Моделирование и управление движением тетраэдральной конфигурации спутников

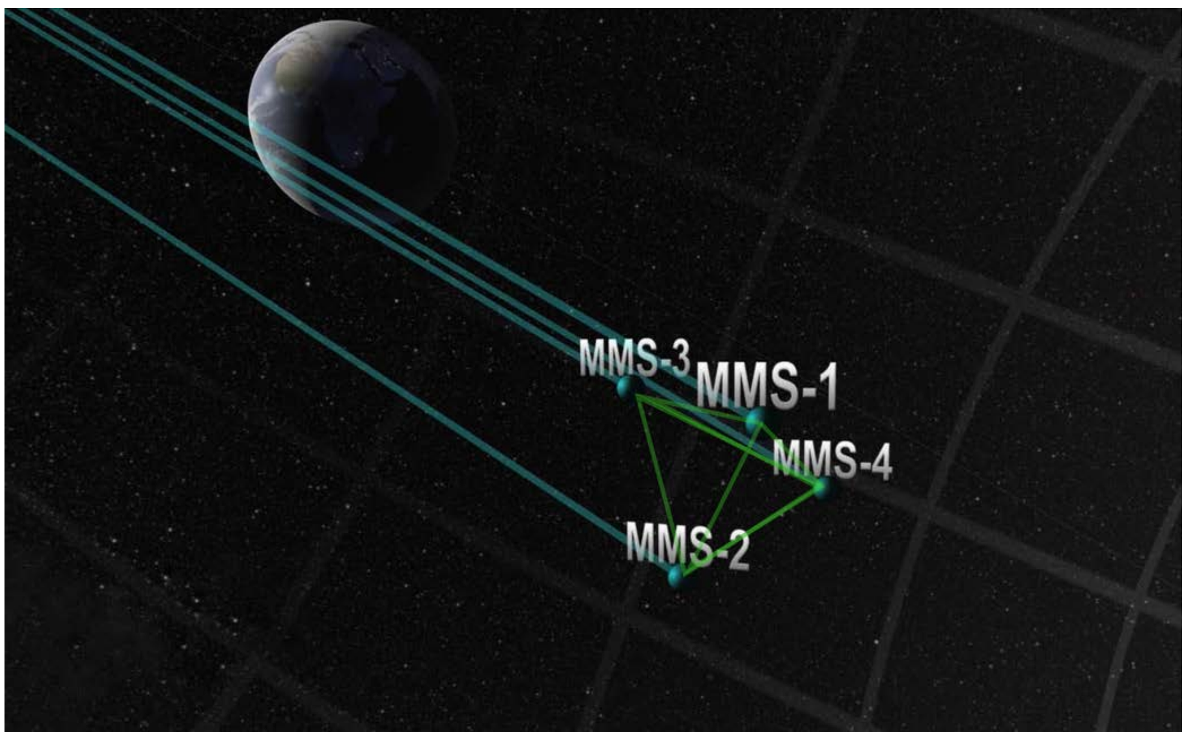
С.А. Шестаков

Я.В. Маштаков

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИПМ им.М.В.КЕЛДЫША РАН

Применение тетраэдральных формаций

- Исследование магнитосферы Земли
- Миссия Magnetospheric Multiscale



Постановка задачи

- четыре спутника: два управляемы вдоль магнитного поля Земли, два движутся пассивно
- оба пассивных спутника движутся по одной круговой орбите, расстояние между спутниками много меньше радиуса орбиты
- управляемые спутники движутся по орбитам, близким к круговой
- требуется управлять спутниками таким образом, чтобы тетраэдр, образованный ими, сохранял свою форму и размер
- управление предполагается одноосным, ориентированным по магнитному полю Земли

Тетраэдральная конфигурация

- Качество тетраэдра

$$M = 72\sqrt{3}\frac{V}{(r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{14}^2 + r_{23}^2 + r_{24}^2 + r_{34}^2)^{3/2}}$$

- Сохранение объёма – сохранение размера
- Сохранение качества – сохранение формы, приближённой к правильной

Опорная орбита

- Для описания движения используется линеаризованная модель

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x = 0, \qquad x_i = A_i \sin(nt + \varphi_i),$$
$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = 0, \qquad y_i = C_i + 2A_i \cos(nt + \varphi_i),$$
$$\ddot{z} + n^2 z = 0 \qquad z_i = B_i \sin(nt + \psi_i)$$

- Цель: найти опорные орбиты для управляемых спутников с тем, чтобы объём и качество тетраэдра сохранялись

Опорная орбита

- Условие для сохранения объёма

$$A_2B_1 = A_1B_2, \quad \varphi_2 + \psi_1 = \varphi_1 + \psi_2 + 2\pi k$$

- Для сохранения объёма орбиты управляемых спутников должны лежать в параллельных плоскостях
- Найдена опорная орбита, сохраняющая качество

$$x_1 = A\sin(nt - \theta + \alpha), \qquad x_2 = A\sin(nt + \alpha),$$

$$y_1 = 2A\cos(nt - \theta + \alpha), \qquad y_2 = 2A\cos(nt + \alpha),$$

$$z_1 = A\sqrt{3}\sin(nt + \alpha) \qquad z_2 = A\sqrt{3}\sin(nt + \theta + \alpha)$$

$$\theta = \arccos(1/3)$$

Поиск управления

- Линейная модель движения, включающая J2

$$\ddot{x} - 2nc\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2 x = ub_x,$$

$$\ddot{y} + 2nc\dot{x} = ub_y,$$

$$\ddot{z} + q^2 z = 2lq\cos(qt+\phi) + ub_z$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (5c^2-2)n^2 & 0 & 0 & 0 & 2nc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2nc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

