Построение и анализ алгоритма электромагнитного управления тремя спутниками, движущимися в группе.

А.И.Шестоперов[1], *С.С.Ткачев*[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

[2]Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Содержание

- Введение
- Постановка задачи
- Построение управления
- Анализ алгоритма управления
- Численный пример
- Результаты

Введение


Появление малых спутников
Групповые полеты
Класс миссий, требующих поддержания спутников на близком расстоянии
Экономия топлива
Не допустить повреждений чувствительной поверхности КА

Объект исследования и характер управления

- Формация из 3х спутников, центр масс которой движется вокруг притягивающего центра (Земли).
- Управление КА происходит посредством электромагнитного взаимодействия.
- Управляющее воздействие имеет вид:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \textit{где } \alpha = q_i q_j.$$

Предположения , используемые в работе

Исследование проводится в условиях задачи Хилла:

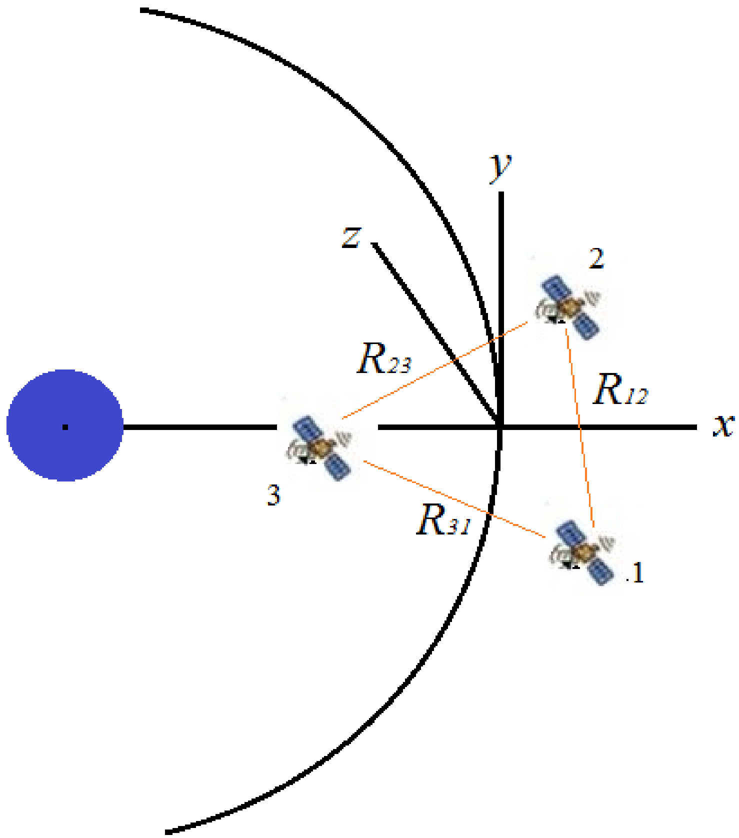
- Гравитационное взаимодействие между спутниками не учитывается
- Центр масс формации движется по круговой орбите
- Внешние возмущения (солнечное давление, неоднородность среды и т.п.) не учитываются.

Цель работы

- Для формации из 3х спутников получить управляющие воздействия, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость конфигурации спутников (заранее заданного расстояния между космическими аппаратами).

Система отсчета

- Движение изучается в орбитальной системе координат



Уравнения движения

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_1 + 3\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{R_{12}}\cdot\frac{\alpha_1}{R_{12}^2} - \frac{\boldsymbol{r}_{31}}{R_{31}}\cdot\frac{\alpha_3}{R_{31}^2},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_2 + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_2 + 3\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_2 = -\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{R_{12}}\cdot\frac{\alpha_1}{R_{12}^2} + \frac{\boldsymbol{r}_{23}}{R_{23}}\cdot\frac{\alpha_2}{R_{23}^2},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_3 + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_3 + 3\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_3 = \frac{\boldsymbol{r}_{31}}{R_{31}}\cdot\frac{\alpha_3}{R_{31}^2} - \frac{\boldsymbol{r}_{23}}{R_{23}}\cdot\frac{\alpha_2}{R_{23}^2}.$$

Радиальная составляющая ускорения и функция Ляпунова

$$R = \sqrt{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})},$$

$$\dot{R} = \frac{(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})}{\sqrt{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})}},$$

$$\ddot{R} = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{r}})+(\boldsymbol{r},\ddot{\boldsymbol{r}})}{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})^{1/2}} - \frac{(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})^2}{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})^{3/2}} = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{r}})+(\boldsymbol{r},\ddot{\boldsymbol{r}})}{R} - \frac{(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})^2}{R^3};$$

$$V = \frac{1}{2}\dot{R}_{12}^2 + \frac{1}{2}\dot{R}_{23}^2 + \frac{1}{2}\dot{R}_{31}^2 + \frac{1}{2}k(R_{12}-a_1)^2 + \frac{1}{2}k(R_{23}-a_2)^2 + \frac{1}{2}k(R_{31}-a_3)^2,$$

$$\dot{V} = \dot{R}_{12}(\ddot{R}_{12} + k(R_{12}-a_1)) + \dot{R}_{23}(\ddot{R}_{23} + k(R_{23}-a_2)) + \dot{R}_{31}(\ddot{R}_{31} + k(R_{31}-a_3));$$

