

# Построение орбитального и углового движения КА при межпланетном перелете



Я.В. Маштаков<sup>1</sup>  
Р.В. Ельников<sup>2</sup>



<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,

<sup>2</sup>Московский Авиационный Институт (НИУ)

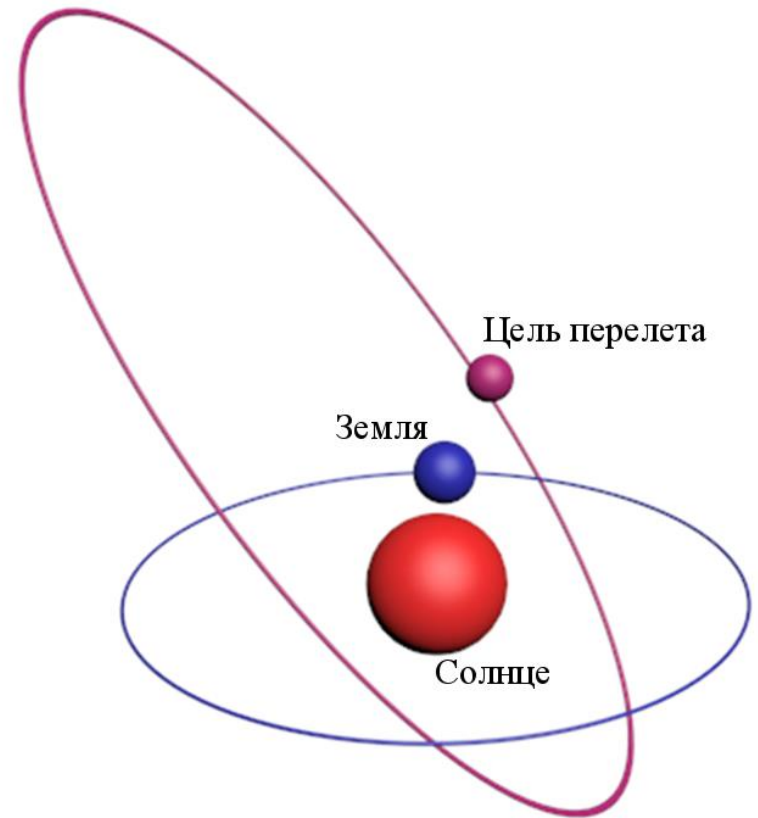
# Содержание доклада

- Постановка задачи
- Построение орбитального движения
- Построение углового движения
- Построение управления
- Алгоритм разгрузки маховиков
- Моделирование
- Заключение

# Постановка задачи

Рассматривается межпланетный перелет с малой тягой. Требуется:

- Построить оптимальную по топливу орбиту перелета
- Построить угловое движение КА
- Построить управление
- Оценить время работы двигателей разгрузки



# Построение орбитального движения

Оптимизационная задача построения орбитального движения

$$\dot{\mathbf{V}} = -\frac{\mu \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \delta \frac{P}{m} \mathbf{r}_t,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}, \quad \dot{m} = -\delta \frac{P}{w},$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad m(t_0) = m_0,$$

$$\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \quad \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f,$$

$$J = -m_{cons} = -\int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{P}{w} dt \rightarrow \max.$$

$\mathbf{r}_t$  - орт тяги,  $P$  - сила тяги двигателя,  $\delta$  - функция тяги,  $\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f$  - краевые условия,  $m_{cons}$  суммарные затраты топлива на перелет

# Построение орбитального движения

Для решения оптимизационной задачи применяется принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан задачи оптимального управления принимает вид:

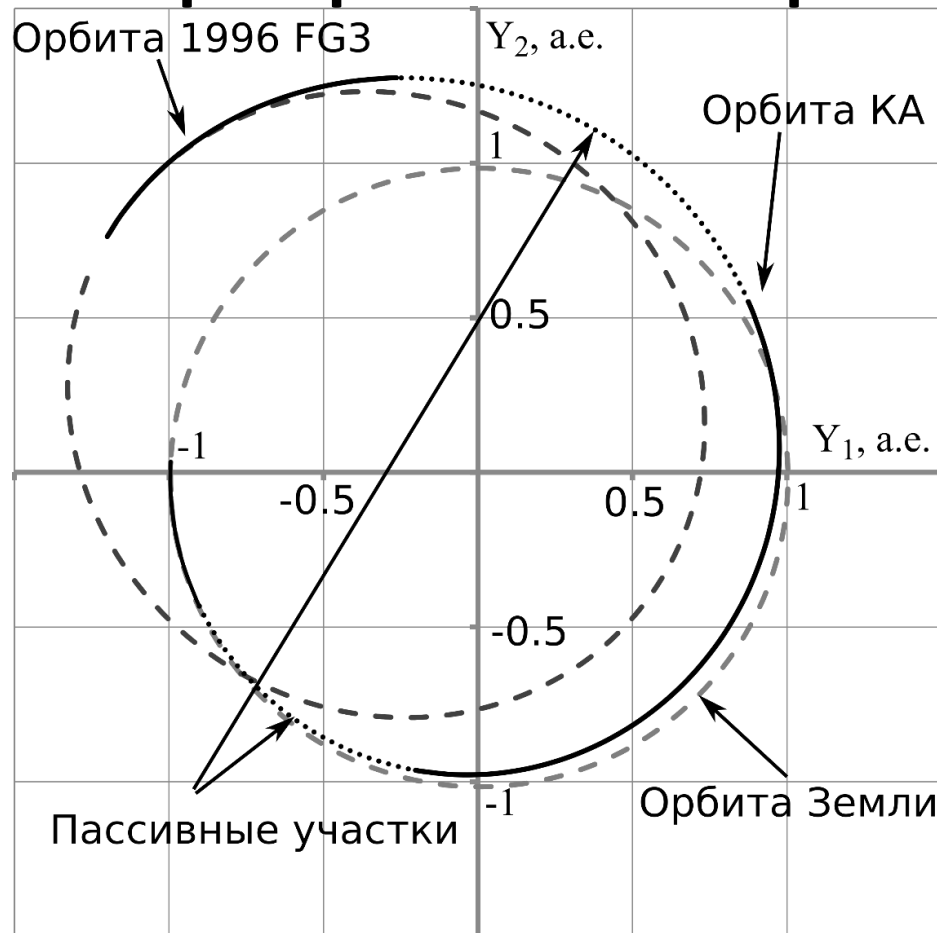
$$H = -\delta \frac{P}{w} \lambda_m + \left( \lambda_v, -\frac{\mu \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \delta \frac{P}{m} \mathbf{r}_t \right) + (\lambda_r, \mathbf{V})$$

Исходя из принципа максимума

$$\mathbf{r}_t = \frac{\lambda_v}{\lambda_r}, \quad \psi = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{w}, \quad \delta = \begin{cases} 1, & \psi > 0 \\ 0, & \psi \leq 0 \end{cases}$$

