



XI Всероссийский съезд
по фундаментальным проблемам теоретической
и прикладной механике
20—24 августа 2015 года

Механика космического полета

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Проектирование траекторий перелета на орбиты вокруг точек либрации системы Земля-Луна с помощью резонансных сближений

М.Г. Широбоков

Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН

С.П. Трофимов

Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- Мотивация и актуальность проблемы
- Этапы решения
- Алгоритмы и реализация
- Результаты
- Заключение

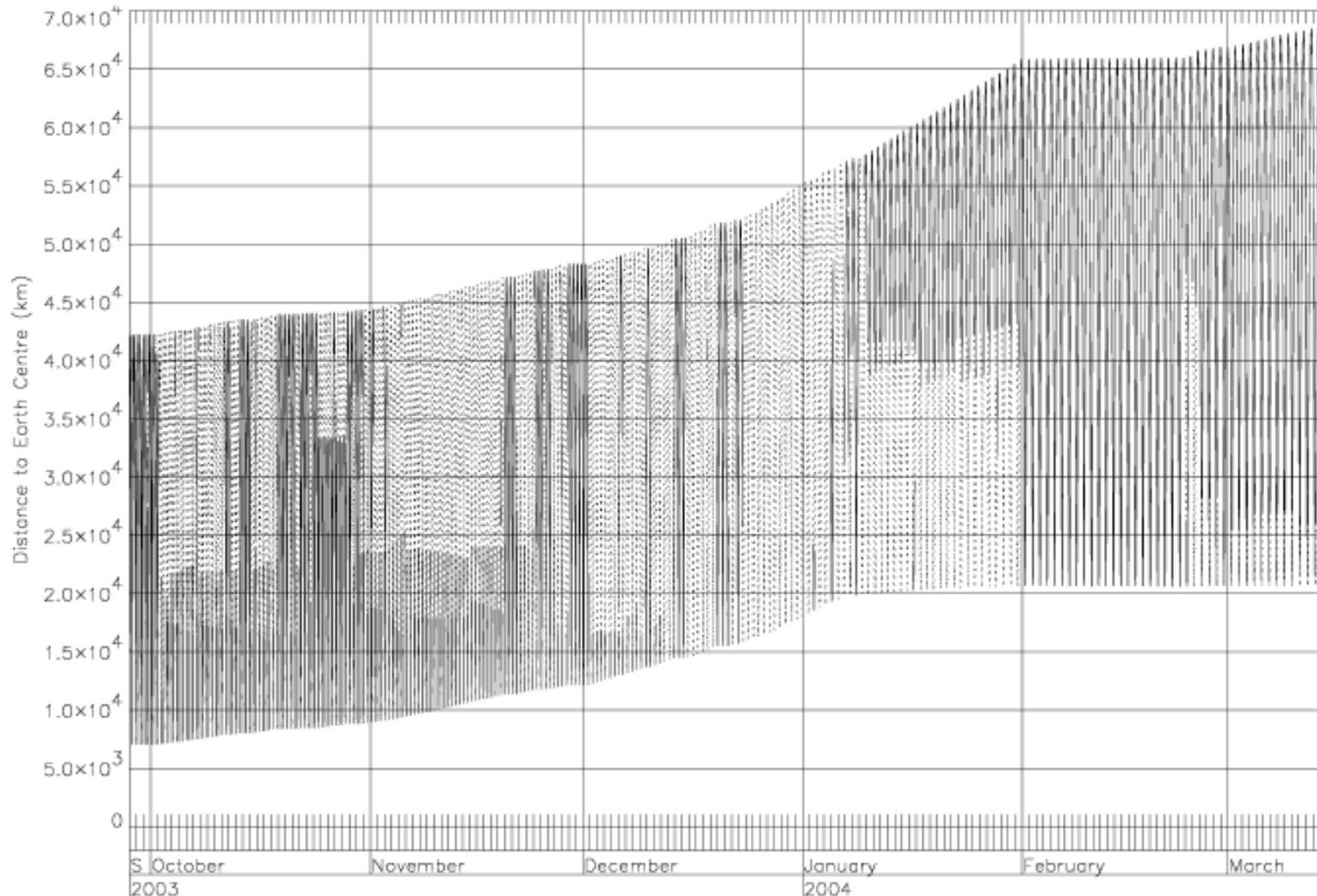
Основные сложности

- Многовитковый перелет с малой тягой
- Преодоление радиационных поясов
- При попутном запуске не выбираются дата и/или момент старта
- Требуется учет тени Земли (двигатель выключен)
- Требуется оптимизация массы полезной нагрузки

