



61-я научная конференция МФТИ
19 ноября 2018 года



Динамика и управление движением космических аппаратов

Поддержание формаций спутников в окрестности коллинеарных точек либрации

М.Ю. Воронина, студентка 5 курса ФУПМ

Научный руководитель: к.ф.-м.н., М.Г. Широбоков

Содержание

- Цель работы
- Методы построения формаций аппаратов
- Методы управления формацией аппаратов
- Заключение

Цель работы

Цель данной работы - выполнить обзор методов построения и управления формациями в окрестности коллинеарных точек либрации. Рассмотреть случаи

- двух аппаратов
- трех аппаратов
- N аппаратов

Круговая ограниченная задача трех тел

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \quad \ddot{z} = U_z$$

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$\mu = m_2 / (m_1 + m_2) \quad \omega_0 = 1$$

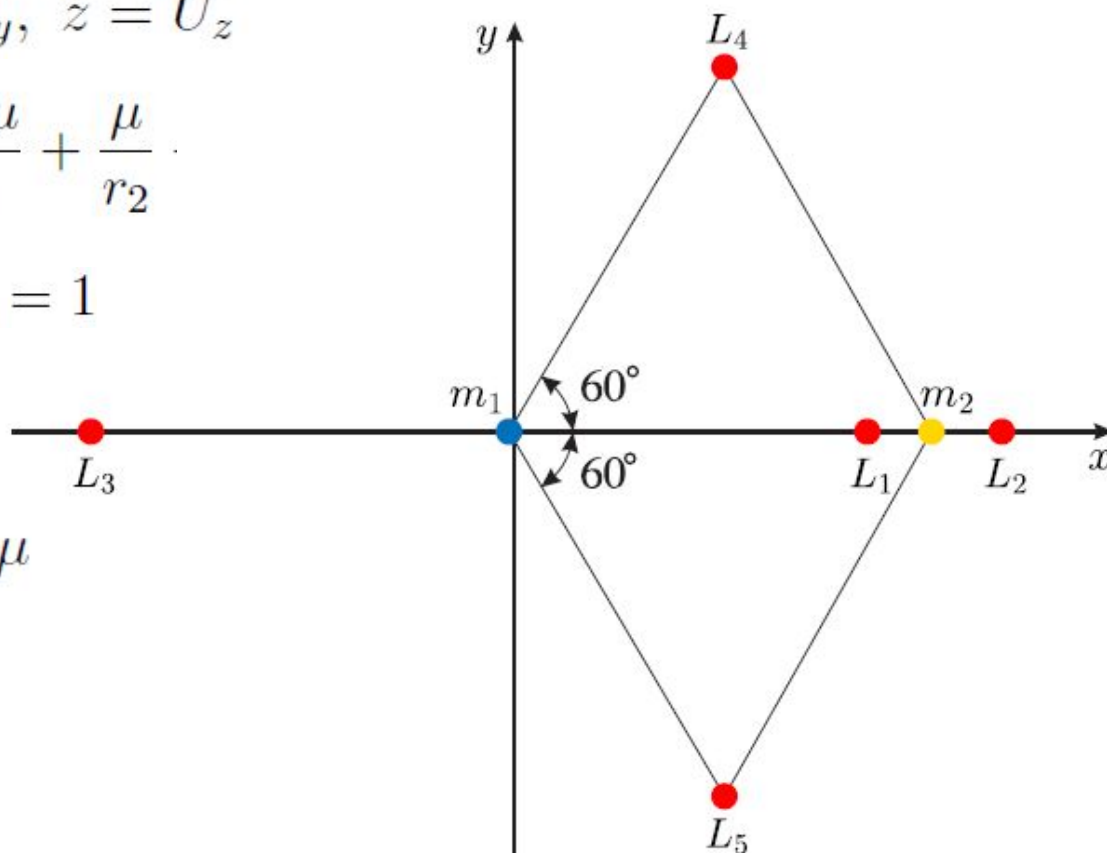
$$m_1 = 1 - \mu \quad m_2 = \mu$$

$$x_{m_1} = -\mu \quad x_{m_2} = 1 - \mu$$

Положения равновесия
соответствуют условиям

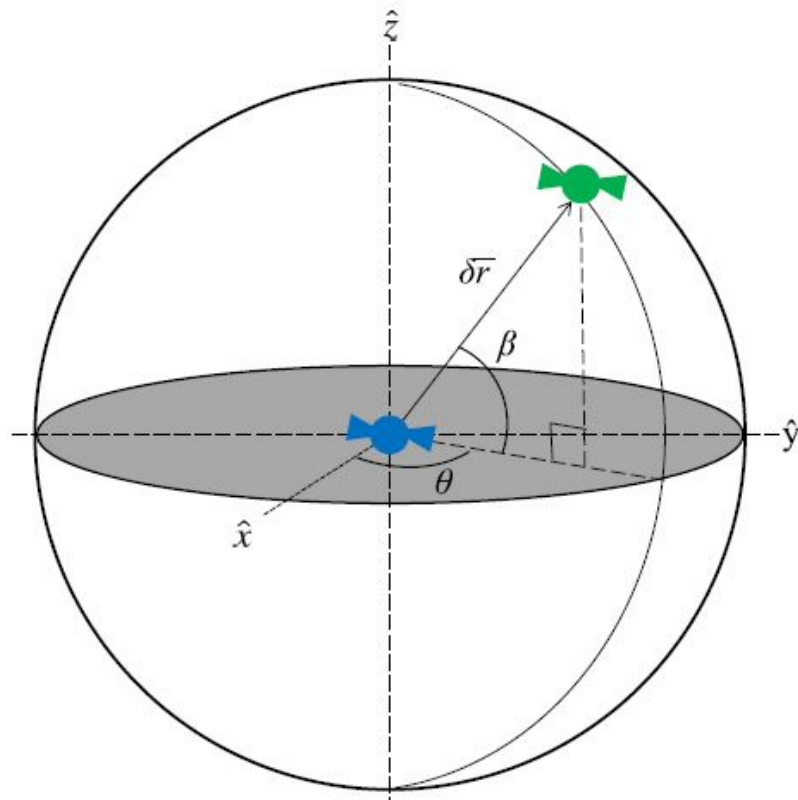
$$U_x = U_y = U_z = 0$$

называются **точками либрации**



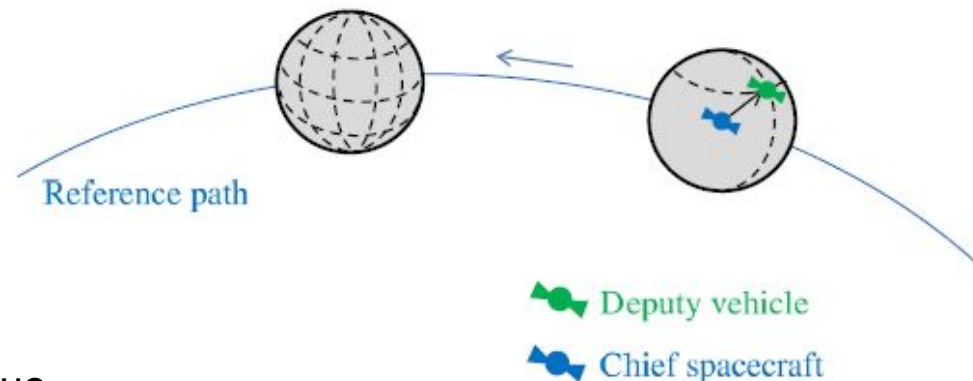
Положение точек либрации.
Заимствовано из [1]

Поиск естественных формаций системы двух космических аппаратов



$$\delta \vec{r} = [\delta x \ \delta y \ \delta z]^T$$

$$\delta \dot{\vec{r}} = [\delta \dot{x} \ \delta \dot{y} \ \delta \dot{z}]^T$$

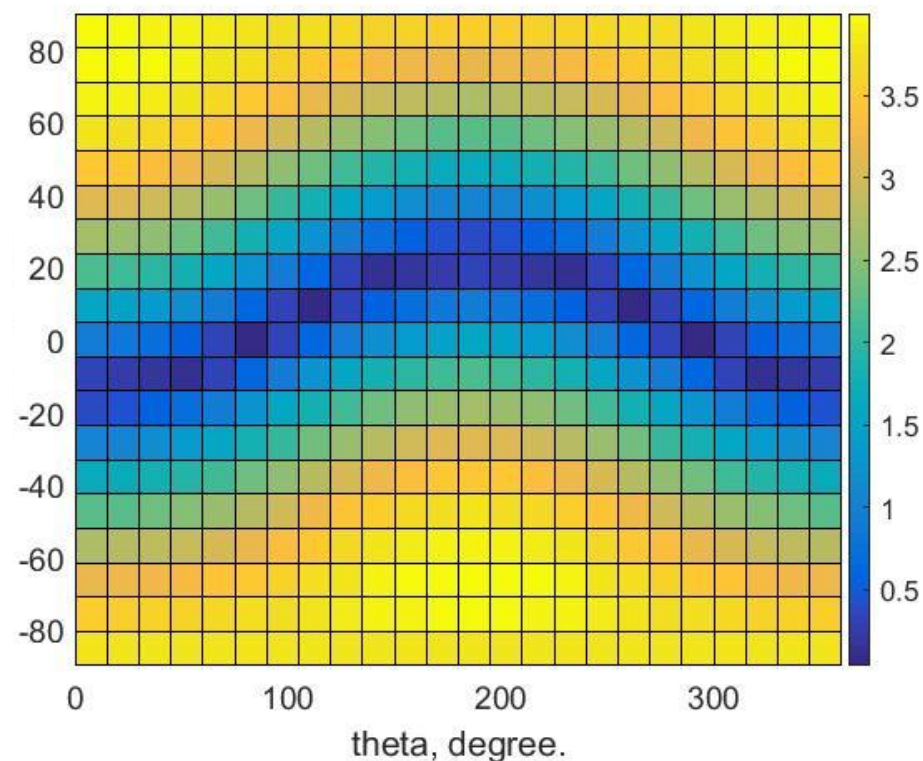
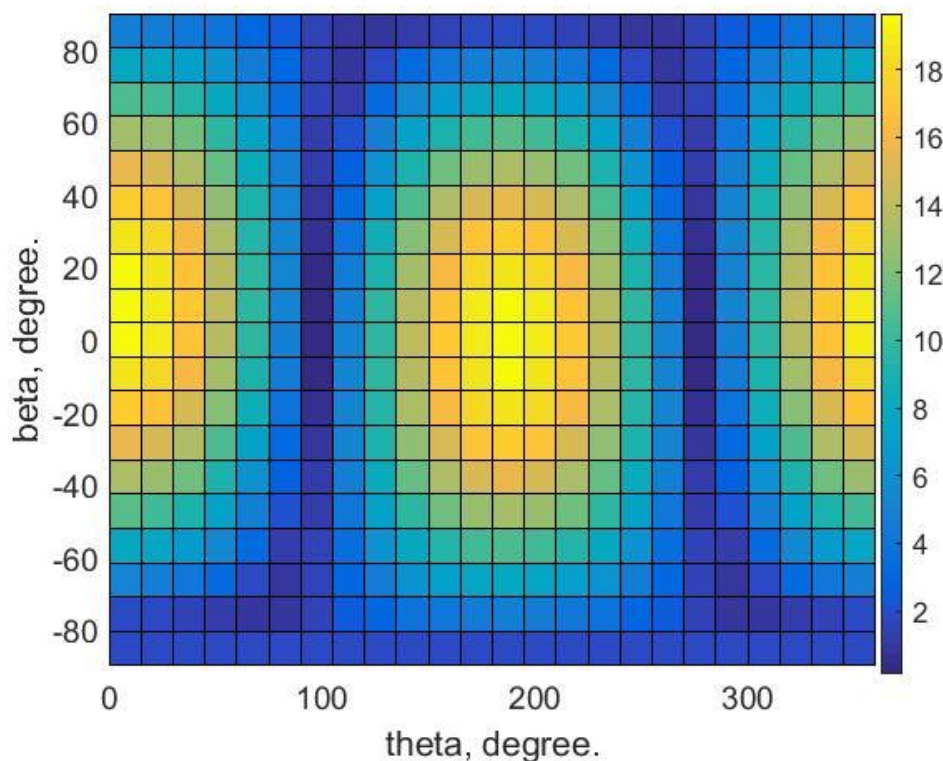


Положение второго спутника относительно первого. Заимствовано из [1]

