

XLIII АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ

29 января – 1 февраля 2019 года



Распределение двигателей орбитальной коррекции на геостационарном спутнике

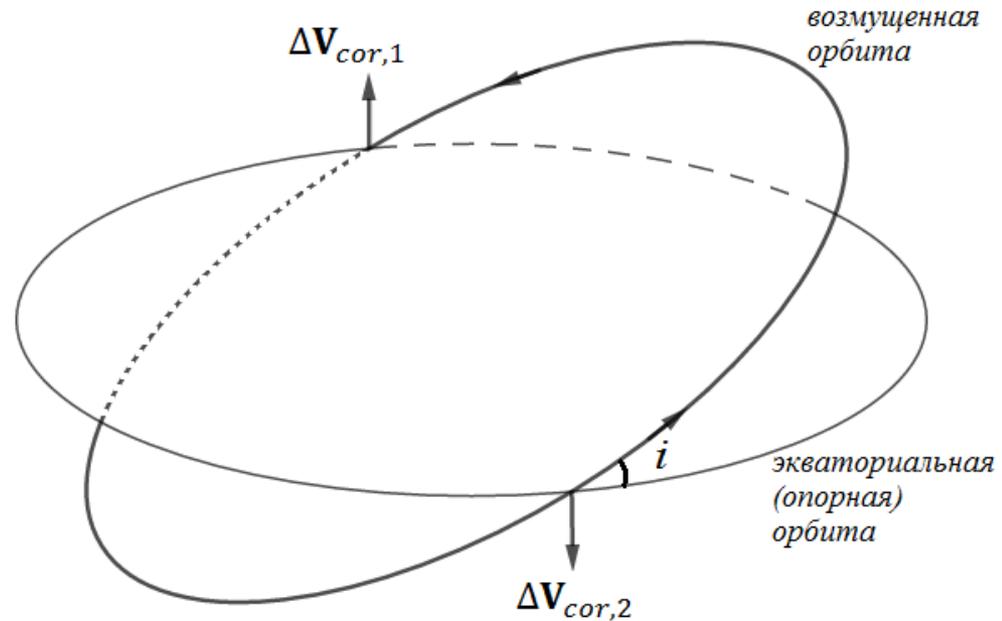
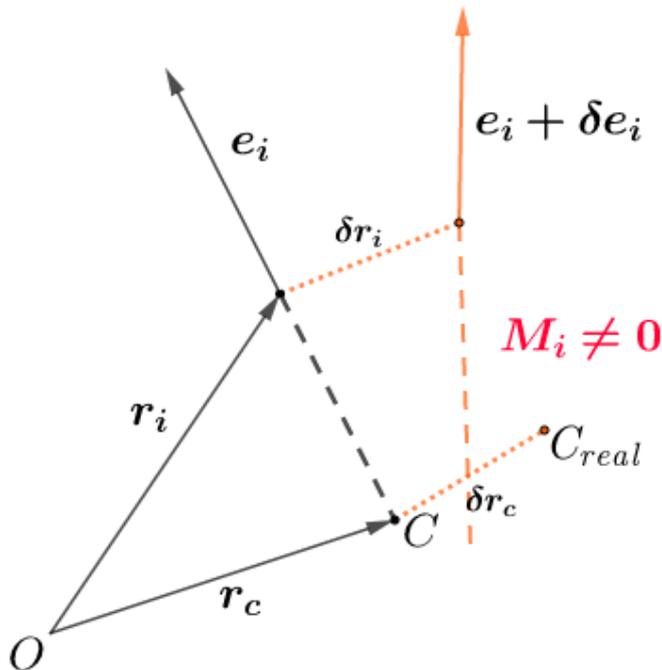
*Охитина А.С.
Маштаков Я.В.
Ткачев С.С.
Шестаков С.А.*

Введение

Поддержание орбиты:
корректирующие импульсы в узлах орбиты.

Двигатели коррекции **создают**
возмущающие моменты сил

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_{ic} \times \mathbf{e}_i f \neq 0$$



Идея:

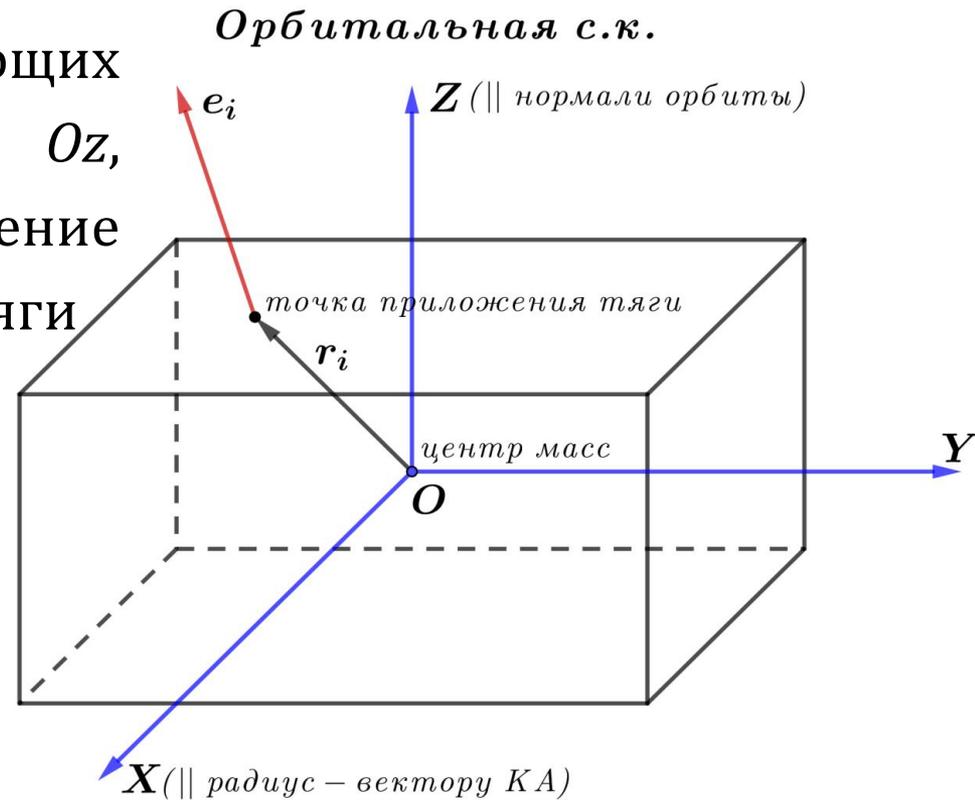
учесть создаваемые моменты при проектировании и использовать их для разгрузки