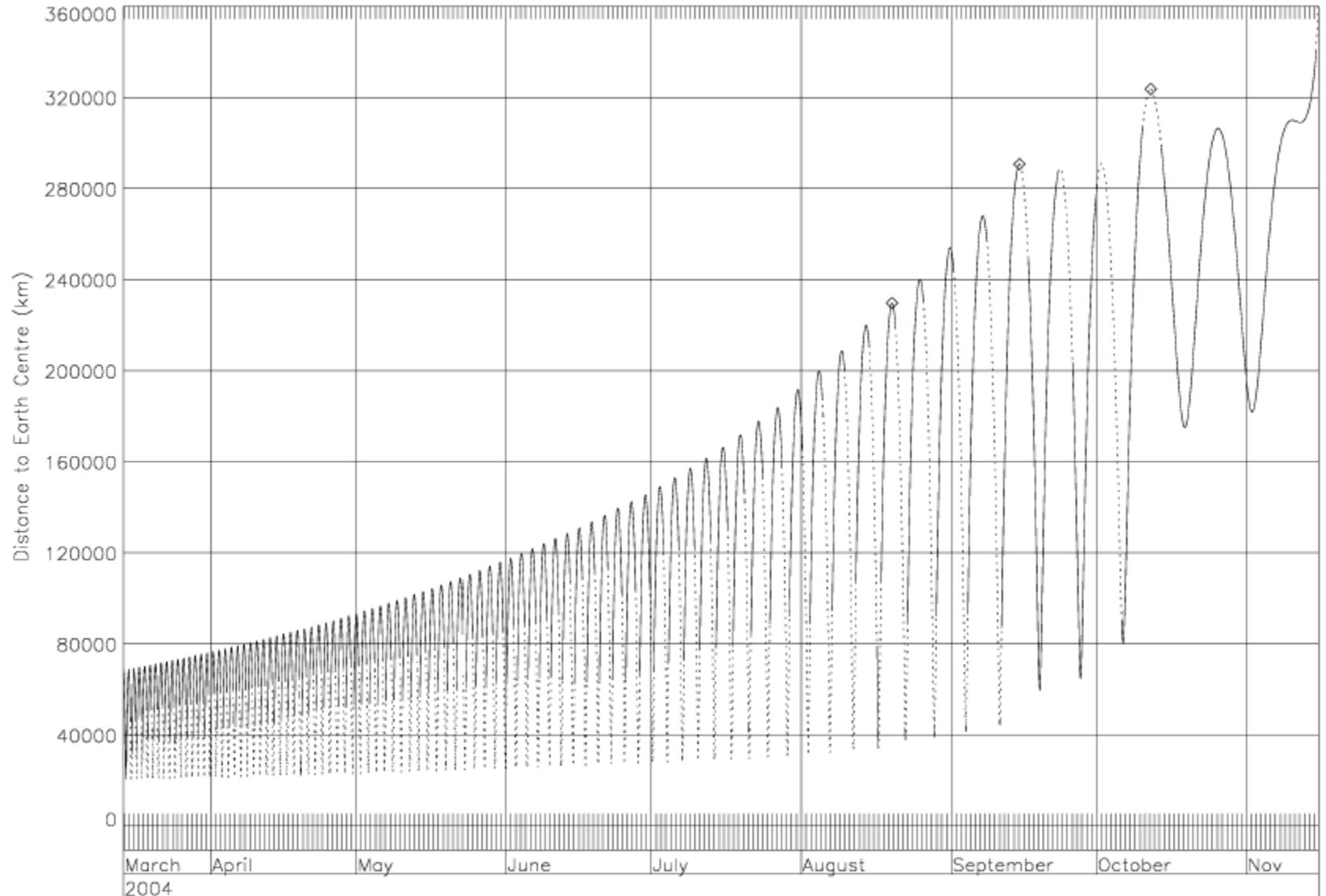
Миссия SMART-1

- Начальная орбита геопереходная с перигеем 7,029 км и апогеем 42,384 км
- Почти непрерывная тяга вдоль скорости в течение трех месяцев, пока перигей не поднялся до 20,000 км
- Дальнейшие маневры были направлены на увеличение апогея до 67,500 км, на это ушло еще 3 месяца
- За эти шесть месяцев сжатие Земли изменило долготу восходящего узла (ДВУ) на -20° , а аргумент перигея на $+37^\circ$. По отношению к плоскости Луны наклонение стало 33°
- Затем тяга вблизи перицентра и апоцентра увеличила апогей до 200,000 км. Здесь Луна начала сильно возмущать орбиту и появилась возможность использовать резонансы для скачкообразного поднятия перигея КА

Расстояние до центра Земли (1)



Расстояние до центра Земли (2)



Этапы решения задачи перелета

- Первый этап – максимально быстрый подъем орбиты так, чтобы перигей вышел за пределы радиационных поясов
- Второй этап – увеличение орбиты в размерах и подстройка ориентации плоскости орбиты КА относительно орбиты Луны
- Третий этап – серия резонансных сближений с Луной

Требования к этапам

- Первый этап:
 - Функционал: время полета
 - Внешние возмущения: сжатие, атмосфера и тень Земли
 - Направление тяги: по касательной к траектории везде, за исключением тени
- Второй этап:
 - Функционал: масса полезной нагрузки, или время полета, или какое-то Парето-оптимальное решение
 - Внешние возмущения: сжатие и тень Земли, возмущения Луны и Солнца
- Третий этап:
 - Учет эксцентриситета¹ лунной орбиты, возмущения Солнца

