



Нелинейные алгоритмы управления ориентацией спутника с нежесткими элементами конструкции

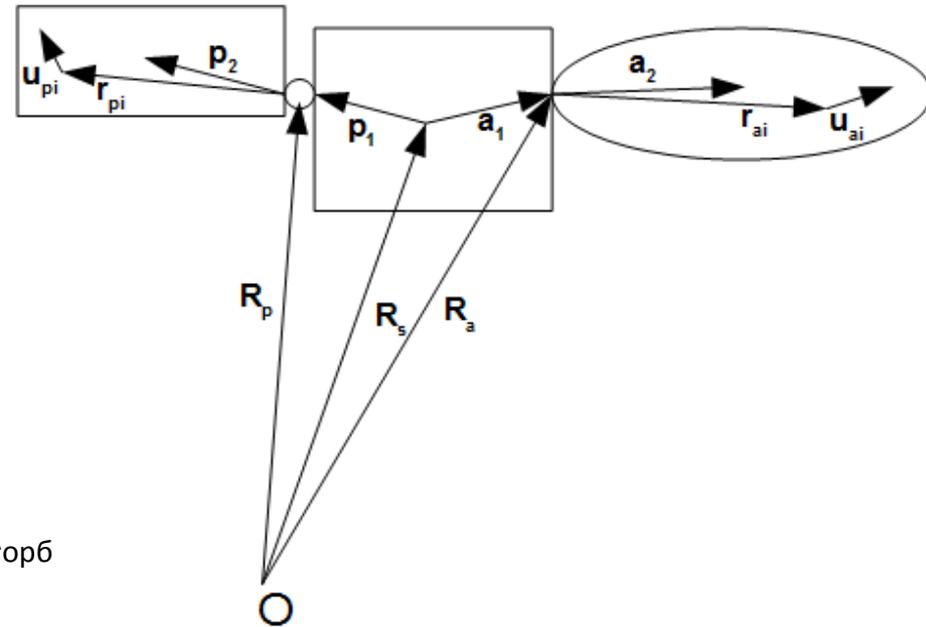
А.Б. Нуралиева, С.С. Ткачев, А.И. Шестоперов

Объект управления

Спутник:

- корпус, твердое тело
- панель, деформируемое тело с шарнирным закреплением
- антенна, деформируемое тело с консольным закреплением

Размеры спутника малы по сравнению с $R_{орб}$



$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{R}_i = 0$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) \mathbf{q}(t), \mathbf{A}_i(\mathbf{r}_i) - 3 \times n$$

Постановка задачи управления

Возможности управления

- на корпусе аппарата установлены маховики (макс. момент 0.4 Н)

Информация о векторе состояния

- известна информация об угловой скорости и ориентации корпуса
- известна информация о (*некоторых*) деформациях

Требуется

- стабилизировать корпус аппарата
- устранить (*не возбуждать*) колебания в нежестких элементах

Математическая модель

$$\delta R_s : \sum_i (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \sum_i (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0$$

$$\delta \theta : \sum_i \mathbf{r}_{si} \times (m_{si} \ddot{\mathbf{R}}_{si} - \mathbf{F}_{si}) + \sum_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) + \sum_i (\mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = 0,$$

$$\delta \psi_{a1} : \sum_i \mathbf{e}_{a1}^T (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) = M_{a1}$$

$$\delta \psi_{a2} : \sum_i \mathbf{e}_{a2}^T (\mathbf{r}_{ai} + \mathbf{u}_{ai}) \times (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai}) = M_{a2}$$

$$\delta \psi_{p1} : \sum_i \mathbf{e}_{p1}^T (\mathbf{r}_{pi} + \mathbf{u}_{pi}) \times (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi}) = M_{p1}$$