План решения

- Постановка задачи
- Этапы решения
 - *Определение количества двигателей*
 - *Расположение на аппарате*
 - *Оптимизация*
 - *Выход из строя одного двигателя*
- Результаты

Постановка задачи

Заданы значения корректирующих импульсов вдоль осей Oy и Oz , ограничения на расположение двигателей, направление осей тяги

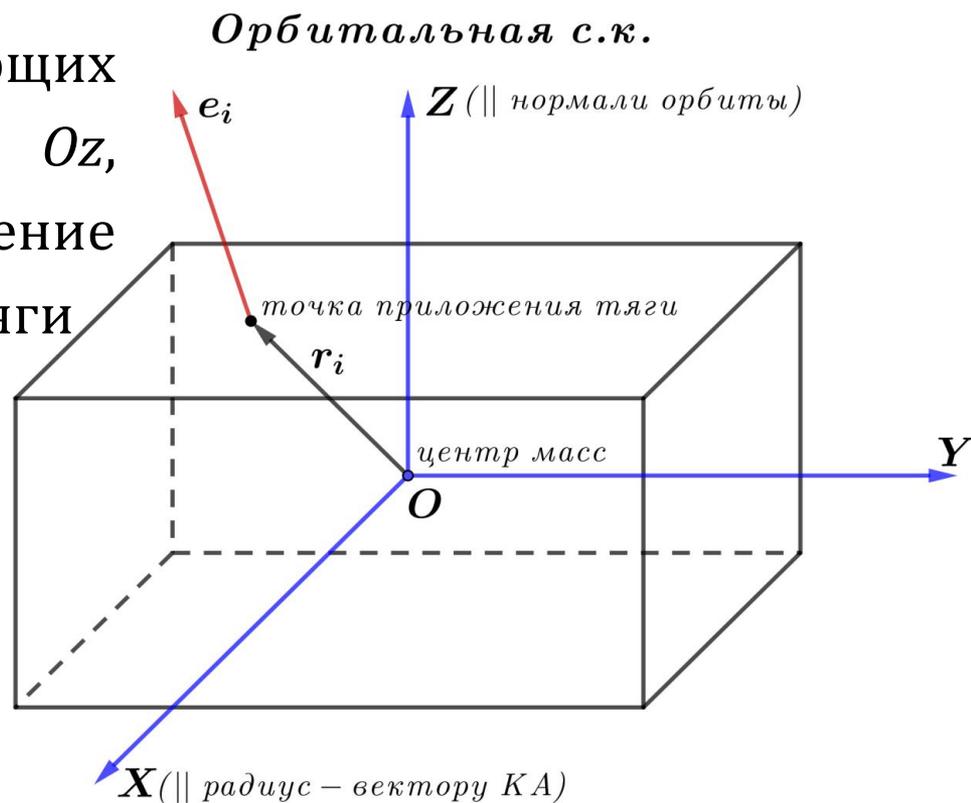


Постановка задачи

Заданы значения корректирующих импульсов вдоль осей Oy и Oz , ограничения на расположение двигателей, направление осей тяги

