59-я научная конференция МФТИ
27 ноября 2016 года

Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук
в современном информационном обществе

Динамика и управление движением космических аппаратов

Методы решения задачи Штарка для оптимизации межпланетных перелетов с малой тягой

А.А.Целоусова, студентка 4 курса ФУПМ

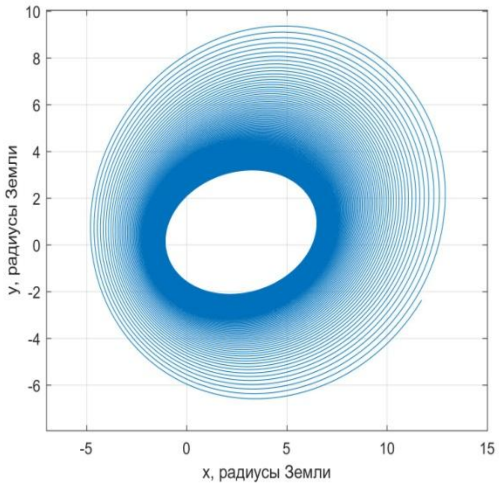
Научный руководитель: М.Г. Широбоков

Содержание

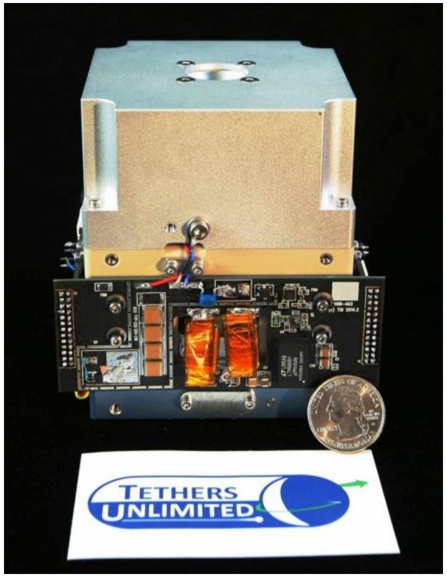
- Малая тяга
- Оптимизация траекторий с малой тягой
- Задача Штарка
- Обзор методов решения задачи Штарка
- Заключение

Малая тяга

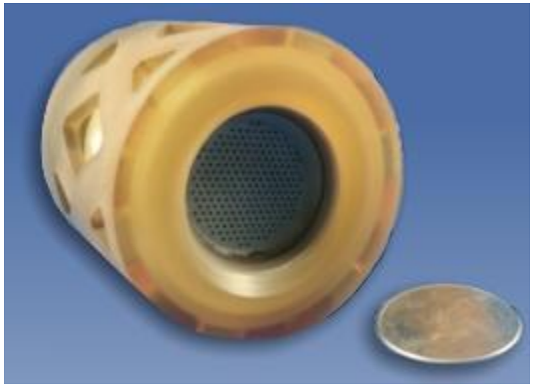
Тяга малая, если $$\frac{a_\tau}{g} < 10^{-4}$$



СПД-100В



HYDROS



BIT-3

Двигатели большой тяги

- Большая сила тяги
- Небольшое время разгона
- Большой расход топлива
- Малый удельный импульс (< 3 000с)

Двигатели малой тяги

- Малая сила тяги
- Большое время разгона
- Малый расход топлива
- Большой удельный импульс (1 000—10 000 с)