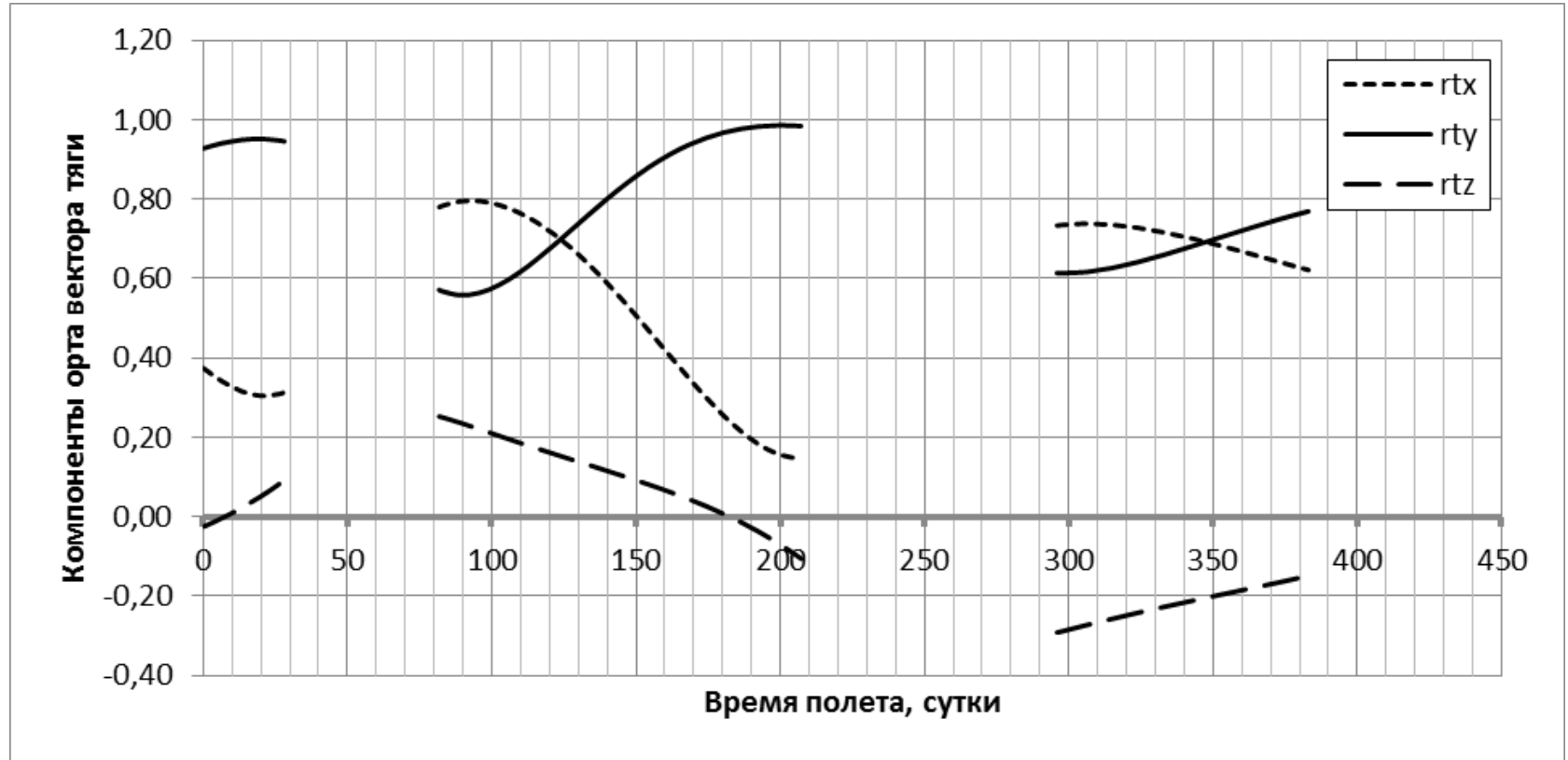
В итоге, задача сводится к краевой, где искомыми параметрами являются начальные условия для  $\lambda_v, \lambda_r$

# Пример орбиты перелета



Длительность перелета 383 суток, расход рабочего тела составляет 110 кг. Дата старта 18 марта 2024 г.

