

Первая международная конференция
«Проблемы механики и управления»

Исследование алгоритмов определения
колебательных движений гибких
элементов конструкции
космического аппарата

Иванов Д.С.

Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН





Схема системы управления угловым движением КА

Вектор состояния КА:

$$\mathbf{x} = \left[\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{q}_a; \mathbf{q}_p; \boldsymbol{\omega}; \dot{\mathbf{q}}_a; \dot{\mathbf{q}}_p \right]^T,$$

$\boldsymbol{\lambda}$ – векторная часть

кватерниона,

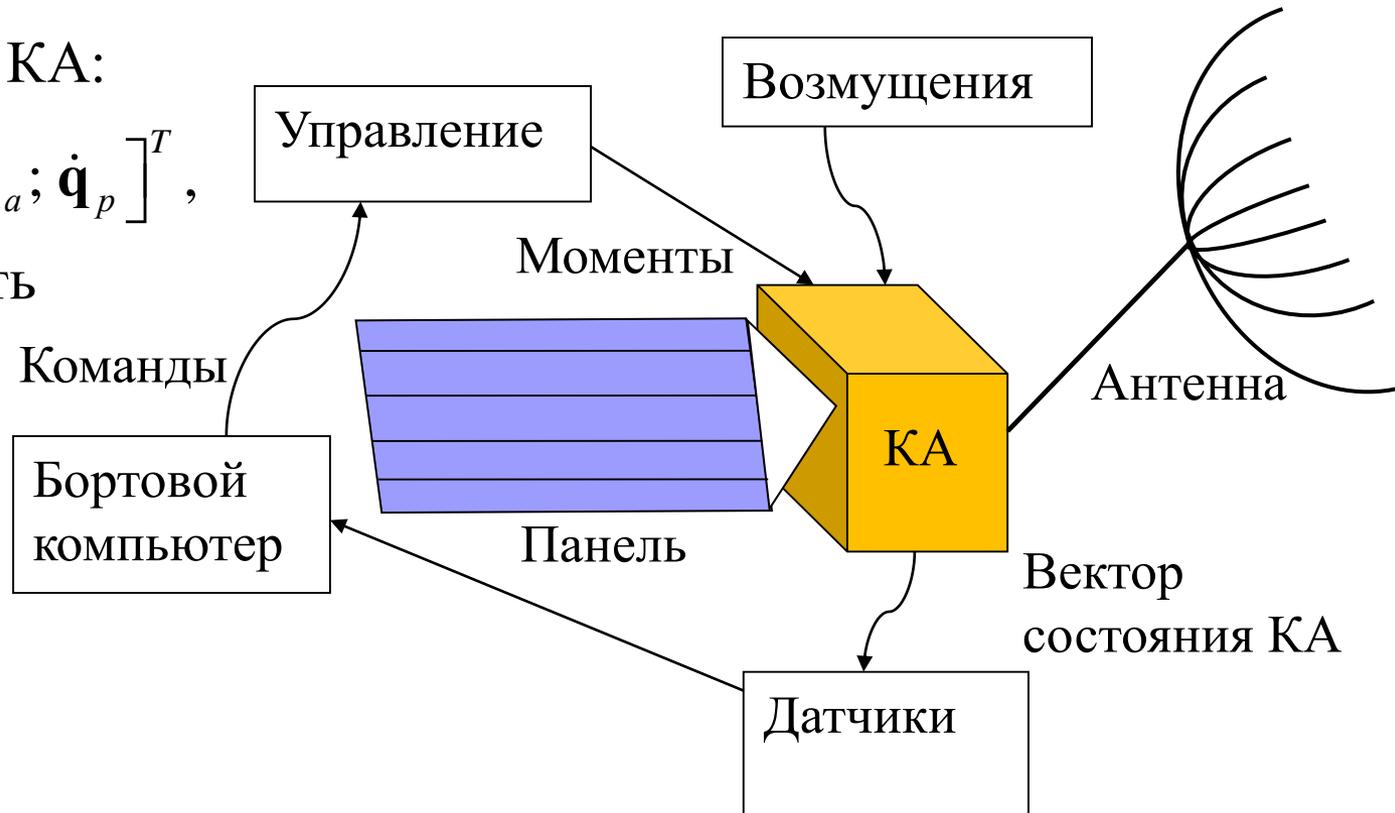
$\boldsymbol{\omega}$ – вектор

угловой скорости

$\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_p$ – векторы

мод колебаний

для антенны и панели





Постановка задачи

- Рассматривается космический аппарат с гибкой солнечной панелью и гибкой антенной большого размера
- Необходимо с помощью бортовых алгоритмов оценить текущие колебательные движения нежестких элементов по измерениям датчиков
- Обзор методов и подходов:

Д.С. Иванов, С.В. Меус, А.В. Овчинников, М.Ю. Овчинников, С.А. Шестаков, Е.Н. Якимов.
Методы определения колебательных параметров космических аппаратов с гибкими элементами конструкции // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2017. – №1, с. 98-115.



Расширенный фильтр Калмана

Модель движения КА

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}\mathbf{q},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = 0, \mathbf{M}(\mathbf{q}\mathbf{q}^T) = \mathbf{D},$$

Модель измерений

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{r}_k.$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_k) = 0, \mathbf{M}(\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T) = \mathbf{R}_k.$$

Линеаризация

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-}, \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-}$$

$$\Phi_k = \mathbf{E} + \mathbf{F}_k (t_k - t_{k-1}).$$

Этап прогноза (интегрирование)

1. Прогноз вектора состояния

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt,$$

2. Прогноз матрицы ошибок

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k,$$

$$\text{где } \mathbf{Q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_k \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{G}^T \Phi_k^T dt$$

Этап коррекции (обработка измерения)

1. Вычисление весовой матрицы

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1},$$

2. Коррекция $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ с использованием \mathbf{z}_k

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t)],$$

3. Усечение матрицы ошибок

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^-.$$

Начальный вектор состояния \mathbf{x}_0 ,

Начальная матрица ошибок \mathbf{P}_0

Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering. 1960. V. 82. P. 35–45.⁴

Математическая модель

Спутник:

- корпус, твердое тело
- панель, деформируемое тело с шарнирным креплением
- антенна, деформируемое тело с консольным креплением

$$\delta R_s: \sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0$$

$$\delta \theta: \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0,$$

$$\delta \psi_{a1}: \sum_i \mathbf{e}_{a1}^T (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) = M_{a1}$$

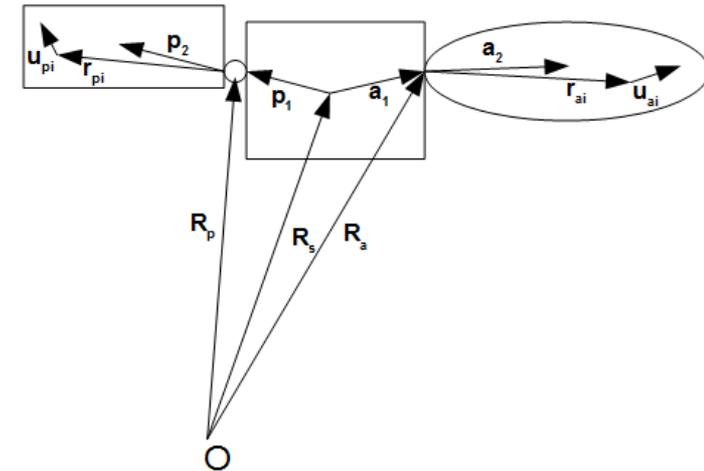
$$\delta \psi_{a2}: \sum_i \mathbf{e}_{a2}^T (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) = M_{a2}$$

$$\delta \psi_{p1}: \sum_i \mathbf{e}_{p1}^T (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = M_{p1}$$

$$\delta \mathbf{q}_a: \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai} - \mathbf{L}_{ai}) = 0$$

$$\delta \mathbf{q}_p: \sum_i \mathbf{A}_{pi}^T (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi} - \mathbf{L}_{pi}) = 0$$

$$\mathbf{L}_i = -m_i \mathbf{A}_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_p$$



$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\psi}_{a1} \\ \dot{\psi}_{a2} \\ \dot{\psi}_{p1} \\ \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_s - \mathbf{N}_{\omega a} - \mathbf{f}_{\omega a} - \mathbf{N}_{\omega p} - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{e}_{a1}^T (\mathbf{N}_{\phi a} + \mathbf{f}_{\phi a}) + M_{a1} \\ -\mathbf{e}_{a2}^T (\mathbf{N}_{\phi a} + \mathbf{f}_{\phi a}) + M_{a2} \\ -\mathbf{e}_{p1}^T (\mathbf{N}_{\phi p} + \mathbf{f}_{\phi p}) + M_{p1} \\ -\mathbf{f}_a - \mathbf{N}_a \\ -\mathbf{f}_p - \mathbf{N}_p \end{pmatrix}$$