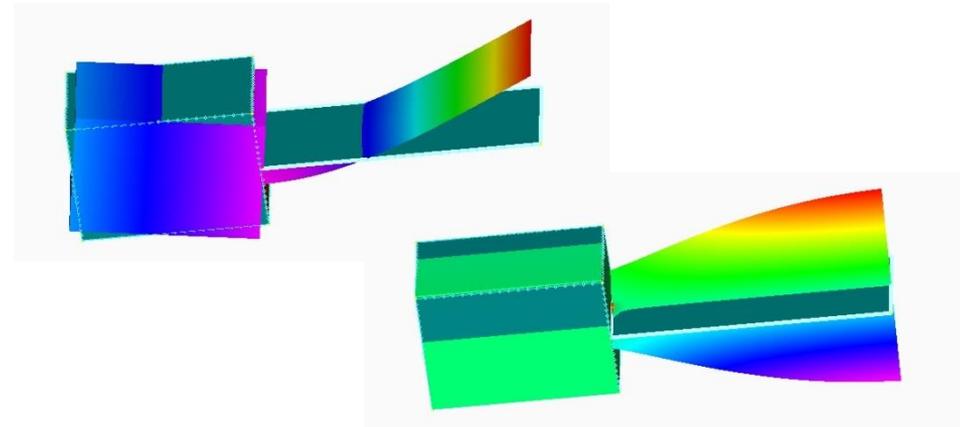
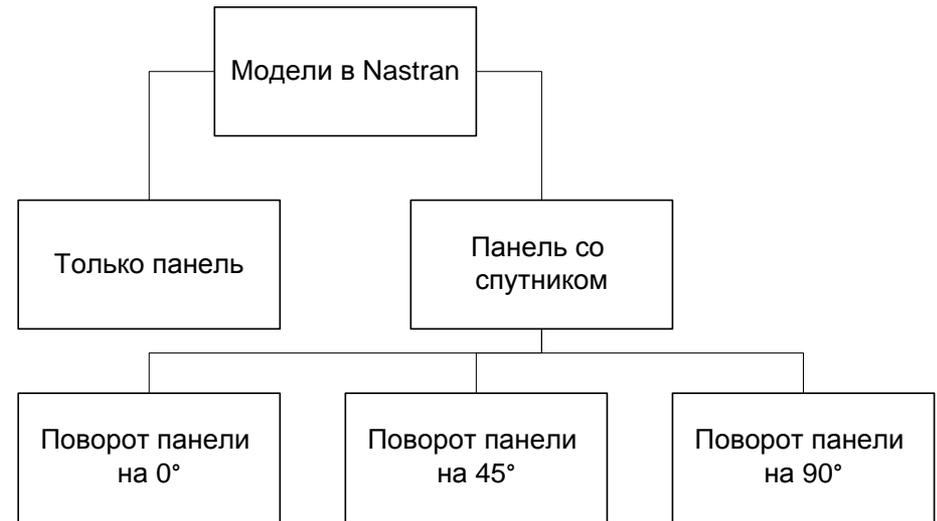
$$\delta \mathbf{q}_a : \sum_i \mathbf{A}_{ai}^T (m_{ai} \ddot{\mathbf{R}}_{ai} - \mathbf{F}_{ai} - \mathbf{L}_{ai}) = 0$$

$$\delta \mathbf{q}_p : \sum_i \mathbf{A}_{pi}^T (m_{pi} \ddot{\mathbf{R}}_{pi} - \mathbf{F}_{pi} - \mathbf{L}_{pi}) = 0$$

$$\mathbf{L}_i = -m_i \mathbf{A}_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}_p$$

$$\mathbf{S} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\psi}_{a1} \\ \dot{\psi}_{a2} \\ \dot{\psi}_{p1} \\ \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_s \boldsymbol{\omega} + \mathbf{T}_s - \mathbf{N}_{\omega a} - \mathbf{f}_{\omega a} - \mathbf{N}_{\omega p} - \mathbf{f}_{\omega p} \\ -\mathbf{e}_{a1}^T (\mathbf{N}_{\phi a} + \mathbf{f}_{\phi a}) + M_{a1} \\ -\mathbf{e}_{a2}^T (\mathbf{N}_{\phi a} + \mathbf{f}_{\phi a}) + M_{a2} \\ -\mathbf{e}_{p1}^T (\mathbf{N}_{\phi p} + \mathbf{f}_{\phi p}) + M_{p1} \\ -\mathbf{f}_a - \mathbf{N}_a \\ -\mathbf{f}_p - \mathbf{N}_p \end{pmatrix}$$

КЭМ



сетка для панели: 200x600

сетка для спутника: 20x20x20

17 сентября 2018

1 международная конференция
Проблемы механики и управления

5/22

Сравнение собственных частот

Мода	Панель	Спутник с панелью $\varphi = 0$		Спутник с панелью $\varphi = \pi/4$		Спутник с панелью $\varphi = \pi/2$	
		Nastran	Модель	Nastran	Модель	Nastran	Модель
1	5.2487	7.6310	7.6311	7.8223	7.8234	8.0301	8.0316
2	32.057	32.393	32.483	32.378	32.483	32.361	32.483
3	33.256	36.063	36.068	36.195	36.203	36.364	36.370
4	34.485	52.679	53.148	51.235	51.679	49.722	50.137
5	98.195	99.381	99.420	99.488	99.533	99.596	99.643
6	100.90	100.78	101.03	100.73	101.03	100.69	101.02
7	181.44	181.11	181.51	181.04	181.51	180.97	181.51
8	190.81	191.90	192.06	191.98	192.17	192.07	192.28
9	277.50	276.98	277.54	276.89	277.54	276.79	277.54
10	294.77	295.27	295.89	295.26	295.98	295.25	296.08

Расчет по модели в Matlab:

Расчет в среде Nastran для панели: 30 мин

Расчет вспомогательных величин: 5 мин

Расчет для одного положения панели: <1 сек

Общее время: около 35 мин

Расчет в Nastran:

