59-я научная конференция МФТИ
27 ноября 2016 года

Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе

Динамика и управление движением космических аппаратов

Об одном способе разгона космического аппарата до параболической скорости

А.С. Охитина, студентка 4 курса ФУПМ

Научный руководитель: С.А. Мирер, д.ф.-м.н. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- постановка задачи
- уравнение движения
- численное решение
- приближенный метод
- сравнение результатов
- заключение

Постановка задачи

Q – притягивающий центр (Земля)
$\boldsymbol{a}$ – ускорение, сообщаемое касательной силой тяги
$\boldsymbol{r}_0$ – радиус начальной круговой орбиты

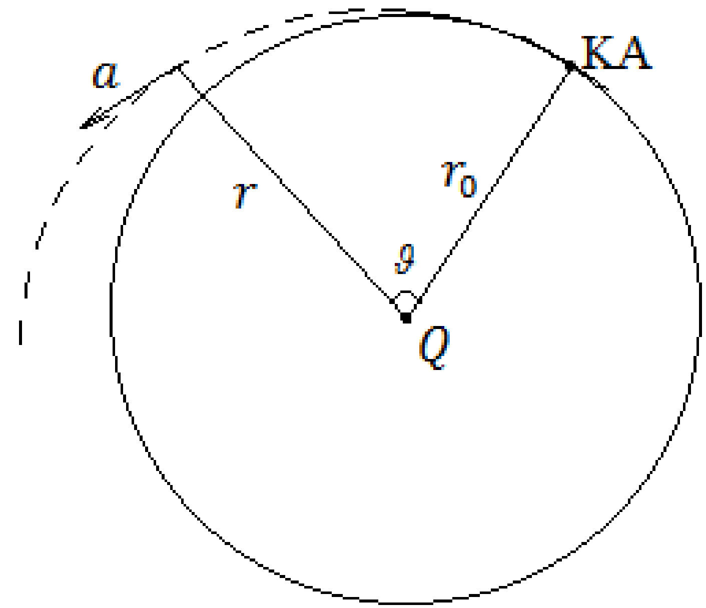


Рис. 1

В момент достижения параболической скорости <u>определить:</u>

1) путь S,
2) расстояние r от притягивающего центра до КА,
3) время нахождения в пути,
4) запас характеристической скорости,
5) сравнить результаты с приближенным методом Бэттина

Выбор системы координат

1) Инерциальная декартова система координат Qxyz с началом Q в притягивающем центре;
   ось Qz дополняет до правой тройки

2) Неинерциальная система координат $O\xi\eta\zeta$:
   $\boldsymbol{i}_\tau$ – единичный орт вдоль касательной,
   $\boldsymbol{i}_n$ – единичный орт вдоль нормали;
   ось $O\zeta$ дополняет до правой тройки

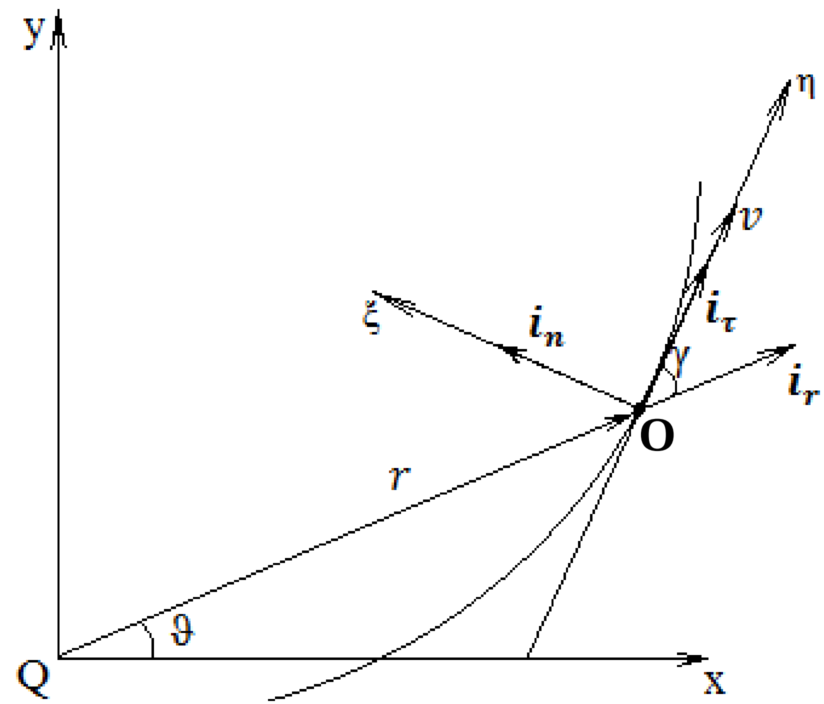


Рис.2

Скорость и ускорение КА

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}\boldsymbol{i}_\tau = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{i}_\tau$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{i}_\tau\right) = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\boldsymbol{i}_\tau + \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}\boldsymbol{i}_\mathrm{n}$$

Понятия кривизны и радиуса кривизны

Пусть Г – плоская гладкая кривая

$$\left|AB\right| = \left|\Delta s\right|,$$

тогда

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\left|\Delta s\right|}$$ – кривизна кривой Г

$$\rho = \frac{1}{K}$$ – радиус кривизны кривой Г

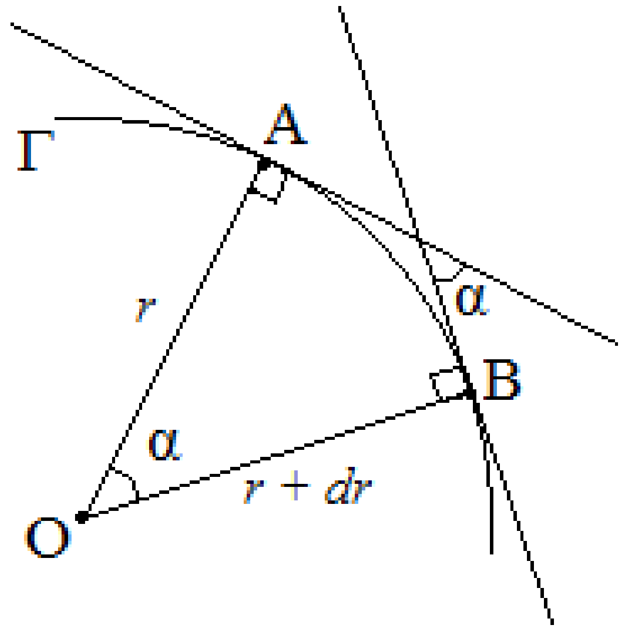


Рис.3

Уравнения движения

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=a\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{\tau}}}$$