Требуется

одновременно корректировать орбиту и разгрузать маховики



Постановка задачи

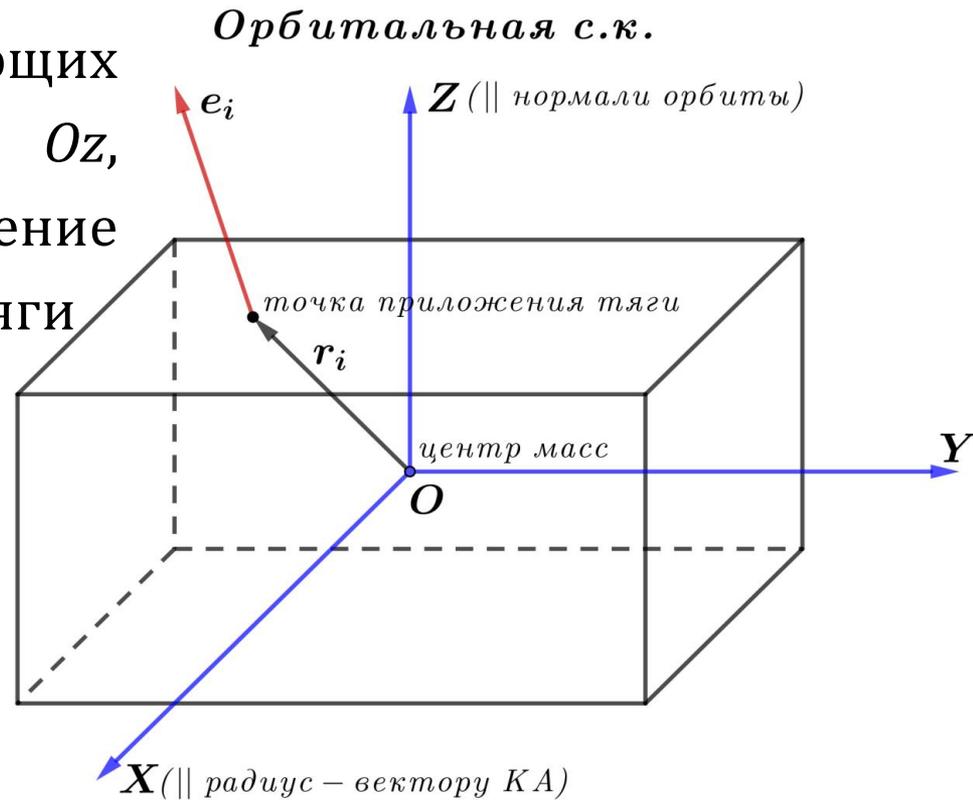
Заданы значения корректирующих импульсов вдоль осей Oy и Oz , ограничения на расположение двигателей, направление осей тяги

Требуется

одновременно корректировать орбиту и разгружать маховики

Для этого необходимо:

- определить **минимально** **необходимое количество** двигателей коррекции



Постановка задачи

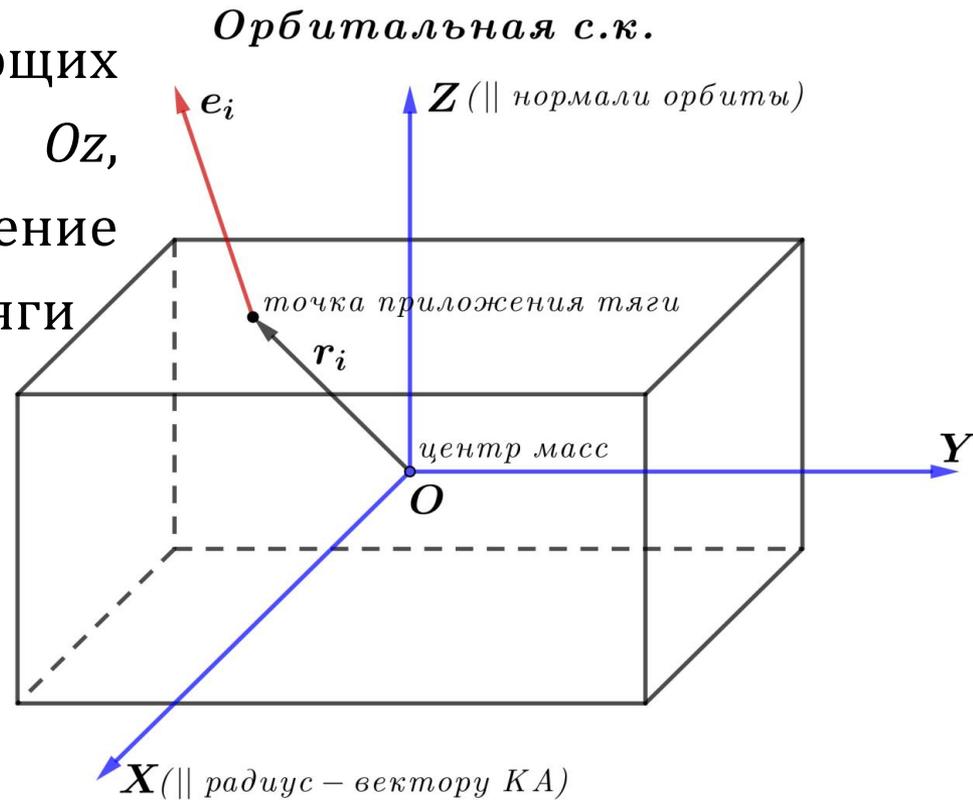
Заданы значения корректирующих импульсов вдоль осей Oy и Oz , ограничения на расположение двигателей, направление осей тяги

Требуется

одновременно корректировать орбиту и разгружать маховики

Для этого необходимо:

- определить **минимально необходимое количество** двигателей коррекции
- выбрать **оптимальное расположение** двигателей коррекции и направление их осей тяги



