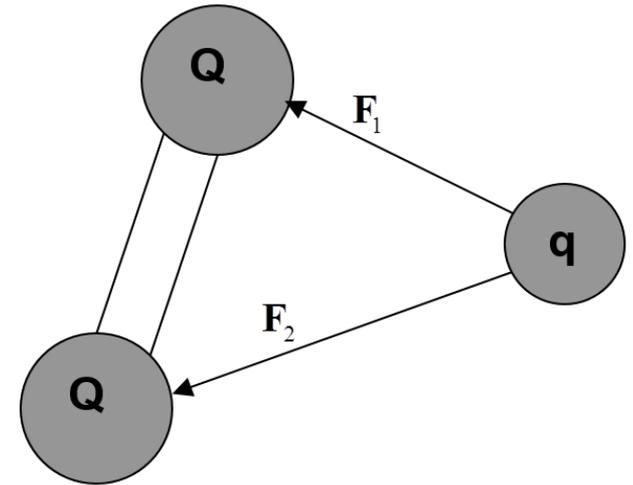


Траектории при управлении на основе ЛКР при разных значениях весового коэффициента

Использование силы Кулона

○ Особенности:

- *Необходим прибор, накапливающий заряд*
- *Небольшие расстояния между спутниками*
- *Экранирование плазмой*



$$f_{12} = k_c \frac{r_{12}}{r_{12}^3} q_1 q_2 e^{-\frac{r_{12}}{\lambda_d}}$$

| Плазменная среда | $\lambda_{d \min}$, м | $\lambda_{d \max}$, м |
|---------------------|------------------------|------------------------|
| НОО | 0.02 | 0.4 |
| ГСО | 142 | 1496 |
| Межпланетная плазма | 7.4 | 24 |

Уравнения движения трёх спутников

В орбитальной системе координат

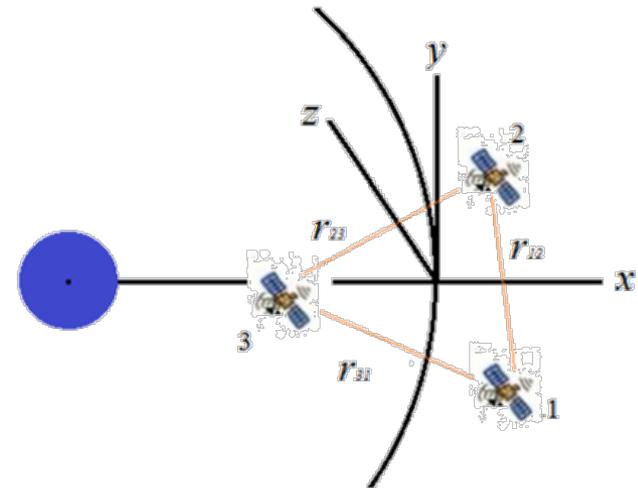
$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_1 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 = \frac{1}{m_1} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} - \frac{1}{m_1} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} \cdot \frac{\alpha_2}{r_{31}^2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_2 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 = -\frac{1}{m_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \cdot \frac{\alpha_3}{r_{12}^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \cdot \frac{\alpha_1}{r_{23}^2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_3 + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_3 = \frac{1}{m_3} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}} \cdot \frac{\alpha_2}{r_{31}^2} - \frac{1}{m_3} \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}} \cdot \frac{\alpha_1}{r_{23}^2}$$

где

$$\alpha_i(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}) = k_c q_j(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}) q_k(\mathbf{r}_{jk}, \dot{\mathbf{r}}_{jk}),$$



Алгоритм управления

- Функция Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \dot{r}_{12}^2 + \frac{1}{2} \dot{r}_{23}^2 + \frac{1}{2} \dot{r}_{31}^2 + \frac{1}{2} k_1 (r_{12} - a_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (r_{23} - a_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (r_{31} - a_3)^2,$$

- Её производная

$$\dot{V} = \dot{r}_{12} (\ddot{r}_{12} + k_1 (r_{12} - a_1)) + \dot{r}_{23} (\ddot{r}_{23} + k_2 (r_{23} - a_2)) + \dot{r}_{31} (\ddot{r}_{31} + k_3 (r_{31} - a_3)).$$

- Для знакопостоянности должно выполняться

$$\ddot{r}_{12}(\alpha_3) + g_1 \dot{r}_{12} + k_1 (r_{12} - a_1) = 0,$$

$$\ddot{r}_{23}(\alpha_1) + g_2 \dot{r}_{23} + k_2 (r_{23} - a_2) = 0,$$

$$\ddot{r}_{31}(\alpha_2) + g_3 \dot{r}_{31} + k_3 (r_{31} - a_3) = 0.$$

Алгоритм управления

Строим модельное управление:

$$\alpha = A^{-1} \cdot b,$$

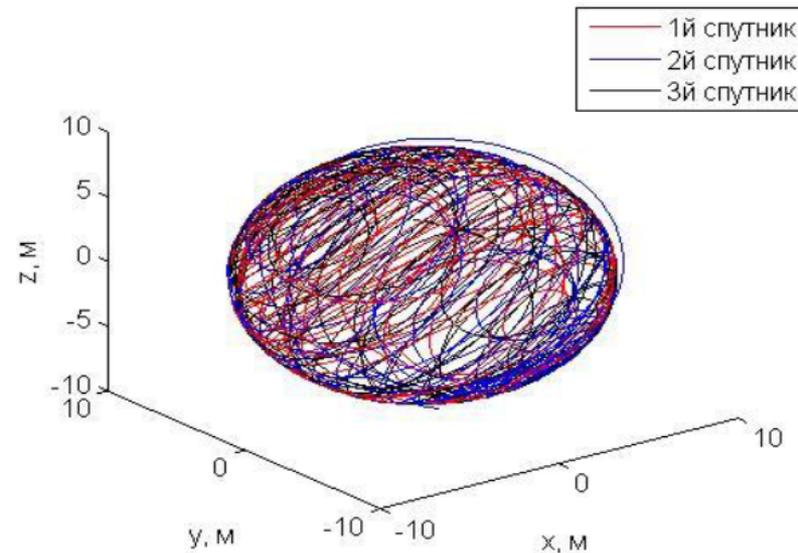
Однако его не всегда можно реализовать с помощью зарядов

