



# Математическая модель спутника с нежесткими элементами конструкции и ее адаптация для бортовых вычислений

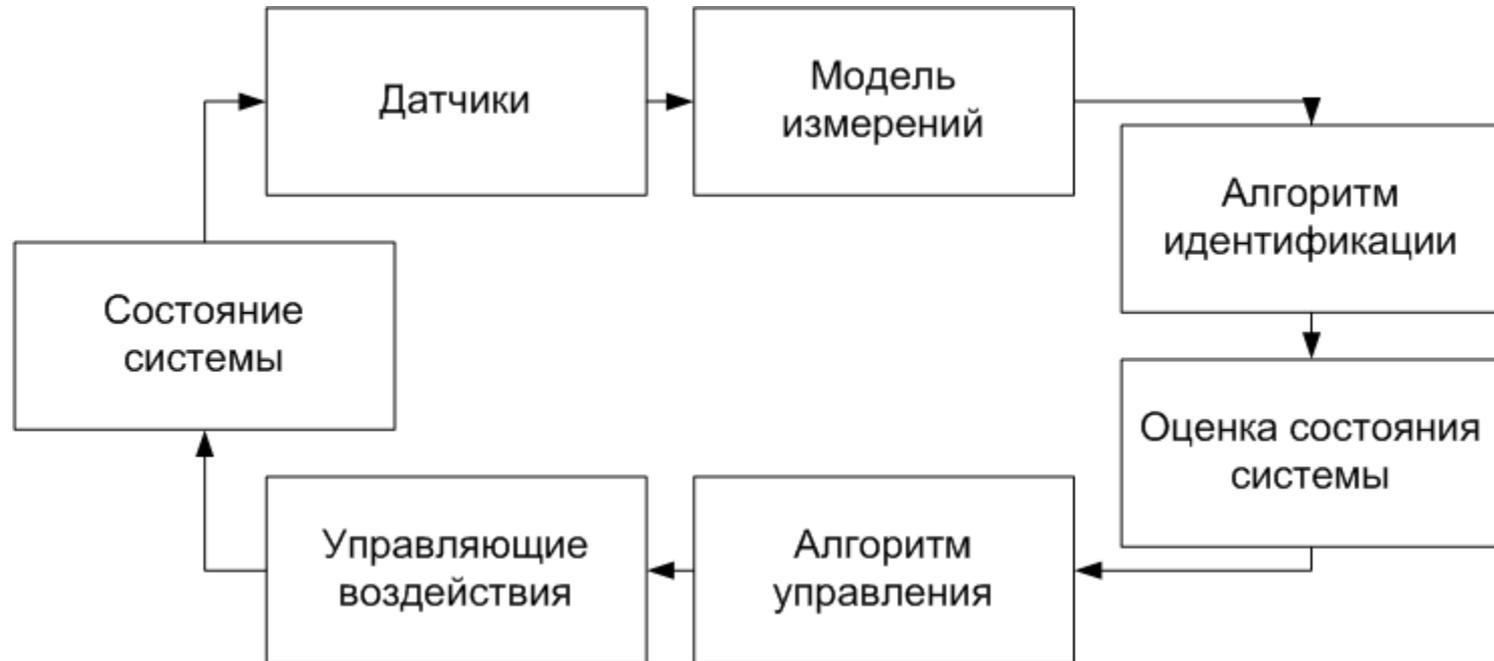
С.С.Ткачев

Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН

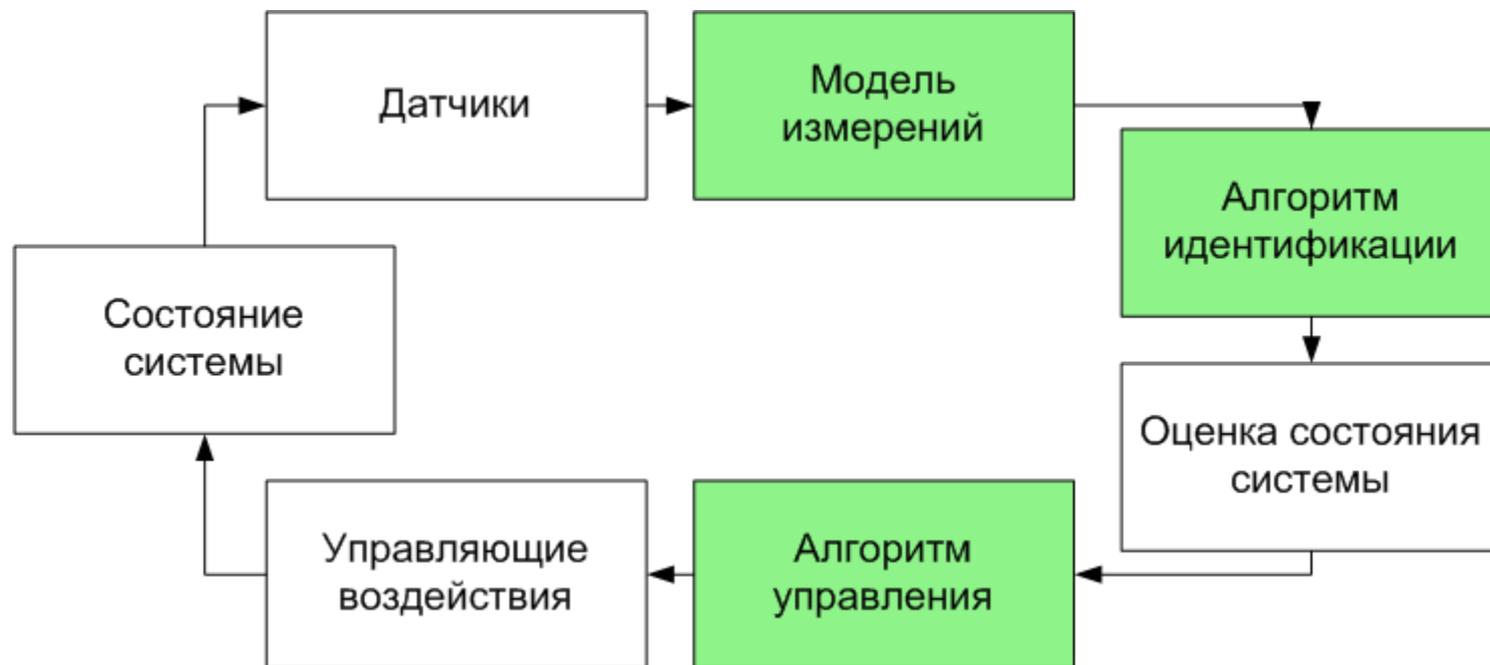
# Оглавление

- Введение
- Постановка задачи
- Математическая модель
- Компьютерное моделирование
- Адаптация к бортовым вычислениям

