



61-я Всероссийская научная конференция МФТИ  
19-25 ноября, 2018, Москва

Управление относительным движением двух  
космических аппаратов с солнечными  
парусами с изменяемой отражательной  
способностью

Петрова Татьяна, Ткачев Степан, Маштаков Ярослав

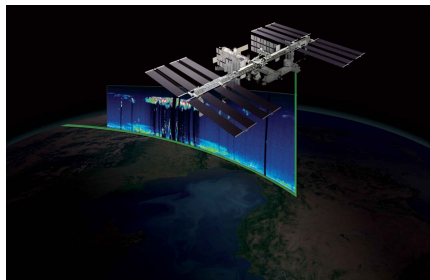
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша

19 ноября, 2018

# Содержание

- Введение
- Постановка задачи
- Уравнения движения
- Синтез управления
  - Управление относительным движением
  - Управление угловым движением
  - Определение засветки
- Численный пример

# Введение



- реактивная тяга
- атмосфера
- давление солнечного излучения

# Постановка задачи

**Задача:** приведение формации из двух космических аппаратов на заданную относительную орбиту и поддержание их на ней.

**Управление:** солнечные паруса с изменяемой отражательной способностью.

**Предположения:** начальная орбита ведущего аппарата круговая. Спутники двигаются под действием давления солнечного излучения и возмущения от гармоник  $J_2$ .

# Уравнения движения (1)

## Орбитальное движение

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_E \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}_{J_2} + \mathbf{f}_s, \mathbf{f}_s = -\frac{\Phi_0 S}{c} (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) ((1-f)\mathbf{r}_s + 2f(\mathbf{r}_s, \mathbf{n})\mathbf{n}), f = \frac{\int \alpha dS}{S}$$

## Угловое движение

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\text{control}} + \mathbf{M}_g$$

$$\mathbf{M}_{\text{control}} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_s, \mathbf{M}_g = 3\frac{\mu_E}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r}$$

## Относительное движение

Уравнения Хилла-Клоэсси-Уилтшира

возмущенные

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

невозмущенные

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = u_x + g_x, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u_y + g_y, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = u_z + g_z \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\rho} = (x \ y \ z)^T, \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}_{s,2} - \mathbf{F}_{s,1}}{m}$$

# Уравнения движения (2)

$$\begin{cases} x = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4, \\ y = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t, \\ z = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\dot{B}_1 = \frac{1}{\omega}(u_x + g_x)$$

$B_1$  — дрейф

$$\dot{B}_3 = -3B_1\omega - \frac{2}{\omega}(u_z + g_z)$$

$B_3$  — смещение центра в  $Oxz$

$$\dot{B}_2 = \frac{1}{\omega}((u_x + g_x) \cos \psi_1 - 2(u_x + g_x) \sin \psi_1)$$

$B_2$  — полуось

$$\dot{\psi}_1 = \omega - \frac{1}{B_2\omega}((u_z + g_z) \sin \psi_1 + 2(u_x + g_x) \cos \psi_1)$$

$\psi_1, \psi_2$  — фазы

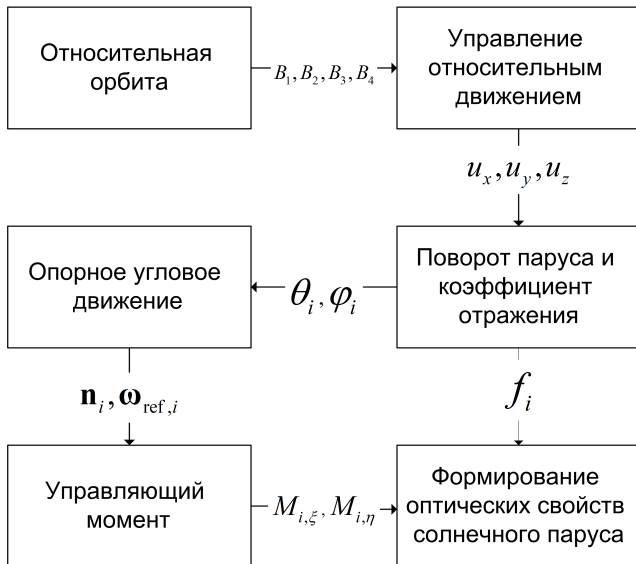
$$\dot{B}_4 = \frac{1}{\omega}(u_y + g_y) \cos \psi_2$$