Расчет для одного положения панели: 40 мин

Общее время: около 2 ч

Синтез управления

Проблемы:

- большая размерность модели (размерность фазового вектора намного больше числа независимых каналов управления)
- ограничение по максимальному управляющему моменту
- сложная математическая модель системы с большим числом параметров, которые известны с некоторой ошибкой

Источники оптимизма:

- число неустойчивых движений равно числу независимых каналов управления
- особенности форм колебаний

Надеемся, что отсутствуют моды колебаний, не вовлекающие в движение корпус аппарата. В противном случае система в целом ненаблюдаемая и неуправляемая (невосстанавливаемая)

Аналогия меньшей размерности

Нежесткий элемент может быть представлен, как система грузиков, соединенных пружинами

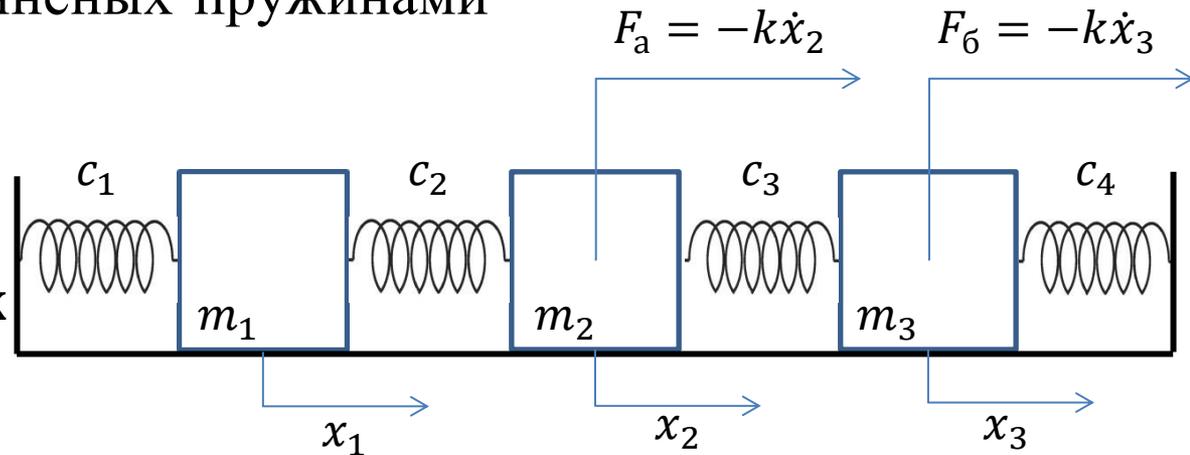
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = 0$$

Функция Ляпунова

$$V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} \leq 0.$$

$$\text{а) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix};$$



Адаптация модели

Предположения

– антенна закреплена жестко

– панель вращается с постоянной угловой скоростью (порядка орбитальной угловой скорости геостационарной орбиты)

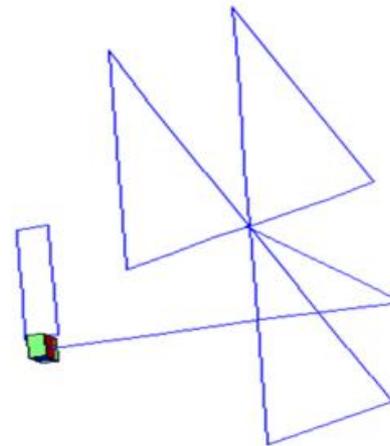
$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}_q \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \left(-\mathbf{N}_q - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} \right) + \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \right) \left(-\mathbf{N}_\omega + \mathbf{u} \right),$$

$$\dot{\mathbf{V}}_q = \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \left(-\mathbf{N}_q - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q} \right) - \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \left(-\mathbf{N}_\omega + \mathbf{u} \right),$$

$$\dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}),$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2}(\lambda_0 \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}),$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_q.$$



Ляпуновское управление

1. Строим управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_\omega - \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \right)^{-1} \times \\ \times \left(\mathbf{J} (k_\lambda \boldsymbol{\lambda} + k_\omega \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{S}_q \left(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q \right)^{-1} (\mathbf{N}_q + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}) \right), \quad k_\omega > 0.$$

2. Ищем функцию Ляпунова $V(x)$:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 + k_\lambda (1 - \lambda_0), \quad k_\lambda = \frac{k_\omega^2}{2} > 0, \quad \dot{V} = \left(\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2} k_\lambda \boldsymbol{\lambda} \right) \leq 0.$$

Величина управления слишком большая, не влияем на моды

Линейно-квадратичное управление

Линеаризация уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1}) \\ -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{V}_q \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