Оптимизация траекторий с малой тягой

Непрямые методы: принцип максимума Понтрягина

✓ Решение является оптимальным

✗ Трудно подобрать начальные условия для сопряженных переменных

Прямые методы: управление дискретизируется

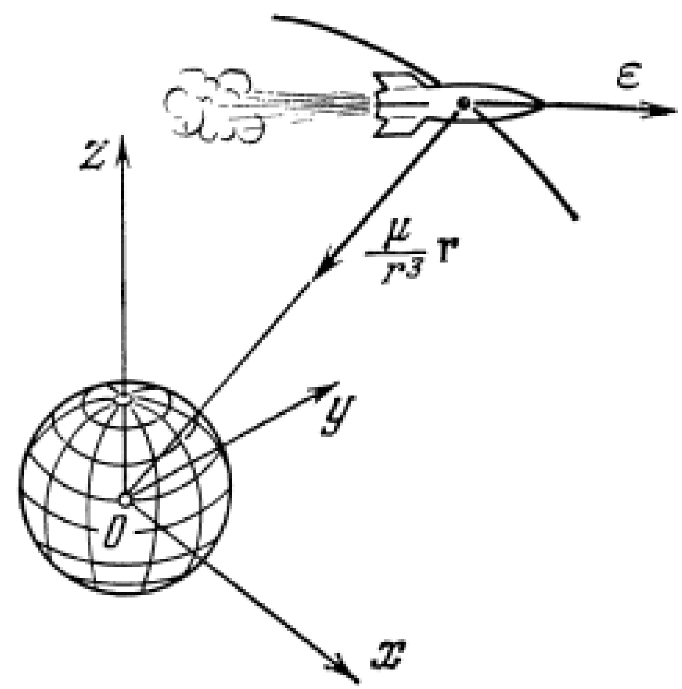
✗ Решение не является оптимальным

✓ Сходимость обеспечивается для широкой области начальных условий

Задача Штарка

Определение орбиты космического аппарата (КА) в центральном поле с учетом постоянного по направлению и величине возмущающего ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$

Уравнения движения:



$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r_0} \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}$$

$$\mathbf{r}(t) = ? \qquad \mathbf{v}(t) = ?$$

Основные этапы в решении задачи Штарка

- **1815 г., Ж.Лагранж**: задача в квадратурах
- **1849 г., К. Якоби и Ж. Лиувилль**: параболические координаты, разделение уравнений движения
- **1964 г., В.В. Белецкий:** классификация орбит в двумерной задаче
- **1965 г., В.Г. Демин:** предельный случай интегрируемой задачи двух неподвижных центров, когда один из них удален в бесконечность
- **1966 г., А.Л. Куницын:** классификация орбит в трехмерной задаче
- **1971г., Ю. Кирхграбер:** KS-переменные для разделения уравнений
- **1972 г., Ю.Н.Исаев:** моделирование движения КА с учетом сил светового давления
- **2004 г., С.М. Полещиков:** KS-переменные для разделения уравнений

Современные эффективные методы решения задачи Штарка

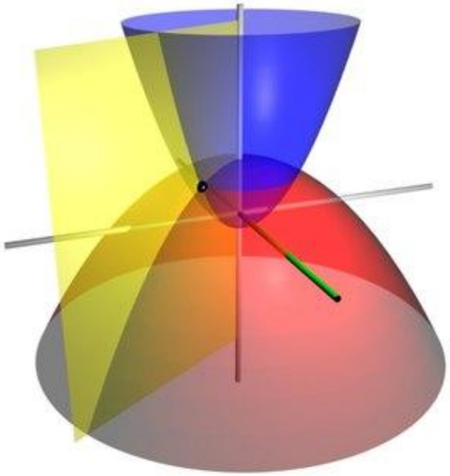
Г.Лантуан, Р.Рассел 2009 г.	Ф.Бискани, Д.Иццо 2014 г.	Э. Пеллегрини, Р.Рассел 2015 г.
Представление решений в параболических координатах в виде эллиптических функций Якоби	Представление решений в параболических координатах в виде эллиптических функций Вейерштрасса	F-, G- и H- ряды

Параболические координаты

Трехмерный случай:

$$\begin{cases} x = \xi\eta\cos\varphi \\ y = \xi\eta\sin\varphi \\ z = \dfrac{\xi^2 - \eta^2}{2} \end{cases}$$

