57-я научная конференция МФТИ
Секция динамики и управления движением космических аппаратов

# Предотвращение столкновения летящих в группе спутников при управлении с использованием аэродинамиеской силы сопротивления

**Кушнирук Максим**
**Иванов Данил**
**Московский физико-технический институт (ГУ)**
**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН**

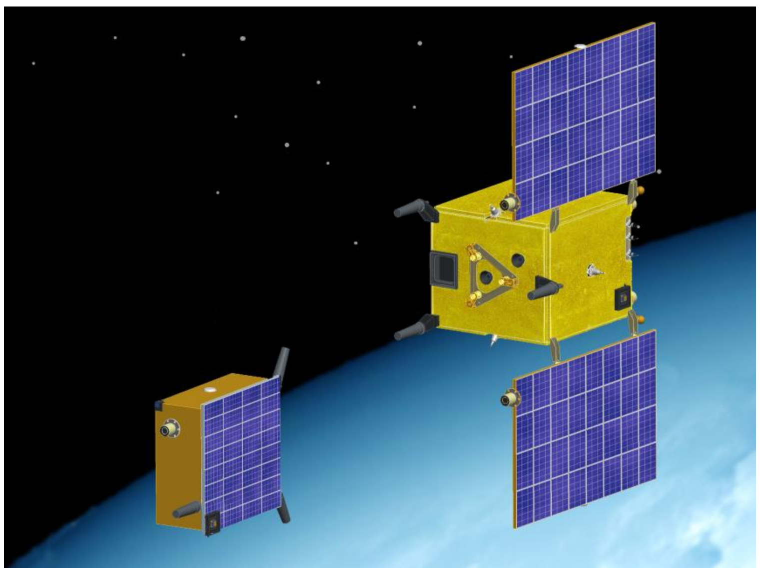
# Содержание

- Постановка задачи
- Управление с помощью линейно-квадратичного регулятора
- Управление с помощью функции Ляпунова
- Алгоритм предотвращение столкновения
- Возвращение на исходную траекторию

# Групповой полет спутников

• Возможность решать задачи, которые не может решить одиночный аппарат.
•Увеличение надежности миссий.
•Распределение функций между аппаратами в группе.

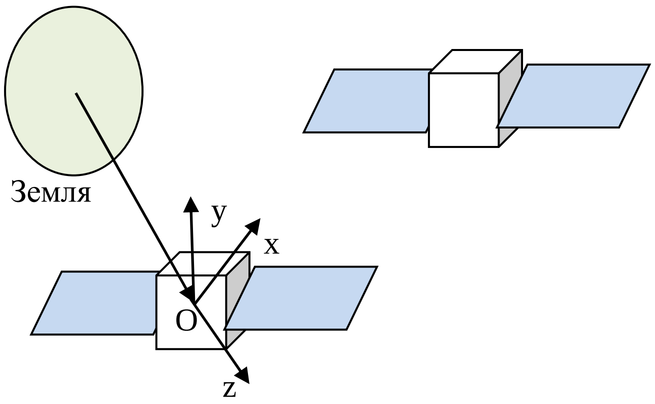
Групповой полет «AeroCube»



Спутники миссии PRIZMA: Tango и Mango


Строительство сложных космических станций

# Постановка задачи




- Рассматривается два спутника, летящих в группе, имеющих форму, близкую к плоской.
- За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока.
- Возникает разница между действующими на два спутника силами сопротивления.
- Управляя взаимной ориентацией двух аппаратов можно управлять относительным движением их центров масс.

# Постановка задачи

- Во время переходных процессов или свободного движения возможно опасное сближение или столкновение спутников.
- Необходимо обеспечить безопасную зону, введя ее в виде сферы.
- Задача управления- избежать попадания второго спутника внутрь заданной сферы.
- После маневра включается управление, возращающее на заданную траекторию, если это необходимо.