Постановка задачи

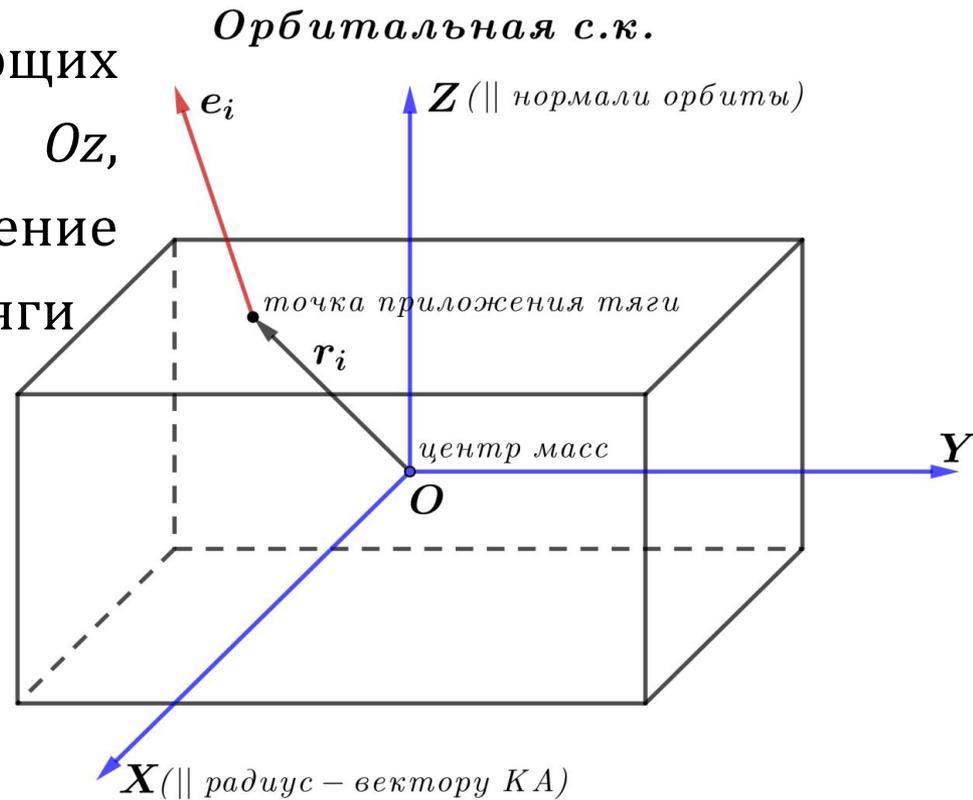
Заданы значения корректирующих импульсов вдоль осей Oy и Oz , ограничения на расположение двигателей, направление осей тяги

Требуется

одновременно корректировать орбиту и разгружать маховики

Для этого необходимо:

- определить **минимально необходимое количество** двигателей коррекции
- выбрать **оптимальное расположение** двигателей коррекции и направление их осей тяги
- система должна **оставаться работоспособной** даже в случае выхода из строя одного из двигателей



Формализация задачи

Момент силы i -ого двигателя

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{e}_i f$$

Суммарное изменение
кинетического момента

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

Ограничения на изменение
скорости

$$\Delta V_z - \text{фиксированное}$$
$$\Delta V_y \in [-0.1\Delta V_z, 0.1\Delta V_z]$$

Система, описывающая
изменение импульса спутника

$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$

$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

t_i – время работы i -ого двигателя

m_s – масса спутника

f – величина тяги

Подход к решению. Шаг 1

исходная
система

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma,$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

замена

$$\frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s} t_i = \tau_i$$

нормированное время
работы двигателей

Подход к решению. Шаг 2

исходная
система

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma,$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

замена

$$\frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s} t_i = \tau_i$$

нормированное время
работы двигателей

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$
$$\sum_{i=1}^k e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$
$$\sum_{i=1}^k \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

Подход к решению. Шаг 3

исходная
система

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma,$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

замена

$$\frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s} t_i = \tau_i$$

нормированное время
работы двигателей

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$
$$\sum_{i=1}^k e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$
$$\sum_{i=1}^k \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

вводим 4-мерные
вектора

$$\boldsymbol{\psi}_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T$$
$$i = \overline{1, k}$$

Подход к решению. Шаг 4

исходная
система

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma,$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$
$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

замена

$$\frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s} t_i = \tau_i$$

нормированное время
работы двигателей

выпуклая оболочка

$$\sum_{i=1}^k \Psi_i \tau_i, \quad \sum_{i=1}^k \tau_i = 1, \quad \tau_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$
$$\sum_{i=1}^k e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$
$$\sum_{i=1}^k \tau_i = 1, \quad \tau_i \geq 0$$

вводим 4-мерные
вектора

$$\Psi_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T$$
$$i = \overline{1, k}$$

Подход к решению. Шаг 5

исходная система

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{M}_i t_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma,$$

$$\sum_{i=1}^k e_{i,z} t_i = \frac{\Delta V_z m_s}{f}$$

$$\sum_{i=1}^k e_{i,y} t_i = \frac{\Delta V_y m_s}{f}$$

замена

$$\frac{e_{i,z} f}{\Delta V_z m_s} t_i = \tau_i$$

нормированное время работы двигателей

выпуклая оболочка

$$\sum_{i=1}^k \Psi_i \tau_i, \quad \sum_{i=1}^k \tau_i = 1, \quad \tau_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^k e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^k \tau_i = 1, \quad \tau_i \geq 0$$