¹На данный момент: ограниченная круговая задача трех тел Земля-Луна-КА

Реализация алгоритмов

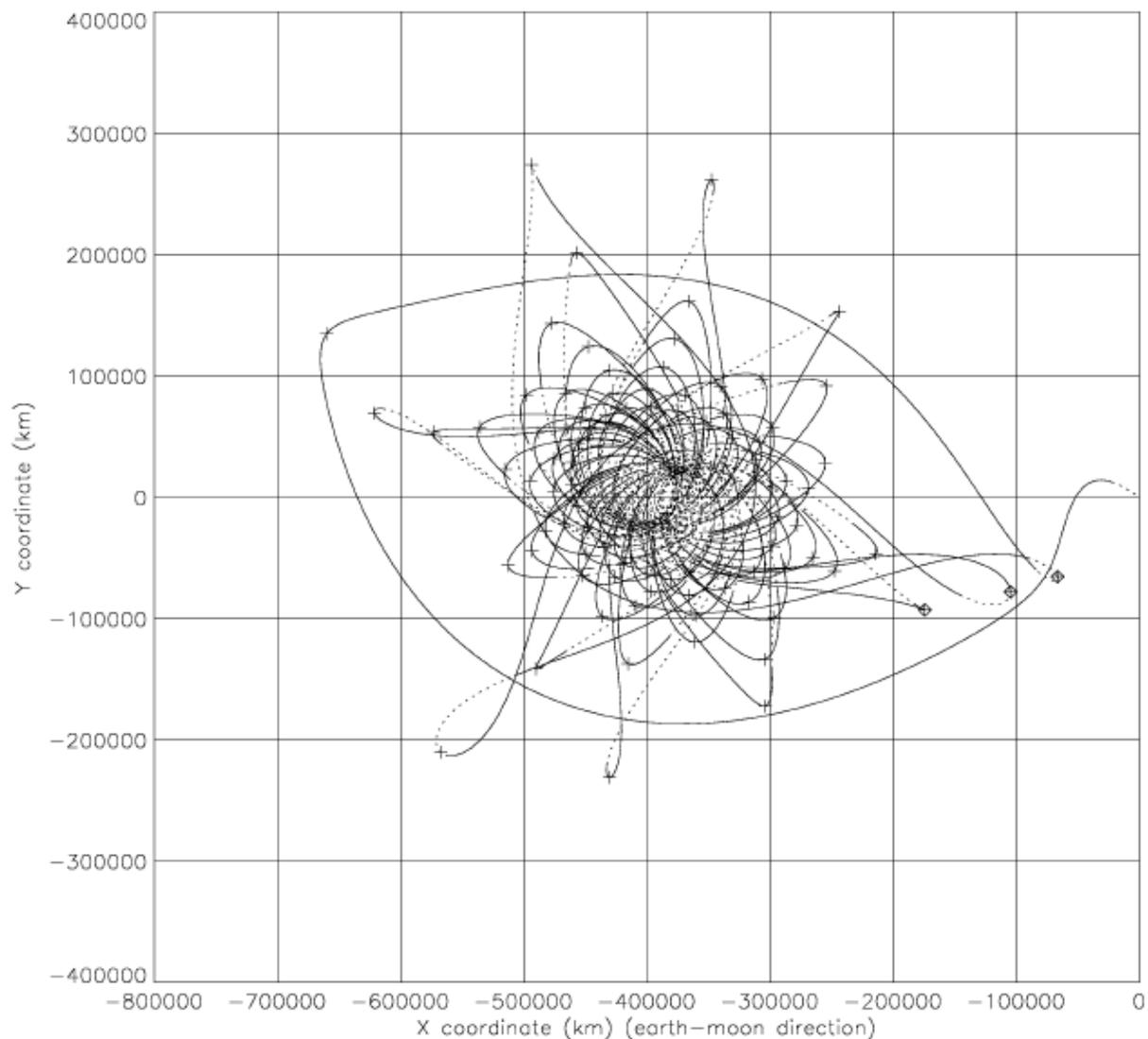
- Сначала решается первый этап:
 - Дано: радиус круговой орбиты и наклонение
 - Параметры: дата старта и момент старта
 - Выход: орбитальные элементы в конце траектории
- Независимо от первого решается третий этап:
 - Дано: размеры орбиты вокруг L1 Земля-Луна
 - Параметры: точка на орбите, порядок резонанса $l:m$
 - Траектории распространяются назад во времени
- Второй этап сшивает траектории первого и третьего этапа

Алгоритм расчета резонансных траекторий

1. Выбрать точку на гало орбите и распространить траекторию вдоль устойчивого многообразия назад во времени до первого перигея
2. Выбрать порядок резонанса $l:m$
3. Рассчитать в первом приближении активный участок вблизи перигея, переводящий КА на резонансную траекторию
4. Распространять траекторию назад сначала на время l оборотов Луны вокруг Земли, и затем до тех пор, пока КА не окажется максимально близко к Луне
5. В этот момент y -координата должна быть отрицательной (резонансный случай), иначе требуется коррекция касательного импульса¹
6. В случае попадания на резонансную траекторию, орбита КА вновь продолжается до первого перигея и процедура повторяется с пункта 2 и до тех пор, пока апогей не опуститься ниже 200,000 км

¹Alessi E. M. et al. Out-of-plane extension of resonant encounters for escape and capture
//Proceedings of the 64rd International Astronautical Congress. – Paper IAC-13.C1.9.1. – 2013.

