

58-я научная конференция МФТИ
Секция динамики и управления движением космических аппаратов

Алгоритм управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы в условиях неточности знания плотности атмосферы

Кушнирук Максим

Иванов Данил

Московский физико-технический институт (ГУ)
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

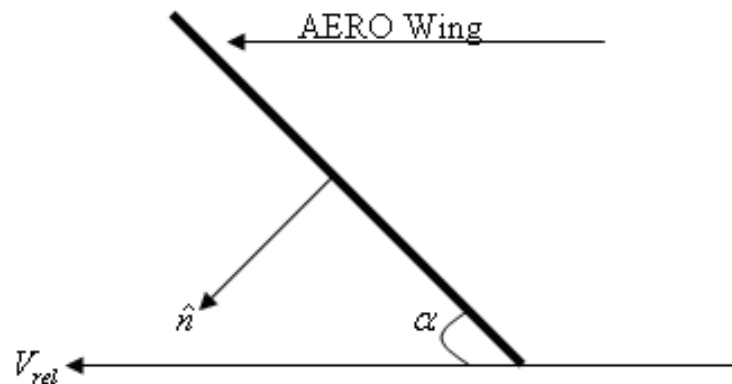


Содержание

- Постановка задачи
- Управление с помощью линейно-квадратичного регулятора
- Модель плотности атмосферы
- Адаптивное управление

Принцип управления с помощью аэродинамической силы

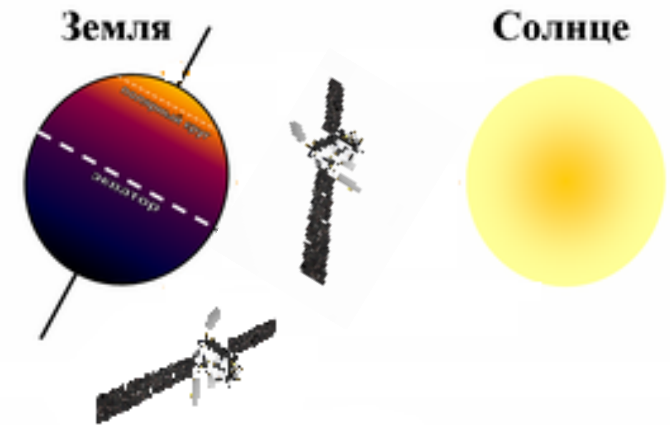
- Рассматривается два спутника, летящих в группе, имеющих форму, близкую к плоской.
- За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока.
- Возникает разница между действующими на два спутника аэродинамическими силами.



Постановка задачи

- Аэродинамические силы связаны с плотностью атмосферы, которая зависит от условий освещённости атмосферы.
- Возникают ошибки в управлении.

Требуется построить алгоритм управления, адаптирующийся к ошибкам модели плотности атмосферы.



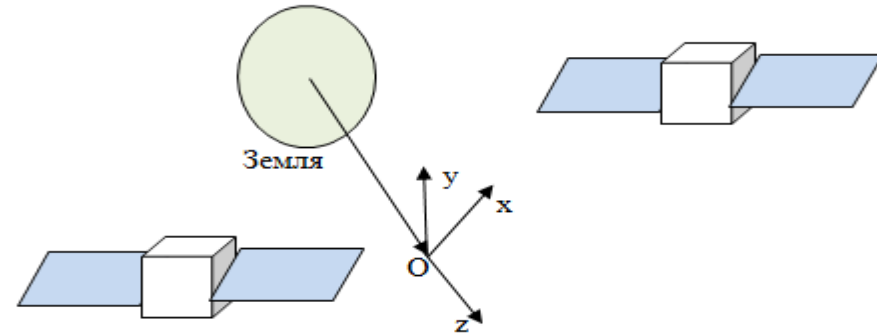
Уравнения относительного движения

Уравнения Хилла и их решения:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + 3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{f}.$$

При $\mathbf{f} = 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\dot{z}\omega, \\ \ddot{y} = -y\omega^2, \\ \ddot{z} = 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2. \end{cases}$$



Система координат

$$\begin{cases} x(t) = -3c_1\omega t + 2c_2 \cos \omega t - 2c_3 \sin \omega t + c_4, \\ y(t) = c_5 \sin \omega t + c_6 \cos \omega t, \\ z(t) = 2c_1 + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t. \end{cases}$$