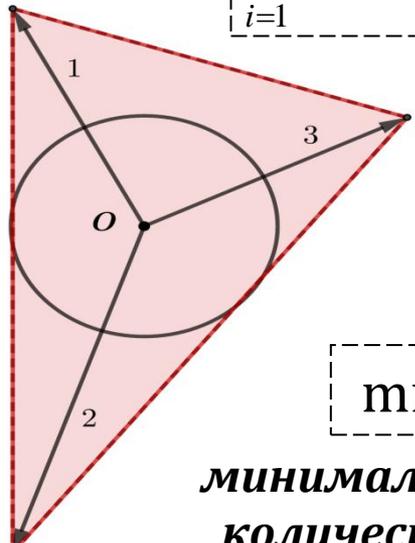
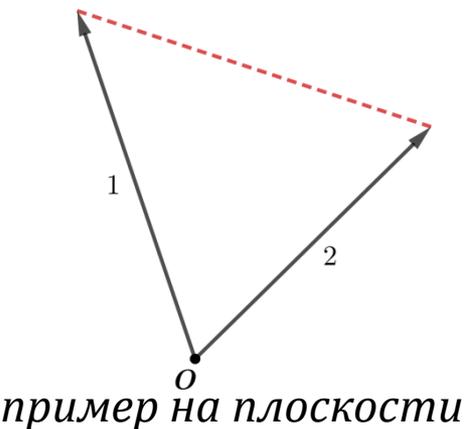
вводим 4-мерные вектора

$$\Psi_i = (m_{i,x}, m_{i,y}, m_{i,z}, e_i)^T$$

$$i = \overline{1, k}$$

$$\min k = 5$$

минимально необходимое количество двигателей



Подход к решению. Шаг 6

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \mathbf{m}_i \tau_i &= \Delta \mathbf{h}_\Sigma \\ \sum_{i=1}^5 e_i \tau_i &= \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \\ \sum_{i=1}^5 \tau_i &= 1, \tau_i \geq 0 \\ \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} &\in [-0.1, 0.1] \end{aligned}$$

выпуклая оболочка, $k=5$

$$\sum_{i=1}^5 \Psi_i \tau_i, \sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

Условия на выпуклую оболочку

- ограничения на изменение импульса
- обеспечить возможность выдавать $\Delta \mathbf{h}_\Sigma$ в любом направлении
- $|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| \rightarrow \max$

Подход к решению. Шаг 7

$$\sum_{i=1}^5 \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$
$$\sum_{i=1}^5 e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$
$$\sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$
$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.1, 0.1]$$

выпуклая оболочка, $k=5$

$$\sum_{i=1}^5 \Psi_i \tau_i, \sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$$

фиксируем 4-ую компоненту и переписываем систему неравенств

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_j}{\|\tilde{\mathbf{a}}_j\|}, \mathbf{x} \right) \leq \frac{\tilde{d}_j}{\|\tilde{\mathbf{a}}_j\|}$$

Условия на выпуклую оболочку

➤ ограничения на изменение импульса

➤ обеспечить возможность выдавать

$\Delta \mathbf{h}_\Sigma$ в любом направлении

➤ $|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| \rightarrow \max$

Подход к решению. Шаг 8

$$\sum_{i=1}^5 \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$
$$\sum_{i=1}^5 e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$
$$\sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$
$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.1, 0.1]$$

выпуклая оболочка, $k=5$

$$\sum_{i=1}^5 \Psi_i \tau_i, \sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$$

фиксируем 4-ую компоненту и переписываем систему неравенств

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_j}{\|\tilde{\mathbf{a}}_j\|}, \mathbf{x} \right) \leq \frac{\tilde{d}_j}{\|\tilde{\mathbf{a}}_j\|}$$

Условия на выпуклую оболочку

➤ ограничения на изменение импульса

➤ обеспечить возможность выдавать

$\Delta \mathbf{h}_\Sigma$ в любом направлении

➤ $|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| \rightarrow \max$

$$R = \frac{\tilde{d}}{\|\tilde{\mathbf{a}}\|}$$

Подход к решению. Шаг 9

$$\sum_{i=1}^5 \mathbf{m}_i \tau_i = \Delta \mathbf{h}_\Sigma$$

$$\sum_{i=1}^5 e_i \tau_i = \frac{\Delta V_y}{\Delta V_z}$$

$$\sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta V_z} \in [-0.1, 0.1]$$

выпуклая оболочка, $k=5$

$$\sum_{i=1}^5 \Psi_i \tau_i, \sum_{i=1}^5 \tau_i = 1, \tau_i \geq 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$$

фиксируем 4-ую компоненту и переписываем систему неравенств

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{a}}_j}{\|\tilde{\mathbf{a}}_j\|}, \mathbf{x} \right) \leq \frac{\tilde{d}_j}{\|\tilde{\mathbf{a}}_j\|}$$

Условия на выпуклую оболочку

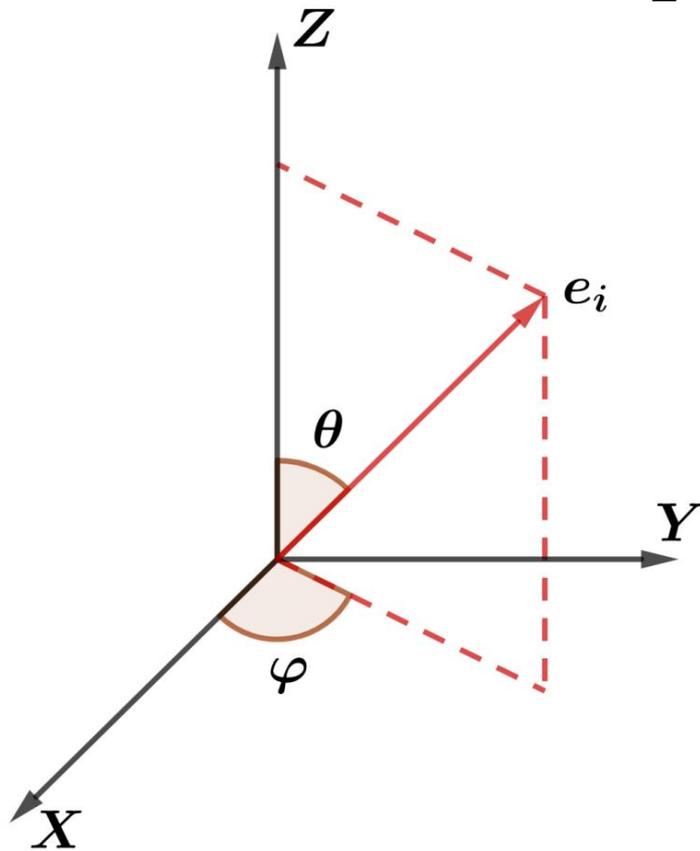
- ограничения на изменение импульса
- обеспечить возможность выдавать $\Delta \mathbf{h}_\Sigma$ в любом направлении