**Столкновение спутников Космос-2251 и Iridium 33 (2009 г.)**

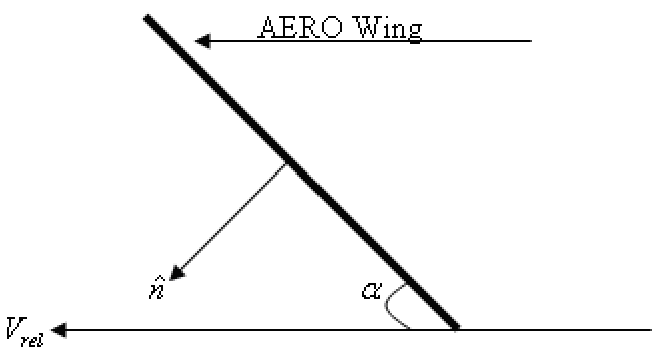
# Уравнения относительного движения

Уравнения Хилла (линеаризованные уравнения в проекциях на орбитальную систему координат) и их решения при $f_x = 0$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{z}\omega + f_x, \\ \ddot{y} = -y\omega^2, \\ \ddot{z} = 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = -3c_1\omega t + 2c_2\cos\omega t - 2c_3\sin\omega t + c_4, \\ y(t) = c_5\sin\omega t + c_6\cos\omega t, \\ z(t) = 2c_1 + c_2\sin\omega t + c_3\cos\omega t, \end{cases}$$

$f_x$ – аэродинамическая сила

$$f_x = -\frac{1}{2}\rho C V^2 S\left(|\sin\alpha_2| - |\sin\alpha_1|\right)$$



# Уравнения относительного движения

Также уравнения Хилла можно записать в нормальном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

где $$u = \left(|\sin\alpha_1| - |\sin\alpha_2|\right),$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{B}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ где } \mathrm{B}_x = -\frac{1}{2}\rho \mathrm{C}\mathrm{V}^2\mathrm{S}$$

Движение по координате *y* неуправляемо

с помощью аэродинамической силы.

# Задача оптимального управления

Рассмотрим систему с управлением вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

Нужно найти такое управление $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, минимизирует некоторую

величину $J = \int\limits_0^\infty F(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,dt$, характеризующую качество переходных

процессов.

# Линейно-квадратичный регулятор

Рассмотрим обратную связь вида

$$\mathbf{u} = \mathrm{K}\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$

обеспечивающую минимизацию функционала

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{e}^T \mathrm{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathrm{R}\mathbf{u})\,dt,$$

где Q, R – заданные положительно определенные матрицы.

Для этого функционала управление

$$\mathbf{u} = -\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T \mathrm{P}\mathbf{e},$$

где матрица P есть решение уравнения Риккати

$$\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{A} + \mathrm{A}^T\mathrm{P} = 0.$$

# Управление на основе функции Ляпунова

Введем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}S^2, \text{ где } S = \dot{e}_x + K_1 e_z + K_2 \dot{e}_z + K_3 e_x.$$

Диффиринцируем $V$

$$\dot{V} = S\dot{S} < 0, \text{ тогда требуем } \dot{S} = -n\,\mathrm{sign}(S), \quad \text{где } n = const$$