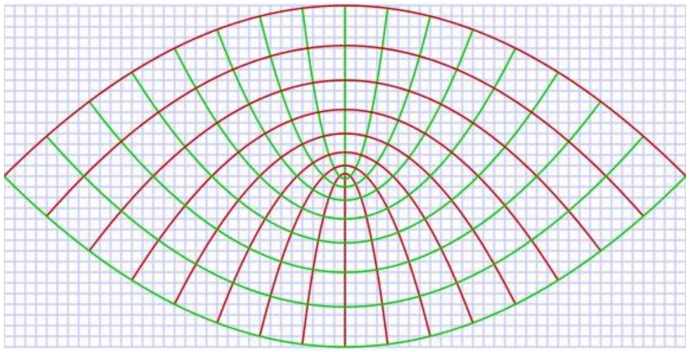
$$\xi \geqslant 0$$
$$\eta \geqslant 0$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$



Двумерный случай:

$$\begin{cases} x = \xi\eta \\ y = \dfrac{\xi^2 - \eta^2}{2} \end{cases}$$

$$\xi \geqslant 0$$
$$\eta \geqslant 0$$



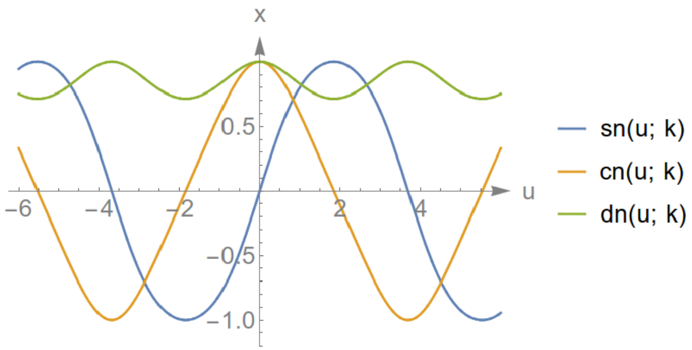
Эллиптические интегралы и функции

Эллиптический интеграл: $$f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)})dt$$

Эллиптические функции – обратные к эллиптическим интегралам.

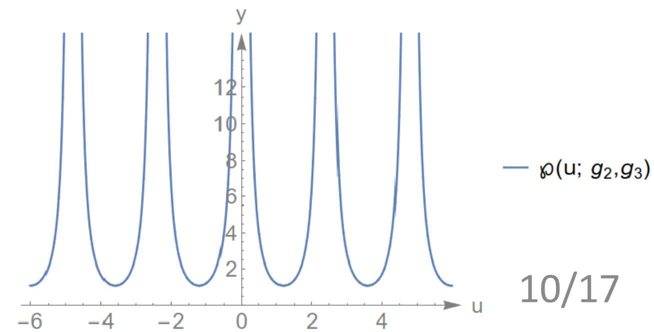
Эллиптическая функция Якоби $x = \mathrm{sn}(u;k)$ **–** обратная к :

$$u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad 0 \le k^2 \le 1$$



Эллиптическая функция Вейерштрасса $y = \wp(u\,; g_2, g_3)$ – обратная к:

$$u = \int_y^\infty \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \qquad g_2, g_3 = \mathrm{const}$$



Аналитическое решение задачи

Гамильтониан системы в исходных переменных:

$$H = U + T = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} + \varepsilon z$$

Гамильтониан в параболических переменных:

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\xi^2\eta^2} - \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2} - \varepsilon\frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \quad , \qquad p_\varphi = const$$

После выполнения преобразования Сундмана: $dt = (\xi^2 + \eta^2)d\tau$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = p_\xi = \pm\dfrac{1}{\xi}\sqrt{\varepsilon\xi^6 + 2h\xi^4 + 2\alpha_1\xi^2 - p_\varphi^2} \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = p_\eta = \pm\dfrac{1}{\eta}\sqrt{-\varepsilon\eta^6 + 2h\eta^4 + 2\alpha_2\eta^2 - p_\varphi^2} \\ \dfrac{d\varphi}{d\tau} = p_\varphi^2\left(\dfrac{1}{\xi^2} + \dfrac{1}{\eta^2}\right) \end{cases}$$

$$\tau = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{u du}{\sqrt{P_\xi(u)}}$$

$$P_\xi(u) = \varepsilon u^6 + 2Hu^4 + 2\alpha_1 u^2 - p_\varphi^2$$

$$\tau = \tau(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \xi(\tau)$$

Эллиптические
функции
Якоби
(Лантуан,Рассел)