$$R = \frac{\tilde{d}}{\|\tilde{\mathbf{a}}\|}$$

- $|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| \rightarrow \max$

$$\Phi = \min(R_{left}, R_{right}) \rightarrow \max$$

Ограничения



размер аппарата конечный

$$|r_{i,x}|, |r_{i,y}| < 0.5 \text{ м}, \quad r_{i,z} = 0.5 \text{ м}, \quad i = \overline{1,5}$$

коррекция орбиты по $OZ \approx 10 \frac{\text{М}}{\text{ГОД}}$

$$\Delta V_z = 0.03 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

коррекция орбиты по $OY \approx 1 \frac{\text{М}}{\text{ГОД}}$

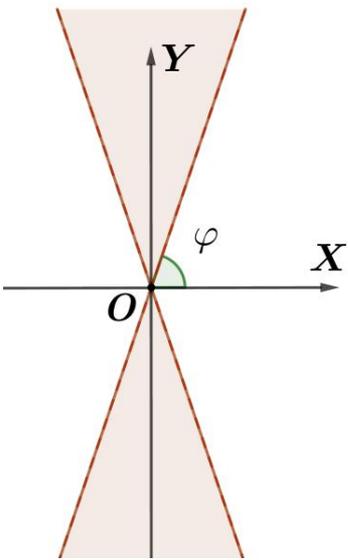
$$\Delta V_{y,\text{right}} = -\Delta V_{y,\text{left}} = 0.003 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

основной корректирующий импульс вдоль $OZ \Rightarrow \theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

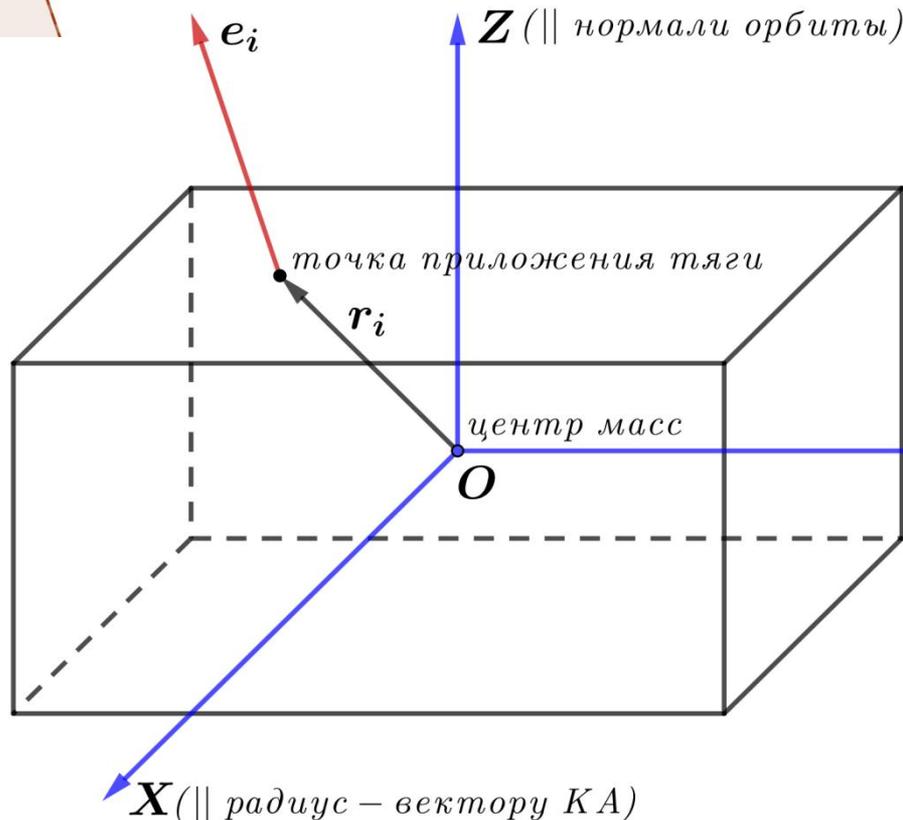
по оси OX коррекция не рассматривается $\Rightarrow \varphi_i \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Оптимизационная задача

$$\Phi = \min(R_{left}, R_{right}) \rightarrow \max$$



Орбитальная с.к.