Модель аэродинамической силы—I

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1,$$

Модель силы, действующая на каждый спутник:

$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{m} \rho V^2 S \{ (1 - \varepsilon)(\mathbf{e}_V, \mathbf{n}_i) \mathbf{e}_V + 2\varepsilon(\mathbf{e}_V, \mathbf{n}_i)^2 \mathbf{n}_i + (1 - \varepsilon) \frac{\nu}{V} (\mathbf{e}_V, \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \}^*,$$

ε и ν – коэффициенты взаимодействия молекул атмосферы с поверхностью спутника.

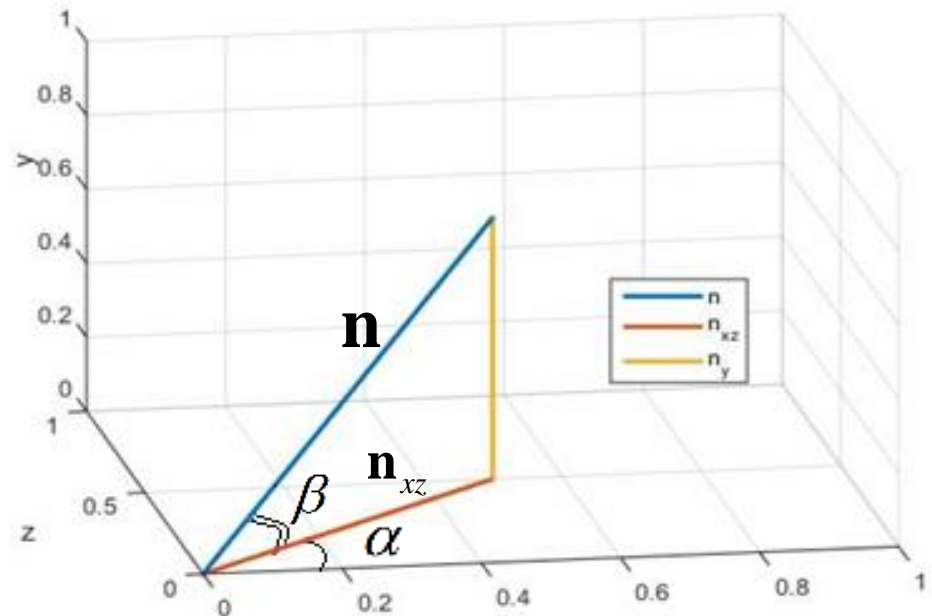
α – угол между осью Ox и \mathbf{n}_{xz} .

β – угол между осью \mathbf{n} и \mathbf{n}_{xz} .

$$-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$$

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha \cos \beta; \sin \beta; \sin \alpha \cos \beta).$$



Модель аэродинамической силы—II

Модель силы, действующая на каждый спутник:

$$\mathbf{f}_i = -b \begin{pmatrix} ((1-\varepsilon) + 2\varepsilon \cos^2 \alpha_i \cos^2 \beta_i + (1-\varepsilon) \frac{v}{V} \cos \alpha_i \cos \beta_i) \cos \alpha_i \cos \beta_i \\ (2\varepsilon \cos^2 \alpha_i \cos^2 \beta_i + (1-\varepsilon) \frac{v}{V} \cos \alpha_i \cos \beta_i) \sin \beta_i \\ (2\varepsilon \cos^2 \alpha_i \cos^2 \beta_i + (1-\varepsilon) \frac{v}{V} \cos \alpha_i \cos \beta_i) \cos \beta_i \sin \alpha_i \end{pmatrix},$$

$$b = \frac{1}{m} \rho V^2 S.$$

Управление:

$$\mathbf{f} = b\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$.

Уравнения относительного ДВИЖЕНИЯ

Уравнения Хилла можно записать в нормальном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{f},$$

где $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega^2 & 2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ошибка траектории в момент времени t :

$$e(t) = \sqrt{(x(t) - x_d(t))^2 + (z(t) - z_d(t))^2 + (y(t) - y_d(t))^2}.$$

Изменение энергии:

$$\frac{da}{dt} = 2f_x \frac{a^2}{\mu} V.$$

Линейно-квадратичный регулятор

Рассмотрим обратную связь вида

$$\mathbf{u}^* = K\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$,

обеспечивающую минимизацию функционала

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{u}^{*T} R \mathbf{u}^*) dt,$$

где Q , R – заданные положительно определенные матрицы.