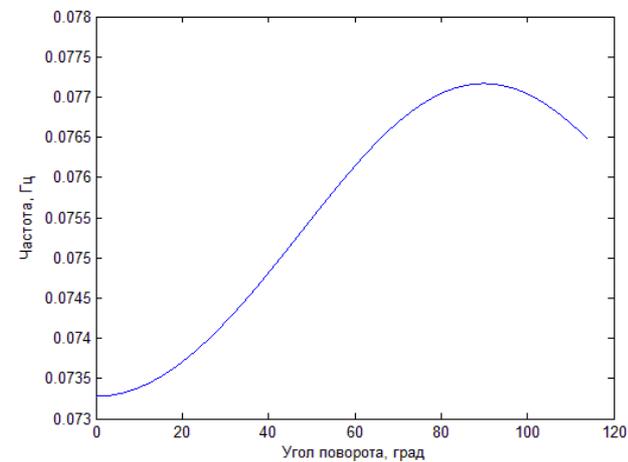
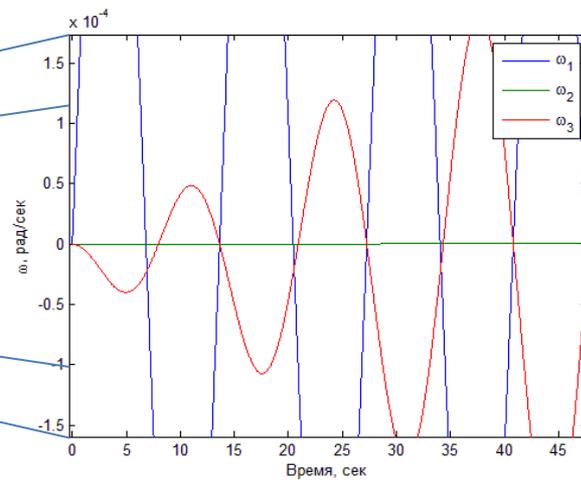
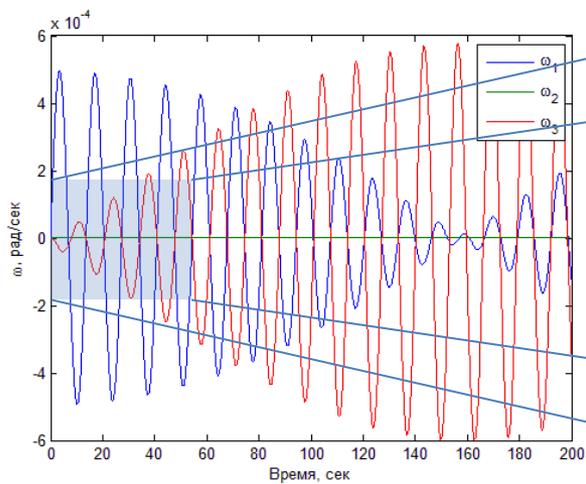
# Введение



# Введение



# Введение



# Постановка задачи

Спутник – твердое тело

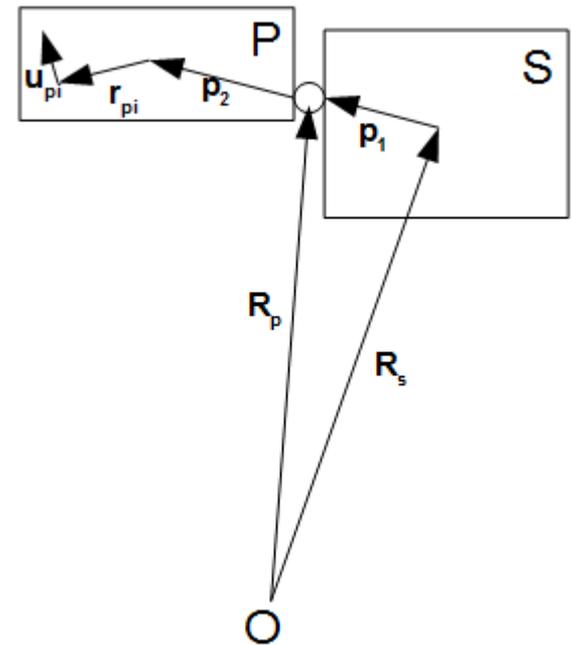
Панель – деформируемое тело

Соединение – одностепенной шарнир без трения

Размеры спутника малы по сравнению с  $R_{\text{орб}}$

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i = 0$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) \mathbf{q}(t), \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) - 3 \times n$$