Линеаризация и построение управления

Линеаризация уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{E}_{n \times n} \\ \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} \\ \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \right) \\ -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Линейно-квадратический регулятор

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$



Модель измерений

Рассматривается два варианта:

- Измерения датчиков, установленных на корпусе аппарата:
Звездный датчик и датчик угловой скорости на корпусе аппарата

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k.$$

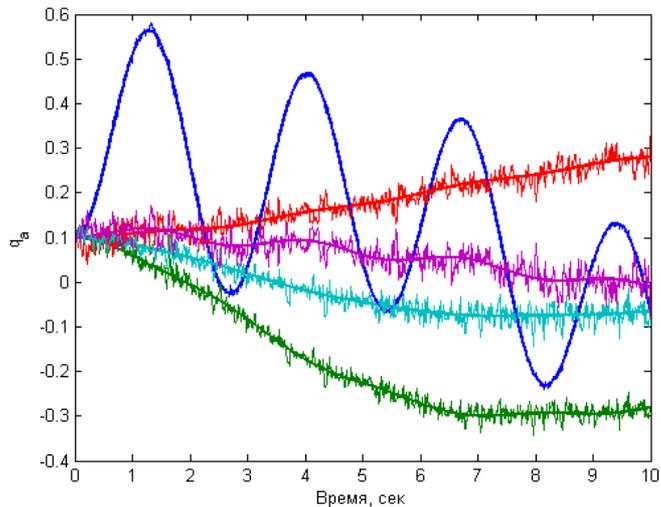
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

- К этим измерениям добавляются ещё измерения отклонений точек на гибких элементах от положений равновесия:
обработка видеоизображения или лазерные дальномеры

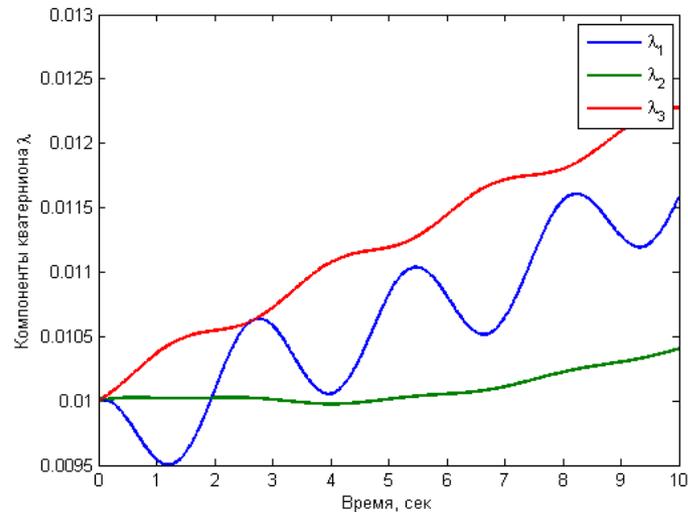
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \boldsymbol{\omega} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{m \times 3} & \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times 3} & \mathbf{0}_{m \times n} \end{bmatrix}$$