Минимизируем функционал:

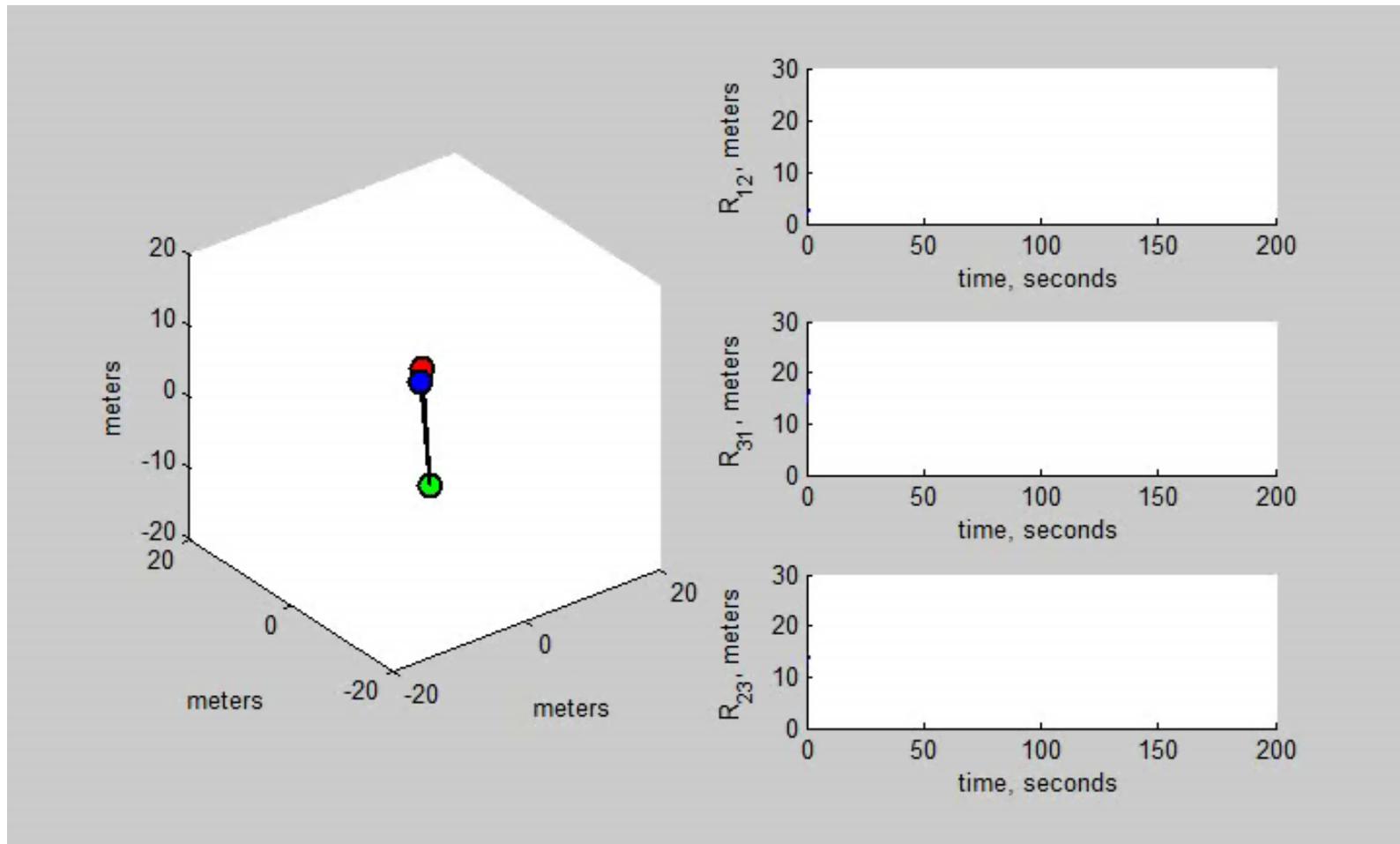
$$\Phi = (q_1 q_2 - \alpha_3)^2 + (q_2 q_3 - \alpha_1)^2 + (q_1 q_3 - \alpha_2)^2 \rightarrow \min$$

Четыре тройки решений:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}} \\ \mp \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}} \\ 0 \\ \mp \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}} \\ \mp \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1}} \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_1}{\alpha_2}} \\ \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}} \end{pmatrix}$$