Система уравнений для нахождения управляющих воздействий

$$\ddot{R}_{12}(\alpha_1) + g\dot{R}_{12} + k(R_{12} - a_1) = 0,$$

$$\ddot{R}_{23}(\alpha_2) + g\dot{R}_{23} + k(R_{23} - a_2) = 0,$$

$$\ddot{R}_{31}(\alpha_3) + g\dot{R}_{31} + k(R_{31} - a_3) = 0.$$

После подстановки $\ddot{R}_{ij}$, $\dot{R}_{ij}$:

$$\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_{12}, \dot{\boldsymbol{r}}_{12}) + (\boldsymbol{r}_{12}, \ddot{\boldsymbol{r}}_{12}(\alpha_1))}{R_{12}} - \frac{(\boldsymbol{r}_{12}, \dot{\boldsymbol{r}}_{12})^2}{R_{12}^{\ 3}} + g\frac{(\boldsymbol{r}_{12}, \dot{\boldsymbol{r}}_{12})}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{12})}} + k(R_{12} - a_1) = 0,$$

$$\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_{23}, \dot{\boldsymbol{r}}_{23}) + (\boldsymbol{r}_{23}, \ddot{\boldsymbol{r}}_{23}(\alpha_2))}{R_{23}} - \frac{(\boldsymbol{r}_{23}, \dot{\boldsymbol{r}}_{23})^2}{R_{23}^{\ 3}} + g\frac{(\boldsymbol{r}_{23}, \dot{\boldsymbol{r}}_{23})}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_{23}, \boldsymbol{r}_{23})}} + k(R_{23} - a_2) = 0,$$

$$\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}_{31}, \dot{\boldsymbol{r}}_{31}) + (\boldsymbol{r}_{31}, \ddot{\boldsymbol{r}}_{31}(\alpha_3))}{R_{31}} - \frac{(\boldsymbol{r}_{31}, \dot{\boldsymbol{r}}_{31})^2}{R_{31}^{\ 3}} + g\frac{(\boldsymbol{r}_{31}, \dot{\boldsymbol{r}}_{31})}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_{31}, \boldsymbol{r}_{31})}} + k(R_{31} - a_3) = 0;$$

Система уравнений в матричном виде 1/2

$$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{b}$$

Получаем управление :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & \dfrac{(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{23})}{R_{12}R_{23}} & \dfrac{(\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{r}_{31})}{R_{12}R_{31}} \\ \dfrac{(\boldsymbol{r}_{23}, \boldsymbol{r}_{12})}{R_{23}R_{12}} & -2 & \dfrac{(\boldsymbol{r}_{23}, \boldsymbol{r}_{31})}{R_{23}R_{31}} \\ \dfrac{(\boldsymbol{r}_{31}, \boldsymbol{r}_{12})}{R_{31}R_{12}} & \dfrac{(\boldsymbol{r}_{31}, \boldsymbol{r}_{23})}{R_{31}R_{23}} & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1}{R_{12}^2} \\ \dfrac{\alpha_2}{R_{23}^2} \\ \dfrac{\alpha_3}{R_{31}^2} \end{pmatrix};$$

Система уравнений в матричном виде 2/2

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2},$$

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R_{12}}\left(2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r_{12}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}) + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{12}}]^2\right) \\ \dfrac{1}{R_{23}}\left(2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r_{23}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{23}}) + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{23}}]^2\right) \\ \dfrac{1}{R_{31}}\left(2(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r_{31}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{31}}) + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_{31}}]^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}})}{R_{12}} + \dfrac{(\boldsymbol{r_{12}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}})^2}{{R_{12}}^3} - \left(g\dfrac{(\boldsymbol{r_{12}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{12}})}{R_{12}} + k(R_{12} - a_1)\right) \\ -\dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{23}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{23}})}{R_{23}} + \dfrac{(\boldsymbol{r_{23}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{23}})^2}{{R_{23}}^3} - \left(g\dfrac{(\boldsymbol{r_{23}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{23}})}{R_{23}} + k(R_{23} - a_2)\right) \\ -\dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{31}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{31}})}{R_{31}} + \dfrac{(\boldsymbol{r_{31}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{31}})^2}{{R_{31}}^3} - \left(g\dfrac{(\boldsymbol{r_{31}}, \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{31}})}{R_{31}} + k(R_{31} - a_3)\right) \end{pmatrix};$$

Анализ алгоритма управления

$$\alpha_1 = q_1q_2, \alpha_2 = q_2q_3, \alpha_3 = q_1q_3.$$

$$\Phi = (q_1q_2 - \alpha_1)^2 + (q_2q_3 - \alpha_2)^2 + (q_1q_3 - \alpha_3)^2 \to \min$$