# Математическая модель

$$\sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0,$$

$$\sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0,$$

$$\sum_i \mathbf{e}^T \left( (\mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) \right) = M_e,$$

$$\sum_i \mathbf{A}_{pi}^T (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0.$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\omega\phi} \mathbf{e}\dot{\psi} + \mathbf{S}_{\omega p} \ddot{\mathbf{q}}_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + 2 \sum_i (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times m_{pi} \boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_{pi} + \tilde{\mathbf{J}}_p (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\psi) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}}_p \mathbf{e}\psi + \mathbf{e}\psi \times \tilde{\mathbf{J}}_p \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}\psi \times \tilde{\mathbf{J}}_p \mathbf{e}\psi + \\ & + m_p \left( \mathbf{p}_1 - \frac{1}{m} (m_p \mathbf{p} + m_p \tilde{\mathbf{p}}_2) \right) \times (2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\psi \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + \mathbf{e}\psi \times \mathbf{e}\psi \times (\mathbf{p}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_2) + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_2) + \mathbf{f}_p - \mathbf{T}_s = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}_{\omega p}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\phi p}^T \mathbf{e}\ddot{\phi} + \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p + \\ & + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \left( \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p + \mathbf{p}_1 - \frac{1}{m} \left( m_p \mathbf{p} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right) + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{e}\dot{\phi} \times \mathbf{e}\dot{\phi} \times \left( \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p - \frac{1}{m} \left( m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right) + \\ & + 2 \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\dot{\phi} \times \left( \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p - \frac{1}{m} \left( m_p \mathbf{p}_2 + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \mathbf{q}_p \right) \right) + 2 \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \boldsymbol{\omega}_2 \times \left( \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p - \frac{1}{m} \left( \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi} \dot{\mathbf{q}}_p \right) \right) + \\ & + \mathbf{f}_{qp} + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_p = 0, \end{aligned}$$

# Математическая модель

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}, \dot{\mathbf{q}}_p, \mathbf{q}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{q}_p) \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\varphi} \mathbf{e} & \mathbf{S}_{\omega p} \\ \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\omega\varphi}^T & \mathbf{e}^T \mathbf{J} \mathbf{e} & \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{\varphi p} \\ \mathbf{S}_{\omega p}^T & \mathbf{S}_{\varphi p}^T \mathbf{e} & \mathbf{M}_p \end{pmatrix}$$

Линеаризованная модель спутника с фиксированной панелью

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}_{\omega p} \ddot{\mathbf{q}}_p = 0,$$

$$\mathbf{S}_{\omega p}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p + \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_p = 0,$$

