Переходные процессы в движении спутника, оснащенного тангажным маховиком и магнитной системой демпфирования

Д.С. Ролдугин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Постановка задачи

- Спутник – твердое тело
- Орбита круговая
- Модель геомагнитного поля – прямой диполь
- Центральное гравитационное поле
- Движение описывается самолетными углами (последовательность поворотов 2-3-1)
- Маховик имеет постоянную скорость вращения
- Магнитные катушки создают демпфирующий момент

Режим движения

- Совпадение связанных и орбитальных осей – устойчивое положение,
  $$A-C>0,\ B-A+h/\omega_0>0,\ 4\left(B-C\right)+h/\omega_0>0$$
- Задача магнитной системы – обеспечение асимптотической устойчивости введением демпфирования
  $$\mathbf{M}_{упр}=k\left(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}$$
- Необходимо определить время переходных процессов

Линеаризованные уравнения движения

$$\ddot{\gamma}+\dot{\beta}-\left(\lambda_A+h_A\right)\left(\dot{\beta}-\gamma\right)+3\lambda_A\gamma=\varepsilon\xi\left(\dot{\beta}B_1B_3-\dot{\gamma}\left(B_2^2+B_3^2\right)+\dot{\alpha}B_1B_2\right),$$

$$\ddot{\alpha}=\varepsilon\frac{C}{B}\left(\dot{\gamma}B_1B_2-\dot{\alpha}\left(B_1^2+B_3^2\right)+\dot{\beta}B_2B_3\right),$$

$$\ddot{\beta}-\dot{\gamma}+\left(\lambda_C+h_C\right)\left(\dot{\gamma}+\beta\right)=\varepsilon\left(\dot{\alpha}B_2B_3-\dot{\beta}\left(B_2^2+B_1^2\right)+\dot{\gamma}B_1B_3\right).$$

$$\xi=\frac{C}{A},\ \varepsilon=\frac{kB_0^2}{C\omega_0},\ \lambda_A=\frac{B-C}{A},\ \lambda_C=\frac{B-A}{C},\ h_A=\frac{h}{A\omega_0},\ h_C=\frac{h}{C\omega_0}$$

Упрощение уравнений

- Основной интерес представляет приведение оси маховика к нормали к плоскости орбиты
- Отделить движение в плоскости удается на полярной орбите
- Движение вне плоскости орбиты

$$\ddot{\beta} + \varepsilon \cos^2 u \dot{\beta} + \left(2\varepsilon \sin u \cos u - 1 + \theta_C\right)\dot{\gamma} + \theta_C \beta = 0,$$

$$\ddot{\gamma} + \left(2\varepsilon\xi \sin u \cos u + 1 - \theta_A\right)\dot{\beta} + 4\varepsilon\xi \sin^2 u \dot{\gamma} + \left(3\lambda_A + \theta_A\right)\gamma = 0,$$

$$\theta_A = h_A + \lambda_A,\ \theta_C = h_C + \lambda_C$$

Движение без управления

- Уравнения имеют вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{A}_1(u)\mathbf{x}$
- При $\varepsilon=0$ собственные числа и векторы

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}\left(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C + \sqrt{\left(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C\right)^2 + 12\lambda_A\theta_C\left(\theta_A - 1\right)}\right)},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-3\lambda_A - 1 - \theta_A\theta_C + \sqrt{\left(3\lambda_A + 1 + \theta_A\theta_C\right)^2 + 12\lambda_A\theta_C\left(\theta_A - 1\right)}\right)},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k = A_k\left(\lambda_k \quad \chi \quad 1 \quad \chi/\lambda_k\right)^T, \ \chi = \frac{\theta_C + \lambda_k^2}{\lambda_k\left(1 - \theta_C\right)}$$

Влияние управления

- Ищем решение в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{4} \left(\boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \boldsymbol{\psi}_{kj}(u) \right) \exp\left(\lambda_k + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \mu_{kj} \right) u + O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