Эллиптические
функции
Вейерштрасса
(Бискани,Иццо)

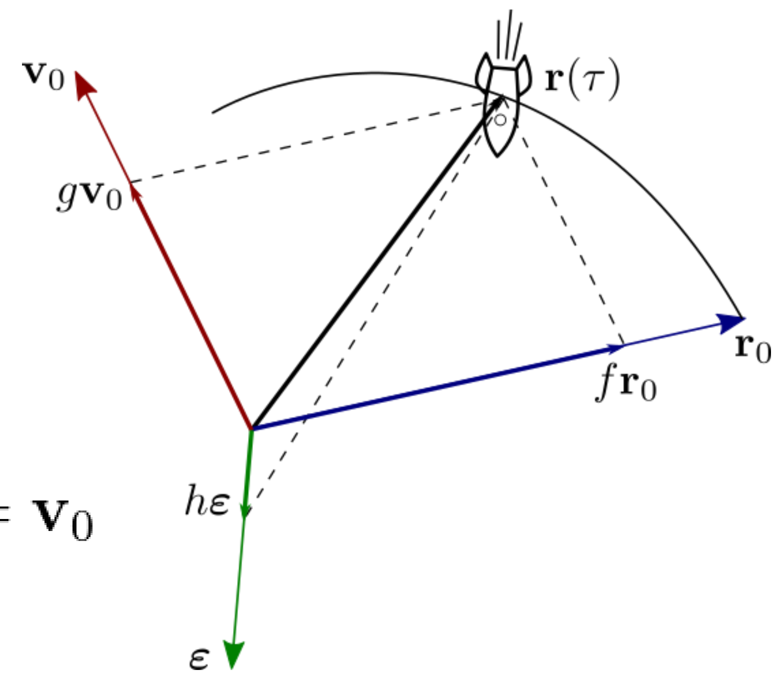
F-, G- и H-ряды

Регуляризирующее преобразование:

$$dt = r^\alpha d\tau$$

Решение ищется в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\tau) = f(\tau)\mathbf{r}_0 + g(\tau)\mathbf{v}_0 + h(\tau)\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v}(\tau) = \dot{f}(\tau)\mathbf{r}_0 + \dot{g}(\tau)\mathbf{v}_0 + \dot{h}(\tau)\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases}$$



$$\tau = \tau_0 + \Delta\tau, \quad \mathbf{r}(\tau_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(\tau_0) = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{d^n\mathbf{r}}{d\tau^n}\right|_{\tau_0} \frac{\Delta\tau^n}{n!}$$,где

$$\left.\frac{d^n\mathbf{r}}{d\tau^n}\right|_{\tau_0} = F_n\mathbf{r}_0 + G_n\mathbf{v}_0 + H_n\boldsymbol{\varepsilon}$$

Дифференцируя выражение по τ :

$$\left.\frac{d^n\mathbf{r}}{d\tau^n}\right|_{\tau} = F_n(\tau)\mathbf{r}(\tau) + G_n(\tau)\mathbf{v}(\tau) + H_n(\tau)\boldsymbol{\varepsilon}$$

выражаем $F_{n+1}, G_{n+1}, H_{n+1}$ через F_n, G_n, H_n

В итоге: $\mathbf{r}(\tau) = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 + h\boldsymbol{\varepsilon}$, где

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}[F_n\,|_{\tau_0}\;\frac{\Delta\tau^n}{n!}]$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty}[G_n\,|_{\tau_0}\;\frac{\Delta\tau^n}{n!}]$$

$$h = \sum_{n=0}^{\infty}[H_n\,|_{\tau_0}\;\frac{\Delta\tau^n}{n!}]$$

$$F_{n+1} = F'_n + cr^{\alpha}G_n(-\frac{\mu}{r^3})$$

$$G_{n+1} = G'_n + cr^{\alpha}F_n$$

$$H_{n+1} = H'_n + cr^{\alpha}G_n$$

$$\Delta t \simeq \sum_{n=1}^{N} T_n\frac{\Delta\tau^n}{n!},\; T_{n+1} = T'_n \,,$$

где $F_0 = 1, G_0 = 0, H_0 = 0, T_1 = cr^{\alpha}$

Сравнение методов (Н. Хаттен и Р.Рассел, 2015 г.)