Математическое моделирование

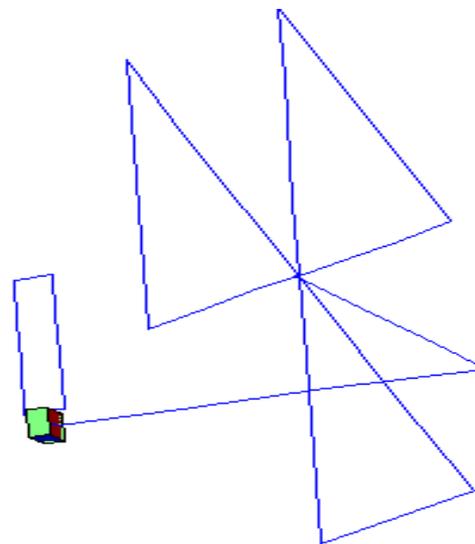
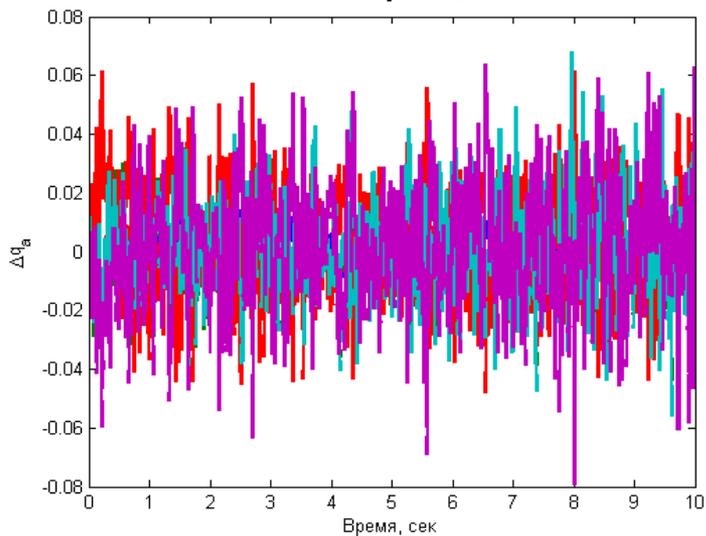
Моды колебаний антенны



Кватернион ориентации корпуса антенны



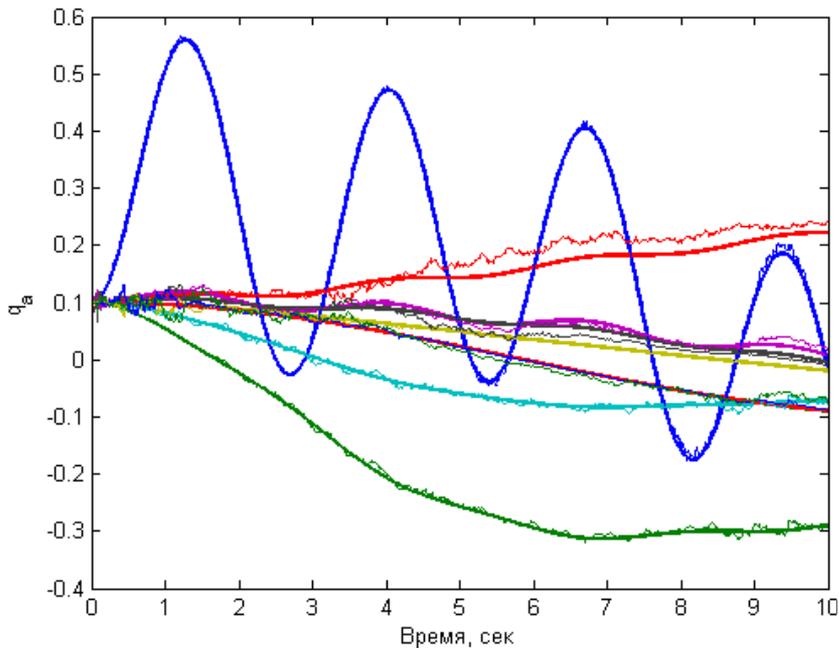
Ошибки определения



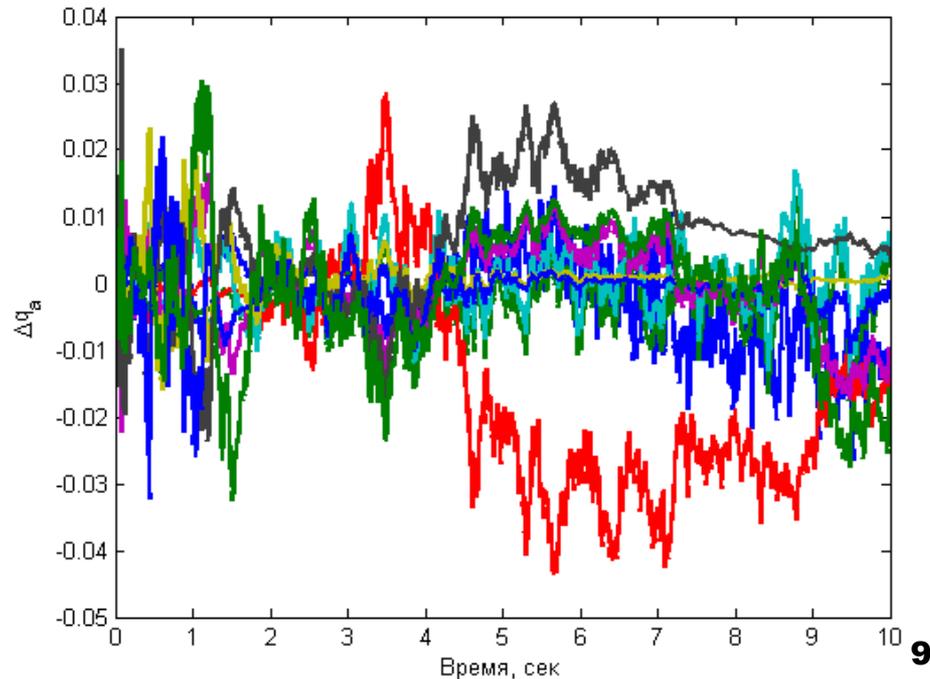
Уменьшение размерности вектора состояния