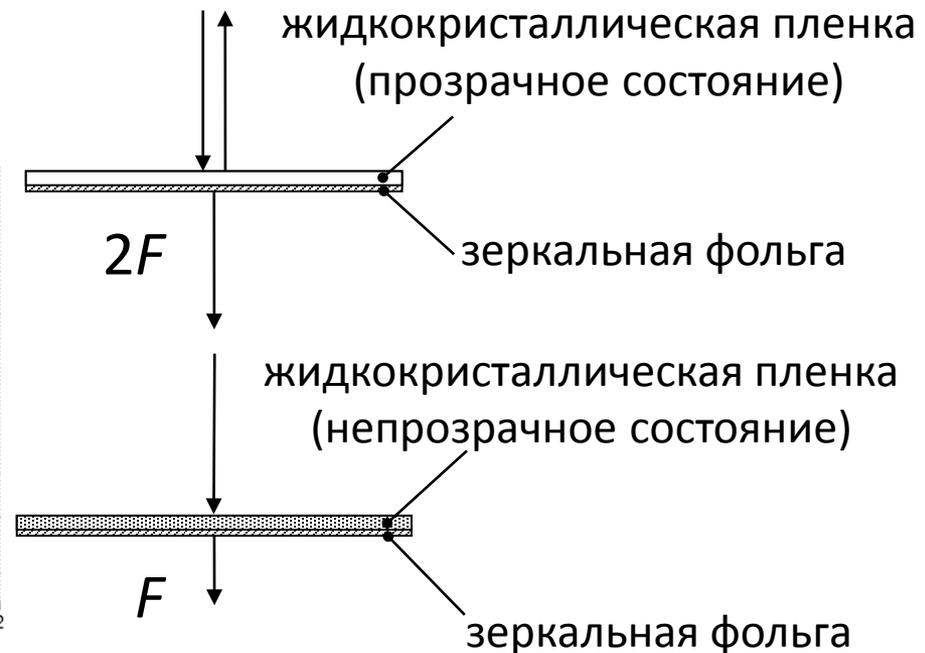
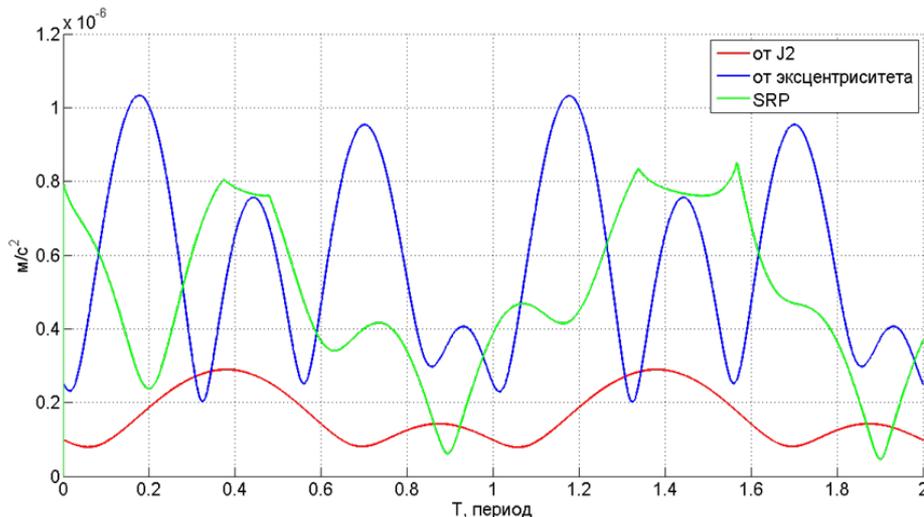
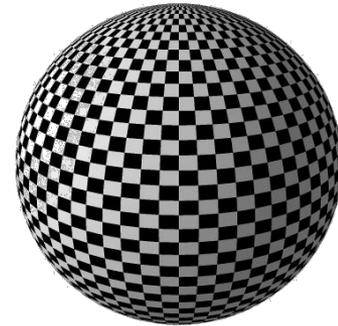
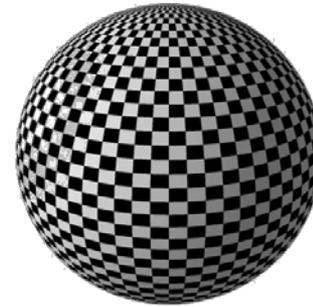
Пример работы алгоритма



Использование силы светового давления

○ Рассматриваются:

- *Сферические спутники*
- *Изменяемая отражательная способность*
- *Околокруговые орбиты*



Алгоритм управления

- Уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) + \mathbf{u}. \end{cases}$$

- Функция Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ref})^2 + \frac{1}{2}k_{\rho}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{ref})^2 \geq 0$$

- ПД-регулятор:

$$\mathbf{u} = -k_{\rho}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{ref}) - k_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ref}) + \dot{\mathbf{v}}_{ref} - \mathbf{f}$$

$$k_{\rho}, k_v = \text{const} > 0, \text{ причем выбрано } k_v = \frac{k_{\rho}^2}{4};$$

Сила солнечного давления

- Сила солнечного давления:

$$\mathbf{F} = -P_c \left(\int_{S^+} (1-k)(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{s} dS + 2 \int_{S^+} k \mathbf{n} (\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dS \right)$$

- Коэффициент отражения:

$$k(\varphi, \theta) = g(\varphi) \cdot h(\theta),$$

где

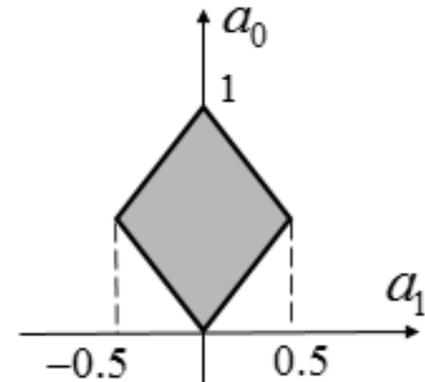
$$g(\varphi) = a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0, \quad h(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta.$$

a_0, a_1, α – изменяемые параметры

Ограничения: $0 \leq k \leq 1$.