Движение системы двух спутников на опорной орбите. Заимствовано из [1]

Поиск области минимального дрейфа второго аппарата

Численно проинтегрируем уравнения движения первого и второго космического аппарата



Гало-орбита амплитуды $Az=150000$ около точки L2 системы Солнце - Земля

Гало-орбита амплитуды $Az=1840000$ около точки L2 системы Солнце - Земля

Поиск области минимального дрейфа с помощью вариации расстояния между аппаратами

Вариацию относительного ускорения можно определить

$$\delta \ddot{\vec{r}} = F \delta \vec{r} \quad \delta \dot{\vec{r}} = \vec{0}$$

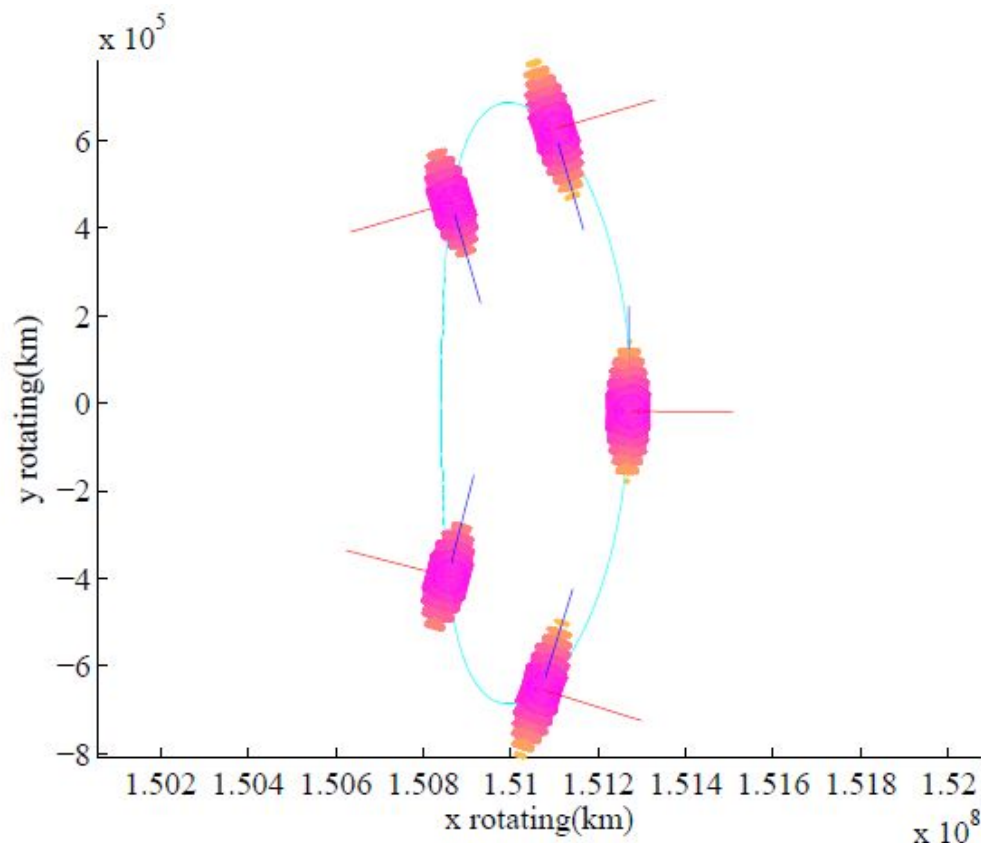
$$\|\delta \ddot{\vec{r}}\|^2 = \delta \ddot{\vec{r}} \cdot \delta \ddot{\vec{r}} = F \delta \vec{r} \cdot F \delta \vec{r}$$

Введем ограничение вариации

$$\delta \vec{r}^T F^T F \delta \vec{r} \leq \epsilon$$

Определим поверхность минимального дрейфа

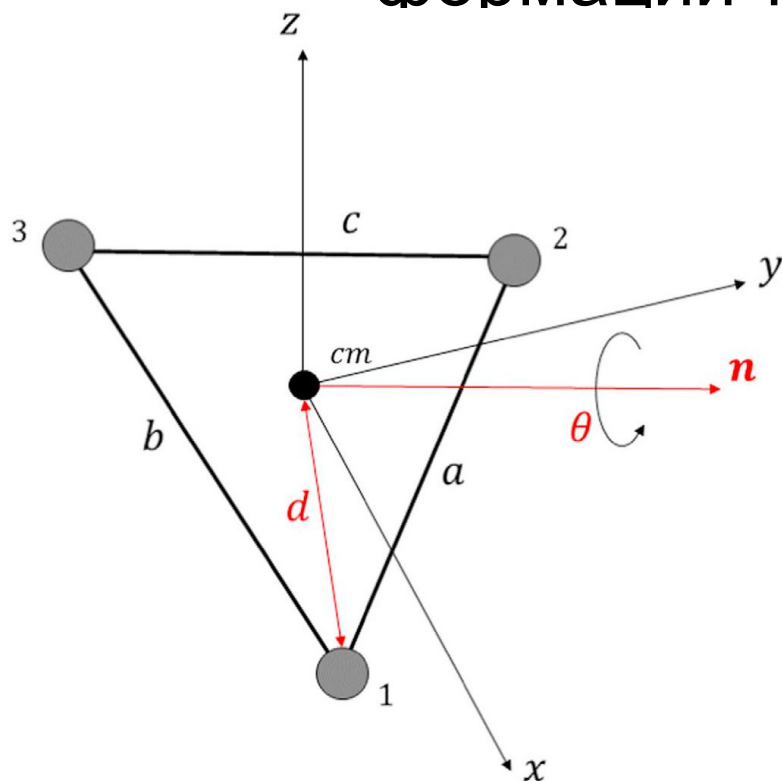
$$\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \lambda_3^2 y_3^2 \leq \epsilon$$



Эллипсоид области минимального дрейфа на Гало-орбите амплитудой $A_z = 150000$ км.