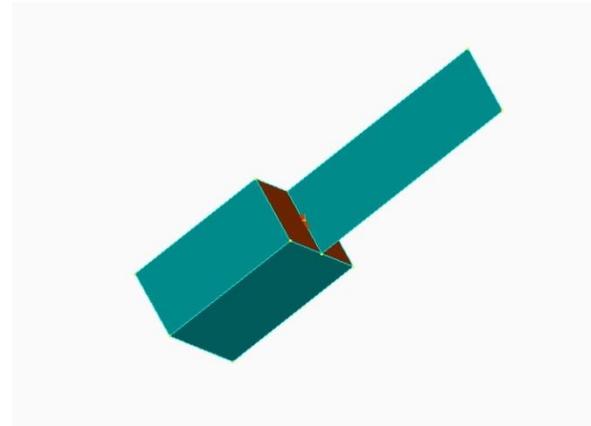
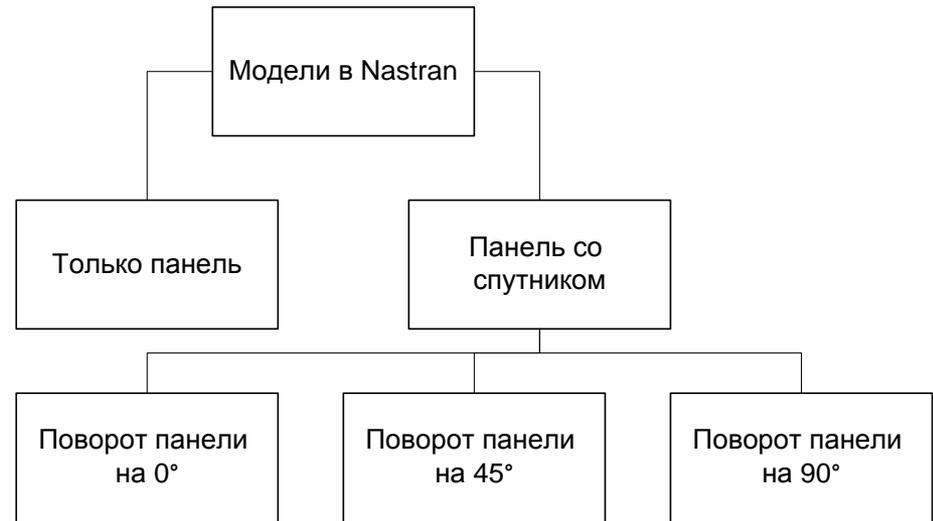
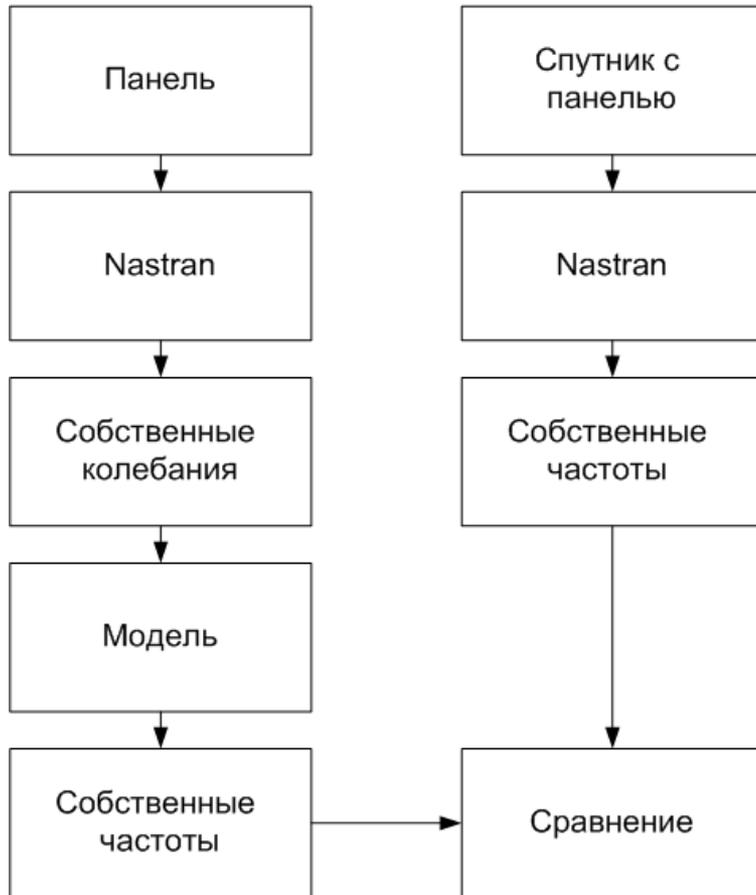
$$\mathbf{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_2 b_2 + a_3 b_3 & -a_2 b_1 & -a_3 b_1 \\ -a_1 b_2 & a_1 b_1 + a_3 b_3 & -a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 & -a_2 b_3 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{\omega p} = \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi}) \times m_{pi} \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} m_p \mathbf{p} \times \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi},$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \tilde{\mathbf{J}}_p + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{p}_1, m_p \mathbf{p}_2) + \mathbf{K}(m_p \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) - \frac{1}{m} \mathbf{K}(m_p \mathbf{p}, m_p \mathbf{p}),$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \mathbf{A}_{pi} - \frac{1}{m} \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}^T \sum_i m_{pi} \mathbf{A}_{pi}.$$