$$0 < (a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta \right) \leq 1$$

$$0 \leq a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0 \leq 1$$



Численный пример

$$F_1 = -\frac{\pi^2}{32} R_d^2 P_c a_1 \cos \alpha,$$

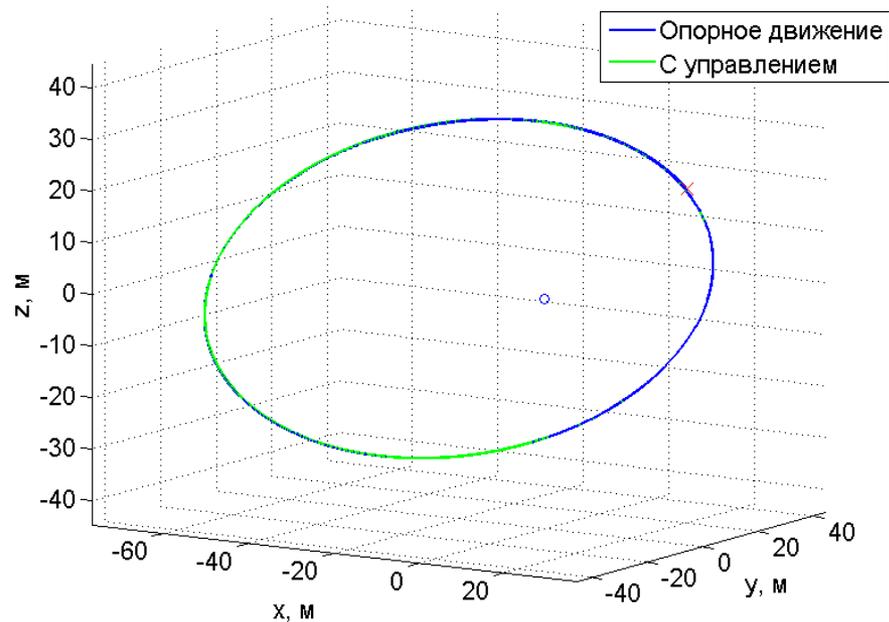
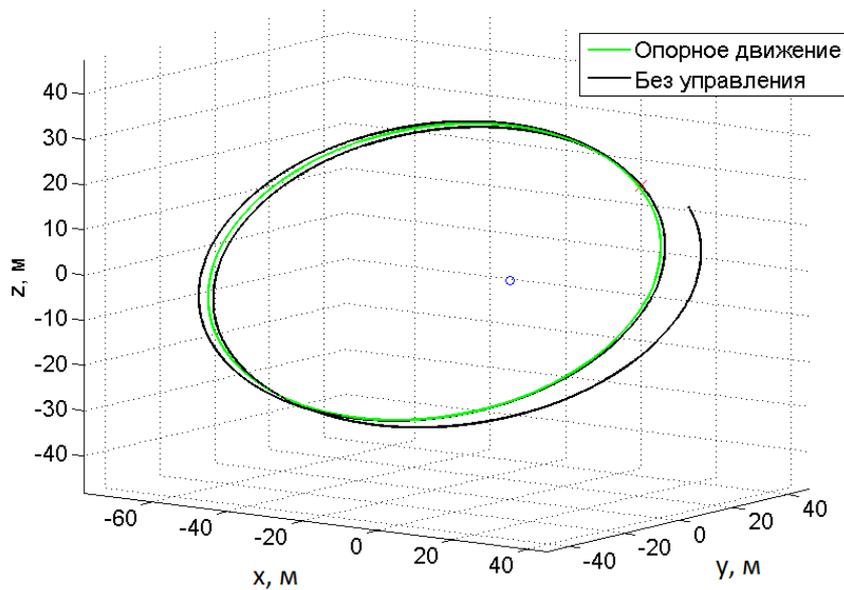
$$F_2 = \frac{\pi^2}{32} R_d^2 P_c a_1 \sin \alpha, \quad \Rightarrow$$

$$F_3 = -\frac{P_c \pi^2 R_d^2}{4} a_0 + P_c \pi (R_p^2 - R_d^2).$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{F_2}{F_1} \right),$$

$$a_1 = -\frac{32}{\pi^2 P_c R_d^2} \cdot \frac{F_1}{\cos \alpha},$$

$$a_0 = -\frac{4}{\pi^2 P_c R_d^2} F_3 + \frac{4}{\pi R_d^2} (R_p^2 - R_d^2).$$



Использование обмена импульсом

- Особенности:
 - *Установка ловящего/бросающего механизма типа манипулятора*
- Принцип обмена массой
 - *В некоторый момент времени бросающий спутник выбрасывает дополнительную массу так, чтобы она попала в ловящий спутник*
 - *Требуется, совершив переброс, достичь желаемой относительной траектории спутников после совершения броска*



Краевая задача

Рассматривается движение в рамках модели Клохесси-Вилдшира:

$$\begin{cases} x = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4 \\ y = C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t \\ z = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t \end{cases}$$