Заимствовано из [1]

Параметры сохранения формы и размера формации трех аппаратов



Формация трех спутников.
Заимствовано из [1]

Параметр сохранения
формы

$$SF = e^{-\sqrt{(\ln \varepsilon_1)^2 + (\ln \varepsilon_2)^2}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{b}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{c}$$

Параметр сохранения
размера

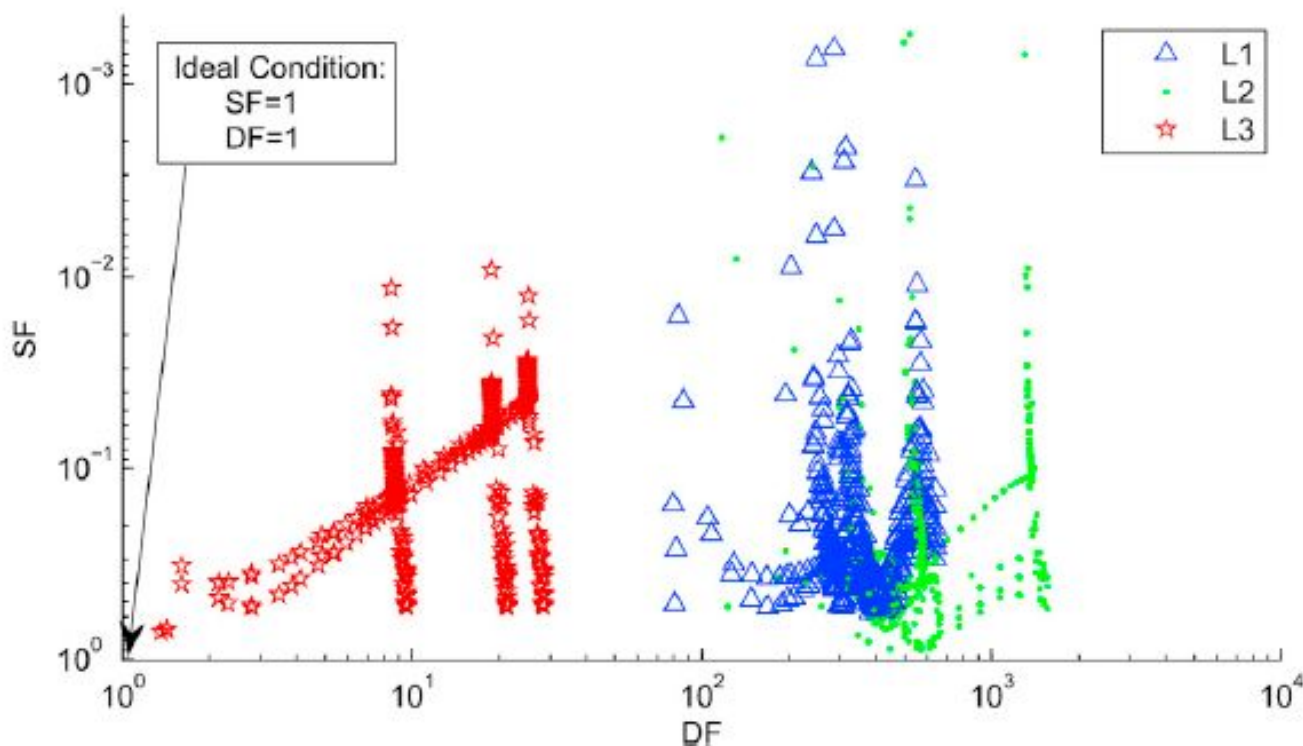
$$DF = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{3}$$

$$\eta_1 = \frac{a}{a_0}, \quad \eta_2 = \frac{b}{b_0}, \quad \eta_3 = \frac{c}{c_0}$$

Геометрия формации сохраняется
при значениях параметров

$$SF = 1, \quad DF = 1$$

Поиск орбиты с наименьшим изменением формации



Значение коэффициентов формы и размера на различных плоских Гало-орбитах около точек либрации [1]

Полуаналитический метод описания поведения формации в окрестности точек либрации

Линеаризованные уравнения относительного движения двух и трех спутников вблизи точек либрации

$$x = \sum x_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

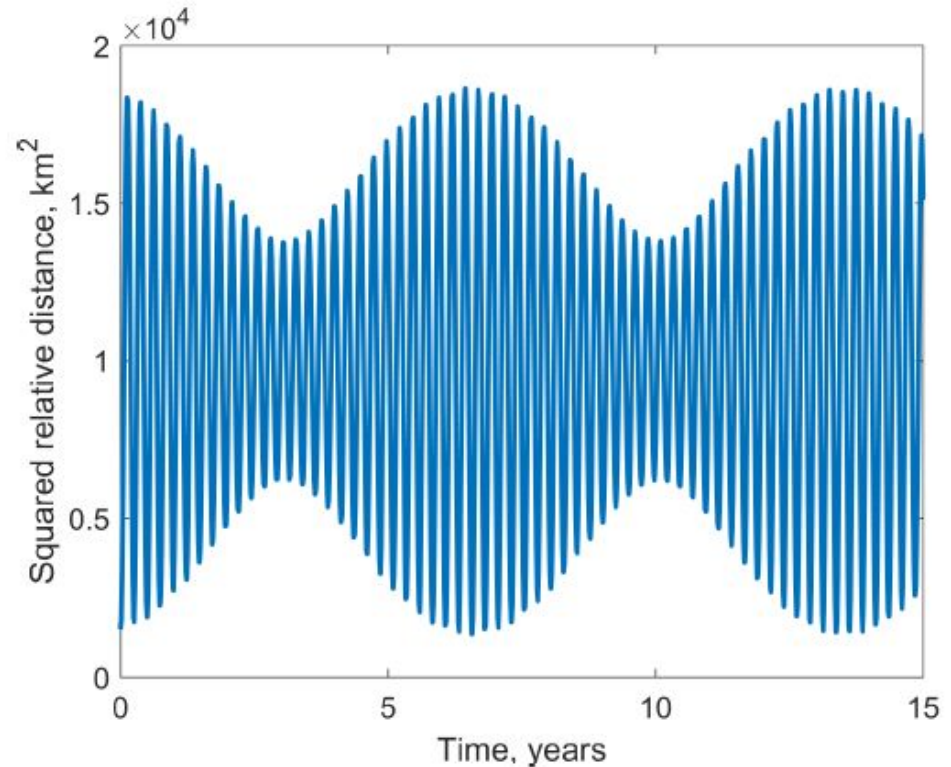
$$y = \sqrt{-1} \sum y_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

$$z = \sum z_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

$$\Delta x = A_x \cos(\omega_p t + \theta_1)$$

$$\Delta y = -\kappa A_x \sin(\omega_p t + \theta_1) \quad \kappa = \frac{\omega_p^2 + 2\omega_v^2 + 1}{2\omega_p}$$

$$\Delta z = A_z \cos(\omega_v t + \theta_2)$$



Расстояние между двумя спутниками со временем на орбите Лиссажу.
Заимствовано из [1]