Для этого функционала управление

$$\mathbf{u}^* = -R^{-1} B^T P \mathbf{e},$$

где матрица P есть решение уравнения Риккати

$$Q - PBR^{-1}B^T P + PA + A^T P = 0.$$

Параметры управления— I

Условие на углы:

$$(|\alpha_1| - 90^\circ)(|\alpha_2| - 90^\circ) = 0;$$

Если $u_x^* > 0$, то $i = 1$. Если $u_x^* < 0$, то $i = 2$.

Рассмотрим уравнение по Ox :

$$f(t) = 2\varepsilon t^3 + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V} t^2 + (1 - \varepsilon)t - \frac{u_x^*}{b},$$

где $t = \cos(\alpha_i) \cos(\beta_i)$, $0 < t < 1$.

$$\text{Углы: } \beta_i = \arcsin \left(\frac{u_y^*/b}{2\varepsilon t^2 + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V} t} \right); \quad \alpha_i = \text{sign}(u_z^*) \arccos \frac{t}{\cos \beta_i};$$

Параметры управления— II

Если $e_y \gg \sqrt{e_x^2 + e_z^2}$,

устраняем ошибку по оси Oy , пока $(y - y_d)^2 + \frac{1}{\omega^2} (\dot{y} - \dot{y}_d)^2 \geq \delta$

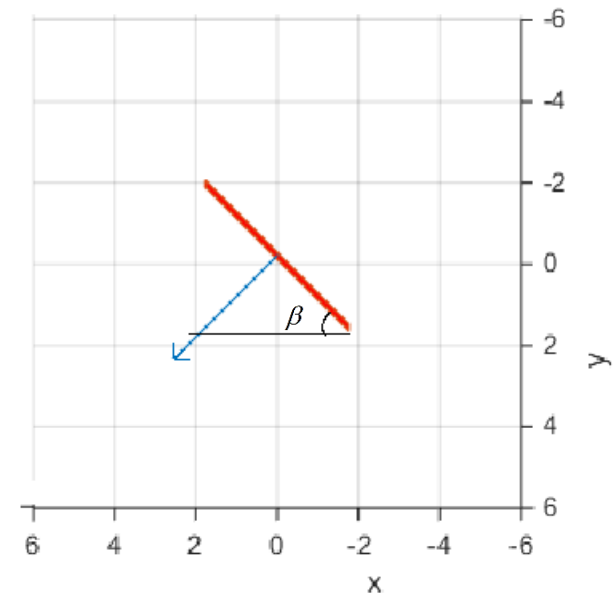
Условие на углы:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \beta_1 = -\beta_2;$$

$$\mathbf{x}_y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}; A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}; B_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Управление по оси Oy :

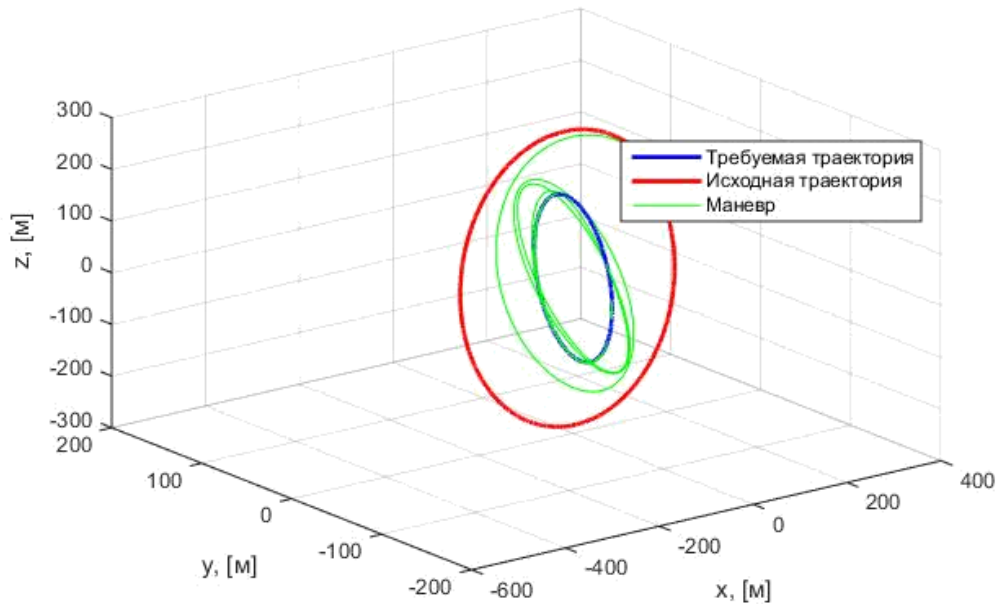
$$u_y^* = 2b(2\varepsilon \cos^2 \beta + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V} \cos \beta) \sin \beta.$$