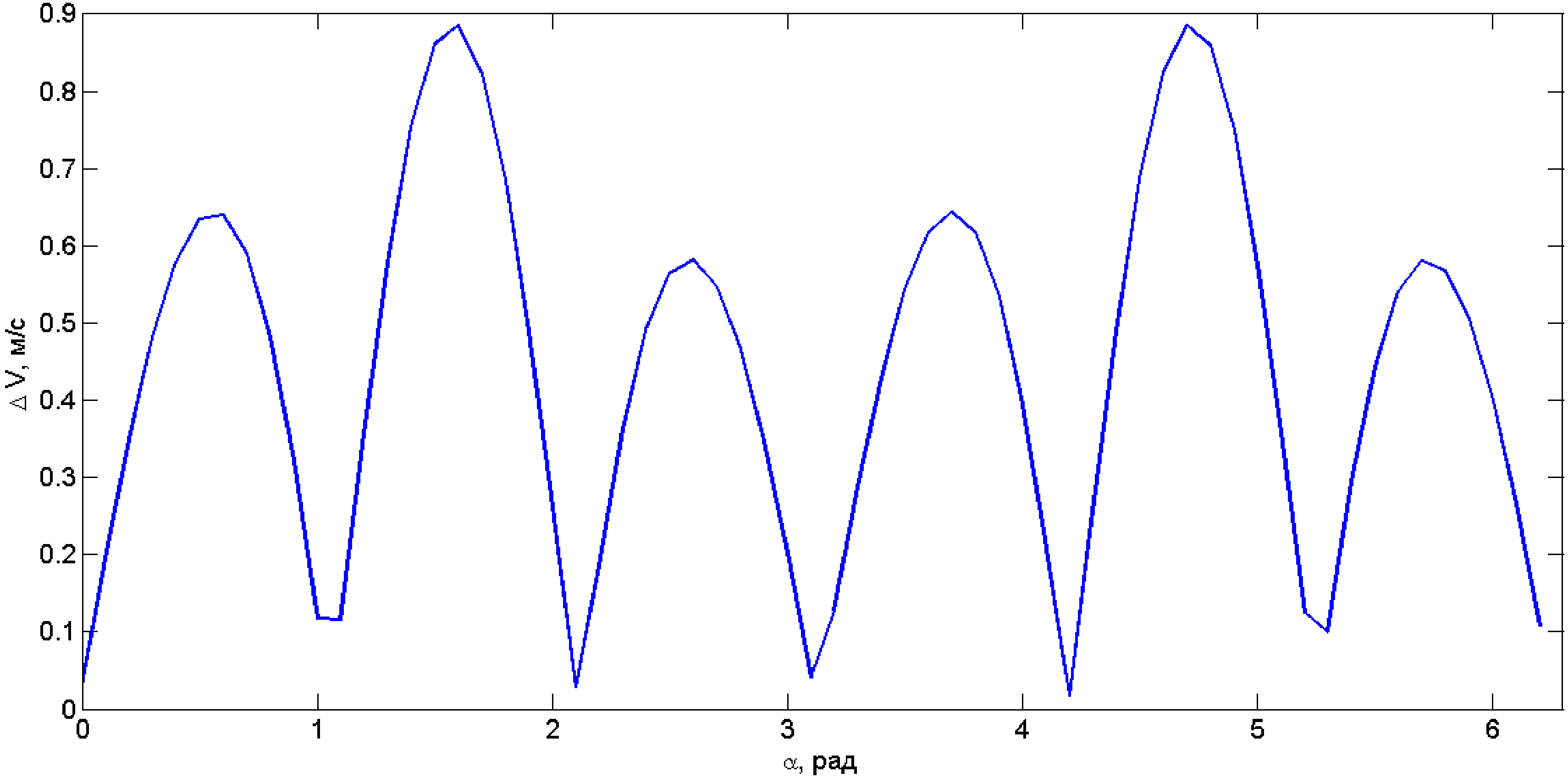
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2lq\cos(qt+\phi) \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp\big(\mathbf{A}(t-s)\big)\big(\mathbf{a}(s) + \mathbf{b}(s)u(s)\big)ds$$