Полуаналитический метод описания поведения формации в окрестности точек либрации

Линеаризованные уравнения относительного движения двух и трех спутников вблизи точек либрации

$$x = \sum x_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

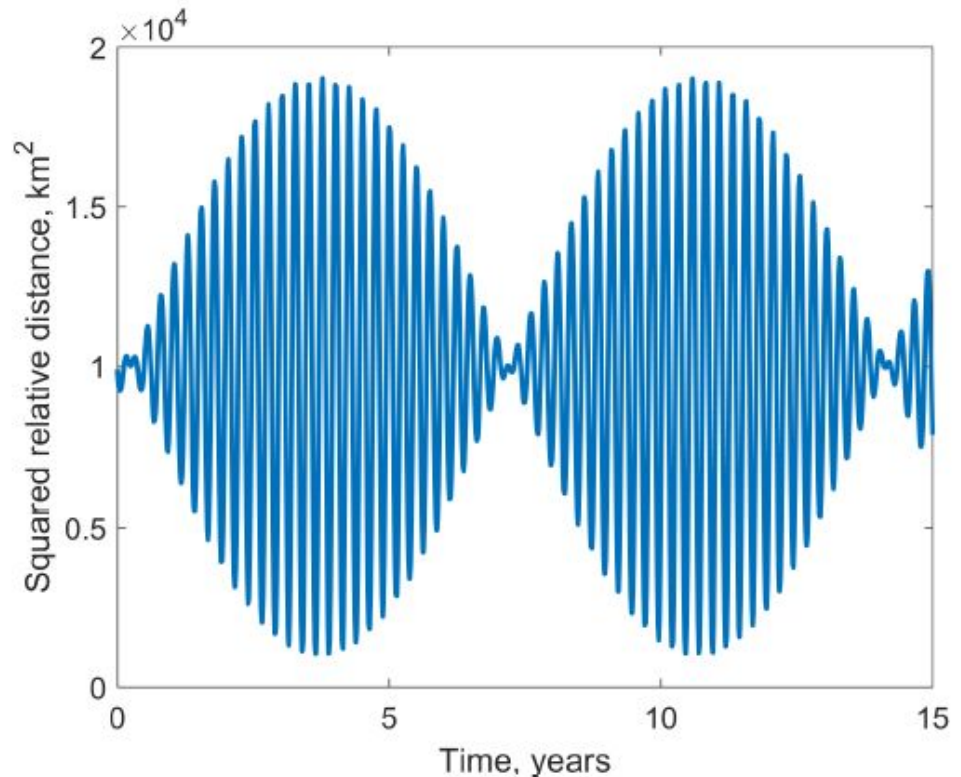
$$y = \sqrt{-1} \sum y_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

$$z = \sum z_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

$$\Delta x = A_x \cos(\omega_p t + \theta_1)$$

$$\Delta y = -\kappa A_x \sin(\omega_p t + \theta_1) \quad \kappa = \frac{\omega_p^2 + 2\omega_v^2 + 1}{2\omega_p}$$

$$\Delta z = A_z \cos(\omega_v t + \theta_2)$$



Расстояние между двумя спутниками со временем на орбите Лиссажу.
Заимствовано из [1]

Полуаналитический метод описания поведения формации в окрестности точек либрации

Линеаризованные уравнения относительного движения двух и трех спутников вблизи точек либрации

$$x = \sum x_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

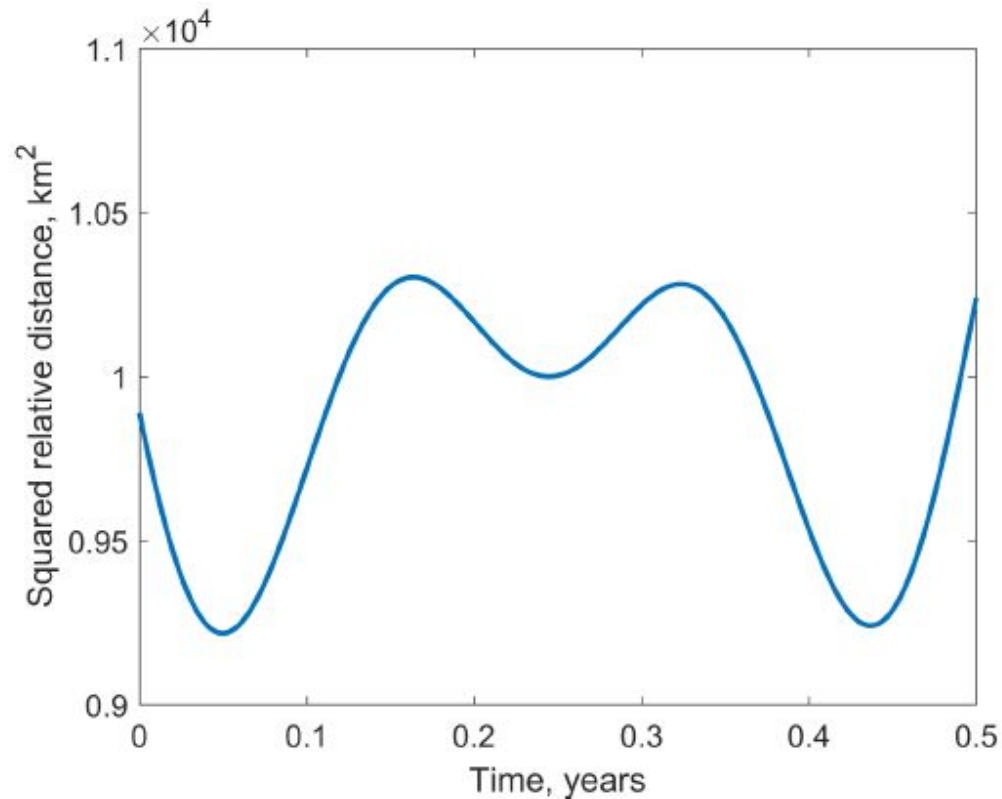
$$y = \sqrt{-1} \sum y_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