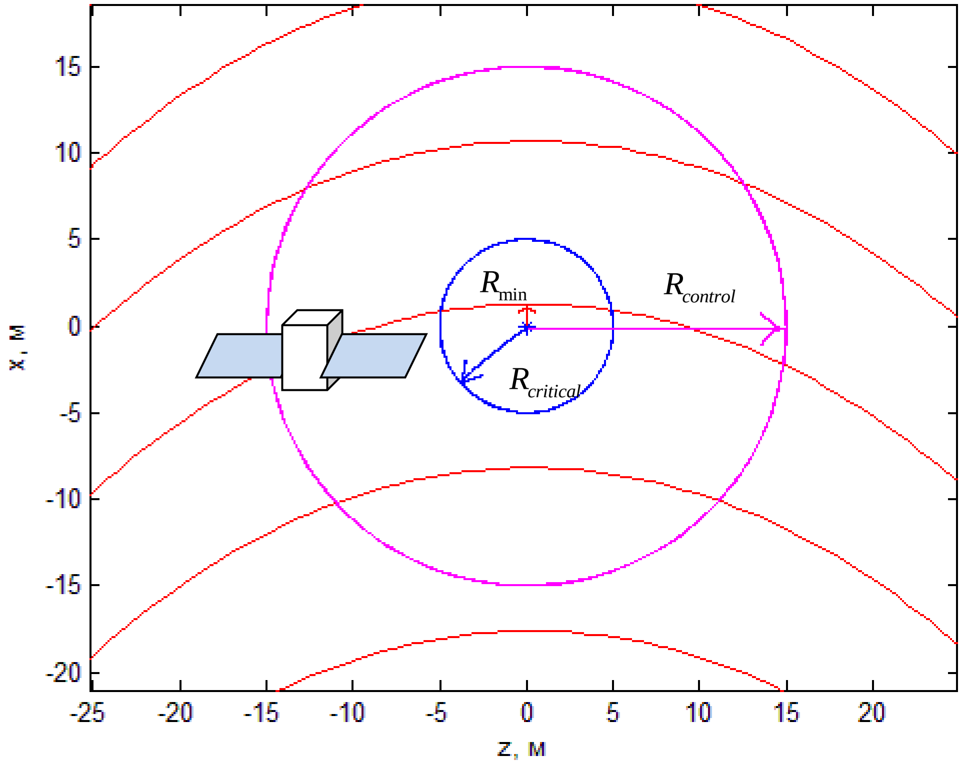
Учитывая, что

$$\ddot{e}_x = [\ddot{x} - \ddot{x}_d], \ddot{x} = -2\dot{z}\omega + u,$$

можно выразить управление

$$u = -K_1\dot{e}_z - K_2\ddot{e}_z - K_3\dot{e}_x - nsign(S) + 2\dot{z}\omega + \ddot{x}_d.$$

# Алгоритм предотвращения столкновения



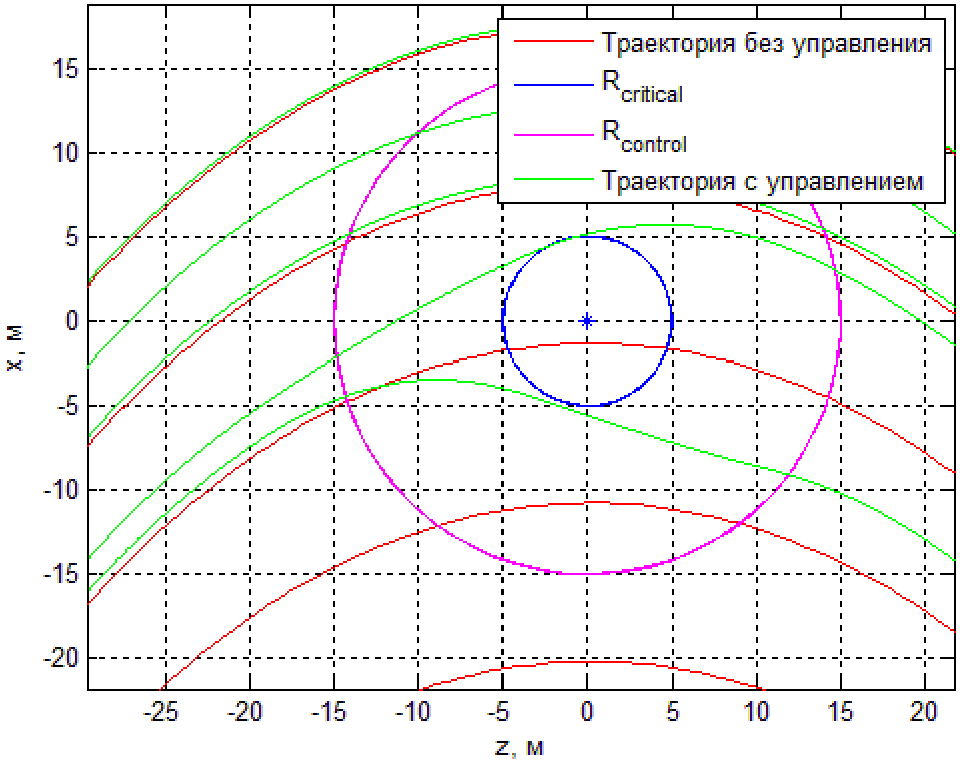

$$u = \beta sign(f(\mathbf{x}_{\min})),$$

$$\text{где } \beta = 90^\circ - 90^\circ \frac{|\mathbf{R}_{\min}|}{|\mathbf{R}_{critical}|},$$

$$f(\mathbf{x}_{\min}) = \frac{x_{\min}}{x_{critical}} - \frac{z_{\min}}{z_{critical}}.$$