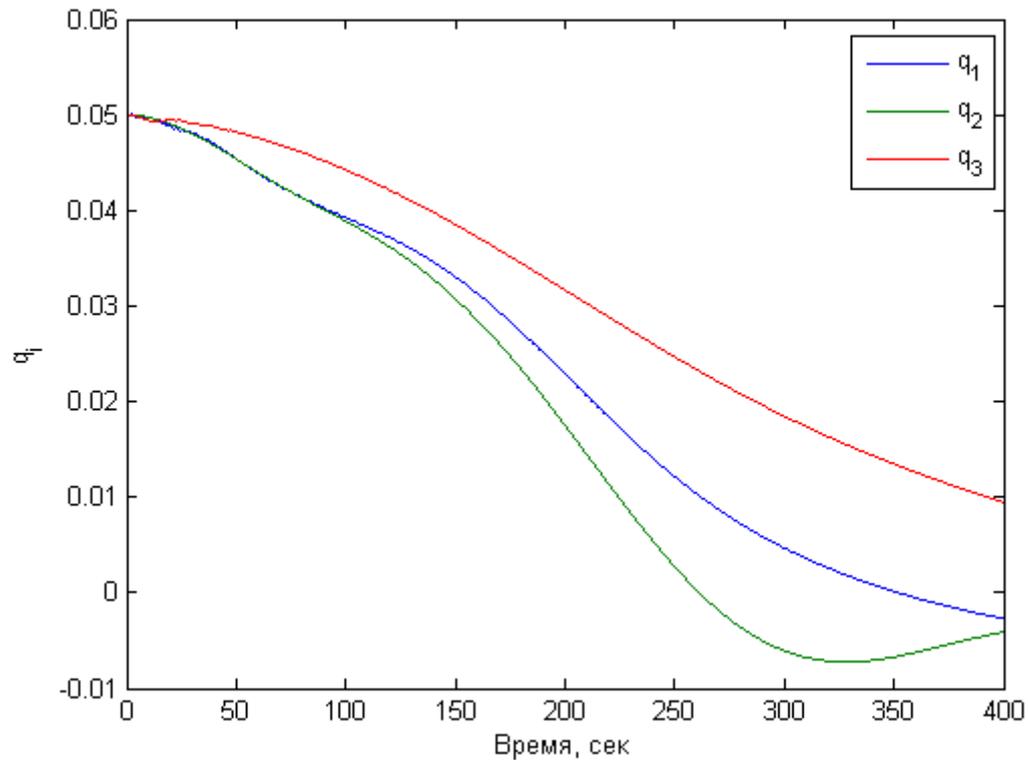
Закон управления

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

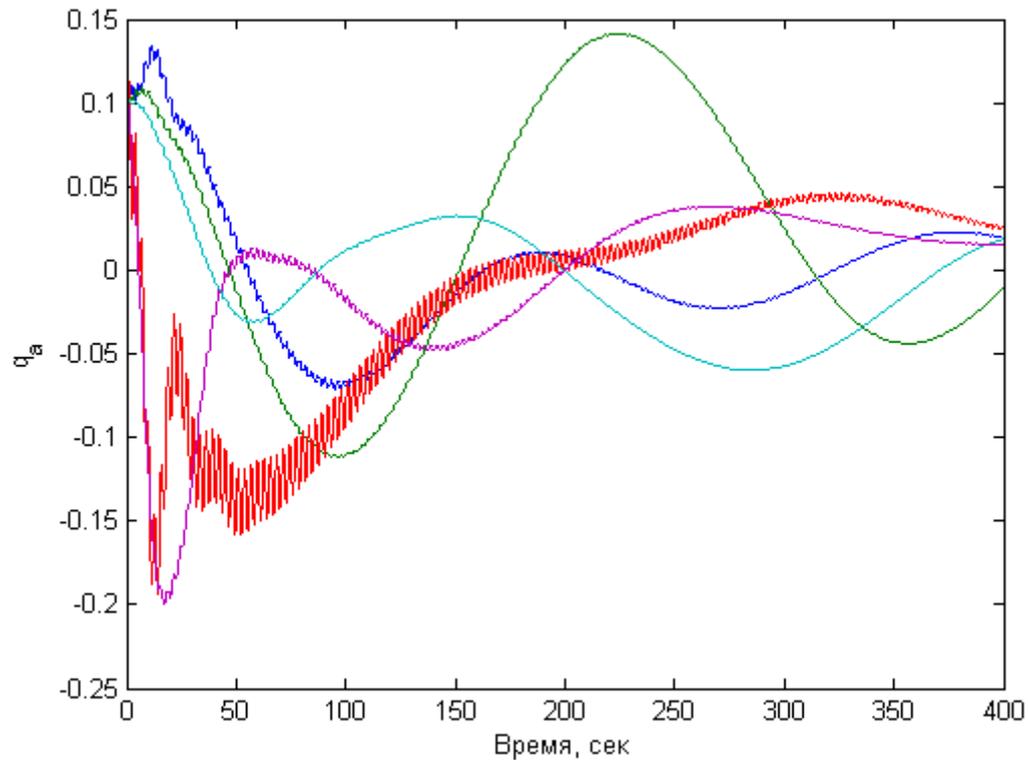
$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