$$z = \sum z_{ijkm} \alpha^i \beta^j \gamma_1^k \gamma_2^m$$

$$\Delta x = A_x \cos(\omega_p t + \theta_1)$$

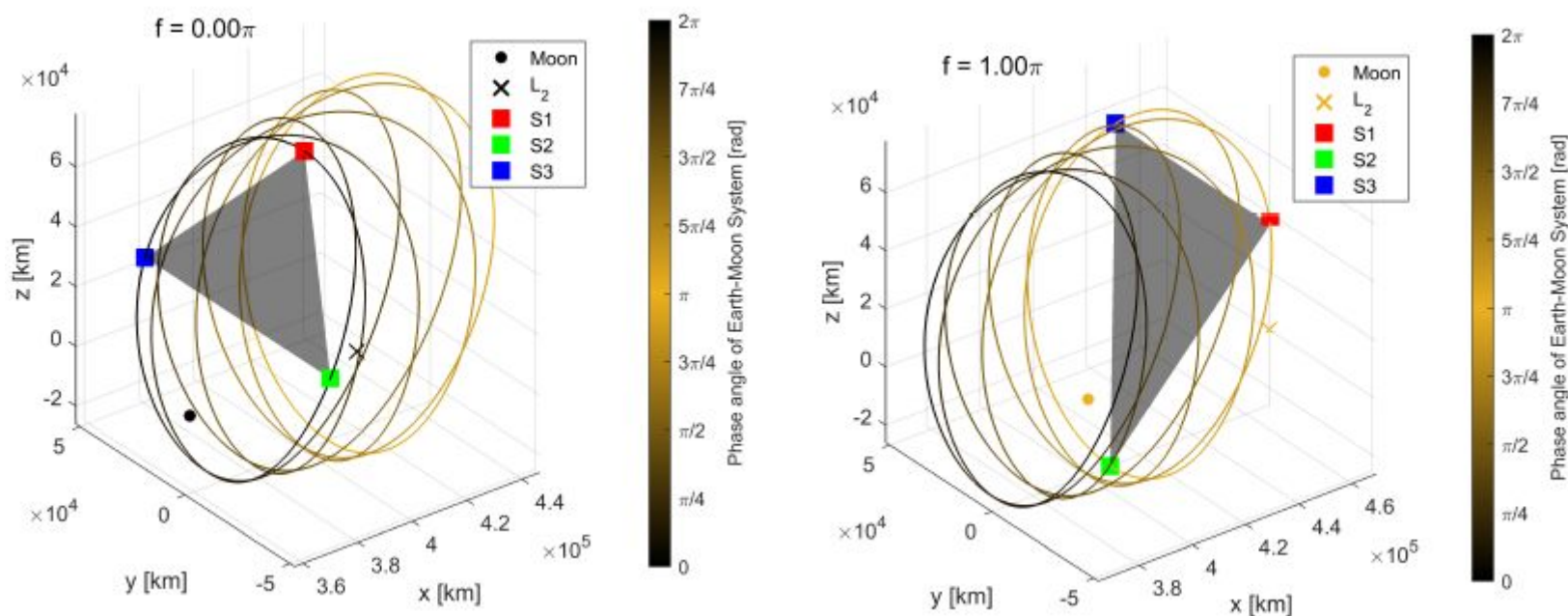
$$\Delta y = -\kappa A_x \sin(\omega_p t + \theta_1) \quad \kappa = \frac{\omega_p^2 + 2\omega_v^2 + 1}{2\omega_p}$$

$$\Delta z = A_z \cos(\omega_v t + \theta_2)$$



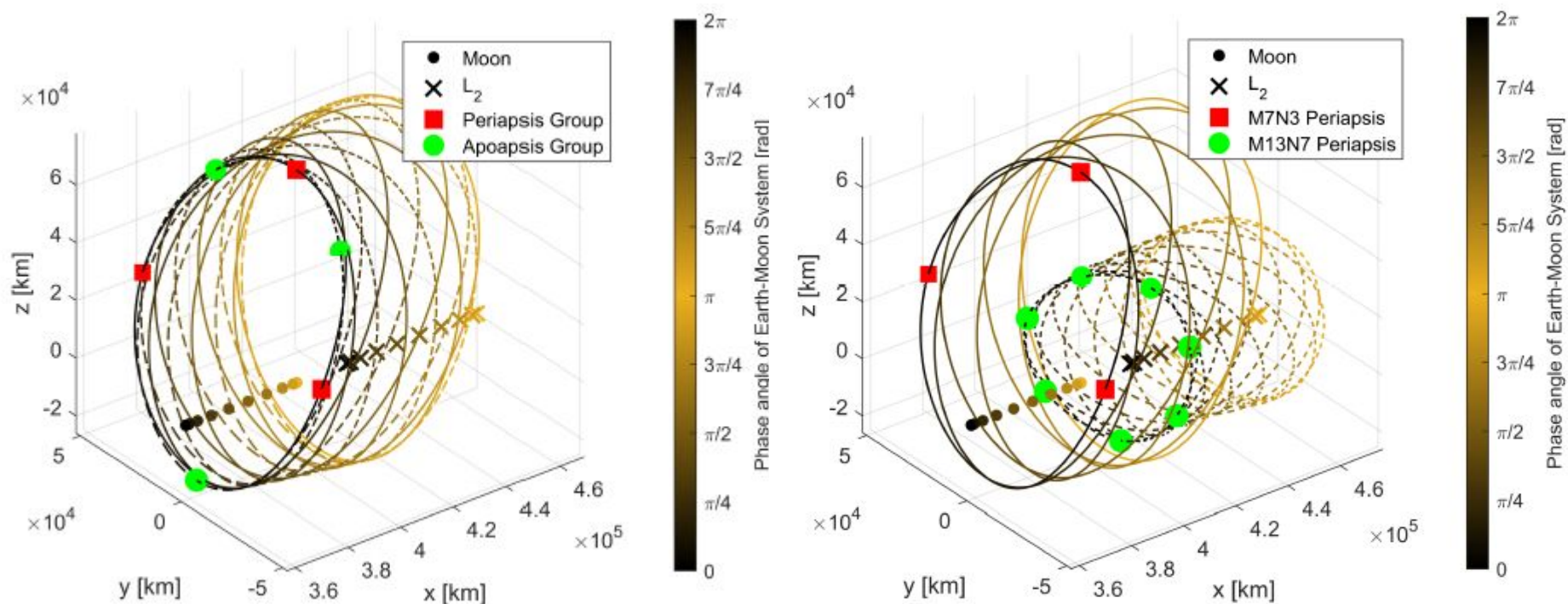
Аналитически оптимизированное
расстояние между спутниками.
Заимствовано из [1]