Для осуществления переброса необходимо чтобы перебрасываемая масса столкнулась с ловящим спутником:

$$\mathbf{r}_s(\mathbf{r}_{0,s}, \mathbf{v}_{0,s}, t_e, t_m) = \mathbf{r}_c(\mathbf{r}_{0,c}, \mathbf{v}_{0,c}, t_0, t_m)$$

t_e – начало броска, t_m – конец броска

Указание моментов времени t_e , t_m полностью определяет переброс, скорость выброса массы ($u = \dot{\omega}(t_m - t_e)$, $\Delta = 3u \sin u - 8(1 - \cos u)$):

$$\delta \dot{x} = -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \frac{1}{\Delta}[x_0\omega \sin u + 2z_0\omega(\cos u - 1)],$$

$$\delta \dot{y} = -\dot{y}_0 - y_0\omega \operatorname{ctg} u,$$

$$\delta \dot{z} = -\dot{z}_0 - \frac{1}{\Delta}[2x_0\omega(1 - \cos u) + z_0\omega(3u \cos u - 4 \sin u)].$$

Уравнения для констант траектории после переброса для бросающего спутника

$$C_{1,t} = (k+1) \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) + \frac{k}{\Delta} [2z_0(1 - \cos u) - x_0 \sin u]$$

$$C_{2,t} = \frac{\sin \omega t_e}{\Delta} [4kz_0(1 - \cos u) - 3kz_0 u \sin u + 2kx_0 \sin u] + \frac{\cos \omega t_e}{\Delta} [2kx_0(1 - \cos u) + 3kz_0 u \cos u - 4kz_0 \sin u] +$$

$$+(k+1) \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t_e - \left(2 \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin \omega t_e \right)$$

$$C_{3,t} = \frac{\sin \omega t_e}{\Delta} [2kx_0(1 - \cos u) + 3kz_0 u \cos u - 4kz_0 \sin u] - \frac{\cos \omega t_e}{\Delta} [4kz_0(1 - \cos u) - 3kz_0 u \sin u + 2kx_0 \sin u] +$$

$$+(k+1) \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t_e + \left(2 \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos \omega t_e \right)$$

$$C_{4,t} = x_0 - 2(k+1) \frac{\dot{z}_0}{\omega} + 3(k+1) \left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \omega t_e -$$

$$-\frac{1}{\Delta} [4kx_0(1 - \cos u) + 3k\omega t_e x_0 \sin u - 8kz_0 \sin u + 6k\omega t_m z_0 \cos u - 6k\omega t_e z_0]$$

$$C_{5,t} = y_0 \sin \omega t_e + (k+1) \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t_e + ky_0 \cos \omega t_e \operatorname{ctg} u$$

$$C_{6,t} = y_0 \cos \omega t_e - (k+1) \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t_e - ky_0 \sin \omega t_e \operatorname{ctg} u$$

Обмен импульсом: два спутника

- Изначально относительная траектория не замкнута – есть относительный дрейф
- После переброса оба спутника получают некоторый одинаковый дрейф относительно ОСК, при этом траектория одного спутника относительно другого замкнута
- Можно совершить переброс, приравнивающий дрейф произвольной величине из диапазона

$$A - B \leq C \leq A + B$$

$$A = \frac{C_c(K_c - 3) + C_t(K_t + 1)}{1 + K_c + K_t} \quad B = \frac{2}{1 + K_c + K_t} \sqrt{(2C_c - z_{c,0})^2 + \frac{\dot{z}_{c,0}^2}{\omega^2}}$$

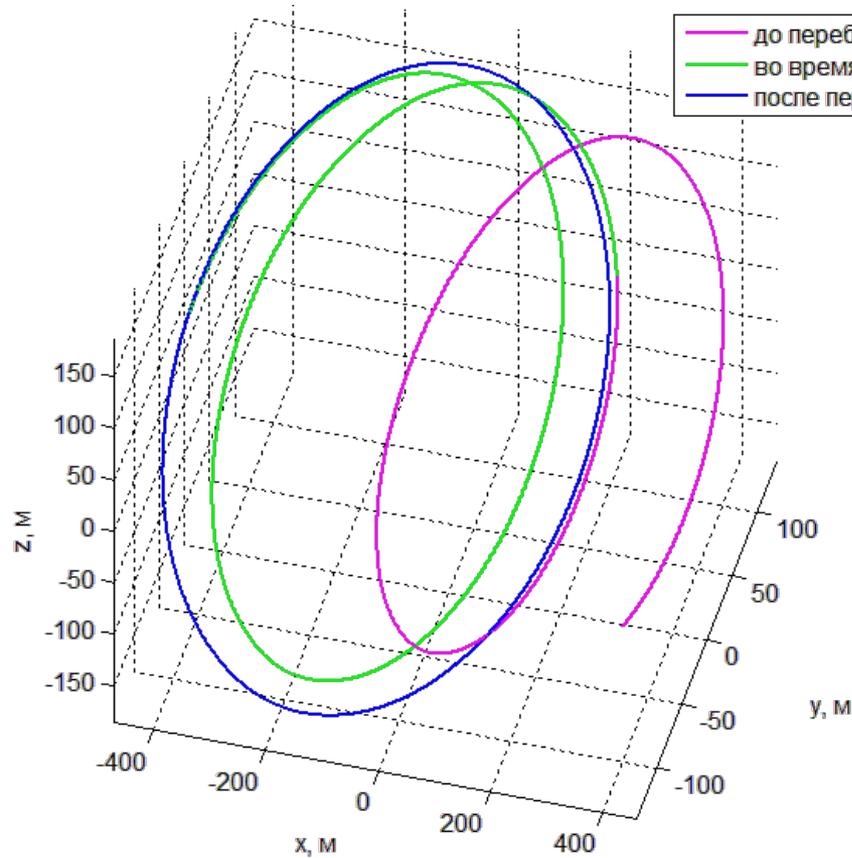
- В случае, если время начала переброса фиксировано, время окончания переброса находится из уравнения

$$\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) + \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \cdot \frac{x_0 \cos s - 2z_0 \sin s}{8 \sin s - 6s \cos s} = 0$$