Моделирование ЛКР

кватернион ориентации



Моделирование ЛКР колебания в антенне



Модификация ЛКР. Ограничение возмущений на старшие моды

Уравнения движения

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{A}_{\omega}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{\omega q}\mathbf{z} + \mathbf{B}_{\omega}\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_{qq}\mathbf{z} + \mathbf{B}_q\mathbf{u}.\end{aligned}\quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_q \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{y} + \mathbf{z}^T \mathbf{Q}_z \mathbf{z} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

Условие отсутствия влияния на старшие моды $\mathbf{z} = -\mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q \mathbf{u}$

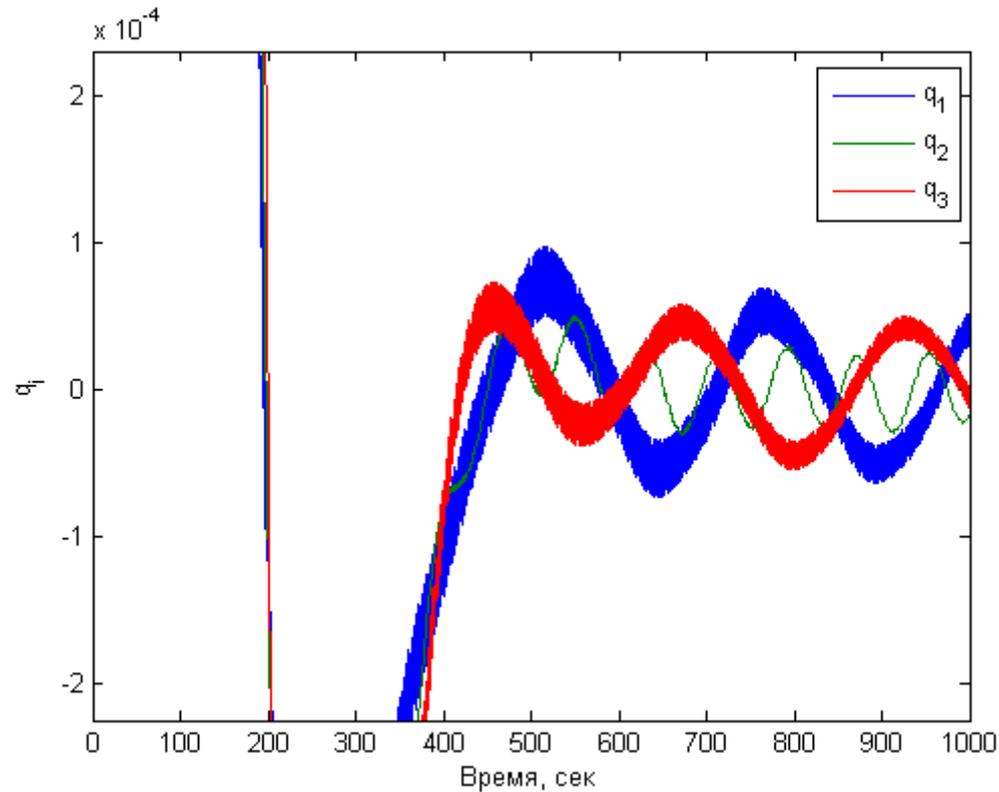
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{\omega}\mathbf{y} + (\mathbf{B}_{\omega} - \mathbf{A}_{\omega q} \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q) \mathbf{u} = \mathbf{A}_{\omega}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{y} + \mathbf{u}^T (\mathbf{R} + (\mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{Q}_z \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q) \mathbf{u}) dt$$