- Из уравнений движения

$\varepsilon = 0$	$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_k + \left(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0\right) \boldsymbol{\varphi}_k = 0$
$\varepsilon = 1$	$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{k1} + \left(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0\right) \boldsymbol{\psi}_{k1} = -\mu_{k1} \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varphi}_k$
$\varepsilon = 2$	$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{k2} + \left(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0\right) \boldsymbol{\psi}_{k2} = -\mu_{k1} \boldsymbol{\psi}_{k1} - \mu_{k2} \boldsymbol{\varphi}_k + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\psi}_{k1}$
$\varepsilon = j$	$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{kj} + \left(\lambda_k \mathbf{E} - \mathbf{A}_0\right) \boldsymbol{\psi}_{kj} = \mathbf{f}_j \left(u, \mu_{k1}, \ldots, \mu_{kj-1}, \boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\psi}_{k1}, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{kj-1}\right)$

Поиск приближенных показателей

- Аналоги характеристических показателей находятся из условия периодичности
$$\boldsymbol{\psi}_{kj}\left(u\right)=\boldsymbol{\psi}_{kj}\left(u+2\pi\right)$$
- Ряд сходится и такие решения можно найти, если $\lambda_{kj}-\lambda_{kl}\neq im,\ j\neq l$
- Решение представим в виде
$$\beta=\left(A_k+\varepsilon\tau_k\left(u\right)\right)\exp\left(\lambda_k+\varepsilon\sigma_k\right)u,$$
$$\gamma=\left(\chi A_k+\varepsilon\vartheta_k\left(u\right)\right)\exp\left(\lambda_k+\varepsilon\sigma_k\right)u.$$

Артемьев Н.А. Известия АН СССР. Серия мат. 1944. Т. 8, № 2. с. 61–100

Поиск приближенных показателей

- Уравнения для 0 и 1 приближений

$$\left(\lambda_k^2+\theta_C\right)A_k+\left(\theta_C-1\right)\lambda_k\chi A_k=0,$$

$$\left(1-\theta_A\right)\lambda_k A_k+\left(\lambda_k^2+3\lambda_A+\theta_A\right)\chi A_k=0,$$

$$\left(\lambda_k^2+\theta_C\right)\left(F_1-f_1+C_1\sigma_k\right)-\left(\theta_C-1\right)\lambda_k\left(F_2-f_2+C_2\sigma_k\right)=0,$$

$$\left(1-\theta_A\right)\lambda_k\left(F_1-f_1+C_1\sigma_k\right)-\left(\lambda_k^2+3\lambda_A+\theta_A\right)\left(F_2-f_2+C_2\sigma_k\right)=0.$$