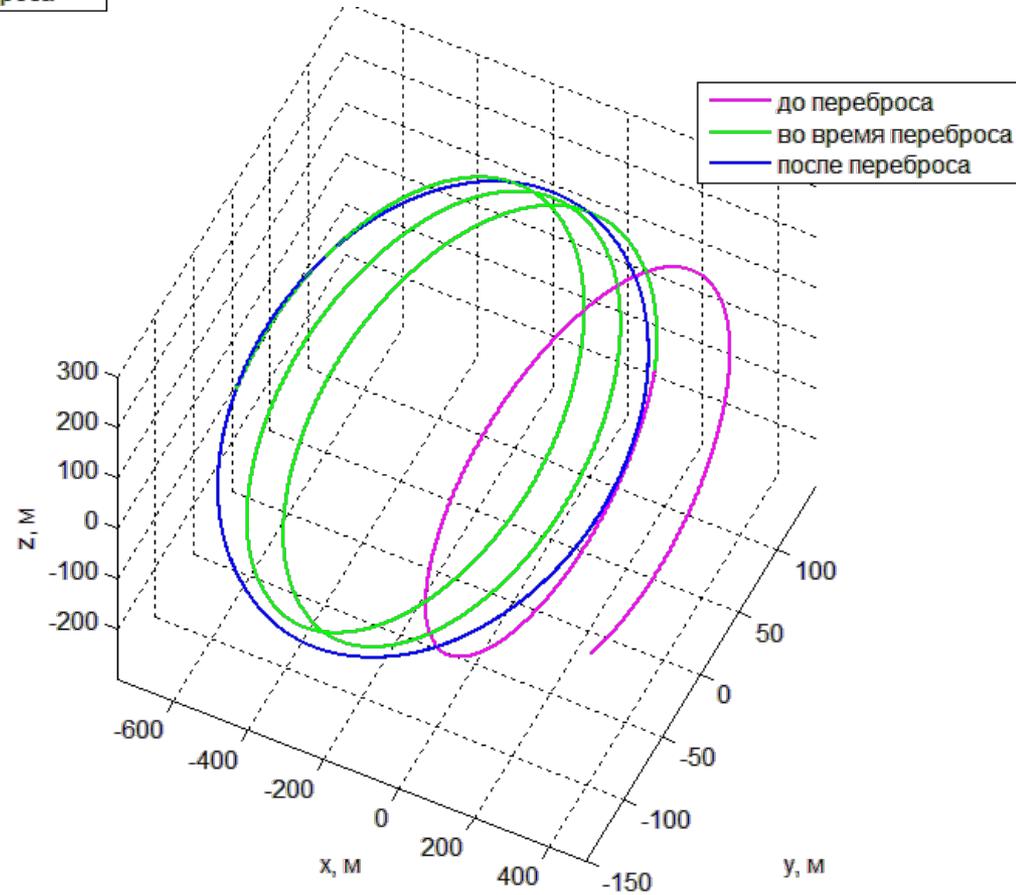
- Если ни начало, ни конец переброса не фиксированы, возможна оптимизационная постановка задачи