# Пример относительной траектории:

## управление с помощью функции Ляпунова




Параметры коррекции

$R_{critical} = 5$ м.

$R_{control} = 20$ м.

Параметры управления

$n = 10^{-4}$;

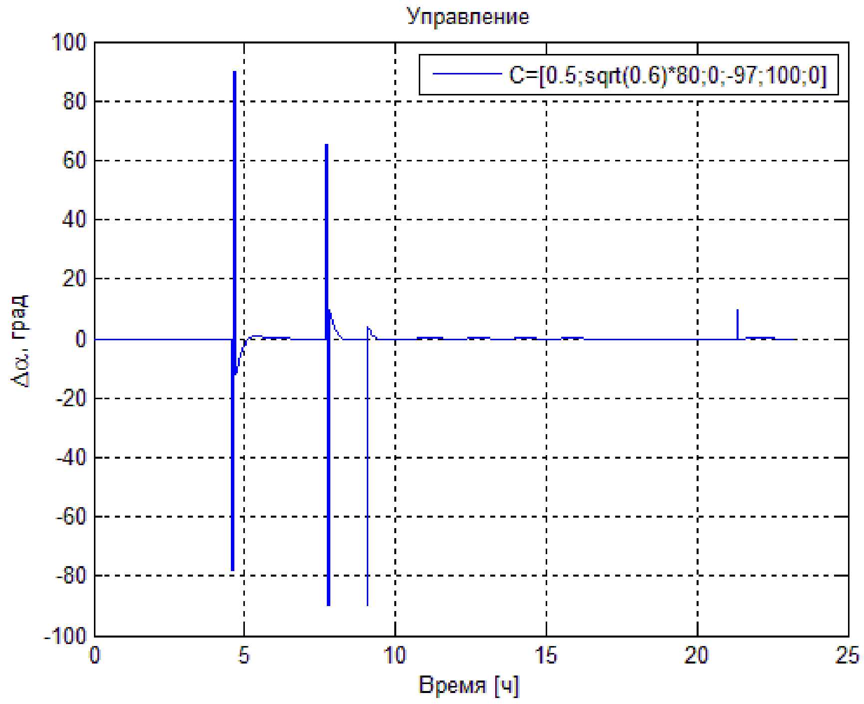
$Kp = [0.07\ 50\ \text{-}0.03\ 0]$;

Начальные условия

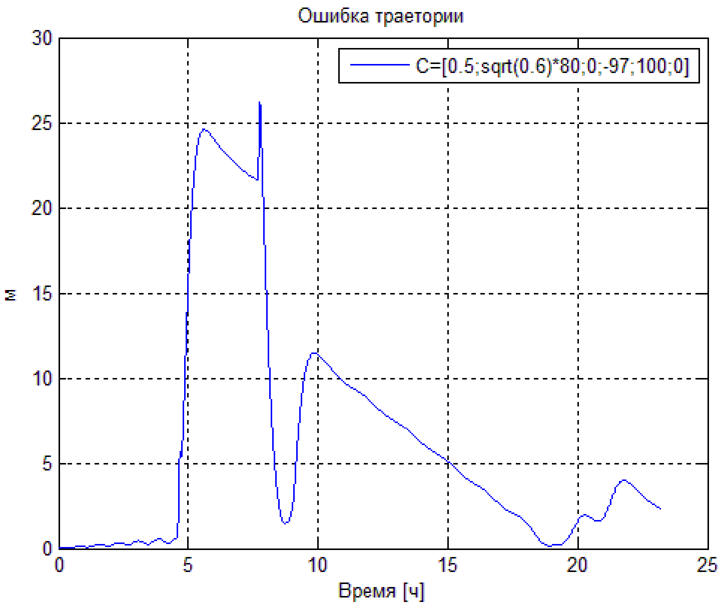
$\mathbf{c} = [0.5;\sqrt{3840};0;\text{-}97;100;0]$