μ – гравитационный параметр Земли

В проекциях на тангенциальное и нормальное направления:

$$\frac{dv}{dt}=a-\frac{\mu}{r^2}\cos\gamma,$$

$$\frac{v^2}{\rho}=\frac{\mu}{r^2}\sin\gamma,$$

где $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{r}\left(1-\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{ds^2}\right)\left(1-\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

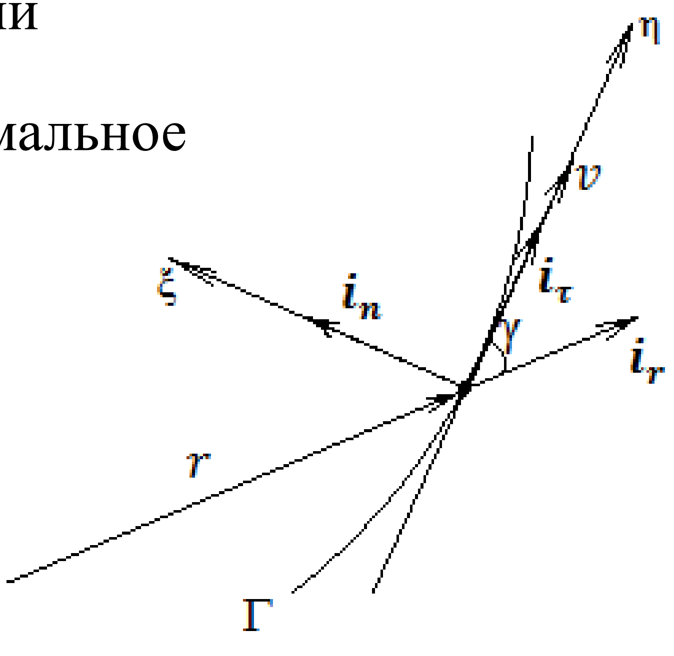
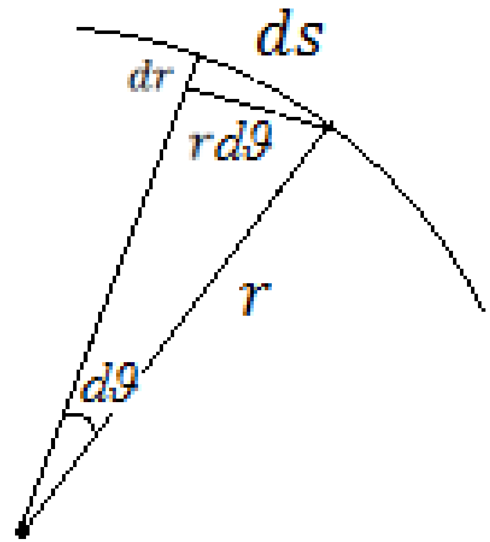


Рис.4

Уравнения движения

С помощью соотношения

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r\,d\vartheta)^2$$



можно получить, что

$$\frac{dr}{ds} = \cos\gamma,$$

$$r\frac{d\vartheta}{ds} = \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \left[1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Рис.5

Тогда проекция уравнение движения на нормаль преобразуется к виду:

$$v^2 r\frac{d^2r}{ds^2} + \left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 1\right] = 0$$

Уравнения движения

Теперь, так как

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\left(v^2\right)}{ds} = a - \frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{ds},$$

тогда проекция уравнение движения на тангенциальное направление:

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(v^2\right)}{ds} + \frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{ds} = a$$

Проинтегрируем это уравнение при условии, что a = const:

$$\int_{v_0}^{v} d\left(v^2\right) + 2\mu\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = 2a\int_{0}^{s} ds,$$

где $v_0 = v_{кр} = \sqrt{\mu/r_0}$ скорость на начальной круговой орбите

Таким образом, $\boxed{v^2 = 2as + \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$

При достижении значения $v = \sqrt{2\mu/r}$ (параболическая скорость) получаем

$$\boxed{S_{esc} = \frac{\mu}{2ar_0}}$$

Уравнения движения

Итак, на данном этапе можем переписать уравнение движения следующим образом

$$\begin{cases} v^2 r\dfrac{d^2r}{ds^2} + \left(v^2 - \dfrac{\mu}{r}\right)\left[\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2 - 1\right] = 0 \\ v^2 = 2as + \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = y \\ \dfrac{dy}{ds} = \left(\dfrac{1-y^2}{r}\right)\dfrac{2as + \mu\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}{2as + \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)} \end{cases}$$

Уравнения движения

Так как $v = ds/dt$, то отсюда можно получить, что

$$\frac{dt}{ds} = v^{-1} = \left[2as + \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Найдем также зависимость угла истинной аномалии ϑ от длины дуги s

$$1 = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2,$$

таким образом $\quad \dfrac{d\vartheta}{ds} = \dfrac{1}{r}\sqrt{1 - \left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2} = \dfrac{1}{r}\sqrt{1 - y^2}$

Уравнения движения

Итак, получена система дифференциальных уравнений 1-ого порядка:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dr}{ds} = y \\[2ex]
\dfrac{dy}{ds} = \left(\dfrac{1-y^2}{r}\right)\left[2as + \mu\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)\right] \Bigg/ \left[2as + \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)\right] \\[2ex]
\dfrac{dt}{ds} = \left[2as + \mu\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)\right]^{-1/2} \\[2ex]
\dfrac{d\vartheta}{ds} = \dfrac{1}{r}\sqrt{1-y^2}
\end{cases}
$$

Численное решение

<u>Начальные данные</u>

$t(0) = t_0 = 0$ – начальный момент времени

$r(0) = r_0 = 7 \cdot 10^6$ м – радиус орбиты в начальный момент времени

$y(0) = 0$ – так как в начальный момент КА находится на круговой орбите

$\vartheta(0) = 0$ – отсчитываем угол истинной аномалии от начального положения r(0)

$S_{esc} = \dfrac{\mu}{2 a r_0}$ – пройденный путь до момента достижения параболической скорости

Численное решение

Траектория космического аппарата (КА) при $a = 0{,}005 \text{м}/\text{с}^2$

Количество витков:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{esc}} = \frac{\vartheta_{\mathrm{esc}}}{2\pi} \simeq 64{,}8$$

где $\vartheta_{\mathrm{esc}} \simeq 407{,}5\,\text{рад}$

Продолжительность разгона:

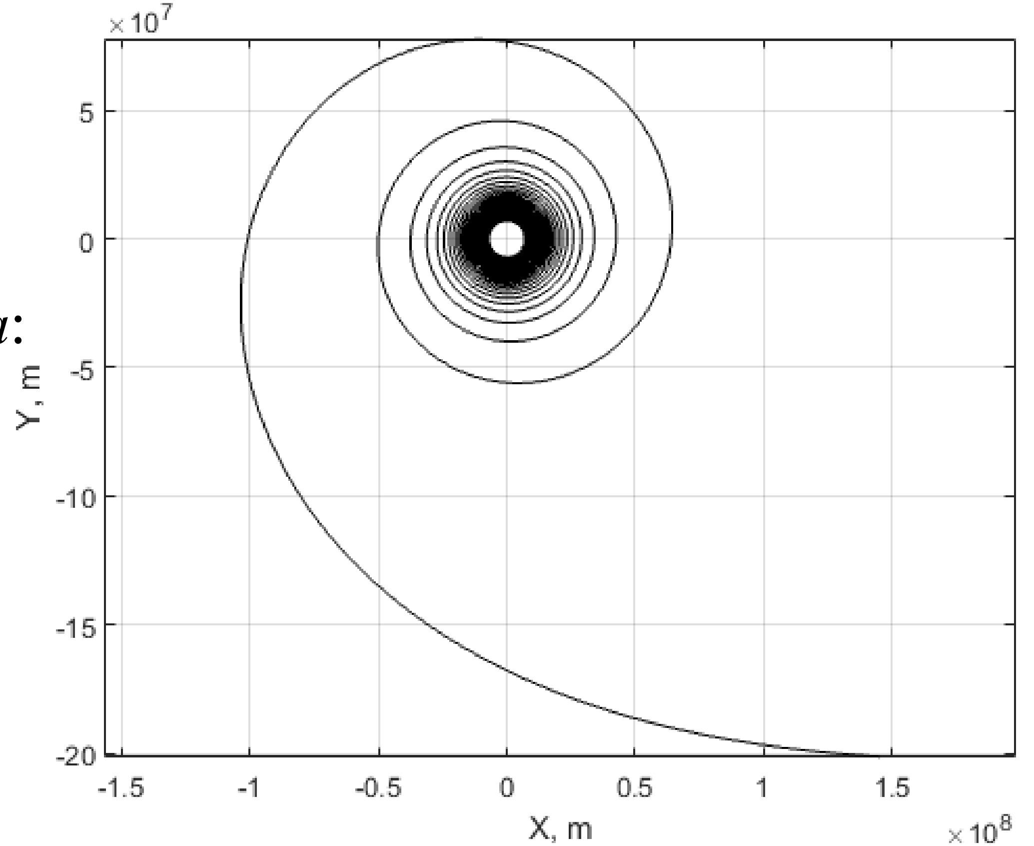
$$\mathrm{t} \simeq 15{,}6\,\text{дней}$$

Пройденный путь:

$$\mathrm{S} \simeq 5{,}9 \cdot 10^6 \text{ км}$$

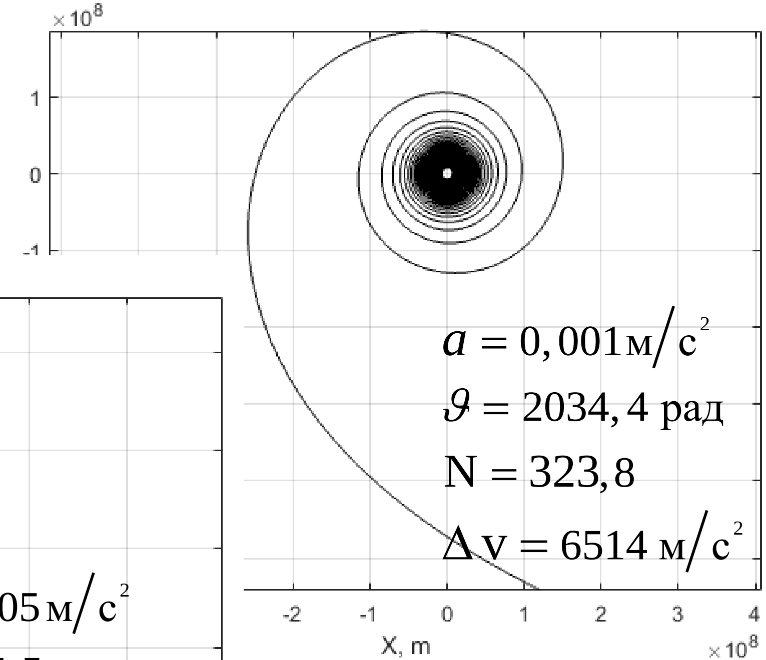
Запас характеристической скорости:

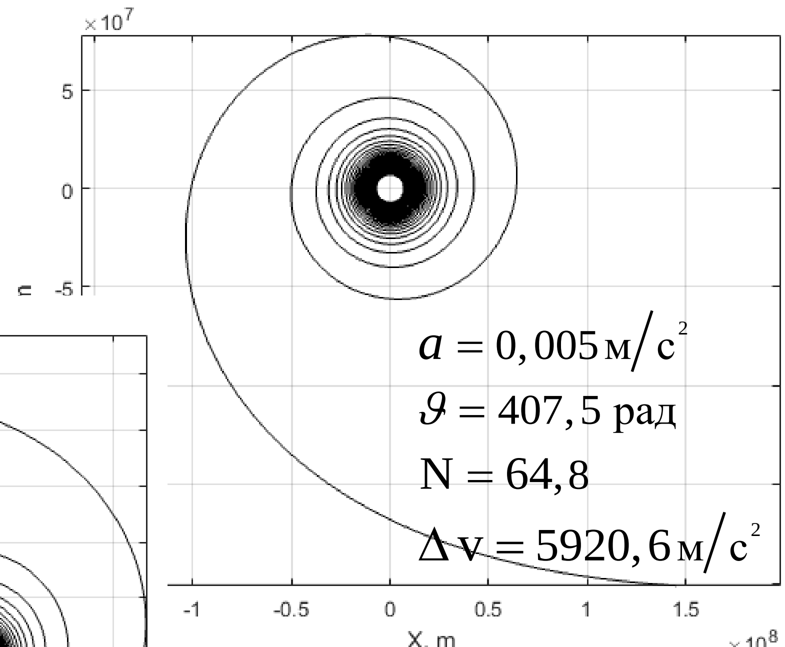
$$\Delta \mathrm{v} = \left|\mathrm{v} - \mathrm{v}_0\right| \simeq 5920{,}6 \text{ м/с}^2$$