- Определитель совпадает с хар. уравнением при $\varepsilon=0$ и потому нулевой

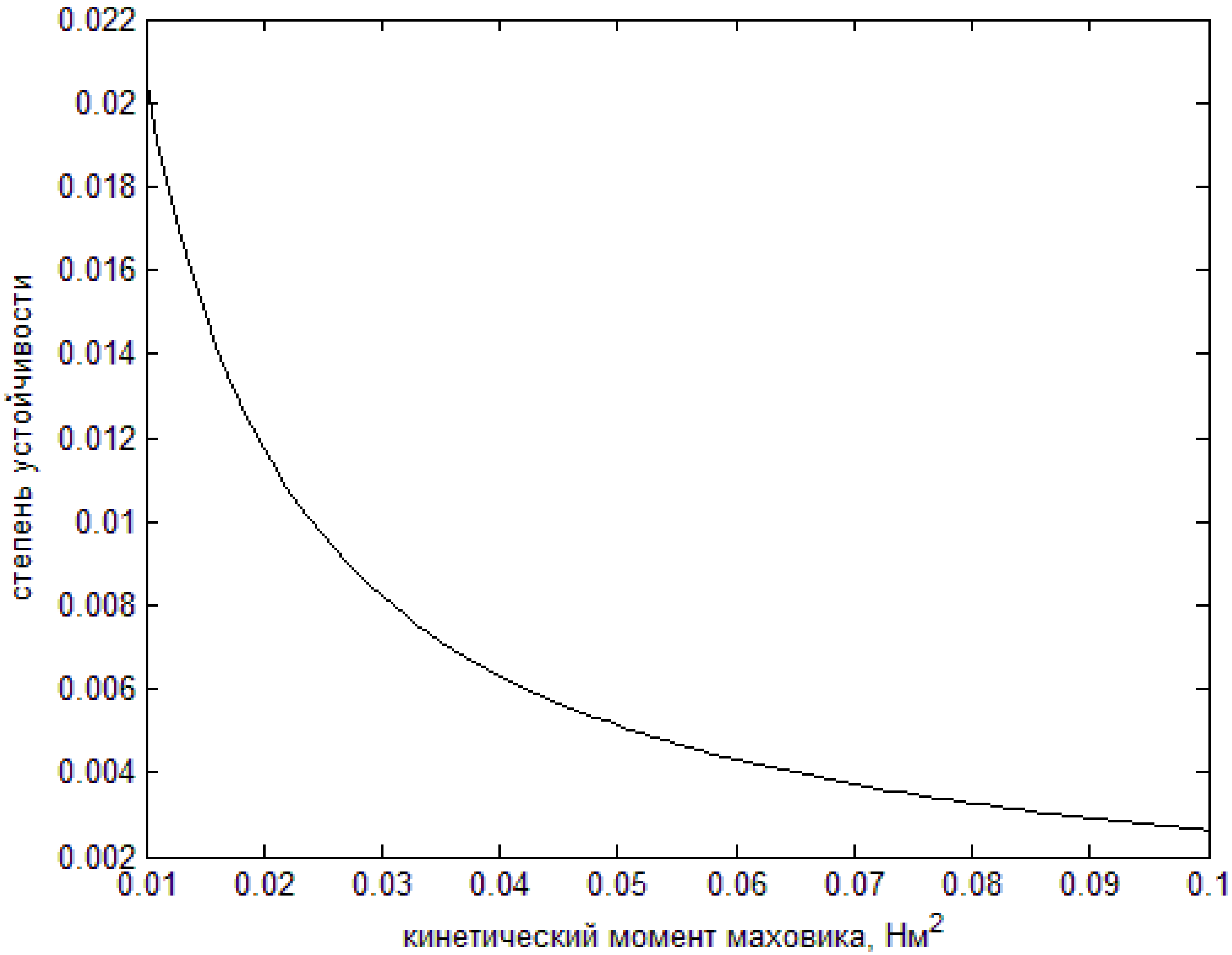
Приближенные показатели

- Периодичность τ_k, ϑ_k обеспечивается подбором постоянных интегрирования и σ_k
- Это позволяет найти приближение характеристических показателей

$$\sigma_k = \frac{1}{2}\frac{4\xi\chi_r\eta_k^2\left(1-\theta_C\right)+\eta_k\left(\eta_k^2-\theta_C\right)}{\left(\theta_C-\eta_k^2\right)\left[2\eta_k+\chi_r\left(\theta_C-1\right)\right]+\eta_k\left(\theta_C-1\right)\left[2\chi_r\eta_k+\left(\theta_A-1\right)\right]},$$

$$\chi = \frac{\theta_C-\eta_k^2}{\eta_k\left(\theta_C-1\right)}i = \chi_r i,\ \ \lambda_k = i\eta_k$$

Пример: тензор инерции (1.5, 1.8, 1.1) кг·м^2, орбита 1000 км, ε≈0.18



Сравнение с численным моделированием

- Маховик с кин. моментом 0.01 Н·м
  - Степень устойчивости ок. 0.02, изменение угла рассогласования 9.2°→0.8° за 10^5 секунд
  - Численное моделирование 9.2°→1.1°
- Маховик с кин. моментом 0.05 Н·м
  - Степень устойчивости ок. 0.005, изменение угла рассогласования 9.2°→5.8° за 10^5 секунд
  - Численное моделирование 9.2°→5.6°

Результат

Для спутника с тангажным маховиком и магнитной системой демпфирования под действием гравитационного момента

- Найдено приближенное выражение для аналога степени устойчивости на полярной орбите
- Получена простая формула, показывающая время переходных процессов