- Заменяя интеграл конечной суммой, получаем

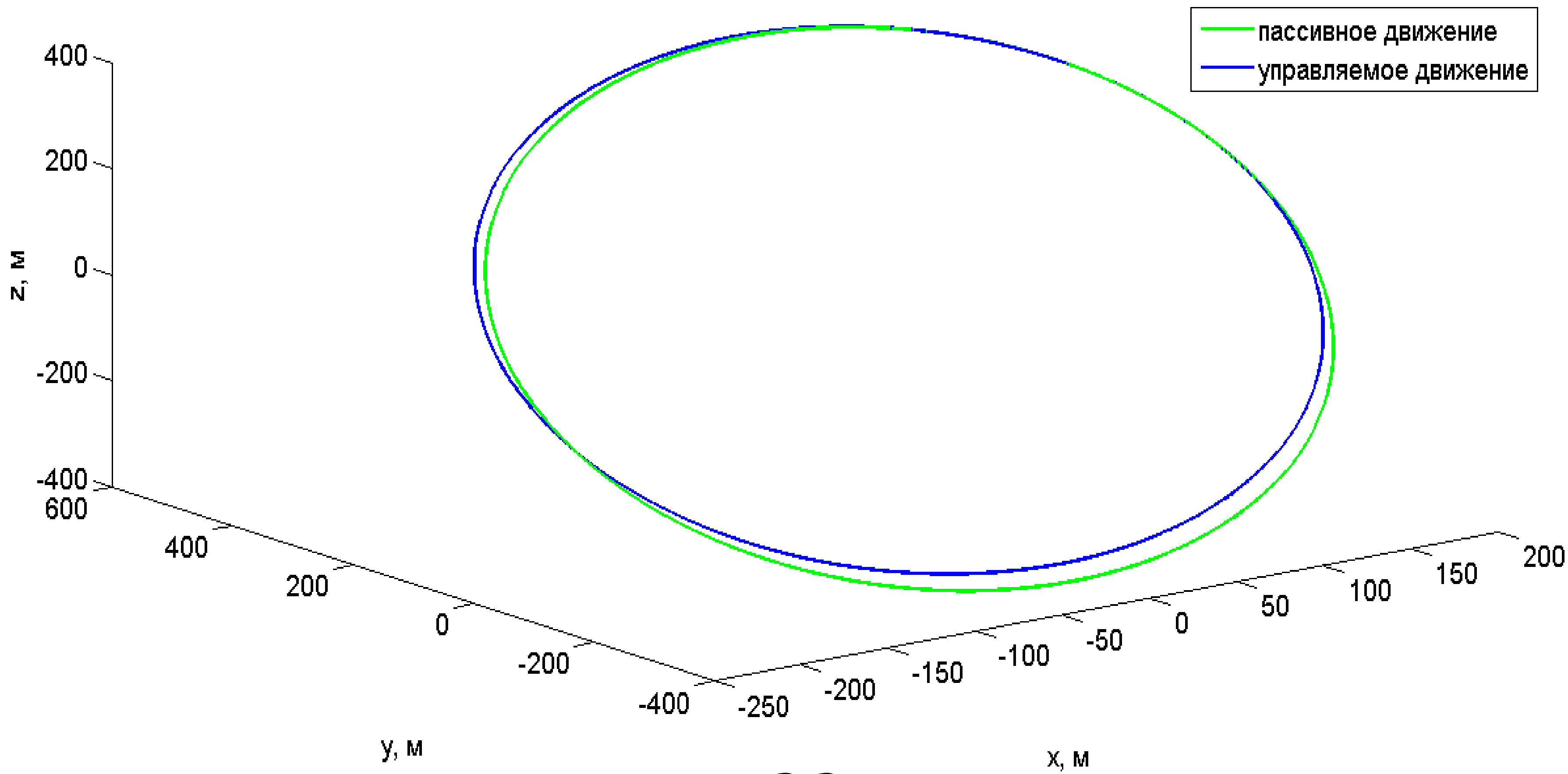
$$\mathbf{RU} + \mathbf{p} = 0, \qquad \mathbf{U} = -\mathbf{R}^T(\mathbf{RR}^T)^{-1}\mathbf{p}$$