$B_4$  — смещение вдоль  $y$

$$\dot{\psi}_2 = \omega - \frac{1}{\omega B_4}(u_y + g_y) \sin \psi_2$$

**Цель:**  $B_1 = 0$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_2 = B_0$ ,  $B_4 = 0$  — относительной орбитой является эллипс с полуосями, равными  $B_0$  и  $2B_0$ .

# Синтез управления



# Управление относительным движением

## 1. Стабилизация относительной орбиты

### а. центр

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}B_1^2 + \frac{1}{2}B_3^2, \\ \dot{V} &= \frac{1}{\omega}B_1u_x + B_3\left(-3B_1\omega - \frac{2}{\omega}u_z\right) \Rightarrow \begin{cases} u_x = -k_1B_1, k_1 > 0, \\ u_z = \frac{1}{2}(-3B_1\omega^2 + k_2\omega B_2), k_2 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### б. размер

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}B_1^2 + \frac{1}{2}B_3^2 + \frac{1}{2}(B_2 - B_0)^2 \Rightarrow \begin{cases} u_x = -k_3(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1), k_3 > 0, \\ u_z = -k_4(-2B_3 + (B_2 - B_0)\cos\psi_1), k_4 > 0 \end{cases} \\ \dot{V} &= \frac{1}{\omega}(B_1 - 2(B_2 - B_0)\sin\psi_1)u_x + \frac{1}{\omega}(-2B_3 + (B_2 - B_0)\cos\psi_1)u_z - 3B_1B_3\omega \\ \text{Условие устойчивости: } &u_{\max} > |3B_1B_3\omega^2| \end{aligned}$$

## 2. Управление движением вне плоскости

$$V = \frac{1}{2}B_4^2 \Rightarrow u_y = -k_yB_4\cos\psi_2, k_y > 0$$



# Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

# Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

$$(f_1 - 0.5)^2 + (f_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0.5 - \frac{u_{z_s}}{2A} \\ f_2 = 0.5 + \frac{u_{z_s}}{2A}, \end{cases} \quad 2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1$$

# Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

$$(f_1 - 0.5)^2 + (f_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0.5 - \frac{u_{z_s}}{2A} \\ f_2 = 0.5 + \frac{u_{z_s}}{2A}, \end{cases} \quad 2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1$$

$$L = u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2 \rightarrow \max \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2, \theta_1\theta_2 < 0, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi, \theta_1\theta_2 > 0 \end{cases}$$

# Реализация управления

$$\theta_i \text{ малы: } \begin{cases} u_{x_s} = 2Af_2\theta_2 \cos \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \cos \varphi_1 \\ u_{y_s} = 2Af_2\theta_2 \sin \varphi_2 - 2Af_1\theta_1 \sin \varphi_1 \\ u_{z_s} = Af_2 - Af_1 \end{cases}$$

$$(f_1 - 0.5)^2 + (f_2 - 0.5)^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 = 0.5 - \frac{u_{z_s}}{2A} \\ f_2 = 0.5 + \frac{u_{z_s}}{2A}, \end{cases} \quad 2f_{\min} - 1 \leq \frac{u_{z_s}}{A} \leq 2f_{\max} - 1$$

$$L = u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2 \rightarrow \max \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2, \theta_1\theta_2 < 0, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + \pi, \theta_1\theta_2 > 0 \end{cases}$$

$$L = \theta_1^2 + \theta_2^2 \rightarrow \min \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = -\frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}, \\ \theta_2 = \frac{\sqrt{u_{x_s}^2 + u_{y_s}^2}}{2A} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \end{cases}$$