Эллиптические функции Якоби (Лантуан)	**Эллиптические функции Вейерштрасса (Бискани)**	**F- , G- и H-ряды (Пеллегрини)**
✓ аналитический метод	✓ аналитический метод	✗ полуаналитический
✓ быстрее метода Бискани (t = 7 мкс)	✓ быстрее RKF8 (t = 20 мкс)	✓ быстрее всех при 12-18 порядках (t = 0.8 – 9 мкс)
✗ классификация случаев по начальным данным	✓ универсальные формулы	✓ универсальные формулы
✗ 3D и 2D различаются	✗ Только 3D	✓ 3D и 2D совпадают
✓ все вычисления проводятся с действительными числами	✗ используются вычисления в поле комплексных чисел	✗ нужно контролировать шаг по времени
✗ Ошибки округления являются основным источником погрешности	✓ проще всего реализуется программно	✓ точность регулируется выбором количеством слагаемых ряда

Заключение

- При оптимизации траекторий сначала используют прямые методы, а затем их решение рассматривают в качестве начального приближения для непрямых методов

- Оптимальное управление в прямых методах ищется в кусочно-постоянном виде, отсюда возникает задача Штарка

- Среди всех методов решения задачи Штарка на настоящий момент наиболее эффективным и универсальным является метод Пеллегрини

Спасибо за внимание!

KS - переменные

- Переменные **u** и **w**, связанные с **r** и **v** соотношением

$$\mathbf{r} = \Lambda(\mathbf{u})\mathbf{u}$$
$$\mathbf{v} = \frac{2}{u^2}\Lambda(\mathbf{u})\mathbf{w}$$

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

Разделение переменных в Гамильтониане

- Введем функцию $\mathcal{H}_\tau = (H - h)(\xi^2 + \eta^2)$
- Тогда $\mathcal{H}_\tau$ - гамильтониан системы во времени τ

$$\mathcal{H}_\tau = \underbrace{\frac{p_\xi^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2}\frac{1}{\xi^2} - h\xi^2 - \frac{\varepsilon}{2}\xi^4}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{p_\eta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2}\frac{1}{2}\eta^2 - h\eta^2 + \frac{\varepsilon}{2}\eta^4}_{\alpha_2} - 2\mu$$

Решение Бискани

$$\xi^2 = \xi_0^2 + \frac{1}{\left[\wp_\xi(\tau) - \frac{1}{24} f_\xi''\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right)\right]^2}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{2} f_\xi'\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right) \left[\wp_\xi(\tau) - \frac{1}{24} f_\xi''\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right)\right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24} f_\xi\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right) f_\xi'''\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right) \pm \sqrt{f_\xi\left(\frac{\xi_0^2}{2}\right)}\wp_\xi'(\tau) \right\}$$

$$P_\xi(s) = a_4 + 4a_3 s + 6a_2 s^2 + 4a_1 s^3,$$

$$g_2 = -4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$g_3 = 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_1^2 a_4,$$

$$\wp_\xi(\tau) \equiv \wp(\tau; g_2, g_3),$$

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2\right)+\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2\right]$$
$$+\frac{2\mu}{\xi^2+\eta^2}+\varepsilon\frac{\xi^2-\eta^2}{2}.$$

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \left(\xi^2+\eta^2\right)\dot{\xi}$$

$$\longrightarrow \qquad p_\xi = \frac{d\xi}{d\tau}:$$

$$dt = \left(\xi^2+\eta^2\right)d\tau.$$