Пример траектории в плоскости под действием управления на основе функции Ляпунова

# Пример относительной траектории:
## управление с помощью функции Ляпунова

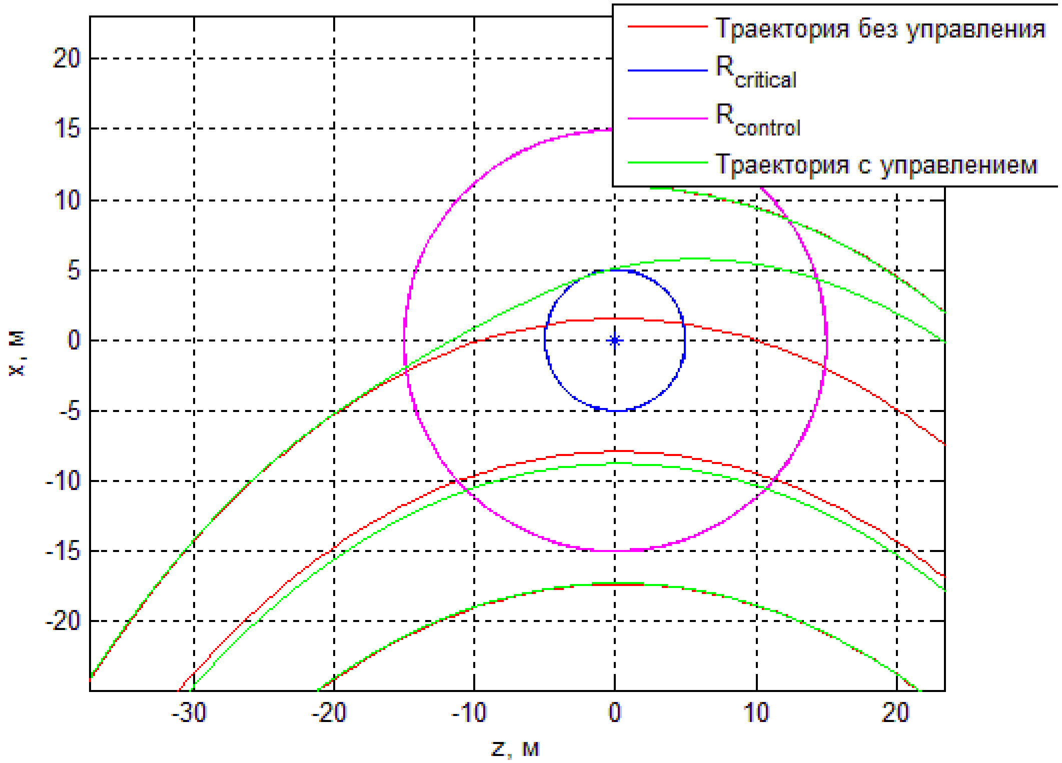



Зависимость разности углов от времени.




Зависимость модуля ошибки траектории
от времени.

# Пример относительной траектории:
## управление с помощью линейно-квадратического регулятора




Пример траектории в плоскости под действием управления с помощью линейно-квадратичного регулятора