Траектория КА во время второго и третьего этапов в селеноцентрической вращающейся с/к



Уравнения движения в равноденственных орбитальных элементах¹

$$\frac{dh}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot h \cos \vartheta \cos \psi$$

$$\frac{de_x}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \{ \xi \sin F \sin \vartheta \cos \psi + ((\xi + 1) \cos F + e_x) \cos \vartheta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \{ -\xi \cos F \sin \vartheta \cos \psi + ((\xi + 1) \sin F + e_y) \cos \vartheta \cos \psi + e_x \eta \sin \psi \}$$

$$\frac{di_x}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot \frac{1}{2} \varphi \cos F \sin \psi$$

$$\frac{di_y}{dt} = \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot \frac{1}{2} \varphi \sin F \sin \psi$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P h}{m \xi} \cdot \eta \sin \psi$$

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{P}{w}$$

| | |
|--|-------------------------------------|
| $h = \sqrt{p/\mu}$ | $\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F$ |
| $e_x = e \cos(\Omega + \omega)$ | $\eta = i_x \sin F - i_y \cos F$ |
| $e_y = e \sin(\Omega + \omega)$ | $\varphi = 1 + i_x^2 + i_y^2$ |
| $i_x = \operatorname{tg}(i/2) \cos \Omega$ | |
| $i_y = \operatorname{tg}(i/2) \sin \Omega$ | |
| $F = \nu + \Omega + \omega$ | |

¹Петухов В. Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т. 17. – №. 3. – С. 50-58.

Оптимальное по быстродействию управление

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min$$

$$H = -1 + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P h}{m \xi} (A_\tau \cos \vartheta \cos \psi + A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi) \rightarrow \max_{\delta(t), \vartheta(t), \psi(t)}$$

$$A_\tau = h p_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey}$$

$$A_r = \xi (p_{ex} \sin F - p_{ey} \cos F)$$

$$A_n = \eta (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{\varphi}{2} (p_{ix} \cos F + p_{iy} \sin F) \eta p_F$$

↓

$$\cos \vartheta = \frac{A_\tau}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}$$

$$\sin \vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}$$

$$\sin \psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}$$

$$\delta \equiv 1$$

Осреднение уравнений оптимального движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \mathbf{x} = (h, e_x, e_y, i_x, i_y)$$
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad \mathbf{p} = (p_h, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y})$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, F, t) \quad \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}, F, t) dt = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}, F, t) \frac{dt}{dF} dF$$

Постановка краевой задачи

- Даны элементы орбиты в начальный и конечный моменты времени
- Необходимо найти сопряженные переменные в начальный момент времени и время полета, такие, чтобы **в конечный момент времени** невязка между элементами орбиты и гамильтониан были равны нулю

Решение краевой задачи методом продолжения по параметру

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0 \quad \mathbf{z} = (\mathbf{p}(0), T)$$