Ограничения:

$$\varphi_i \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$$

$$\theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right]$$

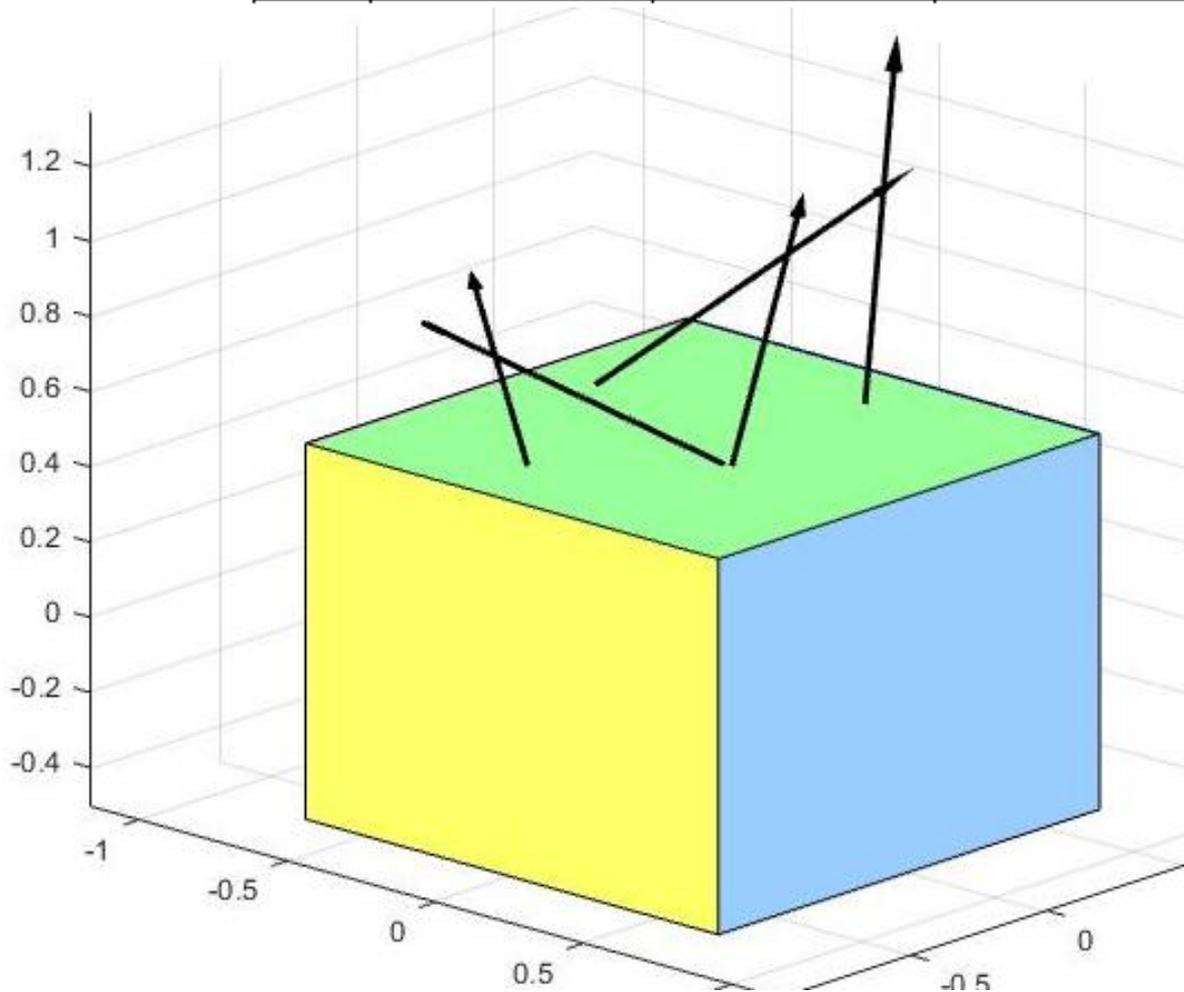
$$|r_{i,x}|, |r_{i,y}| < 0.5 \text{ м}, \quad r_{i,z} = 0.5 \text{ м},$$

$$m_s = 5000 \text{ кг}, \quad f = 0.1 \text{ Н},$$

$$\Delta V_z = 0.03 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\Delta V_y \in [-0.1\Delta V_z, 0.1\Delta V_z]$$

№	φ (deg)	θ (deg)	\tilde{r}_x (m)	\tilde{r}_y (m)	\tilde{r}_z (m)
1	62.24	57.29	-0.5	0.157	0.5
2	120	57.29	0.193	-0.098	
3	118.44	20.07	0.089	0.5	
4	240.74	57.29	0.172	-0.115	
5	299.4	40.97	-0.185	-0.445	

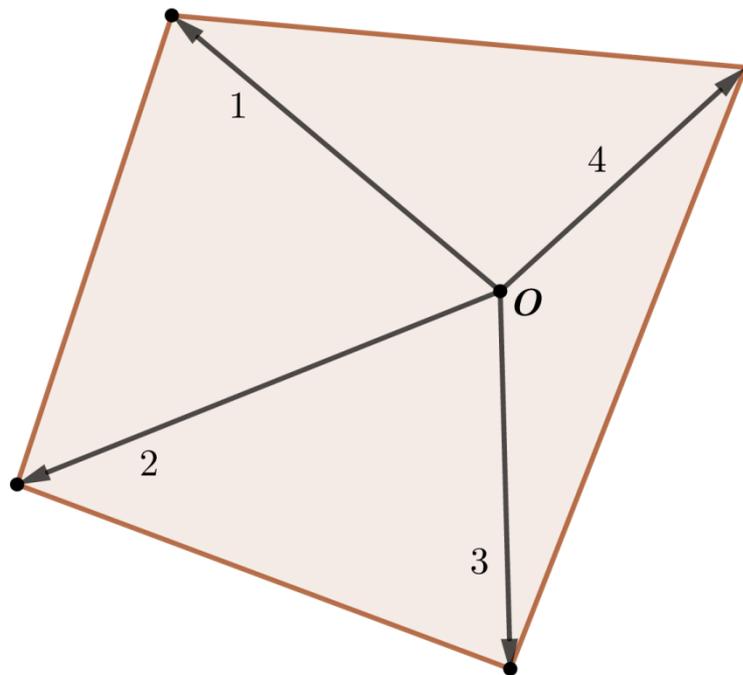


Локальное
оптимальное
распределение
($k = 5$)