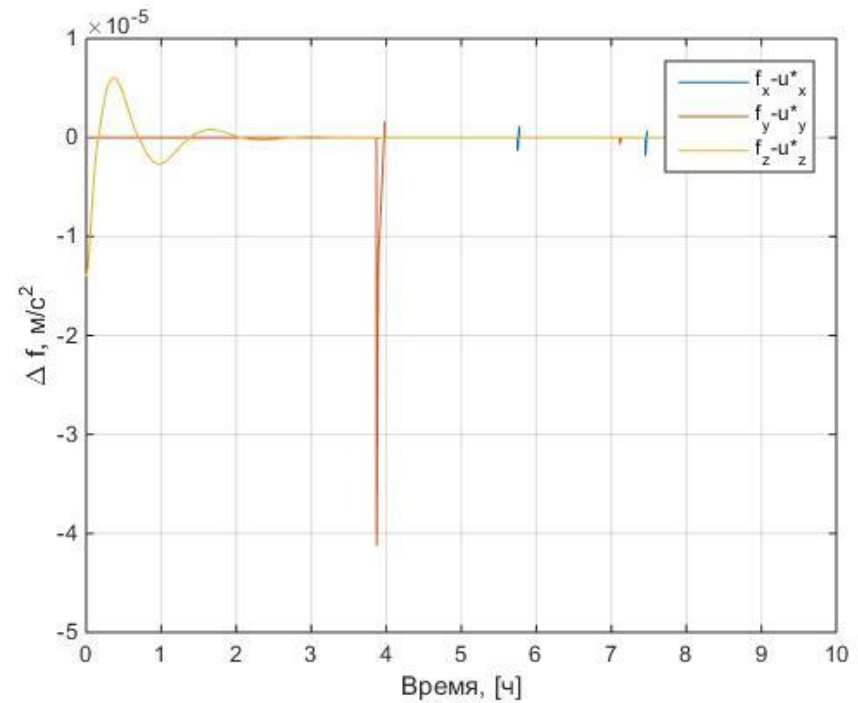
Параметры численного моделирования

- Радиус $r_0 = 7000$ км.
- Плотность атмосферы $\bar{\rho} = 1.8 \cdot 10^{-12}$ кг/м³.
- Площадь пластин $S = 0.6$ м².
- Коэффициент сопротивления $\varepsilon = 0.1$, $\nu / V = 0.1$.
- Начальная относительная орбита $\mathbf{c}_{in} = [1; 200; 30; 0; 40; 110]$.
 $x_{in} = 306.0$ м ; $y_{in} = 114.5$ м ; $z_{in} = 133.2$ м ;
 $\dot{x}_{in} = -0.2925$ м/с ; $\dot{y}_{in} = -0.0267$ м/с ; $\dot{z}_{in} = 0.1695$ м/с.
- Требуемая относительная орбита $\mathbf{c}_d = [0; 100; 20; 0; 20; 90]$.
- Максимальная скорость поворота $\max |\dot{\alpha}_i| = \max |\dot{\beta}_i| = 1$ °/с .
- $Q = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$; $R = 10^{12} \text{diag}(1, 10^3, 10^3)$.