Пример переброса между двумя спутниками

Траектории спутников во время переброса



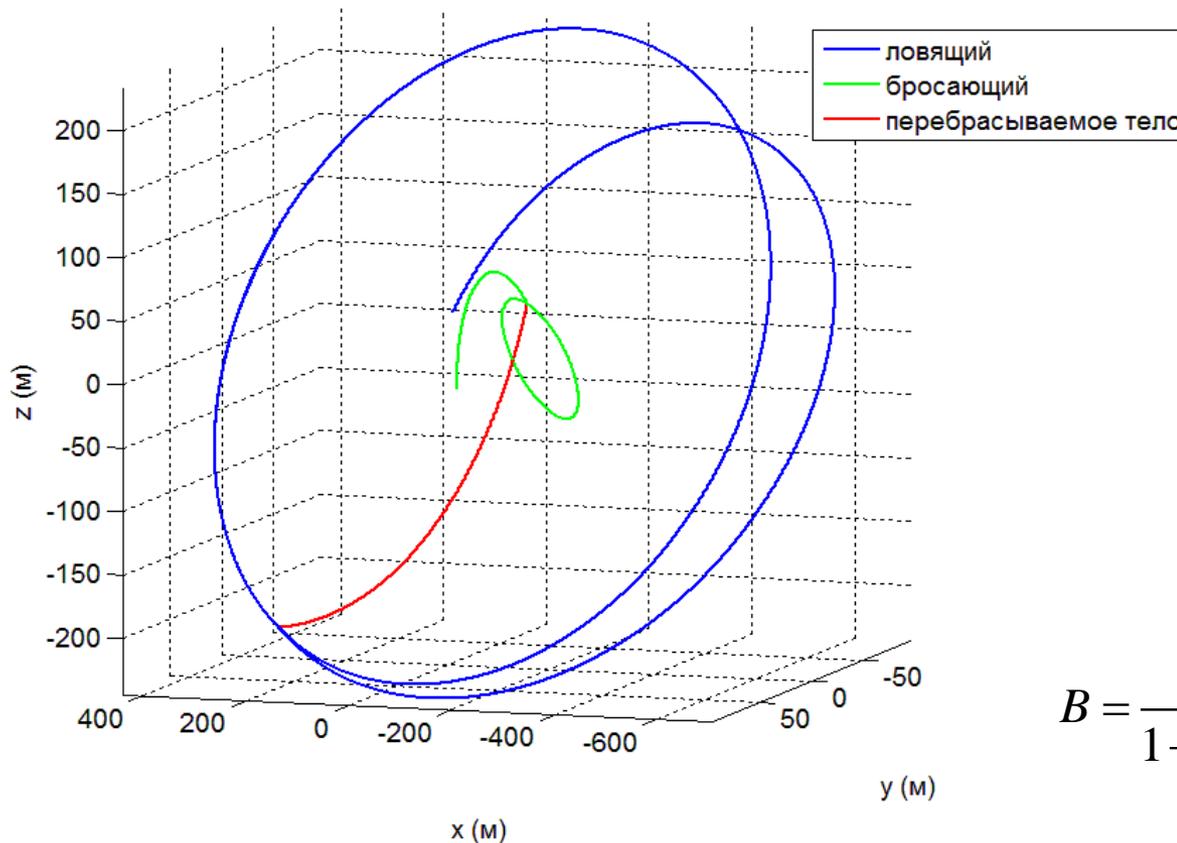
Переброс за один виток



Переброс за два витка

Три спутника, выравнивание дрейфов

Если дрейфы трёх спутников удовлетворяют неравенству, можно совершить переброс, приравнивающий три дрейфа.



Выравнивание дрейфов

$$A - B \leq C_r \leq A + B$$

$$A = \frac{C_c(K_c - 3) + C_t(K_t + 1)}{1 + K_c + K_t}$$

$$B = \frac{2}{1 + K_c + K_t} \sqrt{(2C_c - z_{c,0})^2 + \frac{\dot{z}_{c,0}^2}{\omega^2}}$$

Оптимальные перебросы

Параметры траектории после переброса – суть функции t_e , t_m

Рассмотрим оптимизационные задачи

Форма траектории наиболее близка к изначальной

$$\Phi_1(t_e, t_m) = (\bar{A} - A)^2 + (\bar{B} - B)^2$$

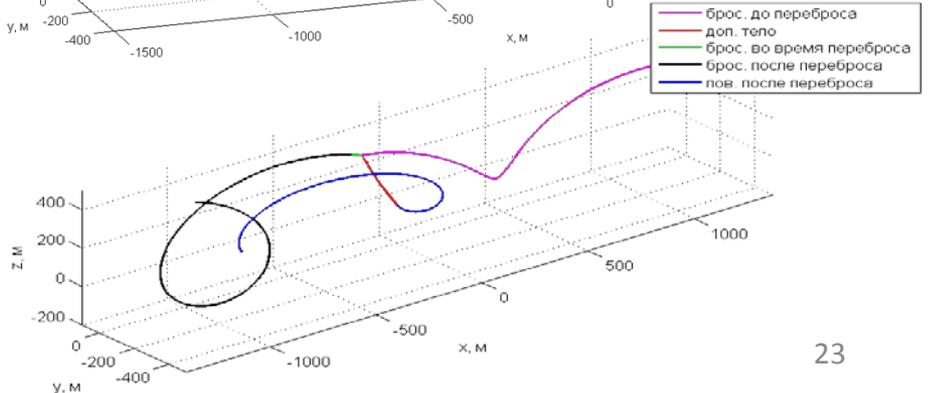
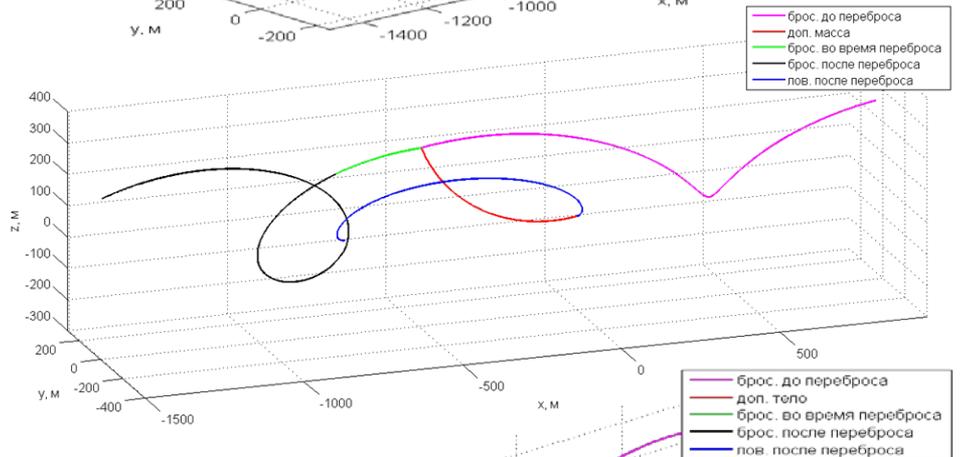
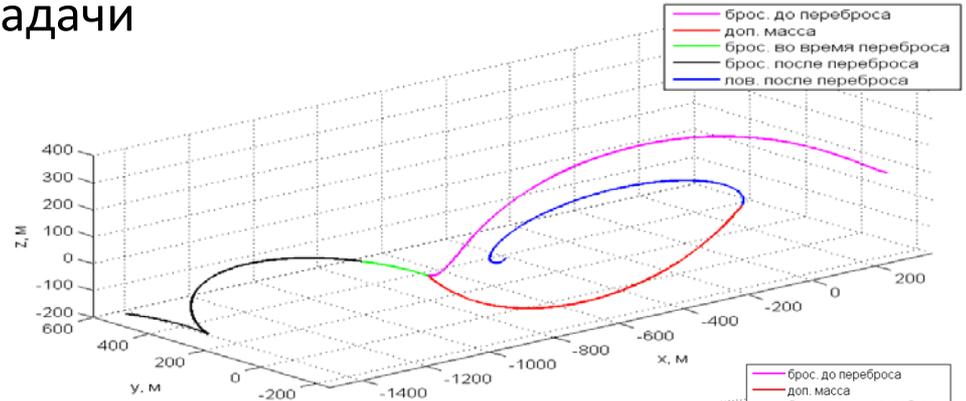
$$A = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, \quad B = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$$