Формация трех спутников на квазипериодической орбите



Формация трех спутников на квази гало-орбите вблизи L2. Заимствовано из [1]

Формация N спутников на квазипериодической орбите



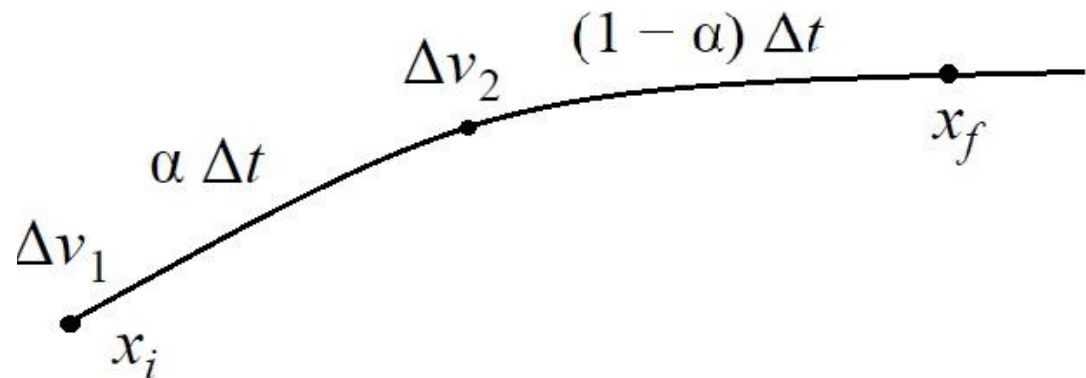
Размещение N космических аппаратов на соседних орбитах. Заимствовано из [1]

Метод целевых точек для поддержания формации

$$\|\Delta v_1\| + \|\Delta v_2\| \rightarrow \min$$

Система имеет 6 уравнений и 7 неизвестных. Определим параметр α из соотношения:

$$\varphi_{(1-\alpha)\Delta t} \left[\varphi_{\alpha\Delta t} \left(x_i + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v_1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v_2 \end{pmatrix} \right] = x_f$$



Прямая оптимизация затрат топлива

Фазовый вектор аппарата в начальный момент времени

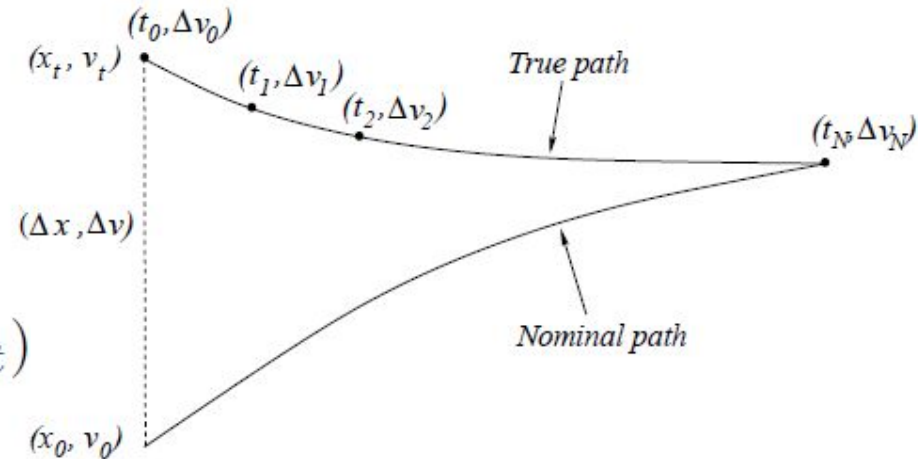
$$(t_0, x_0, v_0)$$

Фазовый вектор номинальной траектории аппарата в начальный момент времени:

$$(t_0, x_0 + \Delta x, v_0 + \Delta v) = (t_0, x_t, v_t)$$

Совершается N импульсов:

$$\Delta v_0, \Delta v_1, \dots, \Delta v_N$$



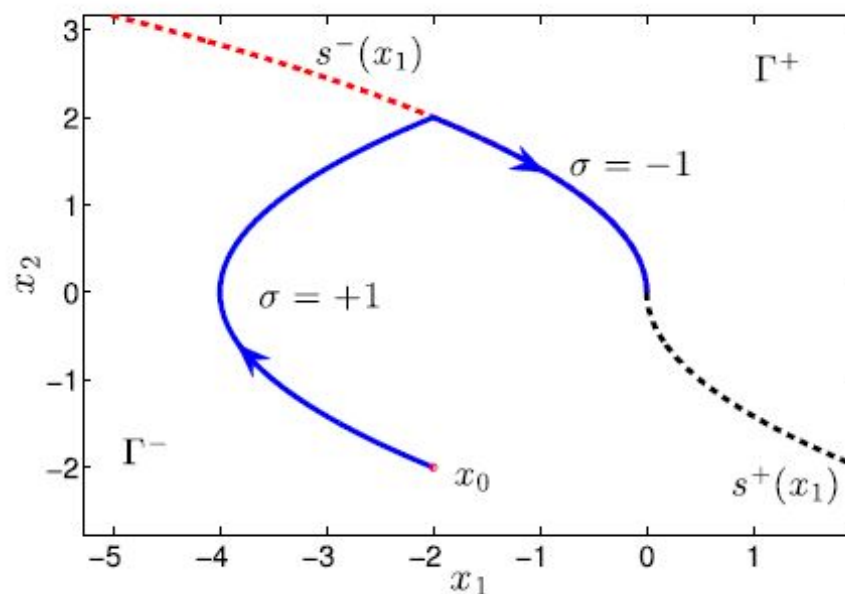
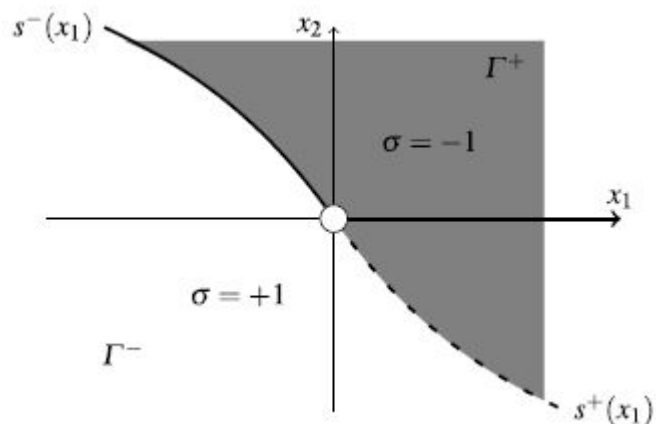
Задача:
$$\sum_{j=0}^N w_j \left\| \Delta v_j \right\|^2 \rightarrow \min$$