Параметры коррекции

$$R_{critical} = 5 \text{ м.}$$
$$R_{control} = 20 \text{ м.}$$

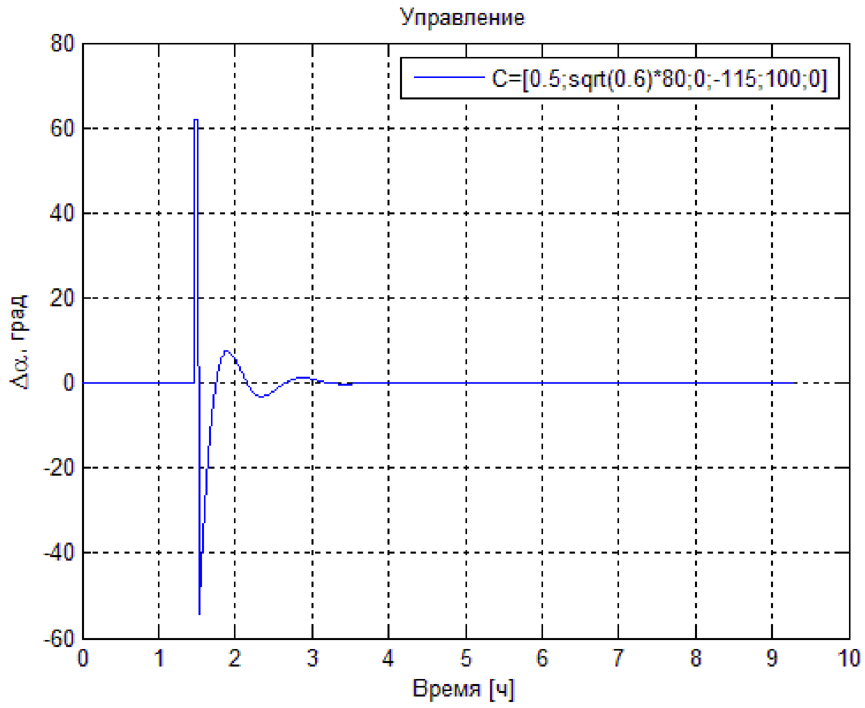
Параметры управления

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathrm{R} = 10^{13}$$

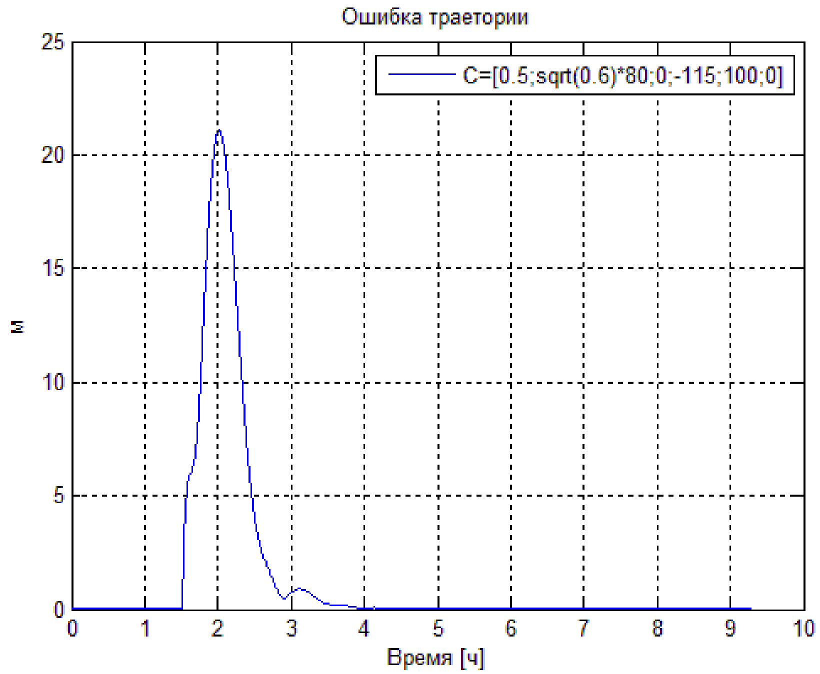
Начальные условия

$$\mathbf{c} = [0.5;\sqrt{3840};0;\text{-}115;100;0]$$

# Пример относительной траектории:
## управление с помощью линейно-квадратического регулятора




Зависимость разности углов от времени.




Зависимость модуля ошибки траектории от времени.

# Заключение

• В настоящей работе реализован алгоритм предовращение столкновения  двух спутников
• Применены два алгоритма: линейно-квадратичный регулятор и управление на основе функции Ляпунова
• В дальнейшем планируется построить оптимальное управление: решить краевую задачу- касание к окружности.

# Спасибо за внимание!