Управление в линейной модели



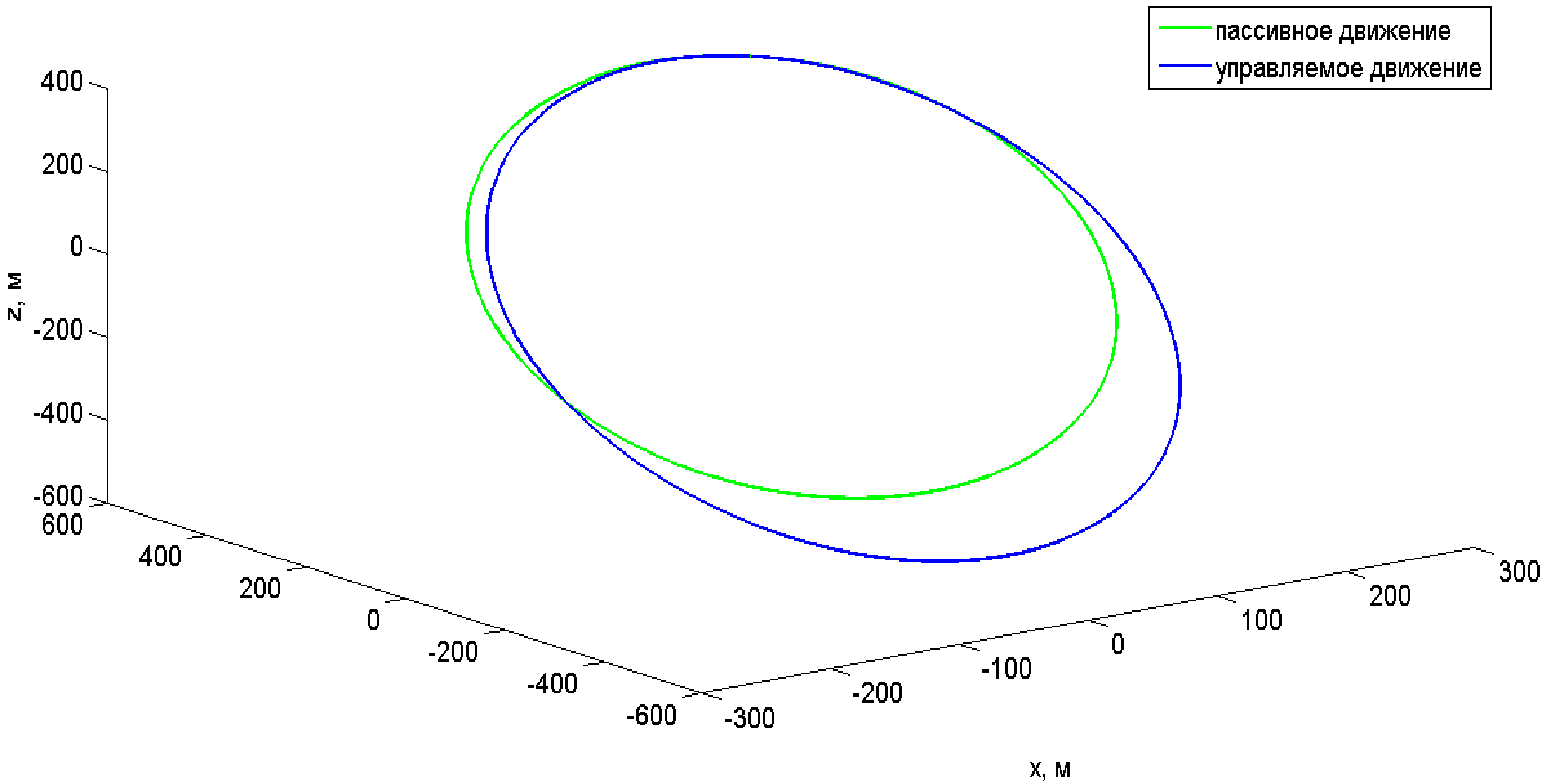
$$x = A\sin(nt - \theta + \alpha),$$
$$y = 2A\cos(nt - \theta + \alpha),$$
$$z = A\sqrt{3}\sin(nt + \alpha)$$

