



Применение прямого метода Ляпунова для управления ориентацией при наличии ограничений

Я.В. Маштаков

С.С. Ткачев

М.Ю. Овчинников

Д.С. Ролдугин

Первая международная конференция «Проблемы механики и управления»

Введение

Необходимо осуществлять развороты КА

Возможные ограничения:

- Камера не должна «смотреть» на яркие объекты
- Солнечные панели должны быть направлены на Солнце

Подходы к управлению

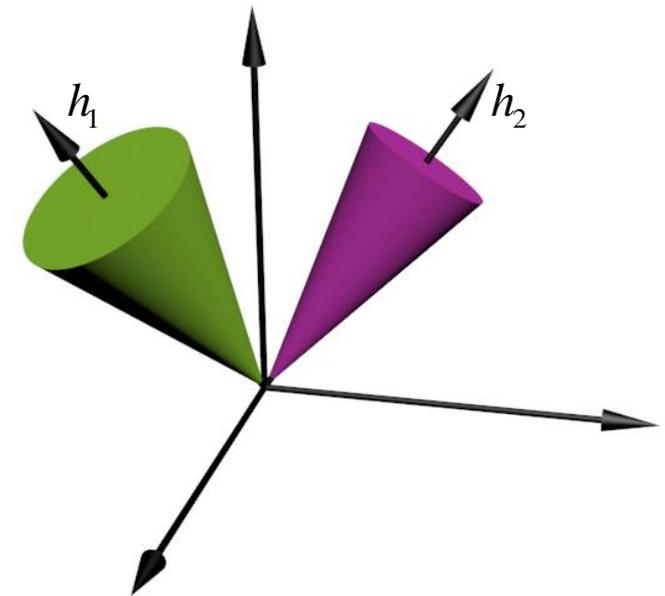
- Оптимальные методы
 - ✓ Быстродействие
 - ✗ Сложны для вычисления
- Прямой метод Ляпунова
 - ✓ Явные выражения для управления
 - ✓ Асимптотическая устойчивость
 - ✗ Не обеспечивают оптимальности по времени



Постановка задачи

Что мы знаем?

- Параметры спутника
- Запрещенные зоны (неподвижные в инерциальном пространстве конусы)
- Положение оси, которая не должна попадать в запрещенные зоны
- Начальное и требуемое положение КА
- Начальная и требуемая угловые скорости нулевые



Что мы хотим?

- Совершить разворот
- Избежать попадания в запрещенную зону

Ляпуновское управление

- Широко используется для управления ориентацией
- Обеспечивает асимптотическую устойчивость требуемого движения
- Устойчиво к внешним возмущениям

Основная идея:

- Задаем положительно определенную функцию
- Управление обеспечивает выполнение условий теоремы Барбашина-Красовского

Примеры

Одноосная ориентация
с закруткой

Функция

$$V_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_a(1 - (\mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{n}))$$

$$\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{D}(\mathbf{n}_{ref} \times \dot{\mathbf{n}}_{ref} + \Omega\mathbf{n}_{ref}) = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_0$$

Управление:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_a \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref} \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - \mathbf{M}_{ext}$$

Трёхосная ориентация

Функция:

$$V_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_q(1 - q_0)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}$$

Управление:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - \mathbf{J}[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref} - k_q \mathbf{q} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}$$

(q_0, \mathbf{q}) , \mathbf{A} – кватернион и матрица перехода из опорной в связанную СК
 \mathbf{D} – матрица перехода из инерциальной в связанную СК
 $\boldsymbol{\omega}_{abs}, \boldsymbol{\omega}_{rel}, \boldsymbol{\omega}_{ref}$ – абсолютная, относительная и опорная угловые скорости

Основная идея

- Будем использовать одноосное управление
- В стандартной форме не учитываются ограничения
- Модифицируем позиционную часть V_0 , так что в запрещенной области она принимает большие значения
- Управление обеспечивает невозрастание функции, а значит в запрещенную зону мы не попадем
- Идея схожа с созданием потенциального барьера

Локальная модификация

Ищем в виде

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) f + k_a (1 - (\mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{n}))$$
$$f = 1 + \sum_{k=1}^n f_i, \quad f_i = \begin{cases} H_i & \lambda_i < 0 \\ H_i (-3\lambda_i^2 + 2\lambda_i^3 + 1) & 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \lambda_i = \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{h}_i) - a_i}{b_i - a_i} \\ 0 & 1 < \lambda_i \end{cases}$$