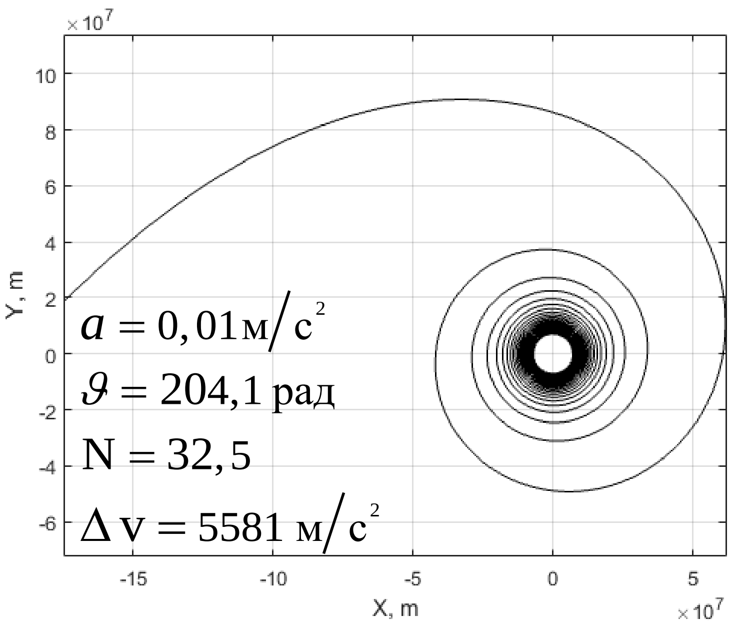


Численное решение

Сравнение траектории КА
при различный ускорениях

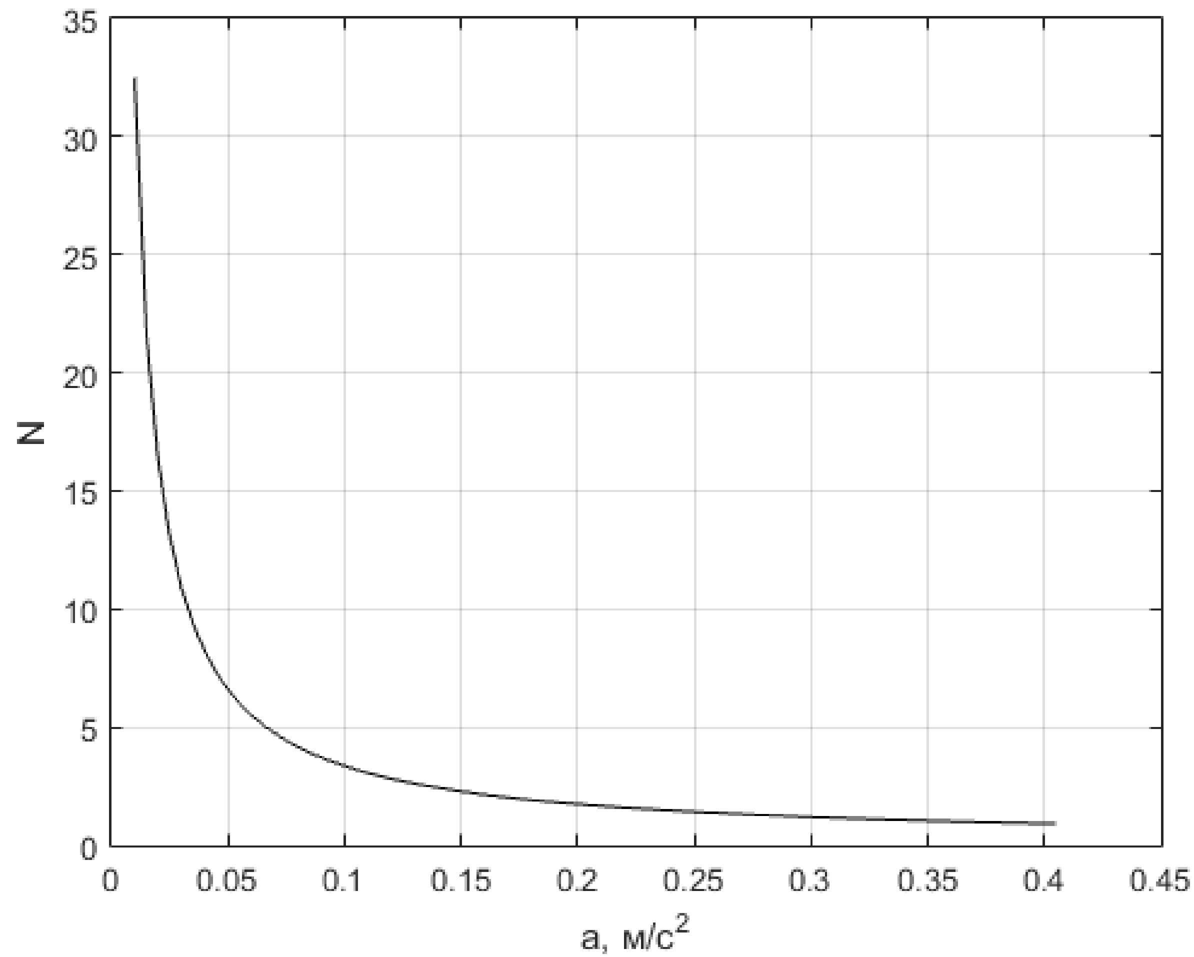






Численное решение

Зависимость числа витков от величины ускорения N(*a*)



Приближенный метод Бэттина*

Несколько упрощающих предположений:

1) если ускорение достаточно мало, так что $\frac{d^2r}{ds^2} = 0$, тогда уравнение движения

$$v^2 r \frac{d^2r}{ds^2} + \left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 1\right] = 0$$

перепишется в виде

$$v^2 - \frac{\mu}{r} = 0,$$

то есть считаем, что <u>орбита всегда близка к круговой</u>.

Отсюда $r = \dfrac{r_0}{1 - \dfrac{2Sa}{{v_0}^2}}$.

* *Battin Richard H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Inc. Publ.,1999.