Управление в линейной модели



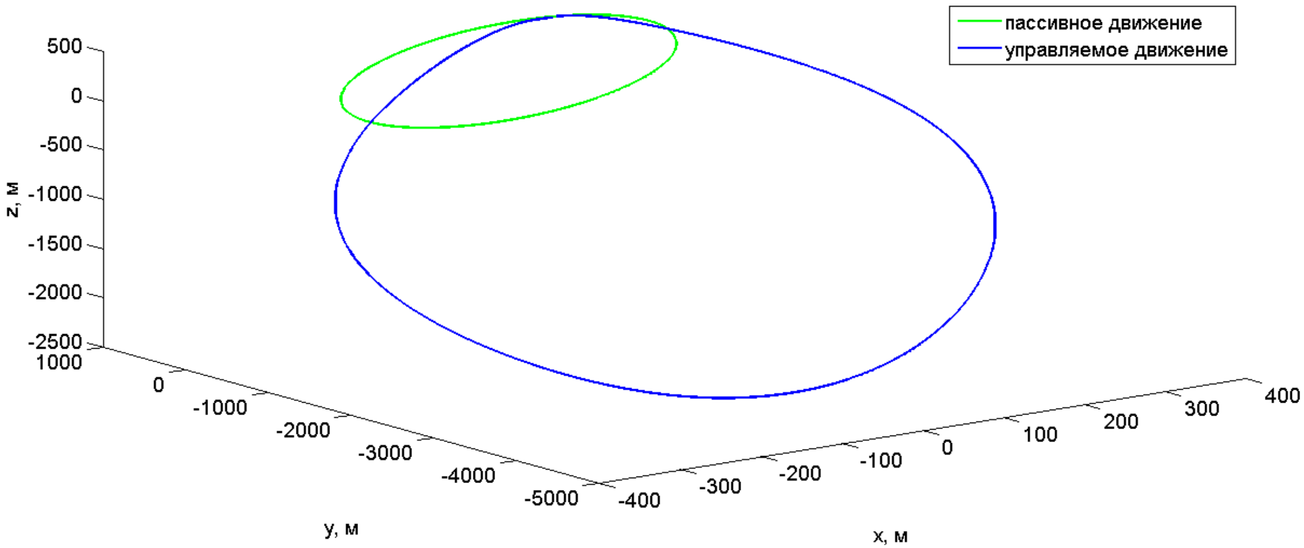
$$\alpha = 2.2$$

Управление в линейной модели



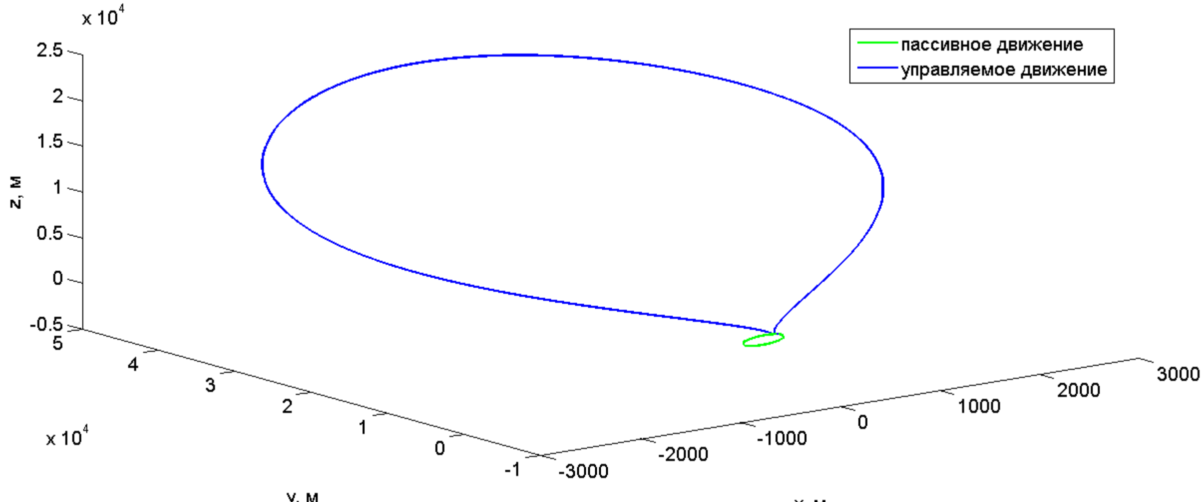
$$\alpha = 1.7$$

Управление в линейной модели



$$\Delta V = 18\ м/с$$

$$\Delta V = 198\ м/с$$



Управление в нелинейной модели

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_{NS} + \mathbf{b}(t)u(t),$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 ds \to \min,$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f,$$

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}(\mathrm{t}_f) = \mathbf{v}_f$$

Поиск управления с помощью принципа максимума Понтрягина

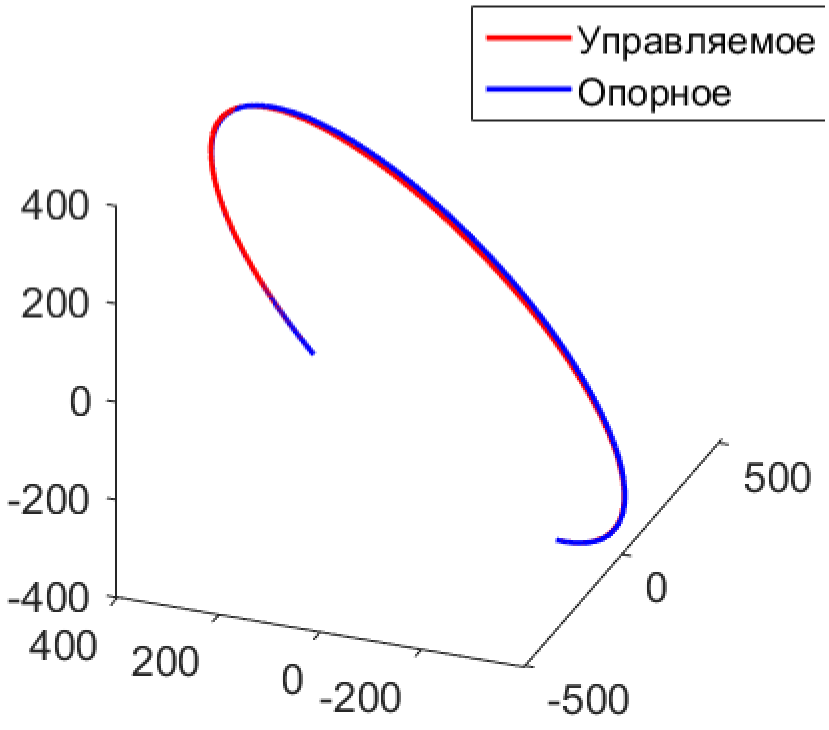
$$\mathrm{H} = -u^2 + \left(\boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{v}\right) + \left(\boldsymbol{\lambda}_v, -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a}_{NS} + \mathbf{b}(t)u(t)\right)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}_r}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}},$$