# Пример орбиты перелета



Изменение направления вектора тяги КА

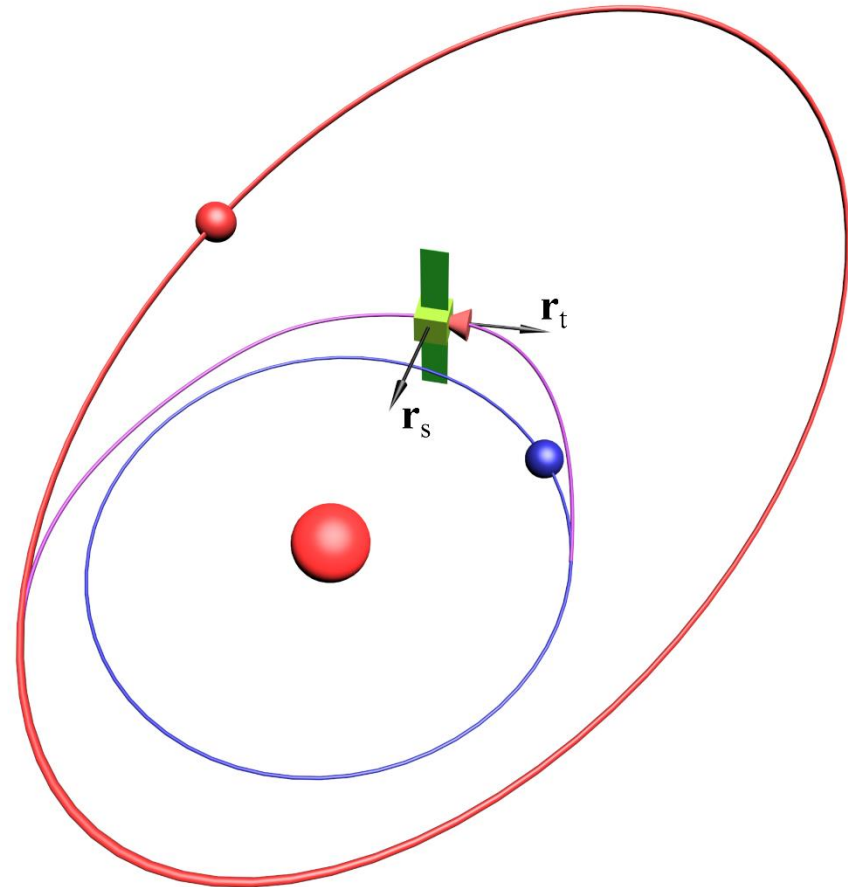
# Построение углового движения

Известно:

- $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{r}_t$  с некоторым шагом по времени (из решения краевой задачи)
- Параметры КА

Требуется:

- Построить угловое движение
- Найти управление





# Построение углового движения

Кинематические уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{\Omega} \mathbf{B},$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,ref} & -\omega_{2,ref} \\ -\omega_{3,ref} & 0 & \omega_{1,ref} \\ \omega_{2,ref} & -\omega_{1,ref} & 0 \end{pmatrix},$$

Выражения для базисных векторов и их производных

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_t|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|}, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_3, \dot{\mathbf{h}})}{|\dot{\mathbf{h}}|}, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{\dot{\mathbf{r}}_t - \mathbf{e}_2 (\dot{\mathbf{r}}_t, \mathbf{e}_2)}{|\dot{\mathbf{r}}_t|}, \quad \dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \times \dot{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t, \quad \dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{r}}_s \times \mathbf{r}_t + \mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_t$$

# Построение углового движения

Из-за большого шага по времени нужна интерполяция  $\mathbf{r}_s$  и  $\mathbf{r}_t$ .

Итоговый алгоритм построения углового движения:

## Построение сплайна Эрмита

$$\mathbf{r}(t) = f_1(x)\mathbf{r}_k + f_2(x)\mathbf{m}_k + f_3(x)\mathbf{r}_{k+1} + f_4(x)\mathbf{m}_{k+1},$$

$$\mathbf{m}_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{2(t_{k+1} - t_k)} + \frac{\mathbf{r}_{k+2} - \mathbf{r}_{k+1}}{2(t_{k+2} - t_{k+1})}, \quad x = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}$$

Вектор тяги и  
направление на солнце

$$\mathbf{r}_t(t_i), \mathbf{r}_s(t_i), i = 1..n$$

Построение углового  
движения

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_t(t), \mathbf{r}_s(t) \rightarrow \mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{r}}_t(t), \dot{\mathbf{r}}_s(t) \rightarrow \dot{\mathbf{B}} \end{array} \right\} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_{ref}$$

## Вычисление производных

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{f'_1(x)\mathbf{r}_k + f'_2(x)\mathbf{m}_k + f'_3(x)\mathbf{r}_{k+1} + f'_4(x)\mathbf{m}_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}$$

# Построение управления

Управление на основе ПД-регулятора:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{dist} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J}\mathbf{W}_{rel}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref} + \\ + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + k_a\mathbf{S} - k_\omega(\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref})$$