Приближенный метод Бэттина

2) <u>КА достигает параболическую скорость</u>

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

Тогда уравнение движения принимает следующий вид:

$$2r\frac{d^2r}{ds^2} = 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

Подставим выражение для радиус-вектора r и выразим S:

$$S_{esc} = \frac{{v_0}^2}{2a}\left[1 - \frac{1}{v_0}\left(20a^2{r_0}^2\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

:

Приближенный метод Бэттина

Выражение для конечного радиус-вектора с учетом S_{esc}:

$$r_{esc} = \frac{r_0 v_0}{\left(20a^2 r_0^{\ 2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Время, за которое КА достигнет параболическую скорость:

$$v = \frac{ds}{dt}\text{, тогда } t_{esc} - t_0 = \frac{1}{v}\left(s_{esc} - s_0\right) = \frac{v_0}{a}\left[1 - \left(\frac{20a^2 r_0^{\ 2}}{v_0^{\ 4}}\right)^{\frac{1}{8}}\right]$$

При этом число витков, сделанных космическим аппаратом, задается формулой:

$$N_{esc} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_{esc}} \frac{ds}{r} = \frac{v_0^{\ 2}}{8\pi a r_0}\left(1 - \frac{\sqrt{20} a r_0}{v_0^{\ 2}}\right)$$

Приближенный метод Бэттина

Итак, получены выражения для приближенного определения искомых параметров:

$$r_{esc} = \frac{r_0 v_0}{\left(20a^2 r_0^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$S_{esc} = \frac{v_0^2}{2a}\left[1 - \frac{1}{v_0}\left(20a^2 r_0^2\right)^{1/4}\right]$$

$$N_{esc} = \frac{v_0^2}{8\pi a r_0}\left(1 - \frac{\sqrt{20}a r_0}{v_0^2}\right)$$

$$t_{esc} = t_0 + \frac{v_0}{a}\left[1 - \left(\frac{20a^2 r_0^2}{v_0^4}\right)^{1/8}\right]$$

Сравнение численного метода с формулами Бэттина

Сравнение выражений для пройденного пути S_{esc} :

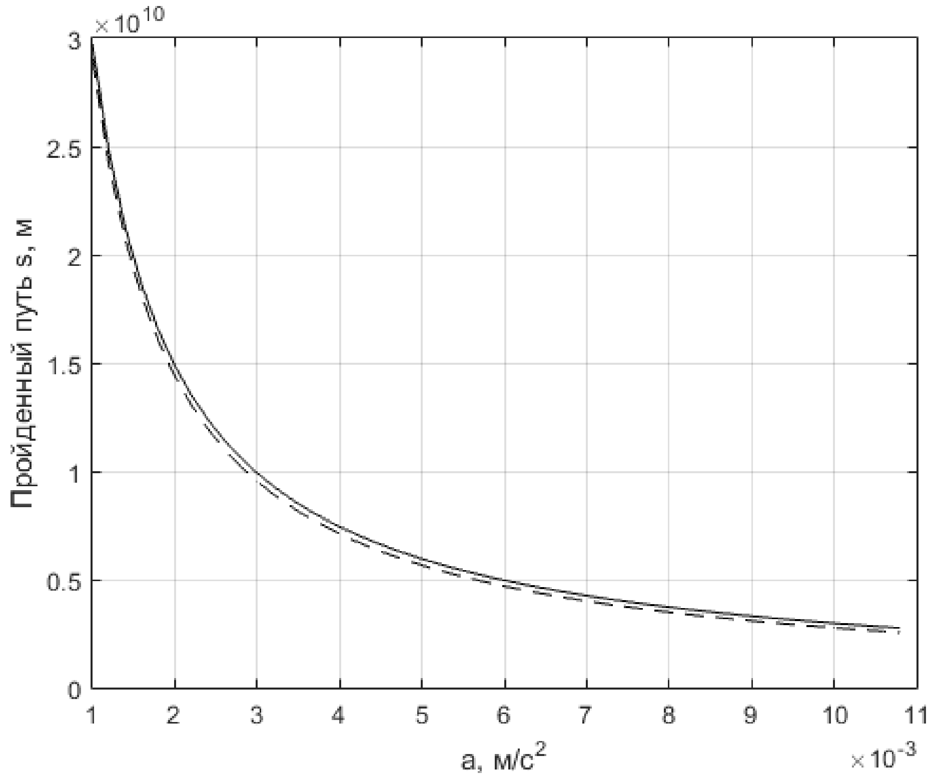
$$S_{esc(числ)} = \frac{\mu}{2a r_0} = \frac{v_0^2}{2a},$$

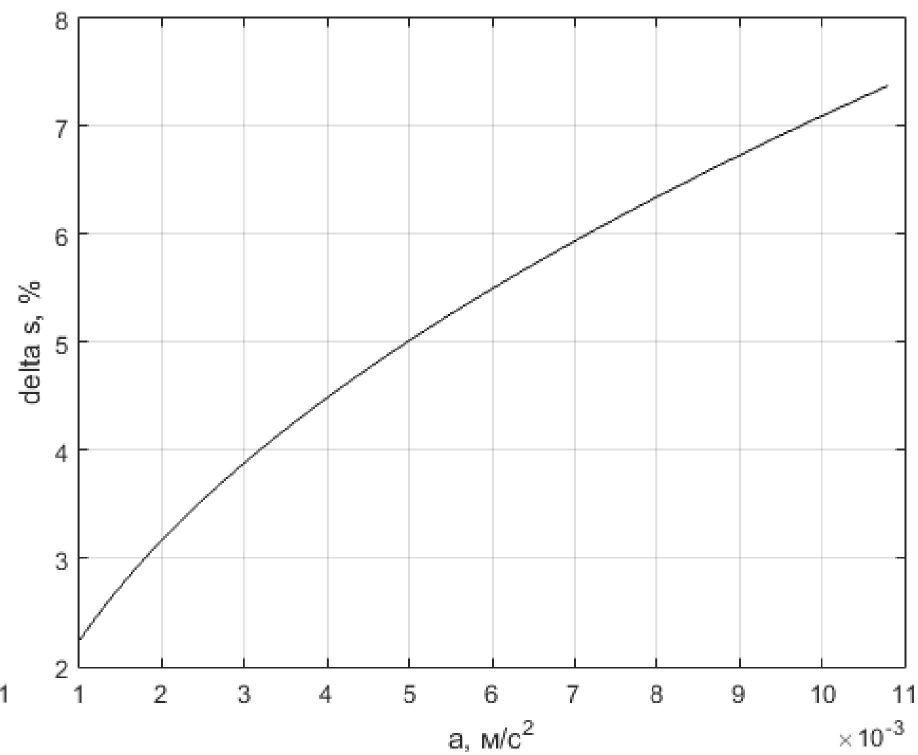
$$S_{esc(прибл)} = \frac{v_0^2}{2a}\left[1 - \frac{1}{v_0}\left(20a^2 r_0^2\right)^{1/4}\right],$$

$$\frac{\Delta S}{S_{esc(числ)}} = \frac{S_{esc(числ)} - S_{esc(прибл)}}{S_{esc(числ)}} = \frac{a^{1/2}}{v_0}\left(20 r_0^2\right)^{1/4}$$