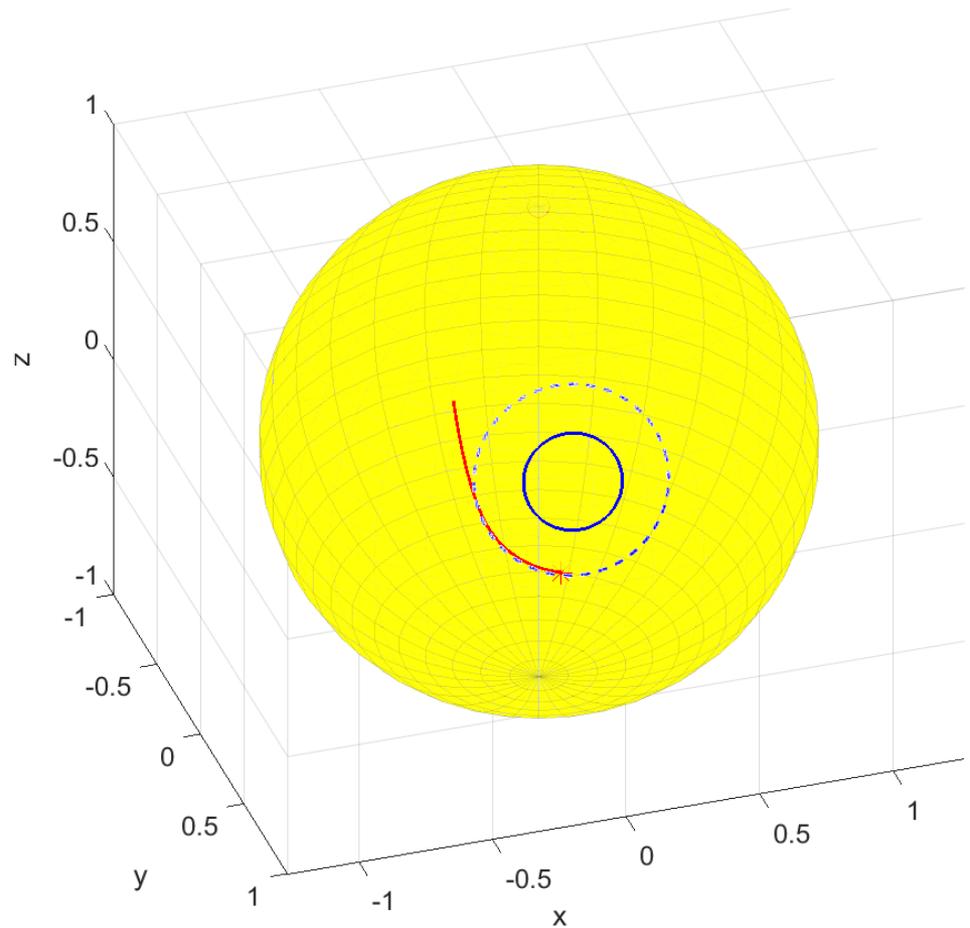
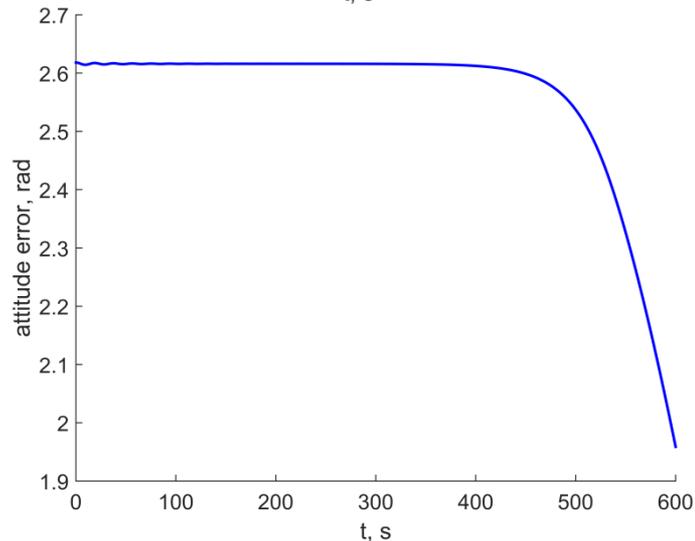
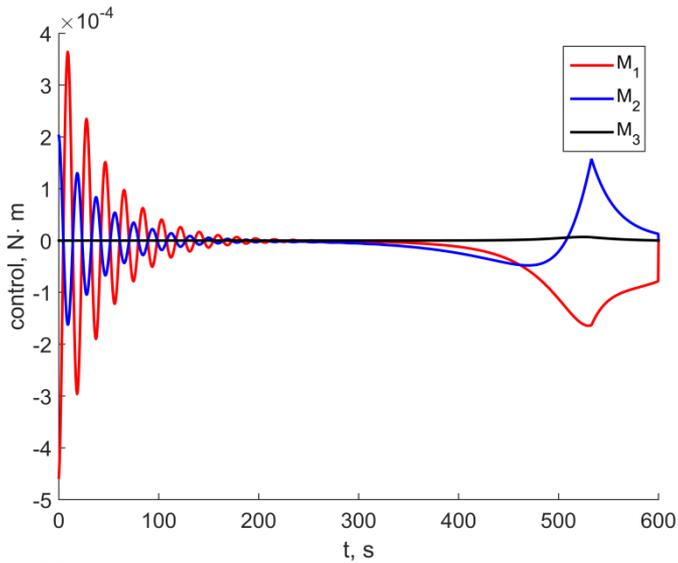
- Добавка локальна, оказывает влияние только в окрестности запрещенных зон
- f непрерывно дифференцируема, каждое слагаемое – сплайн Эрмита
- Зависит исключительно от угла λ_i между осью конуса \mathbf{h}_i и осью камеры \mathbf{n}
- a_i, b_i, H_i отвечают за размеры конуса и его «высоту»