Минимизация скорости броска

$$\Phi_2(t_e, t_m) = \|\delta v\|^2 = \delta \dot{x}^2 + \delta \dot{y}^2 + \delta \dot{z}^2$$

Минимизация времени переброса

$$\Phi_3(t_e, t_m) = t_m - t_e$$



Оптимальные перебросы

Пример: $x_0 = 242 \text{ м}, y_0 = 67 \text{ м}, z_0 = 140 \text{ м},$

$\dot{x}_0 = -0.2244 \text{ м/с}, \dot{y}_0 = 0.11 \text{ м/с}, \dot{z}_0 = 0.11 \text{ м/с},$

$\omega = 0.0011 \text{ с}^{-1}, k = 1/20$

$A = 100.7 \text{ м}, B = 120.4 \text{ м}, C_1 = 76 \text{ м}, |\mathbf{v}| = 1.30 \text{ м/с}$

Форма траектории наиболее близка к изначальной

$t_e = 4380 \text{ с}, t_m = 5286 \text{ с}, \Delta t = 906 \text{ с}$

$|\mathbf{v}| = 1.3 \text{ м/с}, \Delta A = 0.5 \text{ м}, \Delta B = 4.6 \text{ м}$

Минимизация скорости броска

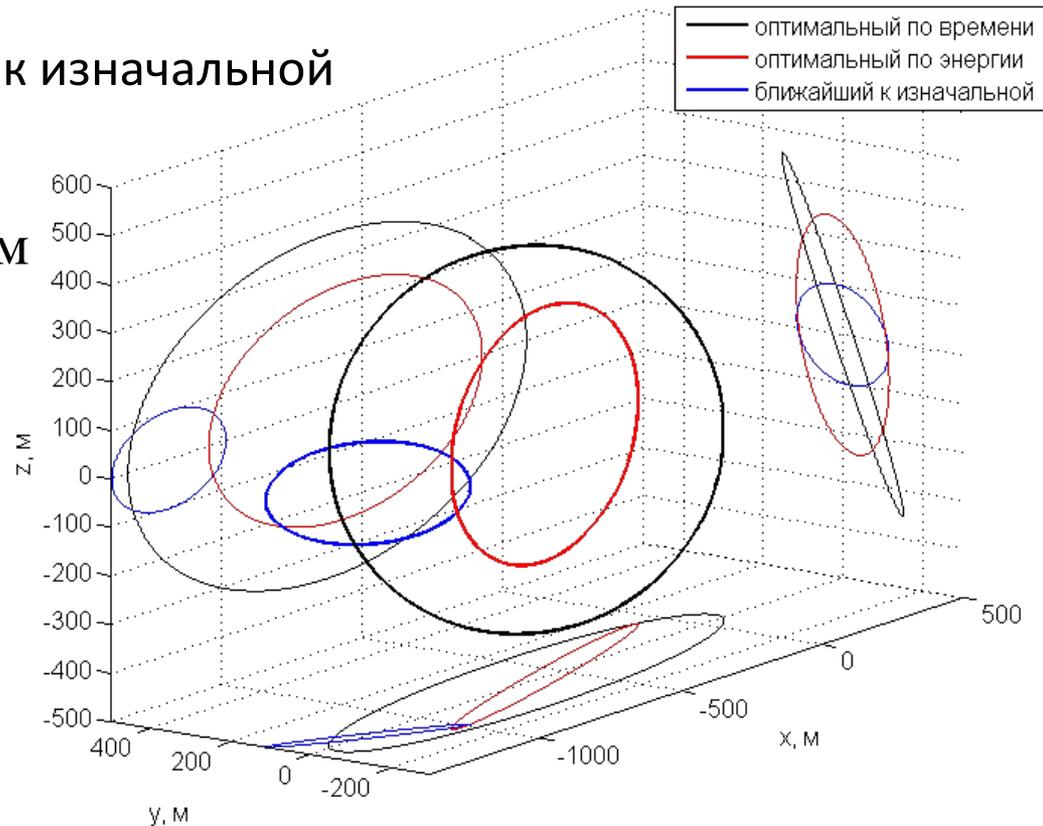
$t_e = 1806 \text{ с}, t_m = 2424 \text{ с}, \Delta t = 618 \text{ с}$

$|\mathbf{v}| = 1.25 \text{ м/с}$

Минимизация времени переброса

$t_e = 925 \text{ с}, t_m = 1025 \text{ с}, \Delta t = 100 \text{ с}$

$|\mathbf{v}| = 2.86 \text{ м/с}$



Заключение

- Методы управления с помощью альтернативных систем действительно позволяют управлять относительным движением без затрат топлива, однако требуют установки специальных средств (электронная пушка, жидкокристаллическая пленка или манипулятор).
- Предложенные алгоритмы управления демонстрируют их работоспособность .
- Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-00665, № 14-01-31313.

Спасибо за внимание!