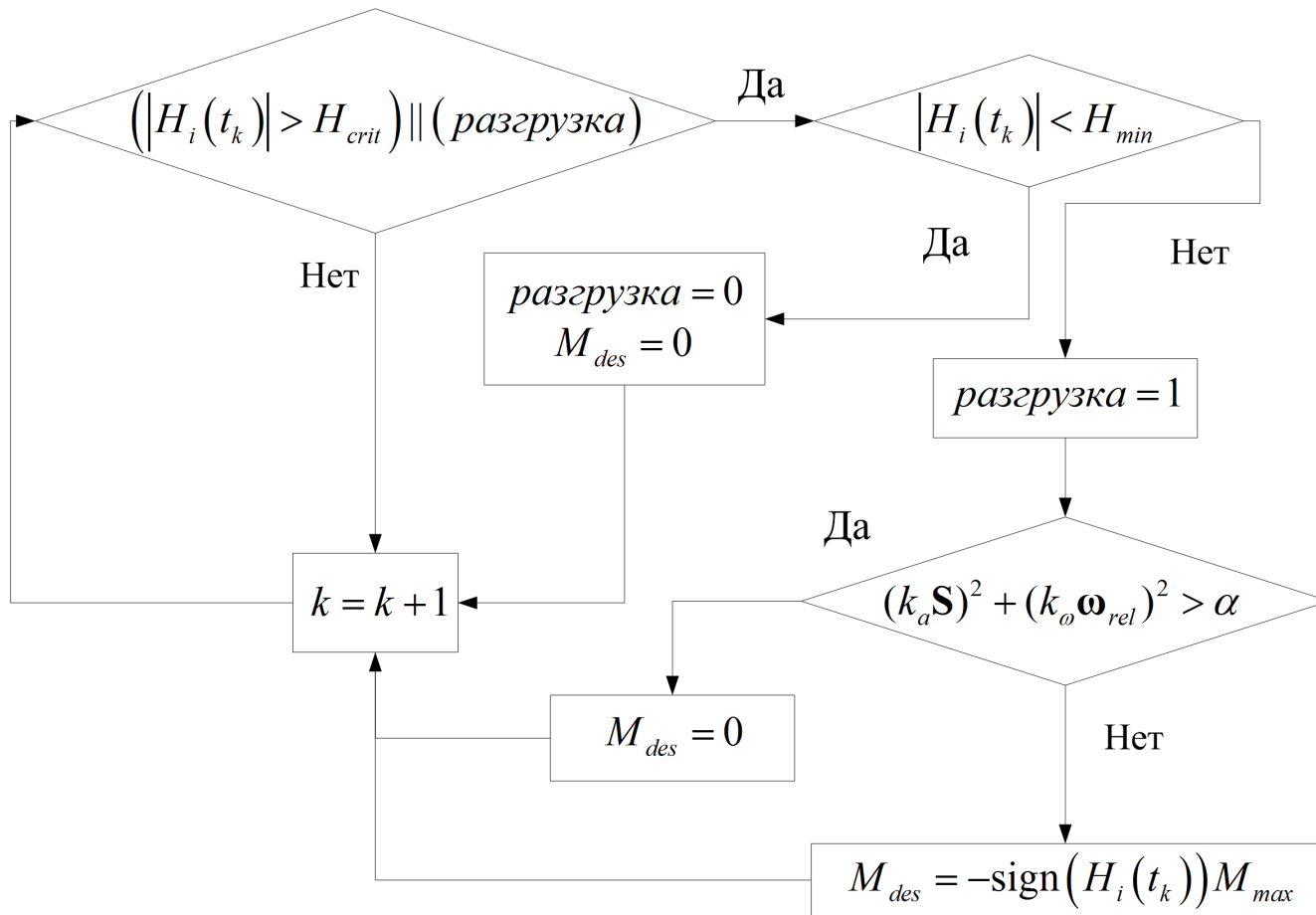
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{abs}\mathbf{B}^T, \mathbf{S} = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})^T$$

Актюаторы – маховики:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}$$

Для разгрузки используются газовые двигатели нерегулируемой тяги

# Алгоритм разгрузки



# Параметры спутника

- Маршевый двигатель СПД-100, тяга 89 мН, жестко закреплен
- Разгрузочные двигатели создают момент 1 Н·м
- Запас кин. момента маховиков 2 Н·м·с, управляющий момент 20 мН·м
- Тензор инерции КА