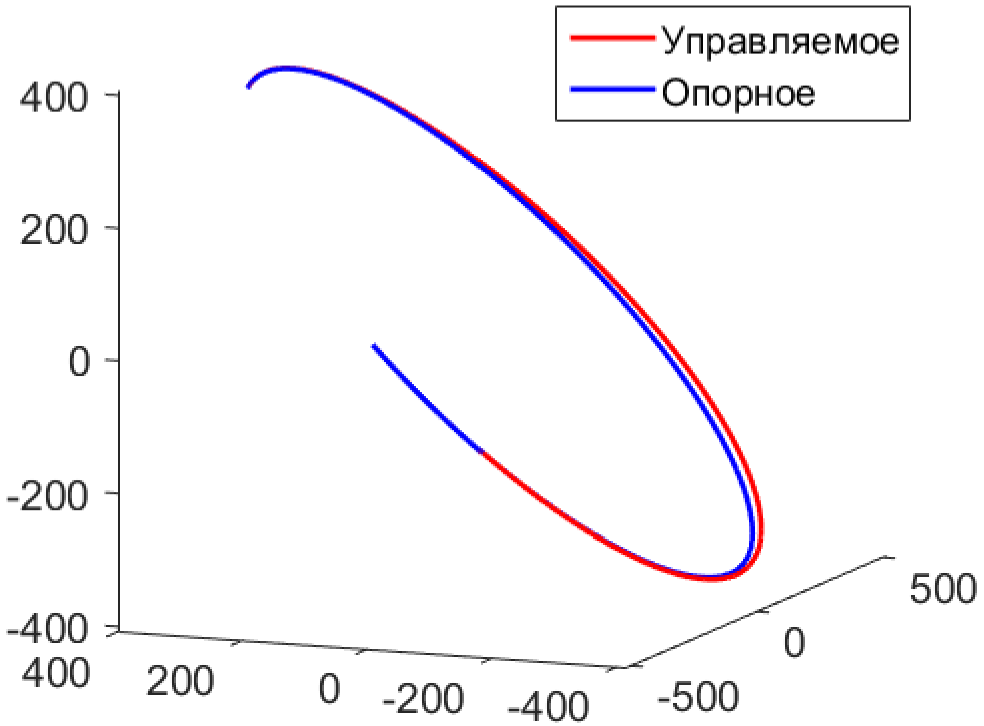
$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}_v}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}$$