Сравнение численного метода с формулами Бэттина

Пройденный путь в момент достижения параболической скорости и относительная погрешность

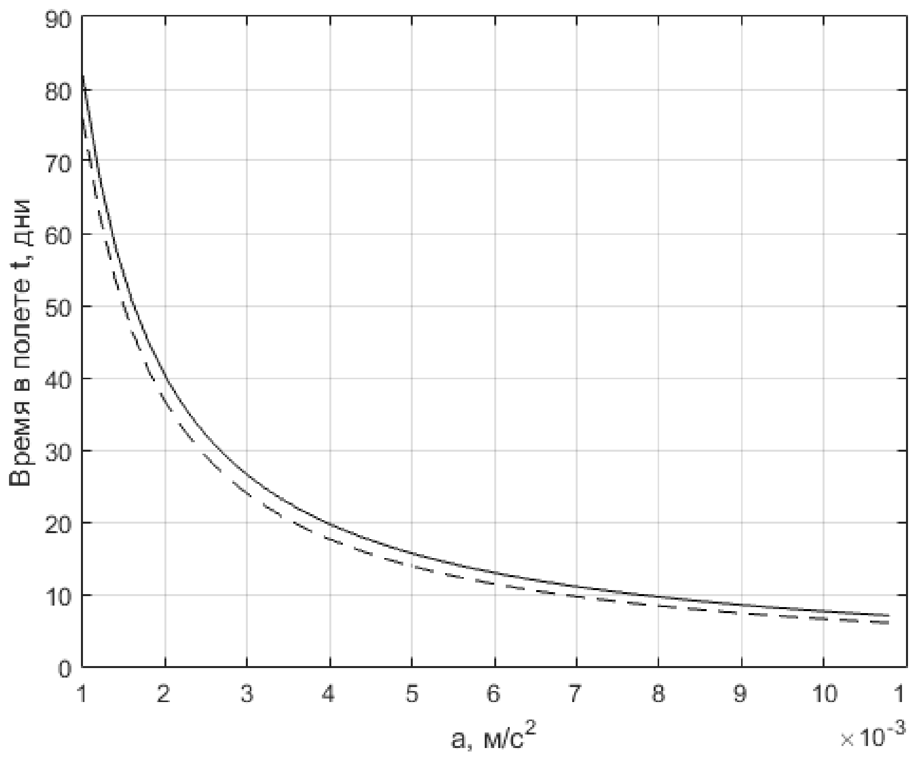


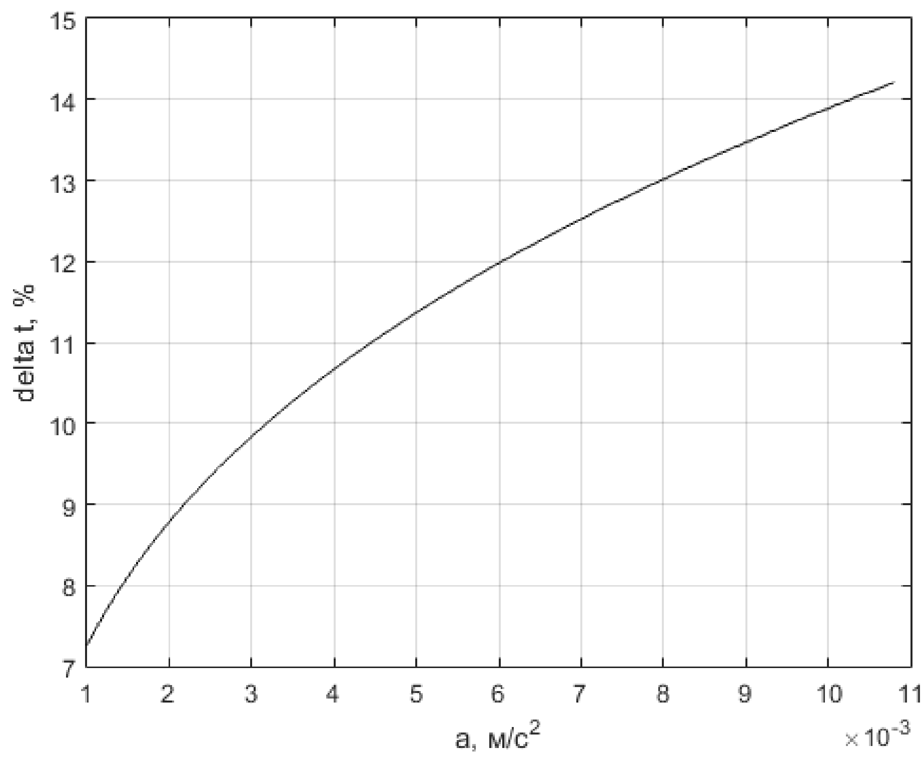


сплошная линия – численный метод
пунктирная линия – приближенный метод

Сравнение численного метода с формулами Бэттина

Продолжительность разгона до параболической скорости и относительная погрешность

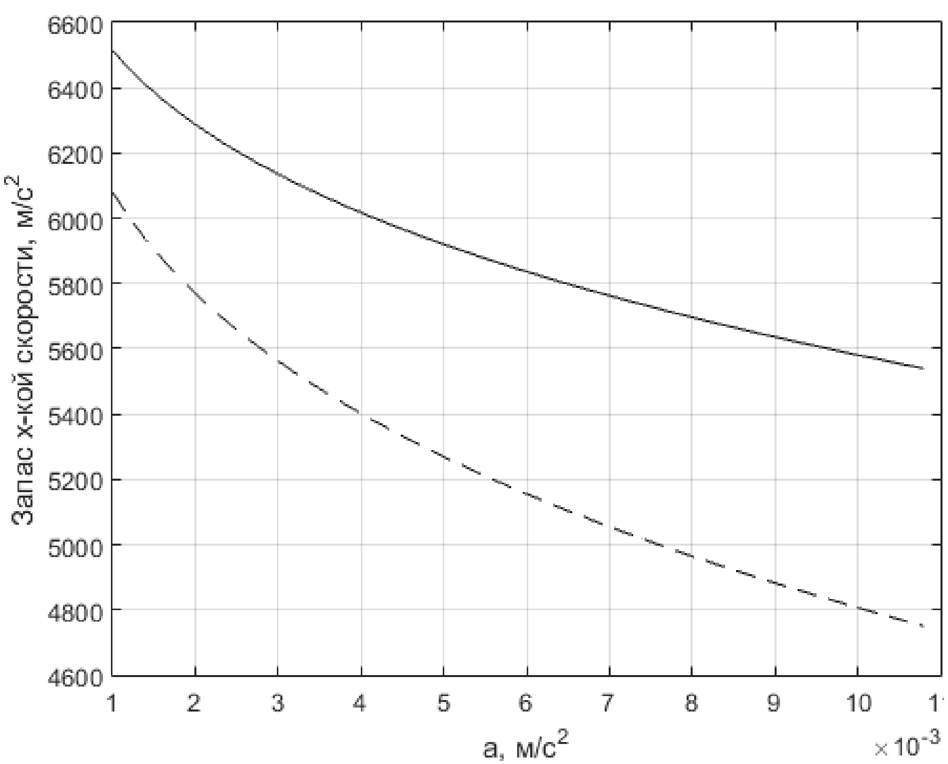


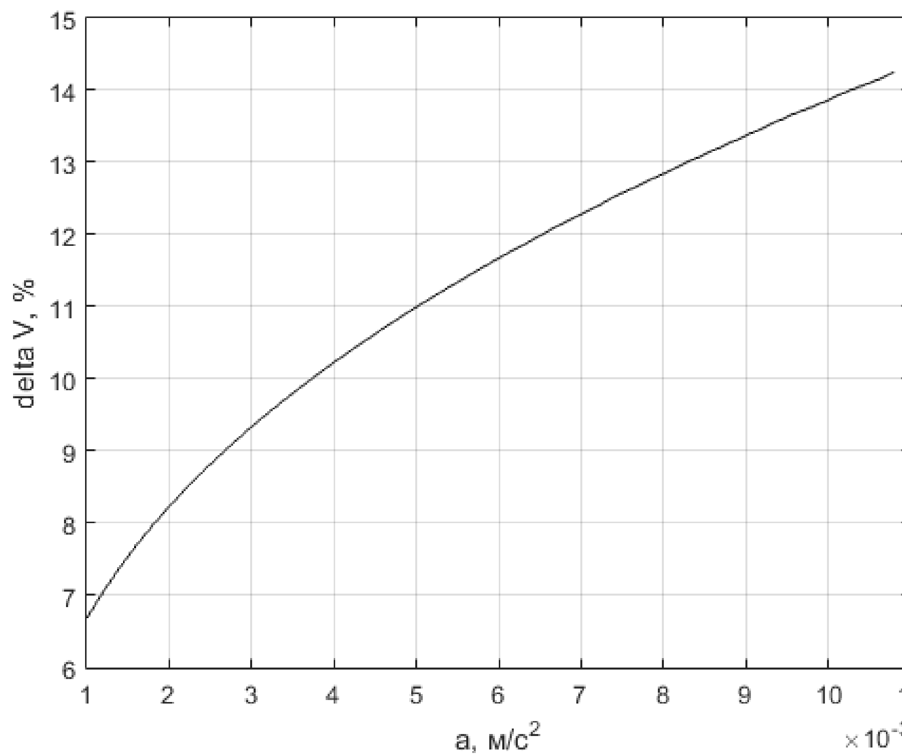


сплошная линия – численный метод
пунктирная линия – приближенный метод

Сравнение численного метода с формулами Бэттина