Управление

- Опорное движение – инерциальная стабилизация, $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs}$
- Дифференцируем V , требуем выполнения т. Барбашина-Красовского
- Итоговое значение для управления

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{ctrl} = & -M_{ext} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - k_a [\mathbf{n}_{ref} \times \mathbf{n}] + && \leftarrow \text{стандартное одноосное управление} \\
 & + k_a (1 - (\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^n \frac{H_i (6\lambda_i^2 - 6\lambda_i)}{b_i - a_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{h}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{h}_i)^2}} \\
 & - k_a [\mathbf{n}_{ref} \times \mathbf{n}] (f - 1) && \leftarrow \text{учет ограничений}
 \end{aligned}$$

Особенности



Появляются дополнительные седловые точки с одним асимптотически устойчивым многообразием (вдоль меридиана)

$$\mathbf{J} = \text{diag}(2, 3, 4)$$

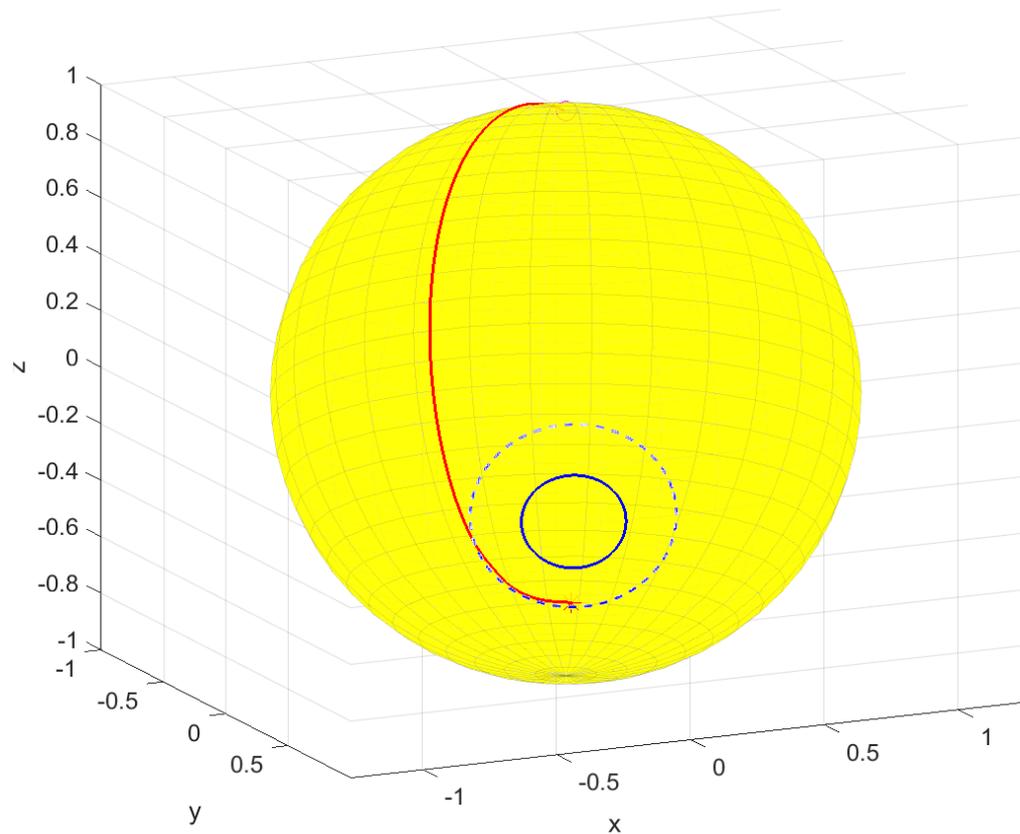
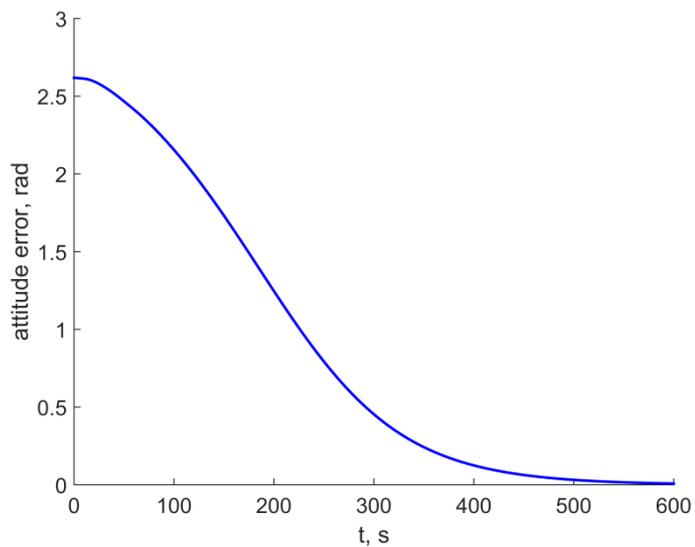
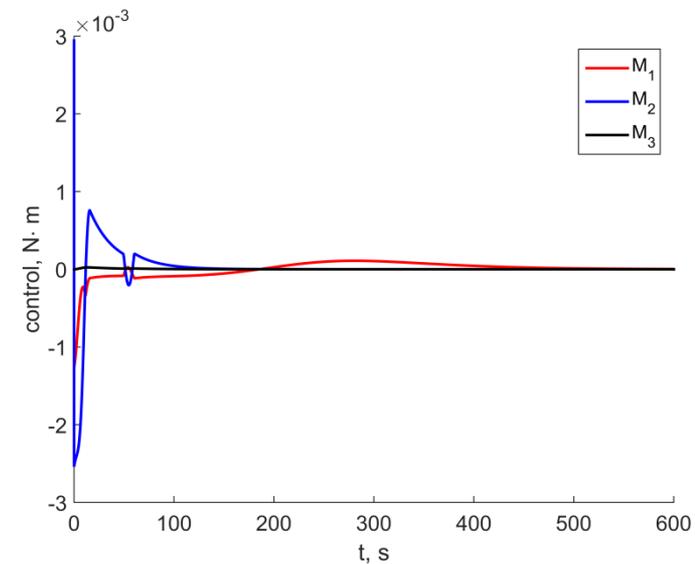
Обход седловой точки

- Седловые точки негативно влияют на время сходимости
- Для его улучшения предлагается в окрестности седловой точки прикладывать возмущение
- Основная идея – дать приращение угловой скорости вдоль широты
- Явный вид возмущения (\mathbf{s} – единичный вектор в седловую точку):