Краевая задача решается с помощью метода пристрелки

Управление в нелинейной модели



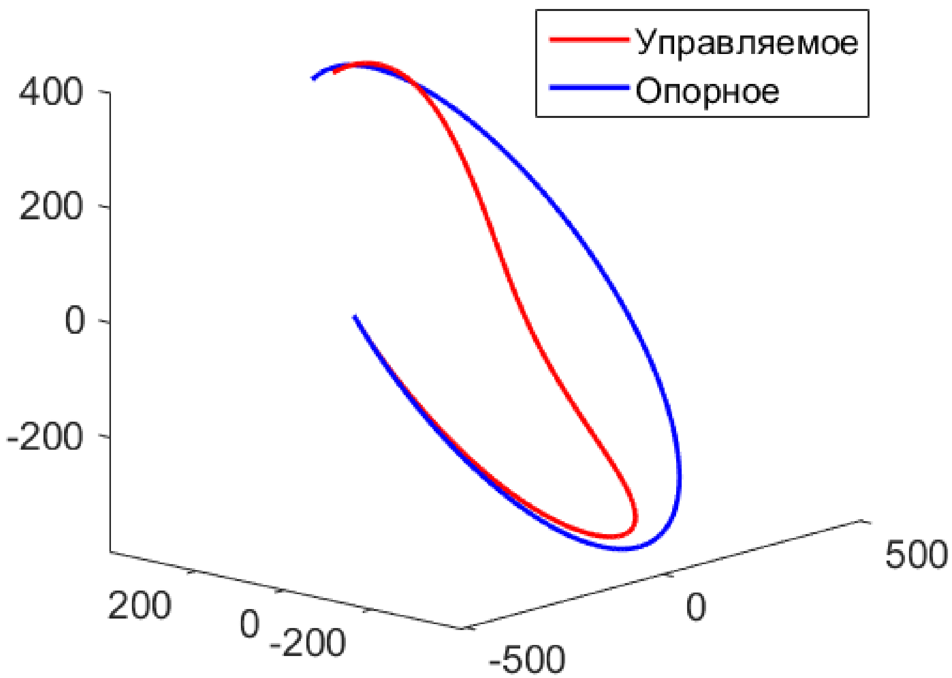
$$\Delta V = 0.79\ м / с$$

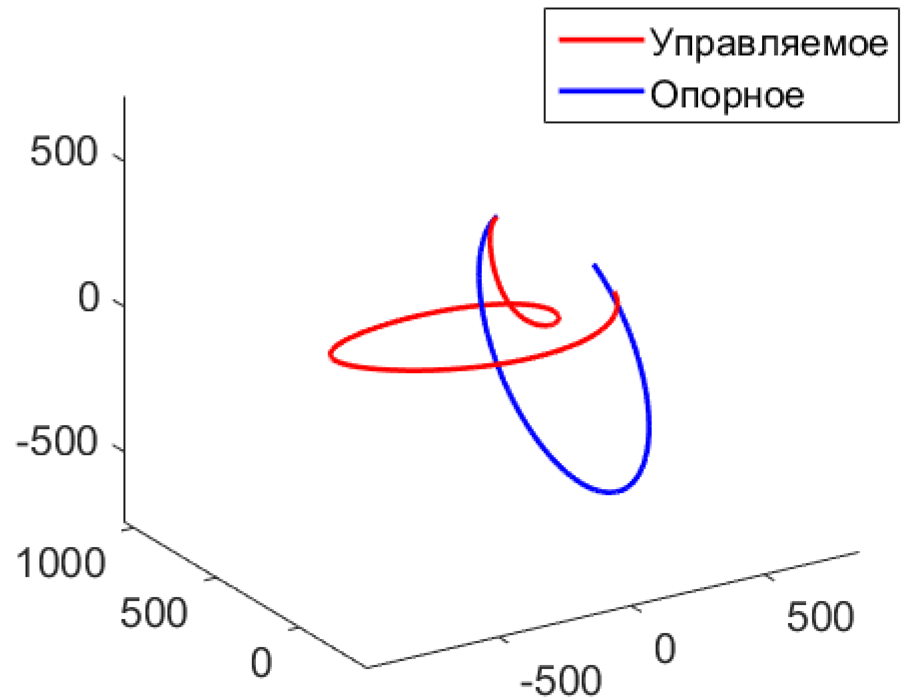


$$\Delta V = 5\ м / с$$

Поддержание в течение 0.8 витка

Управление в нелинейной модели

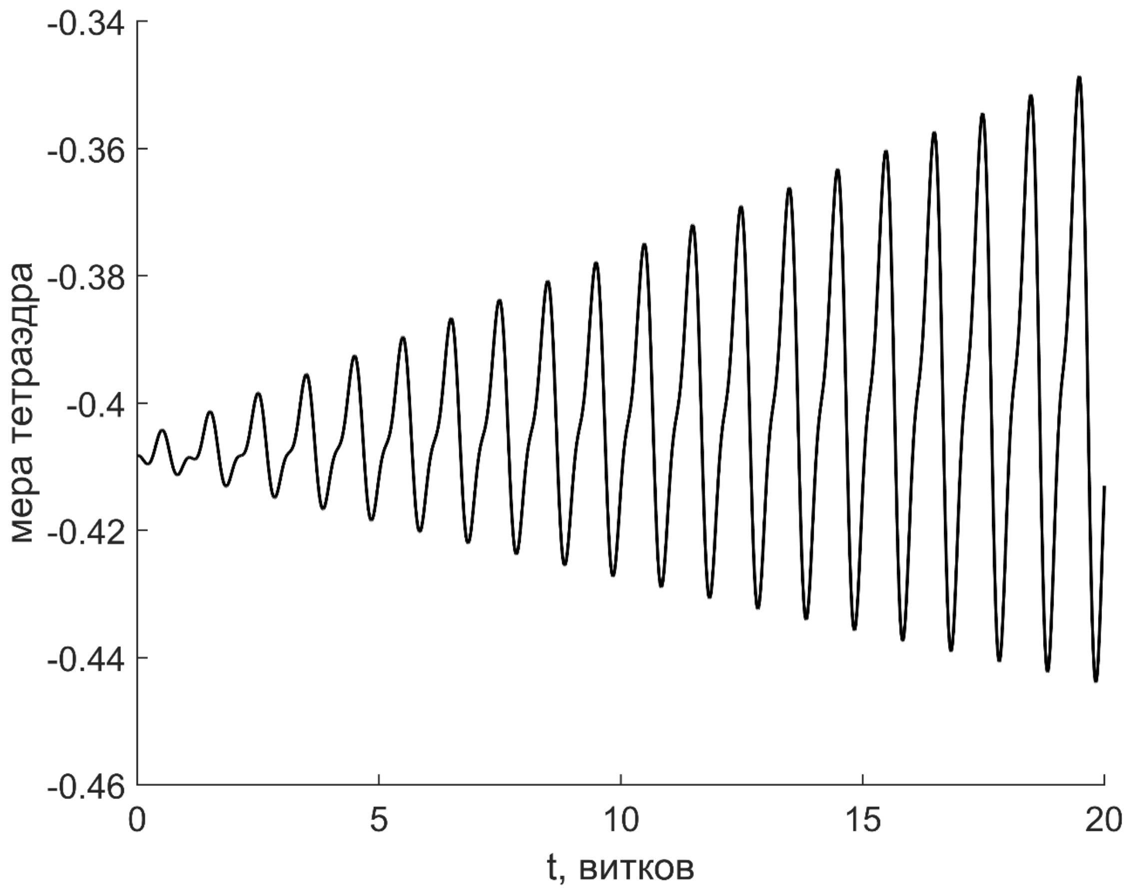




$\Delta V = 11.5\ м/с$ $\qquad$ $\Delta V = 105\ м/с$

После 20 пассивных витков

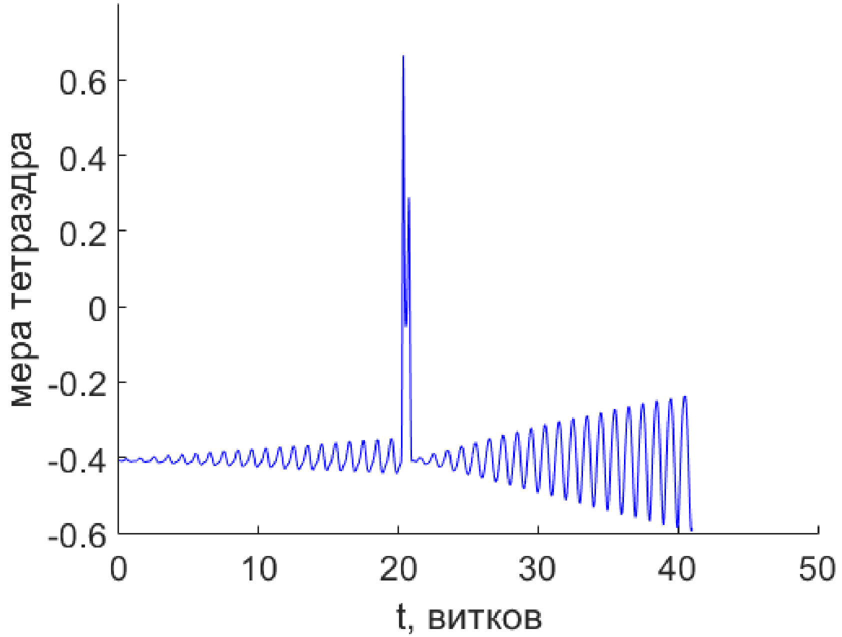
Эволюция качества тетраэдра



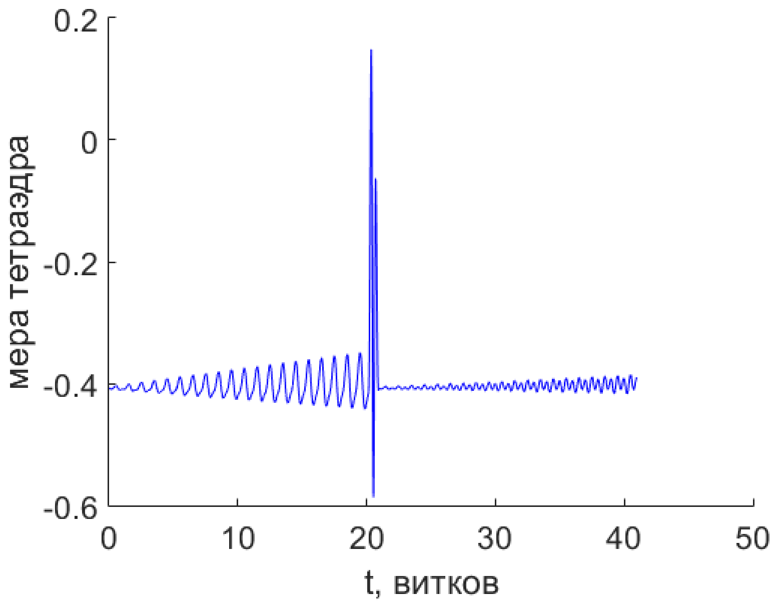
Эволюция в пассивном движении

Эволюция качества тетраэдра