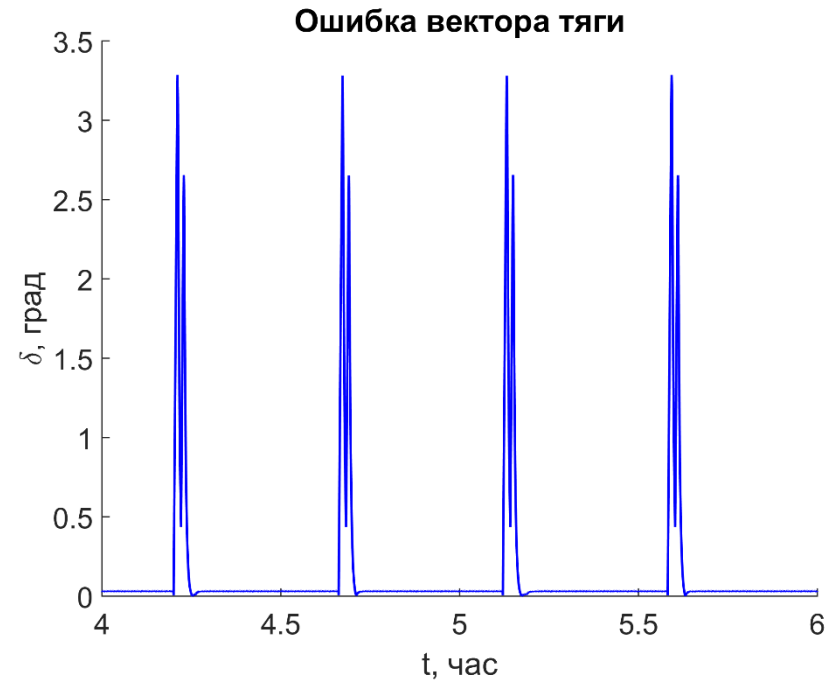
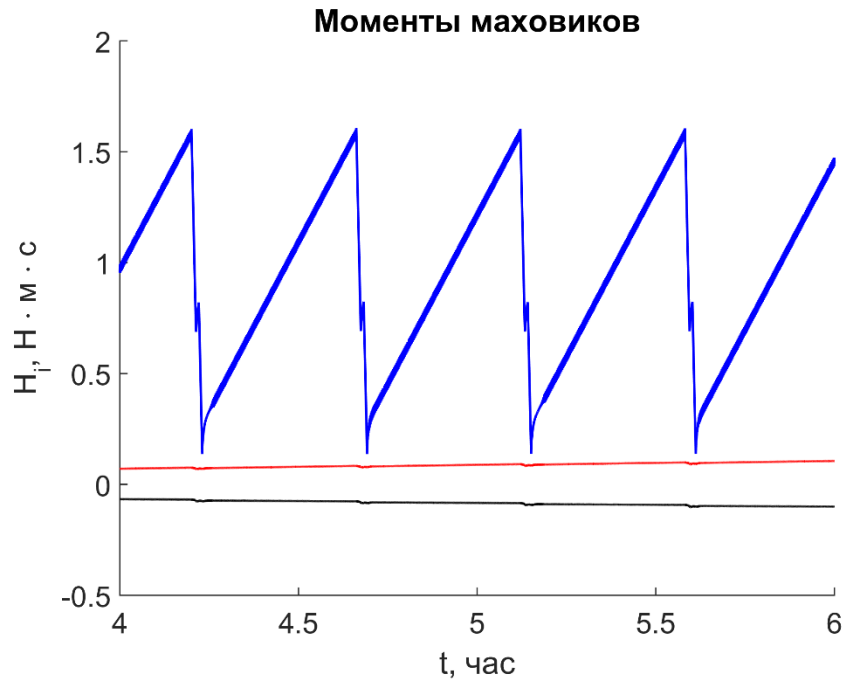
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 \\ 0 & 380 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

# Моделирование

Внешние и возмущающие моменты:

- Эксцентриситет тяги  $1^\circ$ , соответствующий момент  $10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- Момент солнечного давления  $10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- Неточность установки двигателей-маховиков  $1^\circ$
- Неточность знания тензора инерции 10%

# Результаты



Суммарное время работы двигателей разгрузки за 383 суток полета: 4.8 ч

# Заключение

- Разработан алгоритм построения орбитального и углового движения КА при межпланетном перелете с использованием двигателей малой тяги
- Предложен алгоритм разгрузки маховиков, обеспечивающий сохранение ориентации КА на время разгрузки на приемлемом уровне
- Проведена оценка времени работы двигателей разгрузки с учетом наличия эксцентриситета тяги маршевого двигателя и солнечного давления

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-11-00621