- Для бортового компьютера желательно уменьшить вычислительную сложность путем уменьшения числа оцениваемых мод
- Ошибки оценок фильтра Калмана возрастают

Моды колебаний антенны



Ошибка определения



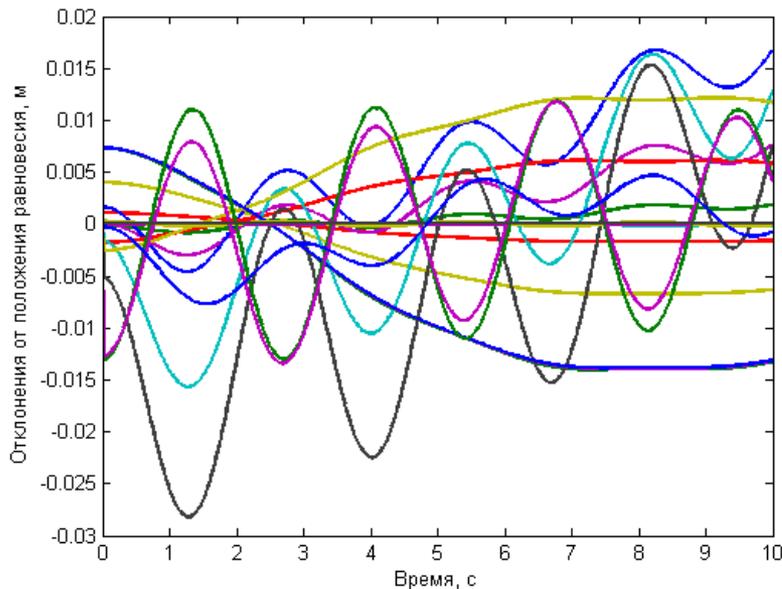


Учет измерений положения точек на КНЭК

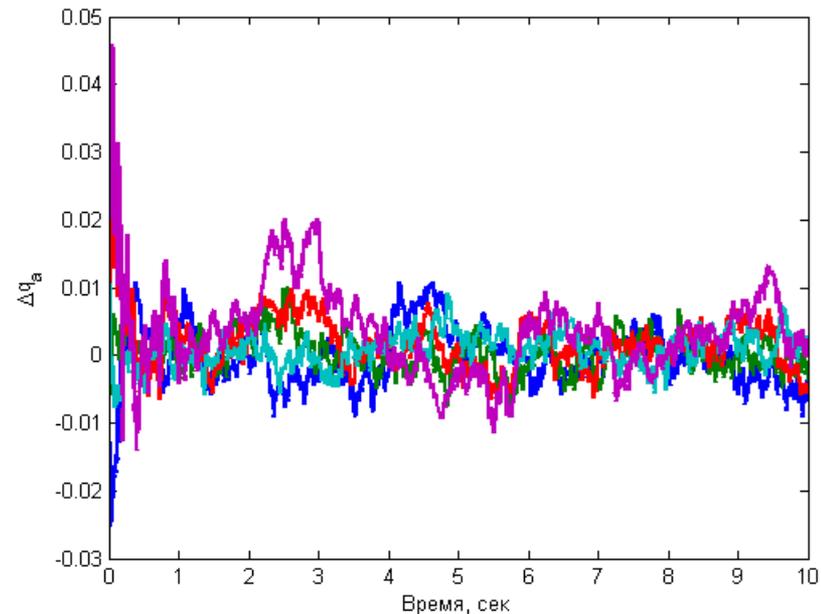
- К вектору измерений добавляется вектор измерений отклонений положения точек от равновесия

$$\text{Вектор измерений } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \omega \\ \Delta p \end{bmatrix}$$