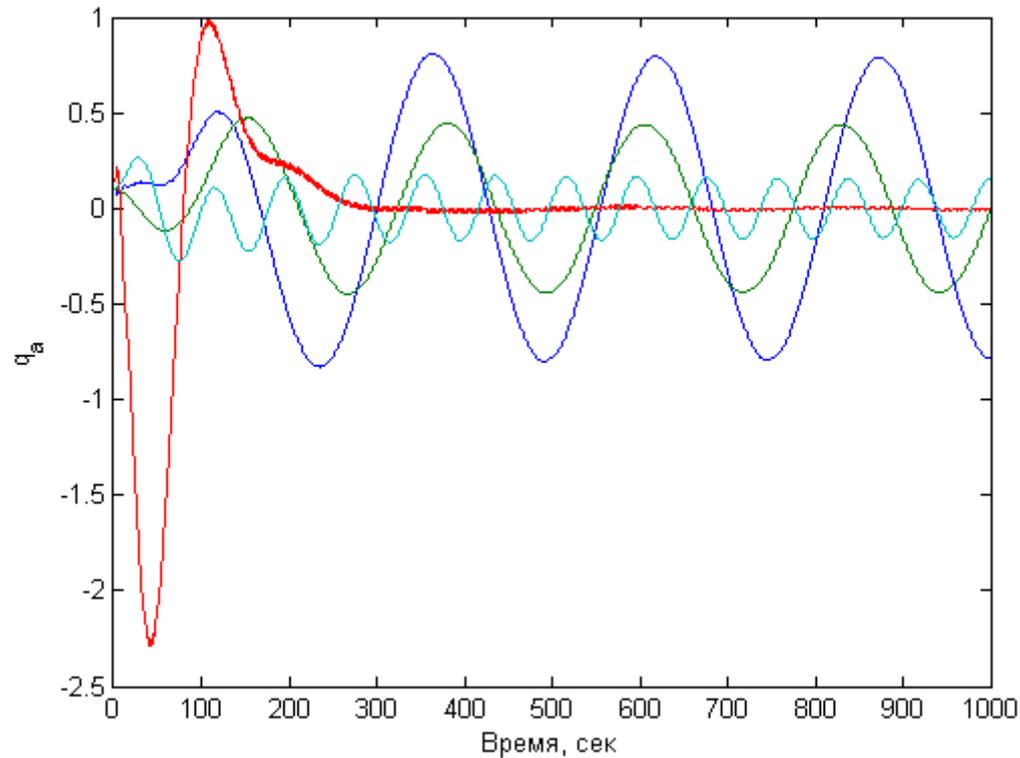
Управление

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{B}_x^T \mathbf{P} \mathbf{y} \quad \mathbf{R}_x = \mathbf{R} + (\mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q)^T \mathbf{Q}_z \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q \quad \mathbf{B}_x = \mathbf{B}_{\omega} - \mathbf{A}_{\omega q} \mathbf{A}_{qq}^{-1} \mathbf{B}_q$$

Моделирование модифицированного ЛКР кватернион ориентации

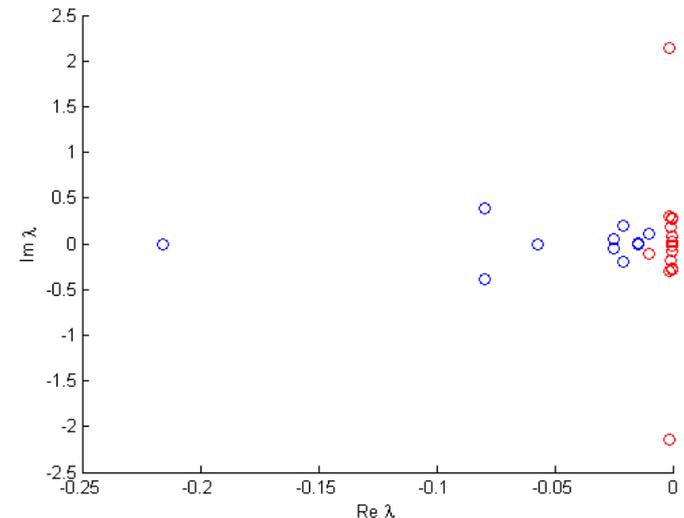


Моделирование модифицированного ЛКР колебания в антенне



Эффективность мод. ЛКР

- Степень устойчивости очень мала
- Моделирование показывает быстрое затухание скорости
- Подпространство собственных векторов с быстрым затуханием определяет практически всю величину угловой скорости



SDRE – расширение ЛКР на нелинейный случай движения

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_\omega \mathbf{y} + \mathbf{A}_{\omega q} \mathbf{z} + \mathbf{B}_\omega \mathbf{u},$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{qq} \mathbf{z} + \mathbf{B}_q \mathbf{u}.$$

$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$ – вектор управляемых состояний, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_q \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ – вектор остаточных состояний,