# Управление ориентацией

## Управляющий момент

$$V = \frac{1}{2}(J_\xi \omega_{\text{rel},1}^2 + J_\eta \omega_{\text{rel},2}^2) + k_a \left(1 - \left((0 \ 0 \ 1)^T, \mathbf{Bn}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}$$

$$\dot{V} = \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}^T (\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rel}} + k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1))$$

$$\mathbf{M}_{\text{control}} = \left(-k_\omega \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} - \mathbf{M}_{\text{ext}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} + \mathbf{J}\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{rel}} - k_a \mathbf{Bn} \times (0 \ 0 \ 1)^T\right)_{\xi, \eta}$$

## Засветка солнечного паруса

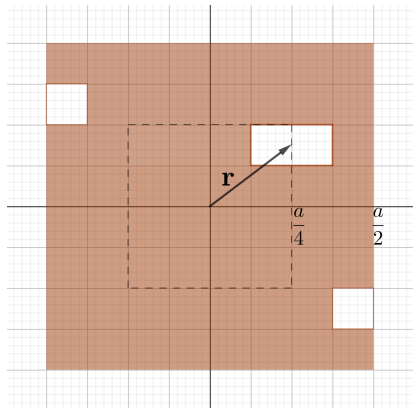
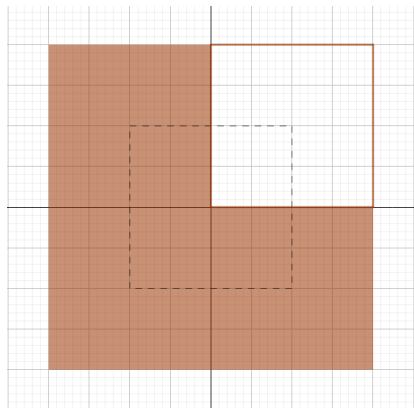
$$f = \frac{N}{n^2}, \quad \mathbf{M}_{\text{control}} = \int_S \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_s$$

$$\mathbf{M}_{\text{control}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cos^2 \theta \begin{pmatrix} P \\ Q \\ -n \tan \theta \sin \alpha Q - \tan \theta \cos \alpha P \end{pmatrix}$$

$$P = 2I - (n+1)N, \quad I = \sum_{(i,j): \alpha_{i,j}=1} i$$

$$Q = 2J - (n+1)N, \quad J = \sum_{(i,j): \alpha_{i,j}=1} j$$

# Выбор засветки солнечного паруса



$$f = \frac{S}{a^2}, \mathbf{r} = (\xi \ \eta \ 0)^T$$

$$M_\xi = \xi F_\zeta, \quad M_\eta = -\eta F_\zeta, \quad F_\zeta = -\frac{\Phi_0 S_{\text{dom}}}{c} \cos^2 \theta$$

# Численный пример (1)

Радиус орбиты:  $R_{orb} = 9000$  км

Начальная относительная орбита:

$$\mathbf{r}_{rel} = (10 \ 10 \ 5) \text{ м}$$

$$\mathbf{v}_{rel} = (0.05 \ 0.1 \ 0.1) \text{ м/с}$$

Масса аппарата:  $m = 10$  кг

Парус: квадрат, 5 м

Тензор инерции:  $\mathbf{J} = \text{diag} (2.1 \ 2.1 \ 3.8) \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

Начальная угловая скорость:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (0.002 \ 0.003 \ 0.001) \text{ рад/с}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (0.001 \ 0.003 \ 0.002) \text{ рад/с}$$

Параметры управления:

$$k_1 = k_3 = k_4 = 20, k_2 = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