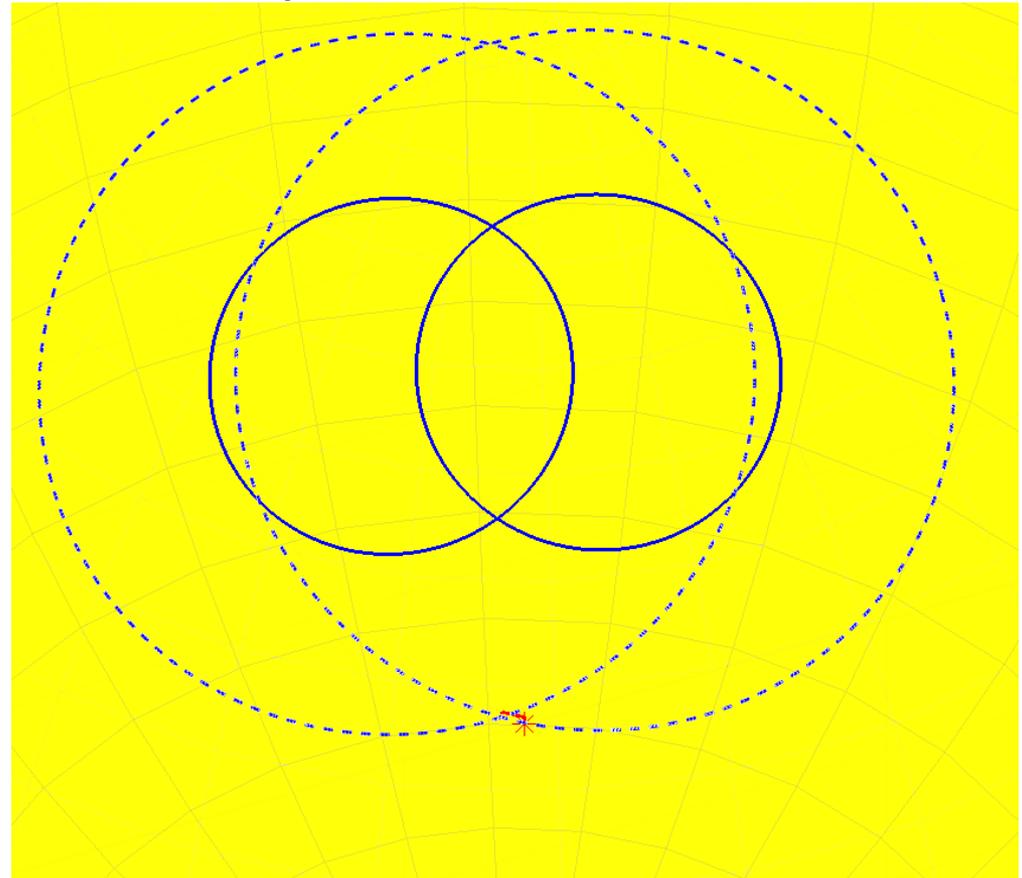
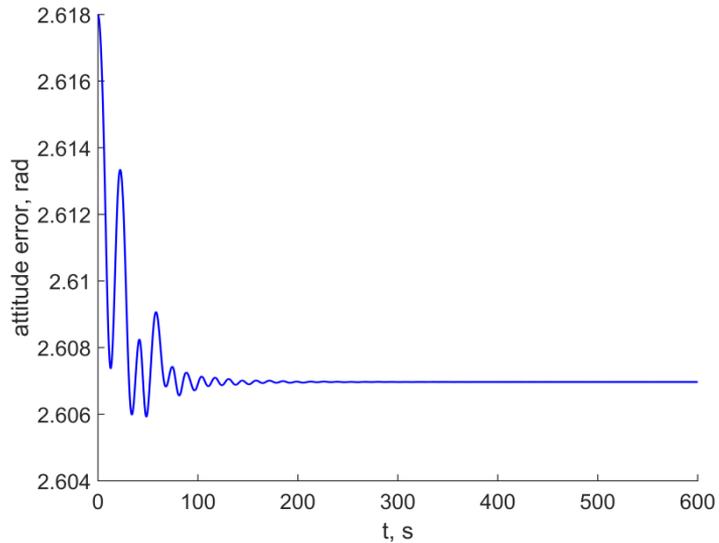
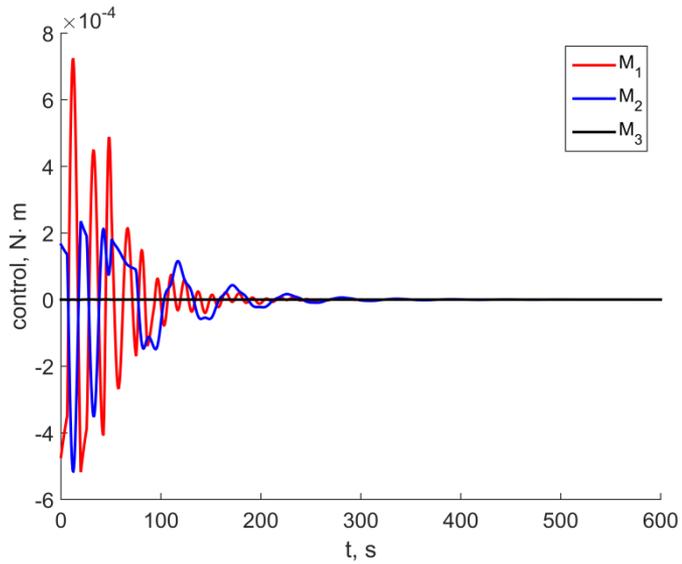
$$\mathbf{M}_{dist} = \text{sign}\left(\left(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n}_{ref} \times \mathbf{n}\right)\right) \mathbf{J} \frac{\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{n}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{n})}{\left|\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{n}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{n})\right|} g,$$