Численный пример—I

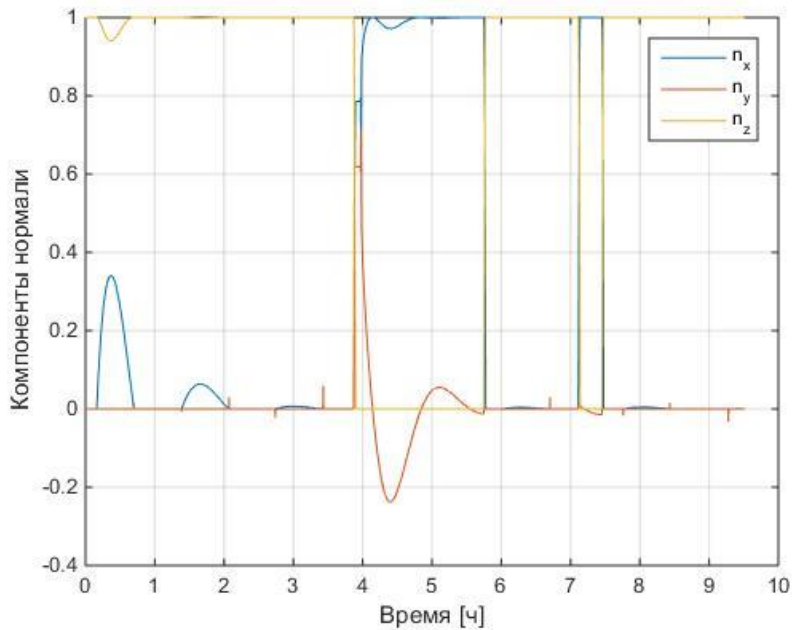


Пример траектории под действием LQR

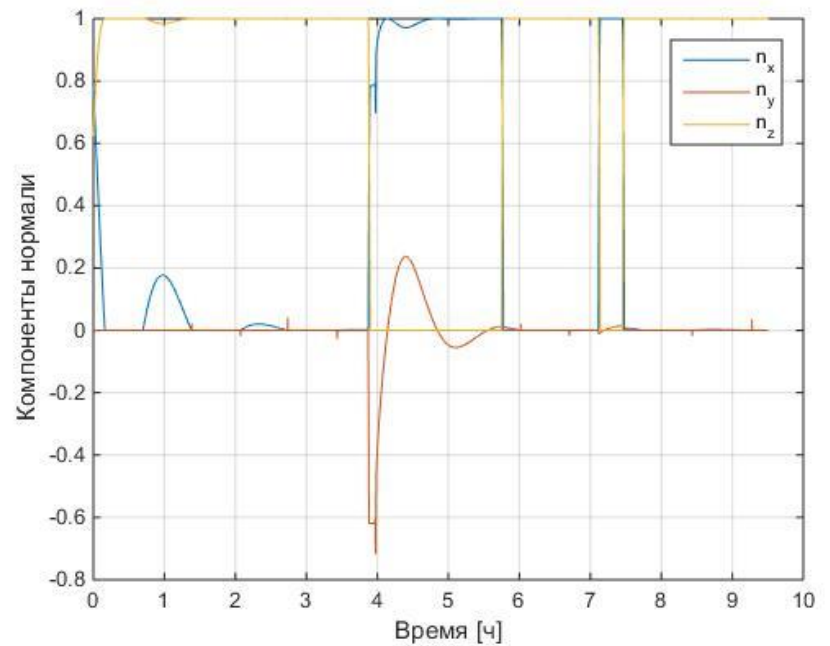


Зависимость разницы расчетного и исполняемого управления

Численный пример— II

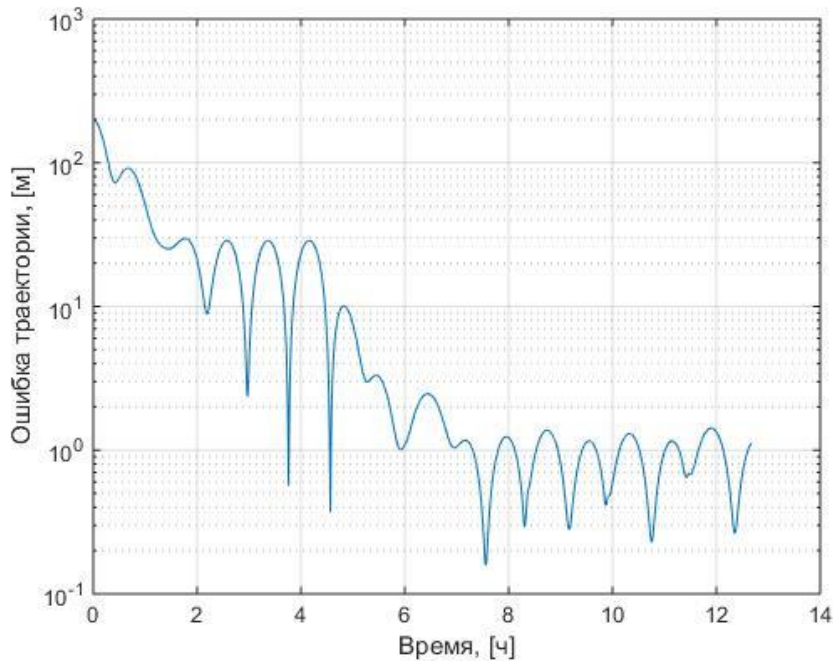


Зависимость компонент нормали \mathbf{n}_1 от времени

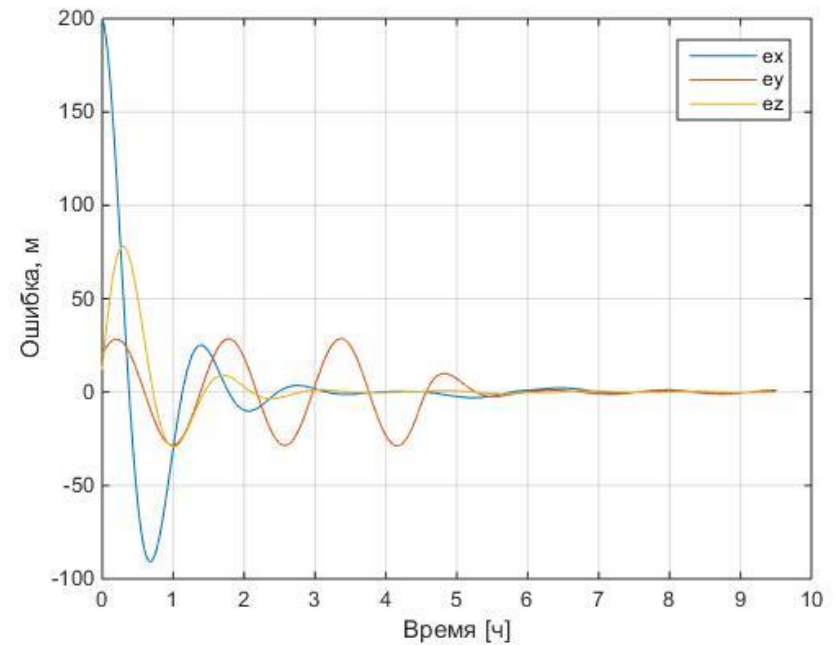


Зависимость компонент нормали \mathbf{n}_2 от времени