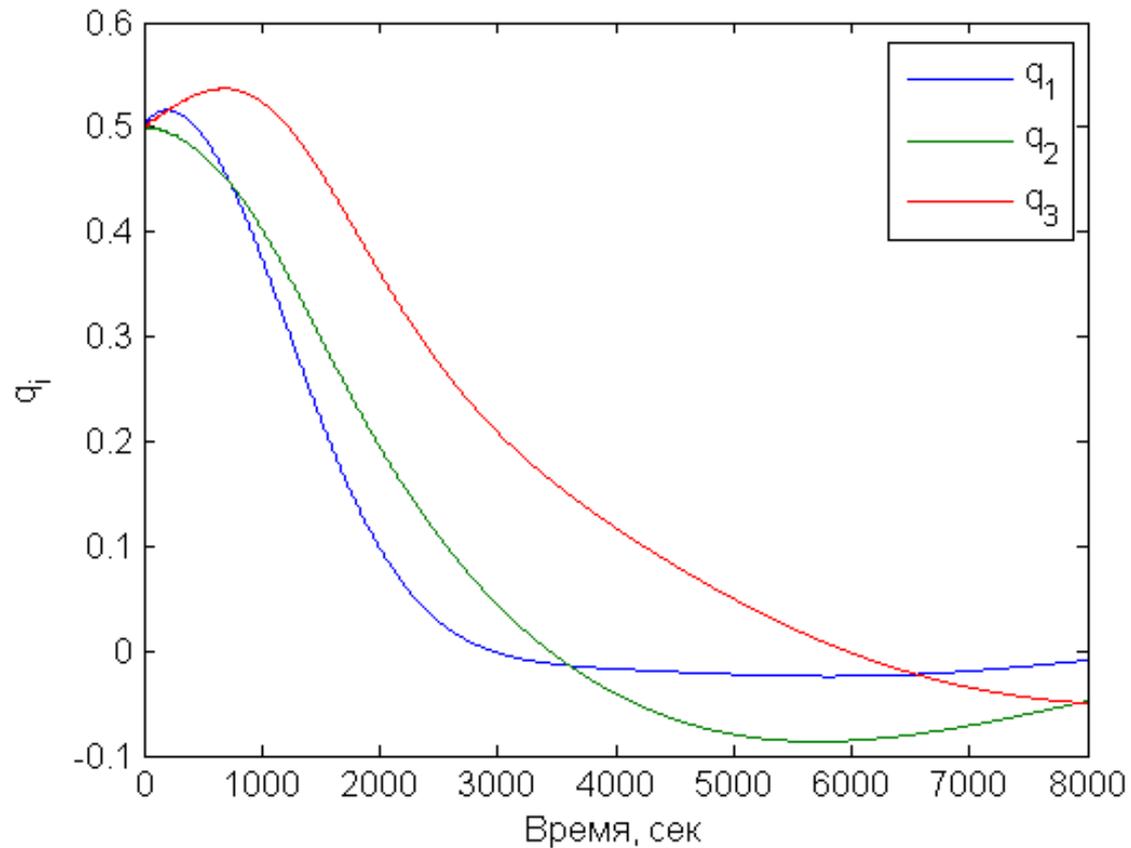
$$\mathbf{A}_\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} + \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \text{ где } \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\omega q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times n} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{qq} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{E}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\omega = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{E}_{3 \times 3} + \mathbf{S}_q (\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \right) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_q = \begin{pmatrix} -(\mathbf{M} - \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}_q)^{-1} \mathbf{S}_q^T \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{n \times 3} \end{pmatrix}$$