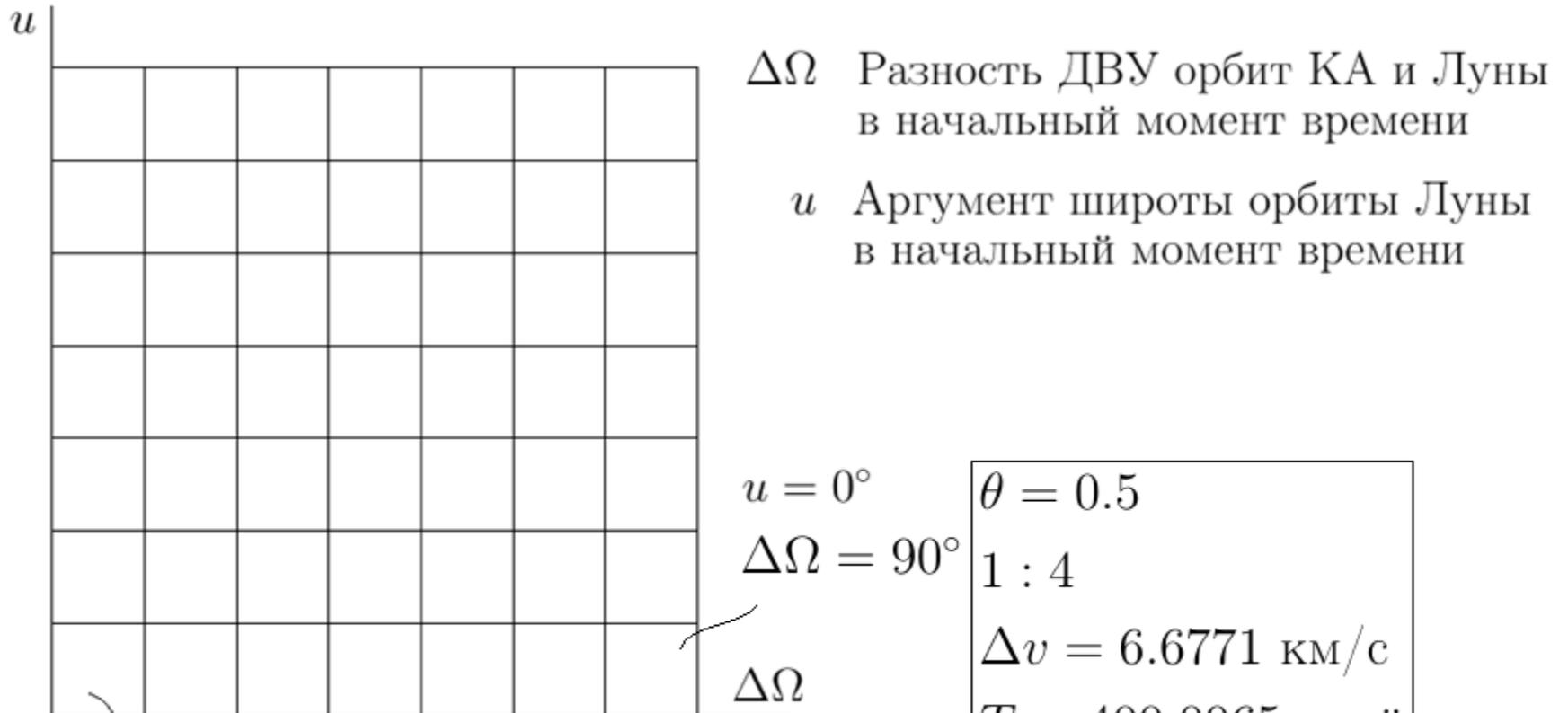
$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}(\tau)) = (1 - \tau)\mathbf{b}$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{b} \quad \tau \in [0, 1]$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{b}$$

Таблица возможностей



$u = 0^\circ$
 $\Delta\Omega = 0^\circ$

$\theta = 0.75$
 $2 : 7 \rightarrow 1 : 3$
 $\Delta v = 7.6530 \text{ км/с}$
 $T = 508.1642 \text{ дней}$

$u = 0^\circ$
 $\Delta\Omega = 90^\circ$

$\theta = 0.5$
 $1 : 4$
 $\Delta v = 6.6771 \text{ км/с}$
 $T = 400.0065 \text{ дней}$

Заключение

- Предложена методика проектирования траекторий перелета на орбиты вокруг точек либрации системы Земля-Луна с малой тягой
- Задача проектирования приближенной траектории сводится к задаче параметрического анализа относительно даты и времени старта, последовательности резонансных сближений, точки входа на терминальной орбиту в окрестности точки либрации L1. Результаты расчетов представляются в удобном для параметрического анализа табличном виде