# Компьютерное моделирование



сетка для панели: 200x600

сетка для спутника: 20x20x20

# Моделирование в среде Nastran

## Панель

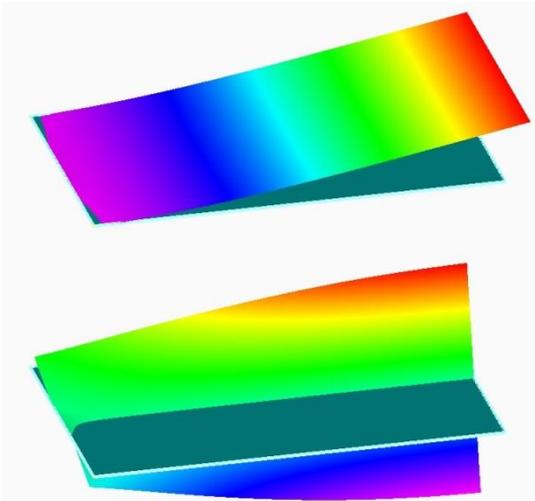
Цели моделирования

*Основная*

Определение величин, входящих в уравнения движения

*Дополнительная*

Определение частот для сравнения

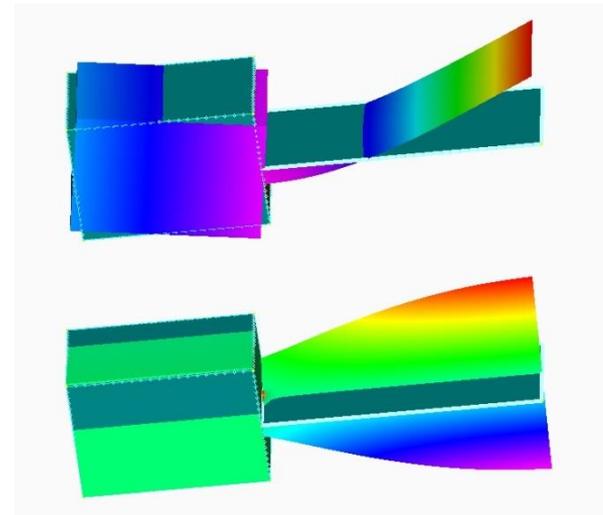


## Спутник с панелью

Цель моделирования

*Дополнительная*

Определение частот для сравнения



# Сравнение собственных частот

Мода	Панель	Спутник с панелью $\varphi = 0$		Спутник с панелью $\varphi = \pi/4$		Спутник с панелью $\varphi = \pi/2$	
		Nastran	Модель	Nastran	Модель	Nastran	Модель
1	5.2487	7.6310	7.6311	7.8223	7.8234	8.0301	8.0316
2	32.057	32.393	32.483	32.378	32.483	32.361	32.483
3	33.256	36.063	36.068	36.195	36.203	36.364	36.370
4	34.485	52.679	53.148	51.235	51.679	49.722	50.137
5	98.195	99.381	99.420	99.488	99.533	99.596	99.643
6	100.90	100.78	101.03	100.73	101.03	100.69	101.02
7	181.44	181.11	181.51	181.04	181.51	180.97	181.51
8	190.81	191.90	192.06	191.98	192.17	192.07	192.28
9	277.50	276.98	277.54	276.89	277.54	276.79	277.54
10	294.77	295.27	295.89	295.26	295.98	295.25	296.08

Расчет по модели в Matlab:

Расчет в среде Nastran для панели: 30 мин

Расчет вспомогательных величин: 5 мин

Расчет для одного положения панели: <1 сек

Общее время: около 35 мин

Расчет в Nastran:

Расчет для одного положения панели: 40 мин

Общее время: около 2 ч

# Адаптация к бортовым ВЫЧИСЛЕНИЯМ



# Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта  
РНФ № 14-11-00621

Автор выражает благодарность А.Б.Нуралиевой  
за значительный вклад в получение результатов