Метод скользящего управления

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = d(t) + \bar{\omega}\sigma$$

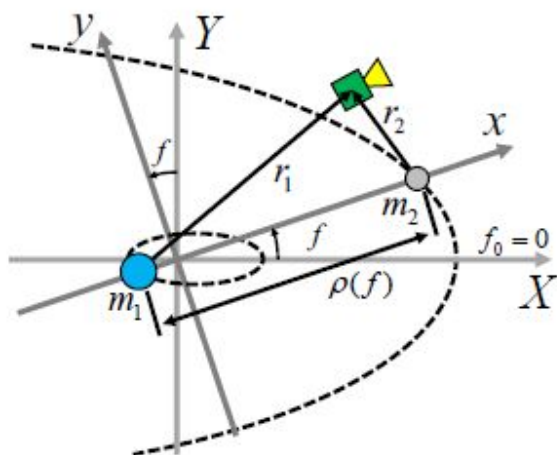
$$\sigma = \begin{cases} -1, & \mathbf{x} \in \Gamma^+ \\ +1, & \mathbf{x} \in \Gamma^- \\ 0, & \mathbf{x} = 0 \end{cases}$$



Заключение

- Области дрейфа космических аппаратов описываются поверхностями второго порядка
- Полуаналитический метод поиска орбит формаций около точек либрации можно использовать для начального приближения в оптимизационных задачах
- Формация трех космических аппаратов сохраняется на плоских гало-орбитах вблизи точки либрации L3

Эллиптическая ограниченная задача трех тел



$$\begin{cases} x'' - 2y' = \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ y'' + 2x' = \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ z'' + z = \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{cases}$$

$$\omega(x, y, z, f) = \frac{1}{1 + e \cos f} \Omega(x, y, z)$$

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)$$

Вывод канонического уравнения поверхности минимального дрейфа

Вариацию относительного ускорения можно определить

$$\delta \ddot{\vec{r}} = F \delta \vec{r}$$

$$\|\delta \ddot{\vec{r}}\|^2 = \delta \ddot{\vec{r}} \cdot \delta \ddot{\vec{r}} = F \delta \vec{r} \cdot F \delta \vec{r}$$

Введем ограничение вариации

$$\delta \vec{r}^T F^T F \delta \vec{r} \leq \epsilon$$

Определим поверхность минимального дрейфа

$$F = P \Delta P^T = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{V}_2 & \bar{V}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \bar{V}_2 & \bar{V}_3 \end{bmatrix}^T$$

$$F = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T$$

$$\bar{y} = P^T \delta \vec{r}$$

$$\bar{y}^T P^T F^T F P \bar{y} = \bar{y}^T \Delta^2 \bar{y}$$

$$\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \lambda_3^2 y_3^2 \leq \epsilon$$

Функция управления

- Скользящее управление

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}^1 &= \mathbf{V}^1 & \dot{\mathbf{X}}^2 &= \mathbf{V}^2 \\ \dot{\mathbf{V}}^1 &= \mathbf{G}^1(\chi^1, t) & \dot{\mathbf{V}}^2 &= \mathbf{G}^2(\chi^2, t) + \bar{R}_2 \mathbf{u}^2\end{aligned}$$

где

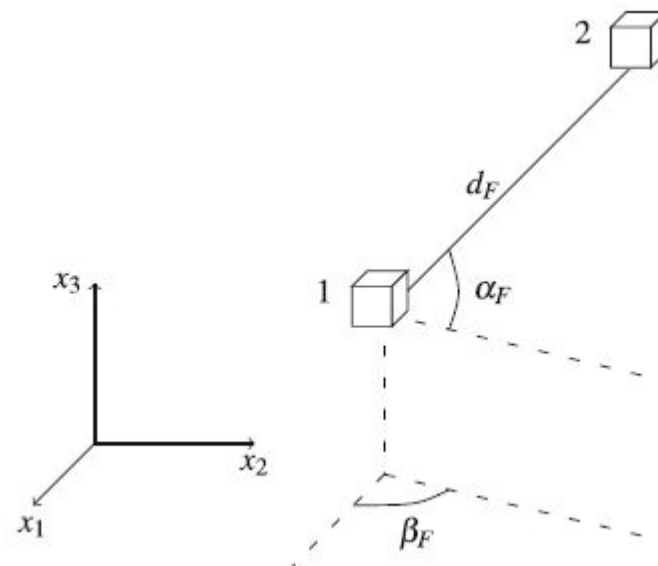
$$\mathbf{G}^i(\chi^i, t) = \mathbf{F}^i(\chi^i, t) + \mathbf{H}^i(\chi^i, t)$$

$$\mathbf{F}^i(\chi^i, t) = -\mu_1 \frac{\mathbf{X}^i}{\|\mathbf{X}^i\|^3} + \sum_{j=2}^N \mu_j \left(\frac{\mathbf{r}^{j,1}(t) - \mathbf{X}^i}{\|\mathbf{r}^{j,1}(t) - \mathbf{X}^i\|^3} - \frac{\mathbf{r}^{j,1}(t)}{\|\mathbf{r}^{j,1}(t)\|^3} \right)$$

$\mathbf{F}^i(\chi^i, t)$ - гравитационная сила N тел

$\mathbf{H}^i(\chi^i, t)$ - внешнее возмущение, действующее на КА

$$\mathbf{u}^2 = \bar{\omega} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \text{ - функция управления}$$



$$d_F(t) = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}$$

$\bar{\omega} > 0$ - ускорение