$$g = \begin{cases} G(2\mu^3 - 3\mu^2 + 1) & \mu \leq 1 \\ 0 & \mu > 1 \end{cases}, \quad \mu = \frac{\text{acos}(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{d}$$

Обход седловой точки



Случай нескольких конусов



При пересечении нескольких конусов возможно появление дополнительных асимптотически устойчивых положений равновесия

Обход асимптотически устойчивых положений равновесия

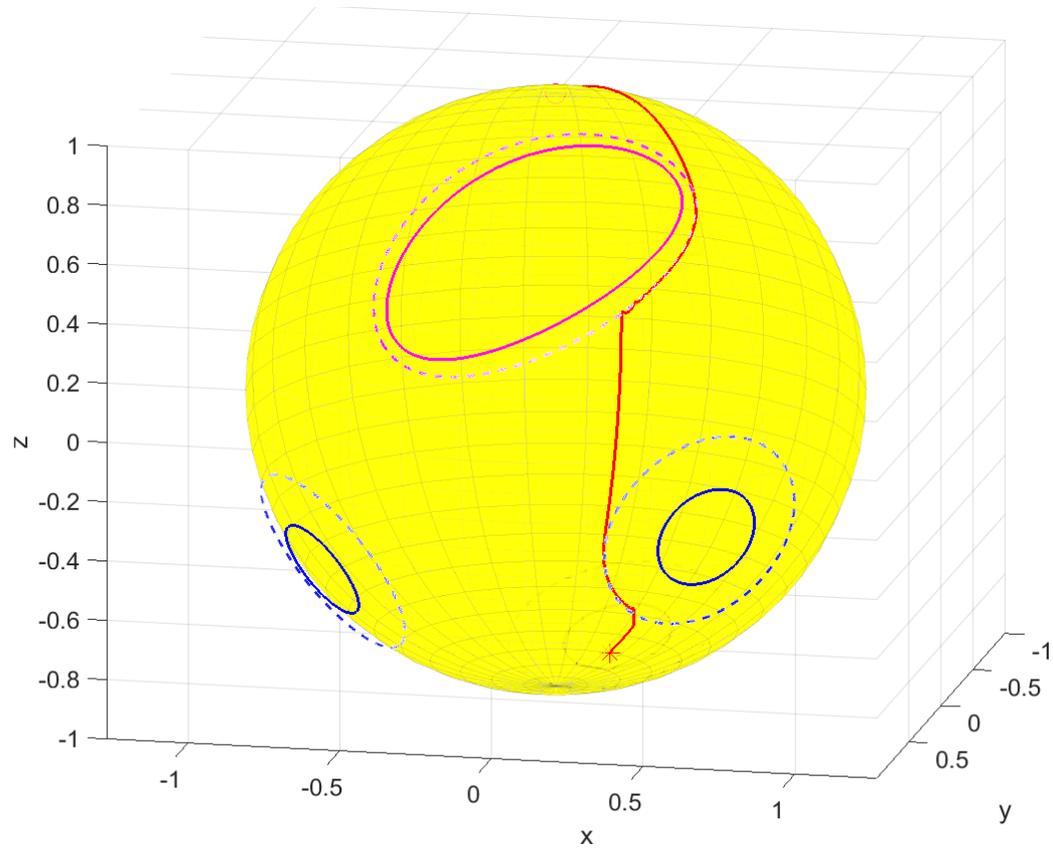
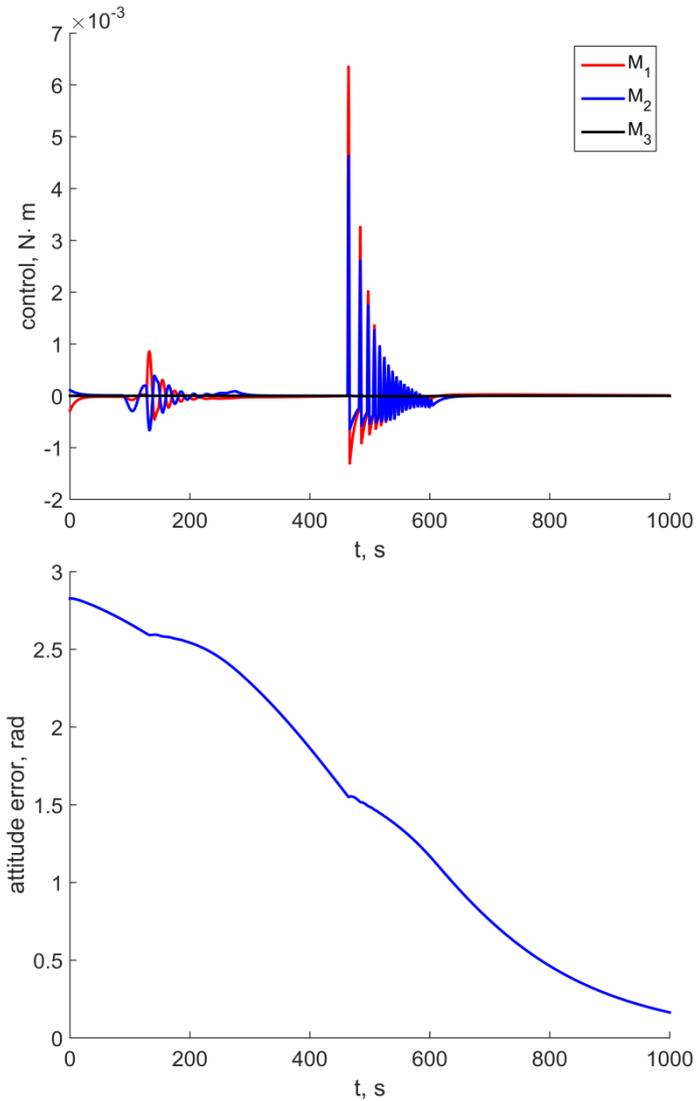
- Применение описанных выше методик возможно только в случае непересекающихся конусов
- В случае пересечения их необходимо «накрыть» другой фигурой
- Предлагается использовать «эллипсы»: это фигуры на сфере, равноудаленные от двух фокусов F_1, F_2 , то есть это геометрическое место точек, удовлетворяющих условию

$$|\mathbf{P}| = 1, \quad \text{acos}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_1) + \text{acos}(\mathbf{P}, \mathbf{F}_2) = L$$

- Управляющий момент

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl} = & -M_{ext} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - k_a [\mathbf{n}_{ref} \times \mathbf{n}] + \\ & + k_a \left(1 - (\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{n}) \right) \sum_{i=1}^n \frac{H_i (6\nu_i^2 - 6\nu_i)}{B_i - A_i} \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{F}_1^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_1^i)^2}} + \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{F}_2^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_2^i)^2}} \right) \\ & - k_a [\mathbf{n}_{ref} \times \mathbf{n}] (f - 1) \end{aligned}$$

Моделирование в общем случае



Заключение

- Предложен алгоритм управления ориентацией при наличии ограничений
- Рассмотрено несколько случаев, в которых «наивный» подход дает неудовлетворительные результаты
- Предложено несколько дополнительных модификаций алгоритма
- Вычисление управляющих моментов не требует больших вычислительных затрат
- Управление может использоваться «как есть», или же в качестве первого приближения для поиска оптимального разворота

Работа поддержана грантом РФФИ №17-71-20117