Находим экстремумы:

$$q_2(q_1q_2 - \alpha_1) + q_3(q_1q_3 - \alpha_3) = 0,$$

$$q_1(q_1q_2 - \alpha_1) + q_3(q_2q_3 - \alpha_2) = 0,$$

$$q_2(q_2q_3 - \alpha_2) + q_1(q_1q_3 - \alpha_3) = 0.$$

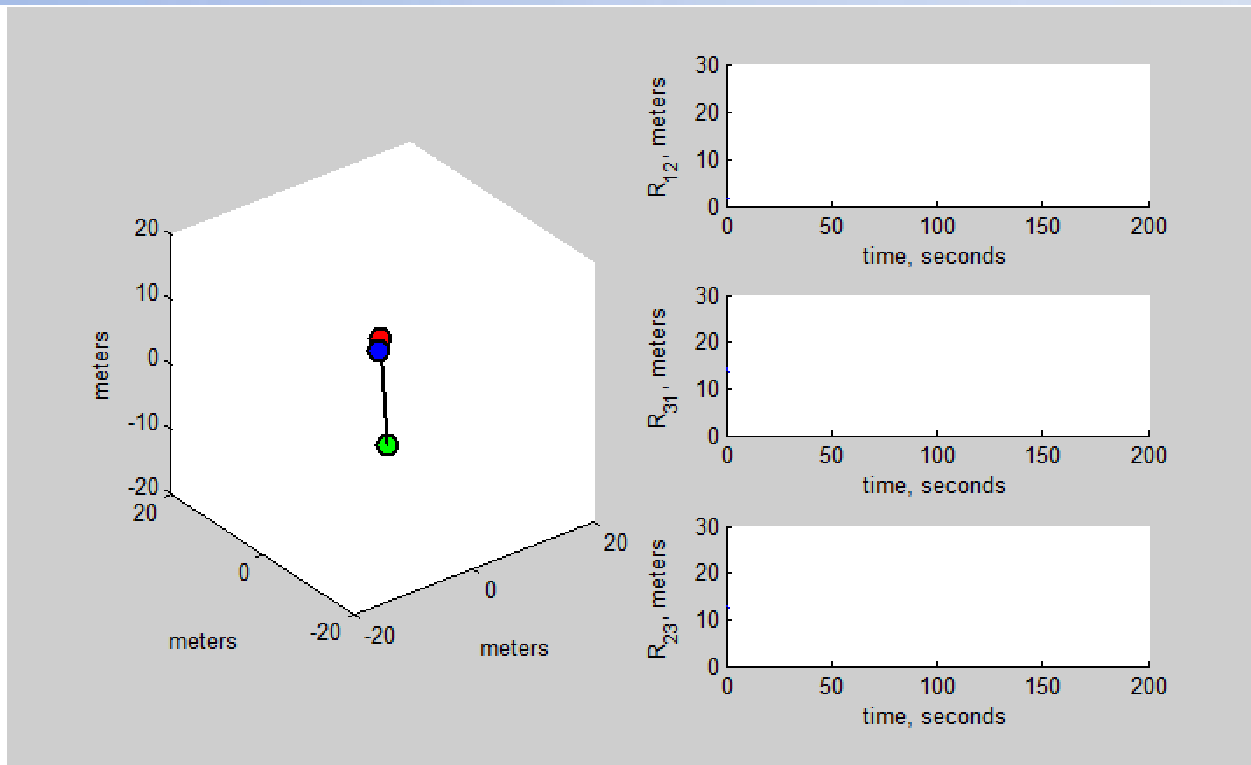
Решаем систему. Получаем четыре пары решений.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{-\dfrac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}} \\ \mp\sqrt{-\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-\dfrac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}} \\ 0 \\ \mp\sqrt{-\dfrac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}} \\ \mp\sqrt{-\dfrac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\dfrac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}} \end{pmatrix}$$

Первые три пары соответствуют случаю $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 < 0,$

четвертая случаю $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 > 0.$

Симуляция Matlab



$$x_1 = 2\,м;\ \ y_1 = 3\,м;\ \ z_1 = 4\,м;\ \ x_2 = 1\,м;\ \ y_2 = 2\,м;\ \ z_2 = 3\,м$$

$$v_{x_1} = 1\,м/c; v_{y_1} = 0\,м/c; v_{z_1} = 1\,м/c; v_{x_2} = 0\,м/c; v_{y_2} = 0\,м/м; v_{z_2} = 0\,м/c$$

$$(x_3 \quad y_3 \quad z_3 \quad v_{x_3} \quad v_{y_3} \quad v_{z_3})^T = -(x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad v_{x_1} \quad v_{y_1} \quad v_{z_1})^T - (x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad v_{x_2} \quad v_{y_2} \quad v_{z_2})^T$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 16\,м; k = \frac{g^2}{4} c^{-2}; g = 0.44 c^{-1}$$

Результаты

- Получено управление, позволяющее поддерживать спутники на заданном расстоянии и обеспечивающее асимптотическую устойчивость построенной конфигурации из 3х спутников.

Благодарности

- Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-33045