Запас характеристической скорости и относительная погрешность

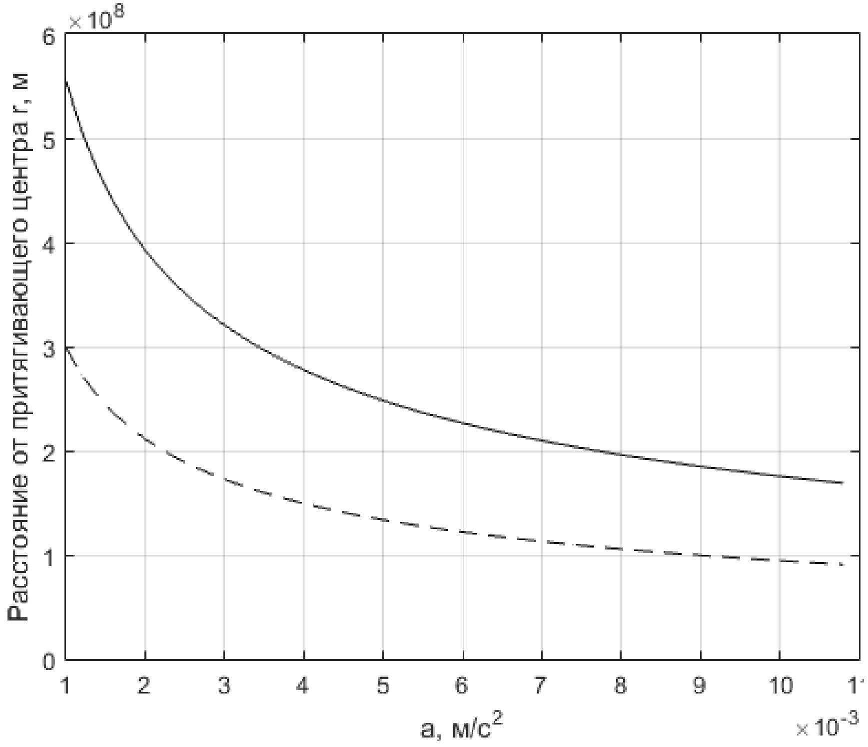


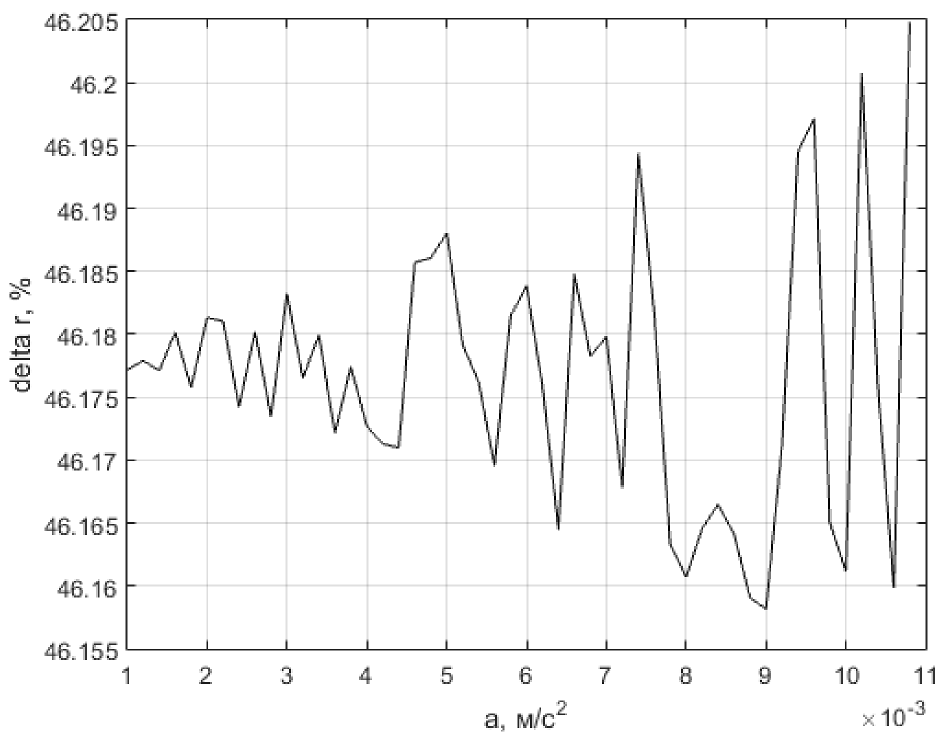


сплошная линия – численный метод
пунктирная линия – приближенный метод

Сравнение численного метода с формулами Бэттина

Расстояние от притягивающего центра в момент достижения параболической скорости и относительная погрешность

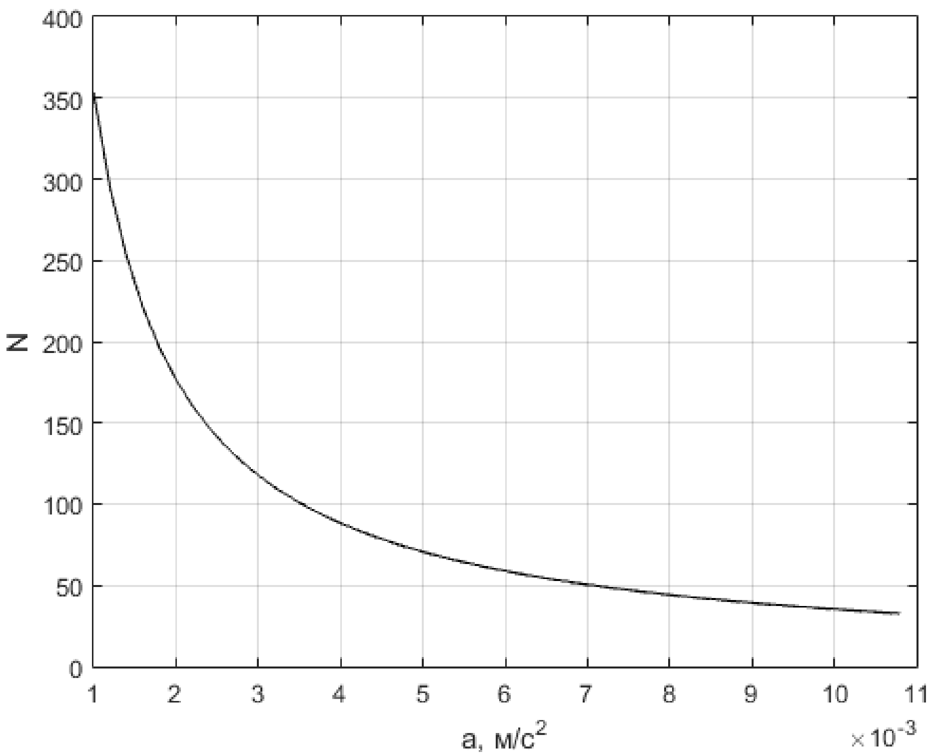


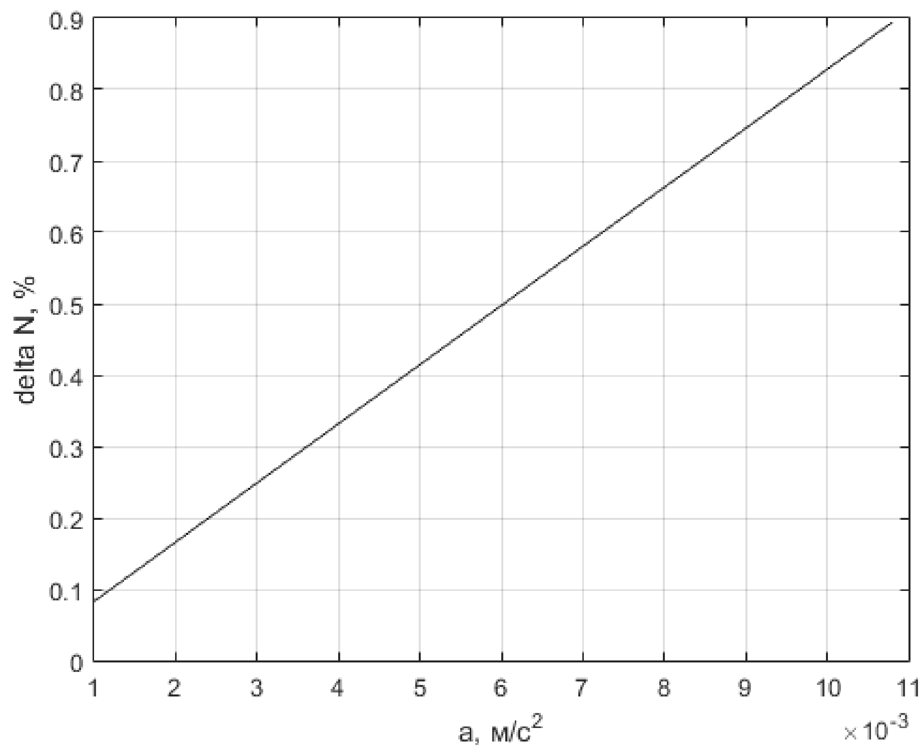


сплошная линия – численный метод
пунктирная линия – приближенный метод

Сравнение численного метода с формулами Бэттина

Число витков, совершенных КА в момент достижения параболической скорости, и относительная погрешность





сплошная линия – численный метод
пунктирная линия – приближенный метод

Заключение

- Рассмотрена задача разгона космического аппарата (КА), находящегося в начальный момент времени на круговой орбите, до параболической скорости при помощи постоянной касательной тяги.

- Моделирование динамики полета КА проводилось численно.

- Результаты сравнивались с приближенными оценками, полученными с помощью приближенного метода Бэттина

- Выявлен диапазон применимости приближенных формул

Спасибо за внимание!