Компоненты векторов отклонений точек на КНЭК



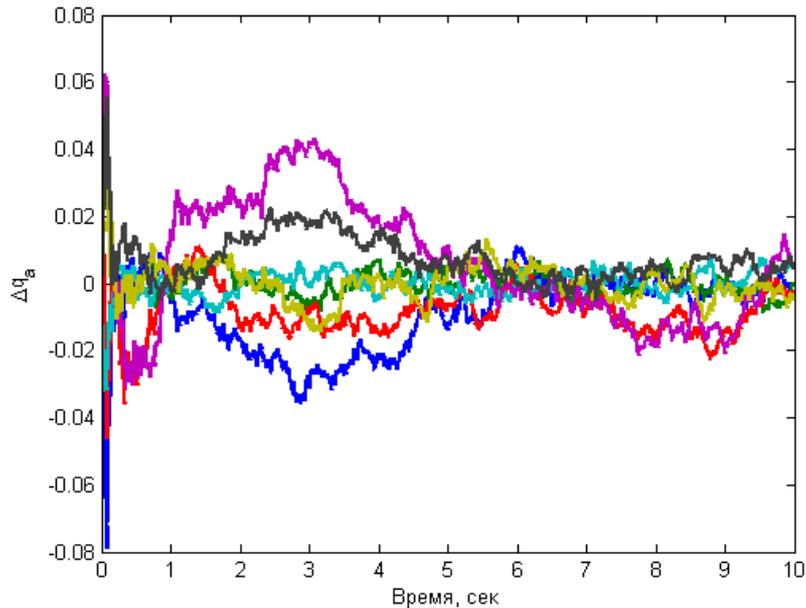
Ошибки определения



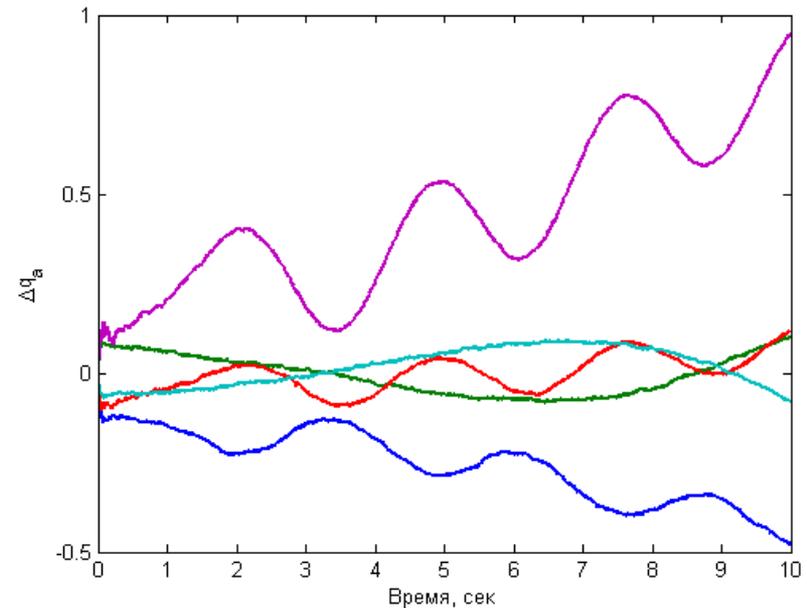
Уменьшение размерности вектора состояния

- Оценивается меньшее число мод, чем моделируется
- Начиная с некоторого значения оцениваемых мод оценки фильтра расходятся

Оценивается 7 из 10 мод



Оценивается 5 из 10 мод





Заключение

- Разработан алгоритм оценки текущих отклонений для мод колебаний на основе расширенного фильтра Калмана
- Нужно исследовать точность оценок фильтра Калмана при уменьшении числа оцениваемых мод
- Начиная с некоторого значения числа оцениваемых мод оценки фильтра Калмана расходятся
- Влияние неточности знания собственных частот колебаний и амплитудных векторов для точек также требуется исследовать



Спасибо за внимание!