Управление после 20 пассивных витков в течение 0.8 витка

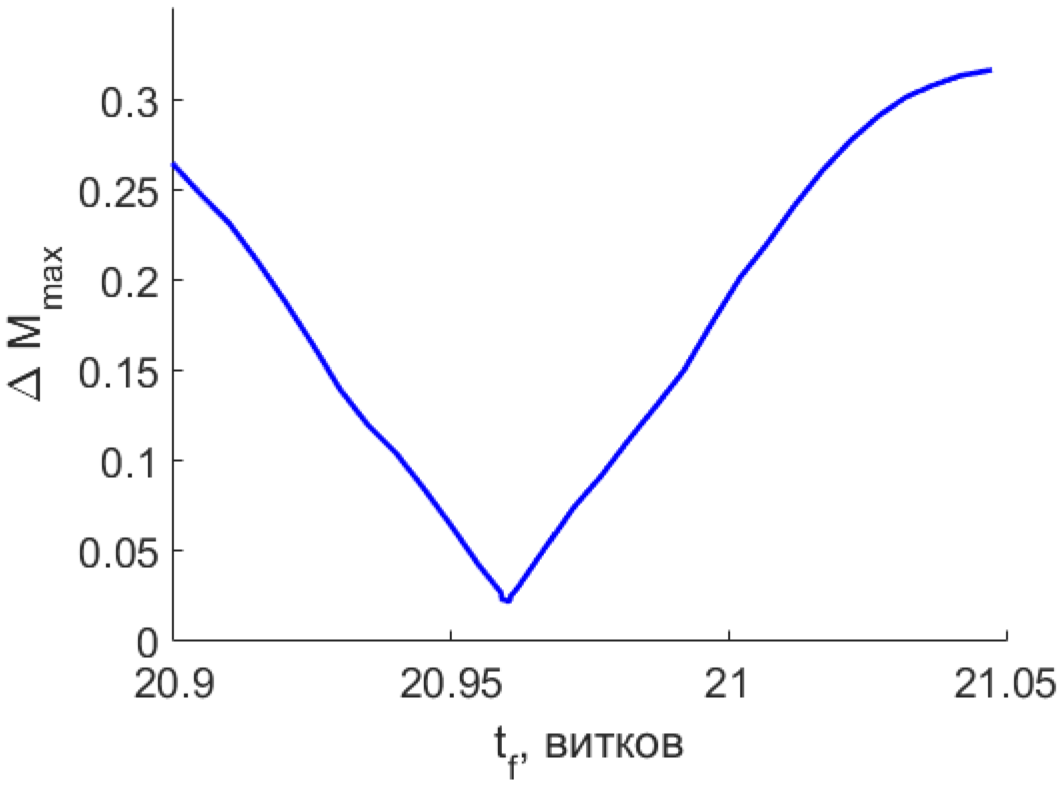


Окончание управления: 21 виток



Окончание управления: 20.96 витка

Эволюция качества тетраэдра



Скорость потери качества после управления

Заключение

- В рамках линейной модели найдена опорная орбита, сохраняющая объём и качество тетраэдра
- Предложен алгоритм синтеза одноосного управления движением центра масс спутников рамках линейной (учитывающей J2) и нелинейной моделей
- Устойчивость формации в зависимости от начальных данных подлежит дальнейшему исследованию

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00739