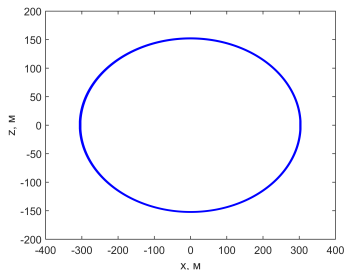
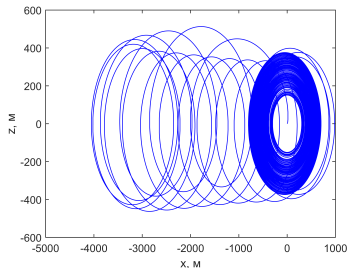
$$k_\omega = 0.02 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}, k_a = 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Максимальное управление:  $u_{max} = 10^{-6}$  Н

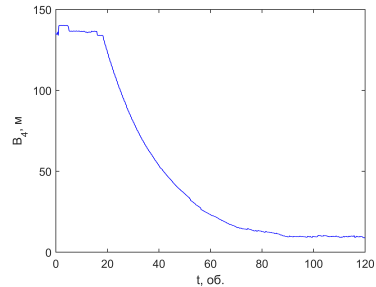
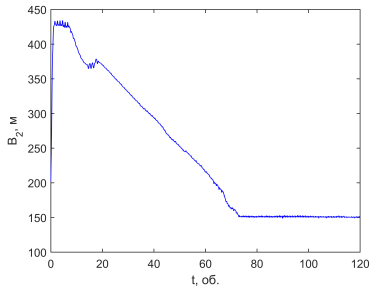
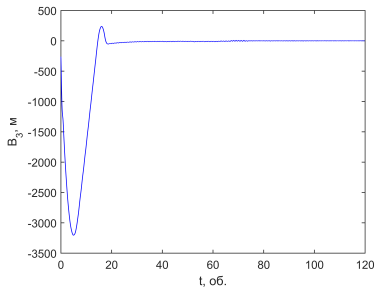
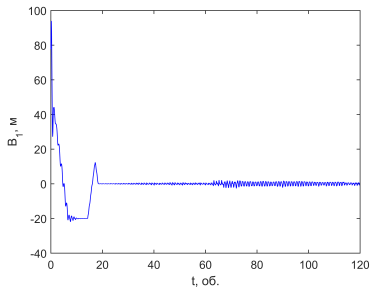
Максимальный управляющий момент:

$$M = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Условие переключения:  $B_1 B_3 < 1 \text{ м}^2$

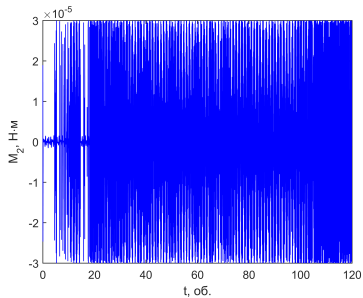
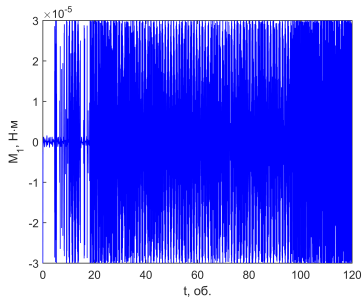
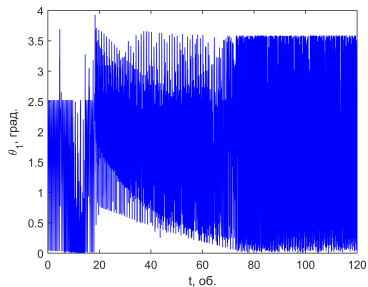
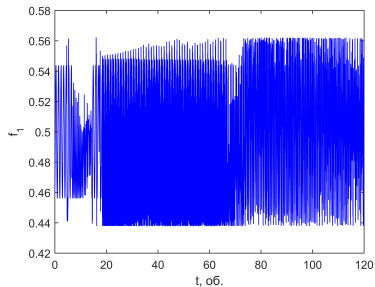


# Численный пример (2)





# Численный пример (управление)



# Заключение

Предложена схема управления формацией из двух спутников с помощью солнечного паруса с изменяемой отражательной способностью. Показано, что управление относительным движением и ориентацией возможно с использованием только солнечного паруса.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00739 и 17-01-00449.