Численный пример— III



Зависимость ошибки траектории от времени



Зависимость ошибок по координатам от времени

Изменение высоты $\Delta r_0 = 2.385$ м.

Время выхода на требуемую траекторию $t^* = 5.3$ ч.

Модель плотности атмосферы

Дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\rho} + \dot{\rho}\omega^2 = 0.$$

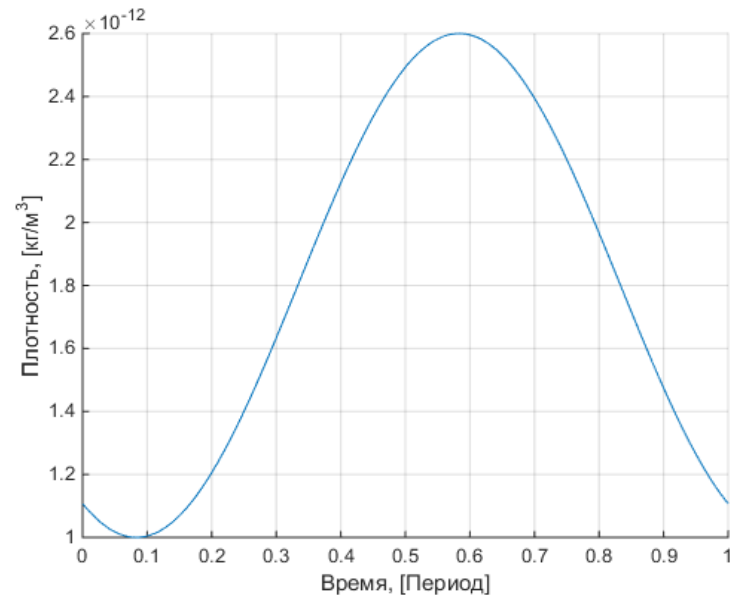
Решение:

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho_1 \sin(\omega t + \varphi).$$

$$b(t) = \frac{1}{m} \rho V^2 S$$

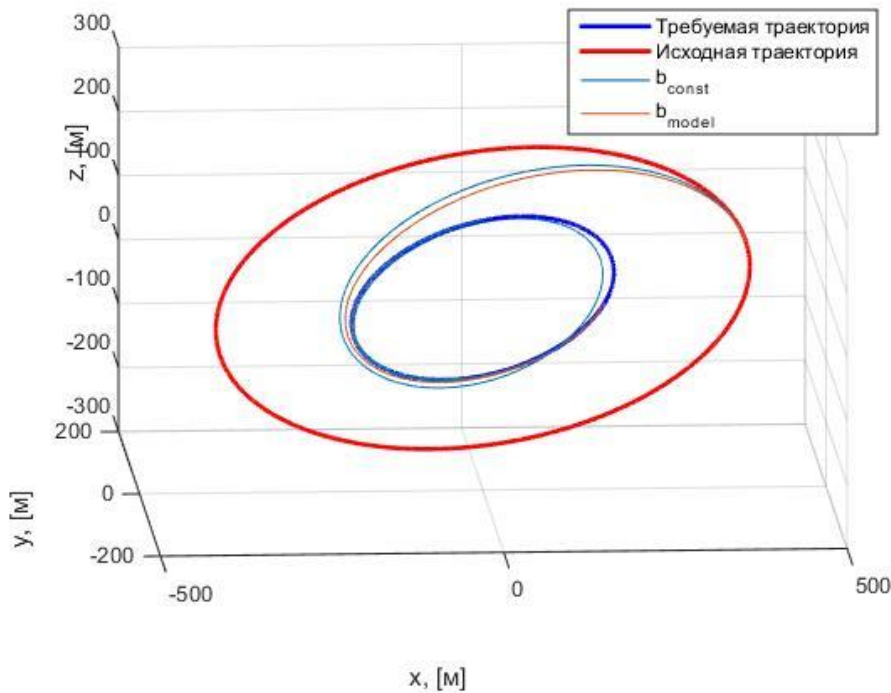
$$\mathbf{f} = b(t)\mathbf{u}$$

Адаптивное управление должно определить параметры ρ_0, ρ_1 и φ

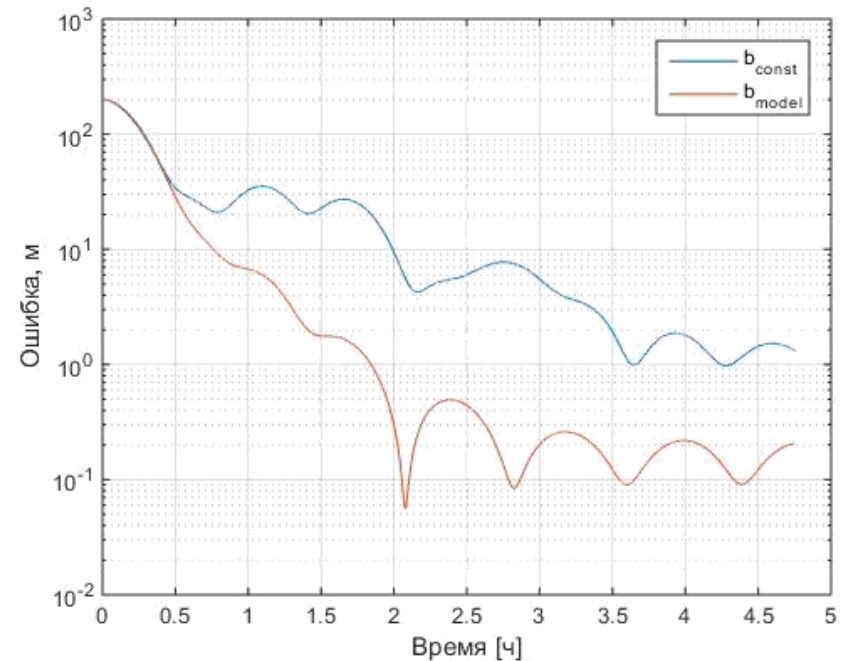


Изменение плотности атмосферы в течение периода обращения спутника вокруг Земли

Пример относительной траектории



Пример траектории под действием LQR при разных моделях плотности атмосферы



Зависимость ошибки траектории от времени

Алгоритм

Задаем начальные положение \mathbf{x}_0 при $t = 0$. Задаем требуемую траекторию.



Спутник управляется под действием LQR в течение одного периода T при $\rho = \text{const}$.



Получаем \mathbf{x}_i^* и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^l \mathbf{c}_i t^i$.



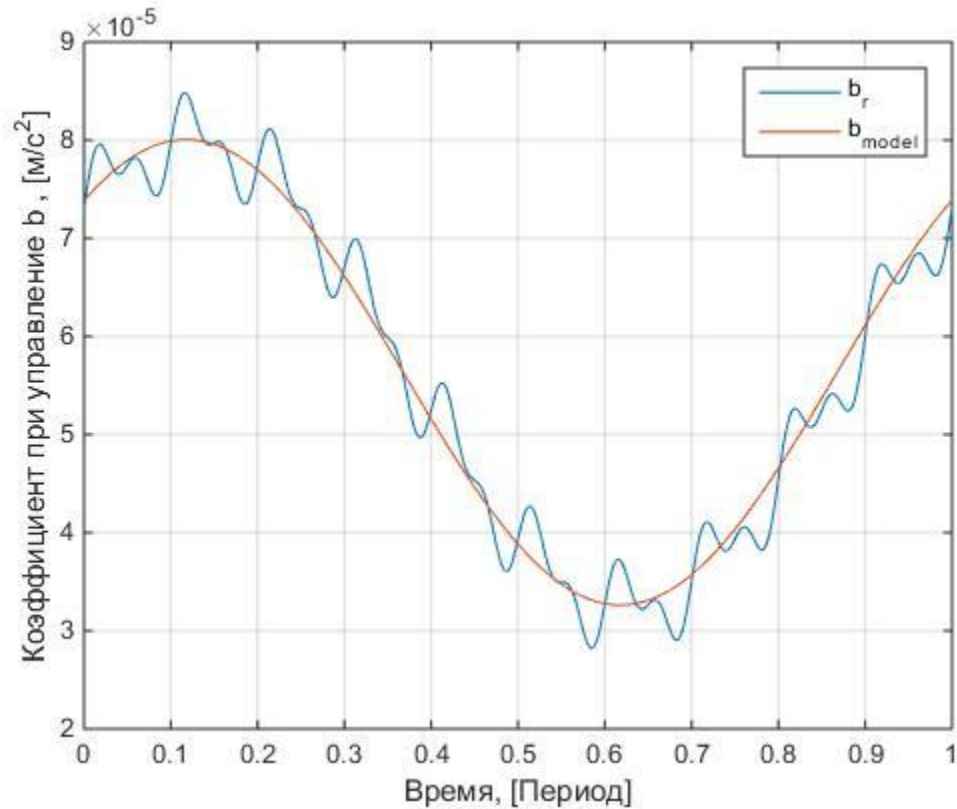
Находим аналитические решения $\mathbf{x}_{an}(t)$
 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{f}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.



Находим ρ_0, ρ_1 и φ из

$$J_1 = \sum_i \|\mathbf{x}_{an}(t_i) - \mathbf{x}_i^*\| \rightarrow \min_{\rho_1, \rho_0, \varphi}$$

Результат работы алгоритма



Зависимость коэффициента b в течение периода обращения спутника вокруг Земли

Заключение

- Разработан алгоритм управления с помощью аэродинамических сил для перехода на требуемую относительную трёхмерную траекторию.
- Предложен алгоритм построения управляющего воздействия с учетом ограничений.
- Показано, что алгоритм управления, адаптирующийся к ошибкам модели плотности атмосферы, позволяет точнее и быстрее проводить маневры.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31313, 13-01-00665.