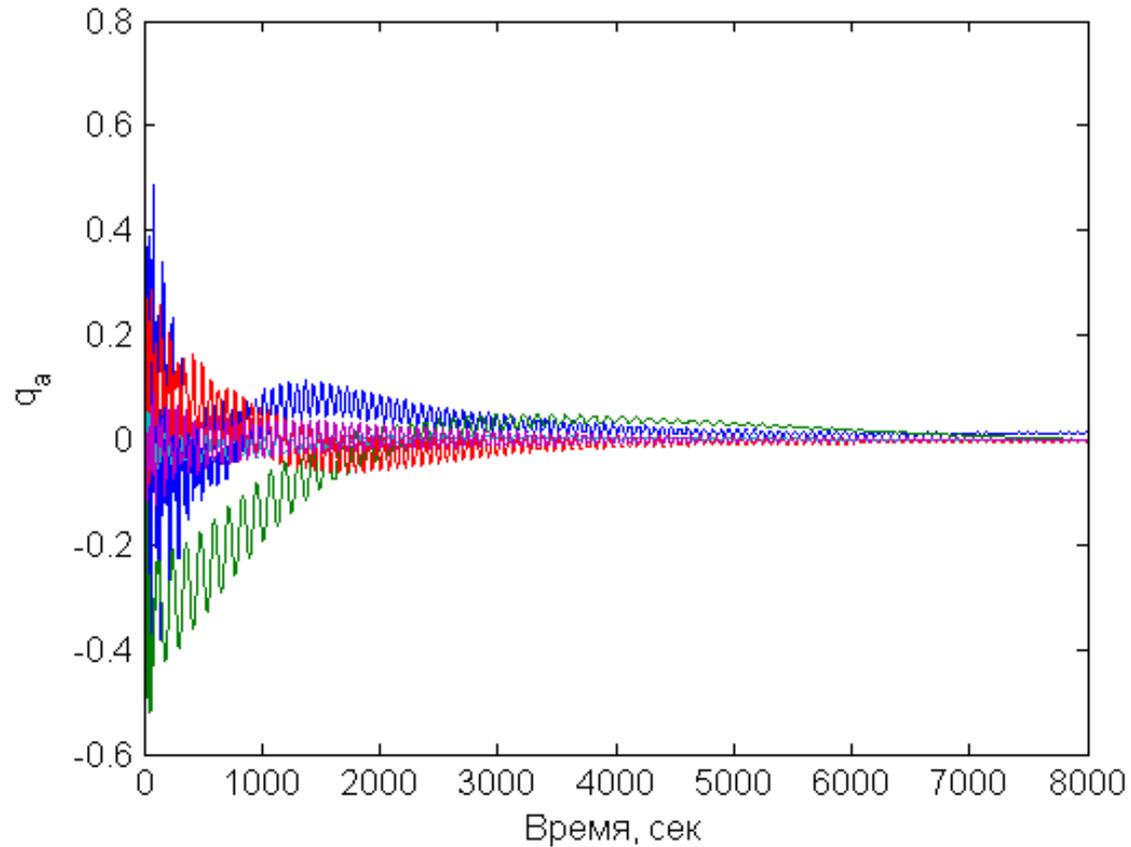
Моделирование SDRE

кватернион ориентации

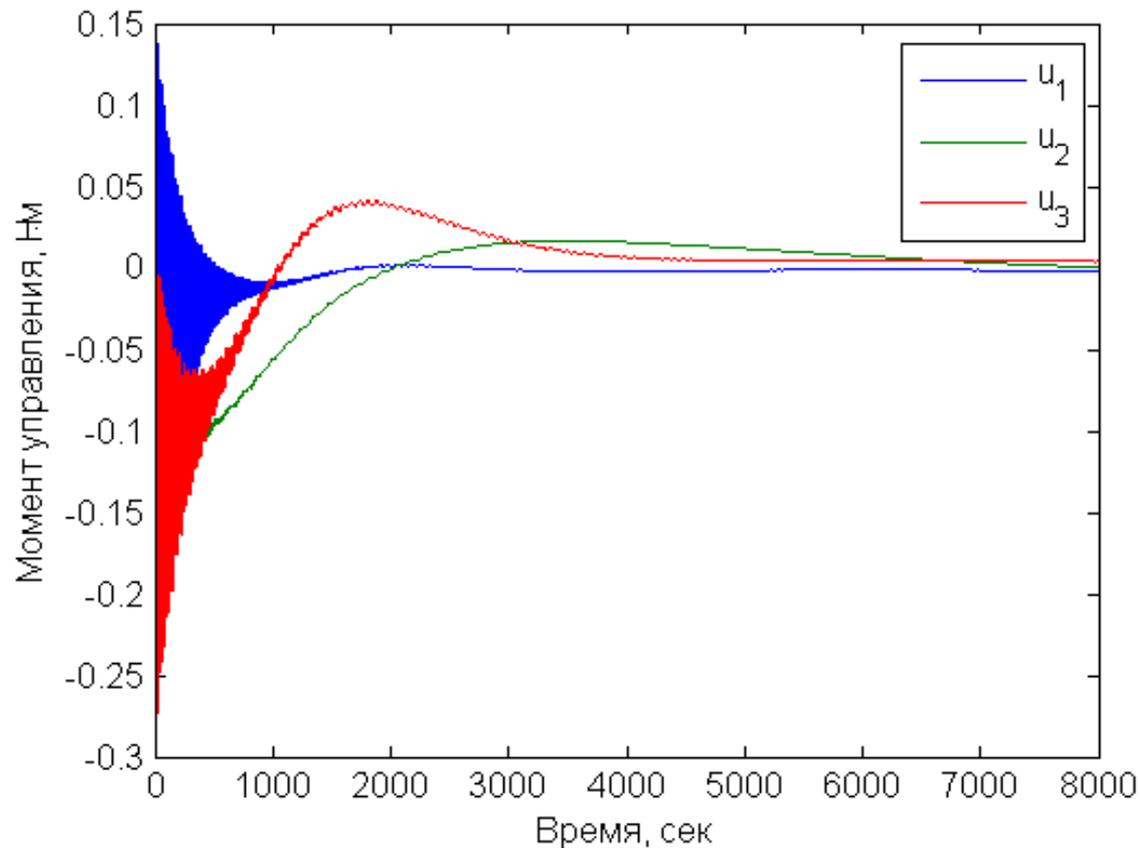


Моделирование SDRE

колебания в антенне



Моделирование SDRE управляющий момент маховиков



Выводы

- Ляпуновское управление (ПД-регулятор) не подходит
- ЛКР не подходит
 - Работает только в линейном случае
 - Нужны и формы колебаний, и амплитуды
- Модифицированный ЛКР более-менее подходит
 - Работает только в линейном случае
 - Хорошо справляется при знании основных форм
 - Может работать без знания форм с меньшей точностью
- SDRE
 - По скорости и колебаниям линейный
 - Те же соображения, что и для мод. ЛКР
 - Скорость переходных процессов зависит от старшей моды – эмпирически

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-01-006347