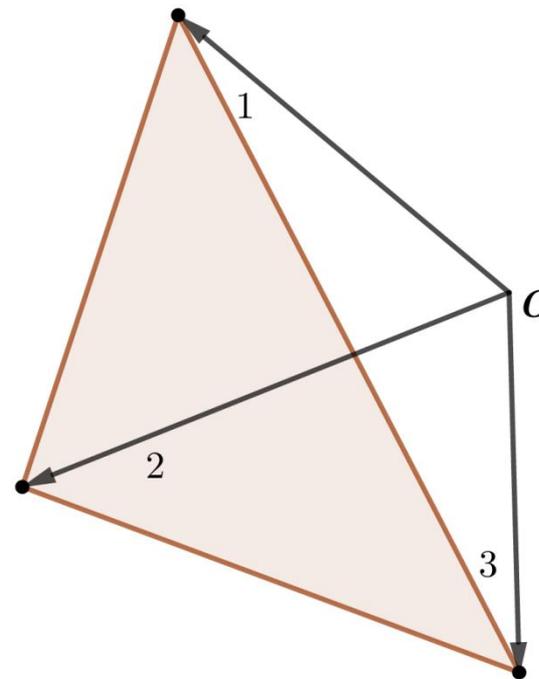
Наибольшее
возможное изменение
кинетического
момента

$$|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| = 23.09 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$$

Выход из строя одного из двигателей



2-мерное пространство



4-ый двигатель вышел из строя

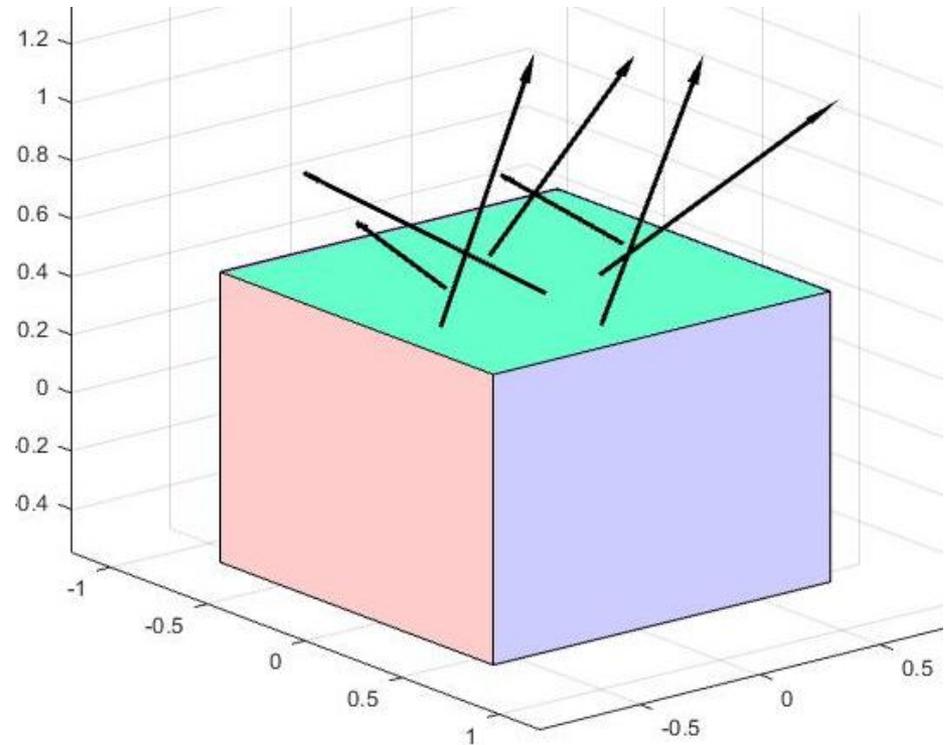
Точка O лежит вне выпуклой оболочки оставшихся двигателей

№	φ (deg)	θ (deg)	\tilde{r}_x (m)	\tilde{r}_y (m)	\tilde{r}_z (m)
1	106.02	60	-0.295	0.095	0.5
2	98.07	30.71	0.499	-0.087	
3	73.3	58.99	0.089	0.243	
4	240.53	60	0.126	-0.025	
5	300	59.62	-0.118	-0.24	
6	291.52	59.96	-0.125	0.499	
7	97.78	27.78	0.187	-0.499	

Локальное оптимальное
распределение
 $k = 7$
(с учетом выхода из
строя)

Наибольшее возможное
изменение
кинетического момента

$$|\Delta \mathbf{h}_\Sigma| = 2.703 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$$



Заключение

- **Минимально необходимое количество двигателей для одновременной коррекции орбиты и разгрузки маховиков равно 5**
- **Показано, что в случае возможности отказа, необходимо установить по крайней мере 7 двигателей**
- **Получено локальное оптимальное расположение двигателей как в случае штатной работы, так и в случае отказа одного двигателя**

Спасибо за внимание!

Охитина Анна Сергеевна, anna.ohitina@mail.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН