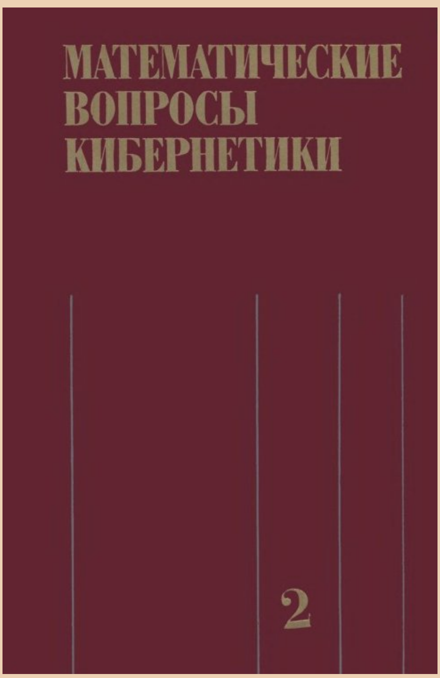

С. С. Марченков

Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов

КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБР СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ *)

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Нетрудно видеть, что существует по меньшей мере континуум попарно не изоморфных универсальных алгебр $\langle E;\ F\rangle$ с носителем E, содержащим более одного элемента. Поэтому всякая обозримая классификация универсальных алгебр должна, по-видимому, базироваться на отношении эквивалентности, более широком, чем изоморфизм. В работе [12] было предложено считать алгебры $\langle E;\ F\rangle$, $\langle E;\ G\rangle$ эквивалентными, если совпадают клоны $[F]$, $[G]$, порожденные множествами операций F, G.

Для двухэлементного носителя E имеется с точностью до эквивалентности счетное число алгебр $\langle E;\ F\rangle$. Все они описаны Постом [14] (см. также [9]). Однако, согласно работе [10], уже в случае трехэлементного множества E число попарно не эквивалентных алгебр $\langle E;\ F\rangle$ равно континууму. Дальнейшее продвижение в этом направлении связано с изучением алгебр, допускающих нетривиальные автоморфизмы. Так, в работах [2, 3, 4, 12] с точностью до эквивалентности описаны все алгебры $\langle E;\ F\rangle$, у которых носитель E содержит не менее трех элементов, а группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\langle E;\ F\rangle$ является симметрической группой всех перестановок на множестве E. Эти алгебры получили название однородных.

С другой стороны, в работах [4, 5] установлено, что для любого конечного множества E, $|E| \geqslant 3$, и любой циклической группы Γ перестановок на множестве E существует континуум попарно не эквивалентных алгебр $\langle E;\ F\rangle$ с условием $\mathrm{Aut}\,\langle E;\ F\rangle = \Gamma$. Приведенные результаты показывают, что следующим этапом в данном направлении должно явиться исследование алгебр с достаточно большими группами автоморфизмов. По существу такая же идея высказывается в интересном обзоре [11], который посвящен однородности в широком смысле (свойству алгебраических систем, характеризуемому группами их автоморфизмов). Естественно, что среди алгебр с конечным носителем прежде всего следует рассмотреть алгебры со знакопеременной группой автоморфизмов. Так как знакопеременная группа третьей степени является циклической, то, в силу результатов работы [5], в этом случае имеется континуум не эквивалентных алгебр. Поэтому в настоящей статье рассматриваются остальные случаи, когда носитель алгебры содержит не менее четырех элементов. Мы показываем, что при этом условии с точностью до эквивалентности имеется конечное число алгебр $\langle E;\ F\rangle$: 20, если $|E| = 4$, и $8k - 11$, если $|E| \geqslant 5$.

Построения существенно опираются на результаты работ [2, 3, 9]. В связи с этим изложение ведется в терминах функций многозначной

---

*) Краткое изложение результатов настоящей статьи приведено в [6].

логики (см. [7, 8]). Именно, если конечное множество E содержит более одного элемента, то удобно считать, что $E = E_k = \{0, \ldots, k-1\}$ для подходящего натурального k. Тогда множество F алгебры $\langle E_k; F\rangle$ состоит из функций k-значной логики P_k, самодвойственных относительно перестановок из группы $\mathrm{Aut}\langle E_k; F\rangle$. Поэтому, если Γ_k — знакопеременная группа перестановок на множестве E_k, то перечисление всех с точностью до эквивалентности алгебр $\langle E_k; F\rangle$ с условием $\mathrm{Aut}\langle E_k; F\rangle \supseteq \Gamma_k$ сводится к перечислению всех замкнутых классов функций из P_k, самодвойственных относительно всех четных перестановок.

В § 1 статьи приводятся необходимые определения и устанавливаются простейшие свойства вводимых объектов. В § 2 доказываются леммы о базисах и порядках, а в § 3 — леммы о полноте.

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть $\langle E; F\rangle$ — универсальная алгебра. Автоморфизмом алгебры $\langle E; F\rangle$ называется перестановка π множества E такая, что для любой операции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из F и любых элементов $e_1, \ldots, e_n$ из E справедливо равенство

$$\pi(f(e_1, \ldots, e_n)) = f(\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n)). \tag{1}$$

Множество $\mathrm{Aut}\langle E; F\rangle$ всех автоморфизмов алгебры $\langle E; F\rangle$ образует группу. В дальнейшем мы рассматриваем лишь алгебры вида $\langle E_k; F\rangle$, где $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}\langle E_k; F\rangle$ является подгруппой симметрической группы Σ_k перестановок k-й степени на E_k. Посредством Γ_k обозначаем знакопеременную подгруппу в Σ_k. Если $\mathrm{Aut}\langle E_k; F\rangle = \Sigma_k$, то *алгебру* $\langle E_k; F\rangle$ называем *однородной*, а если $\Gamma_k \subseteq \mathrm{Aut}\langle E_k; F\rangle$ — то *четной*. Аналогично, *операцию* (*функцию*) f называем *однородной*, если $\mathrm{Aut}\langle E_k; \{f\}\rangle = \Sigma_k$, и *четной*, если $\Gamma_k \subseteq \mathrm{Aut}\langle E_k; \{f\}\rangle$.

Для любого $k \geqslant 2$ пусть P_k обозначает множество всех функций k-значной логики (см. [7, 8]). Если для перестановки π, $\pi \in \Sigma_k$, и функции f, $f \in P_k$, равенство (1) выполняется при любых элементах $e_1, \ldots, e_n$ из E_k, то говорят, что функция f сохраняет перестановку π или что f самодвойственна относительно π. Для любого $k \geqslant 4$ через A_k обозначим множество всех четных функций из P_k. Другими словами, A_k — это множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно всех перестановок из Γ_k (но, возможно, и относительно других). Если $\langle E_k; F\rangle$ — четная алгебра, то клон $[F]$ является замкнутым классом, содержащимся в A_k. Используя результаты работ [2, 3], мы опишем все замкнутые классы, лежащие в A_k. Тем самым будут описаны все с точностью до эквивалентности четные алгебры с носителем E_k.

Для любой функции $f\colon E_k^n \to E_k$ и любого i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, через $B_i f$ обозначим ограничение функции f на множестве E_i^n. Если, в частности, функция f сохраняет множество E_2, то ограничение $B_2 f$, являющееся булевой функцией, будем называть булевым ограничением. В работе [13] показано, что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant k-2)$ любая однородная функция из P_k сохраняет множество E_i. Поэтому при $k \geqslant 4$ ограничение $B_2 f$ однородной функции f является булевой функцией.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — наборы из E_k^n. Назовем их *однотипными*, если для любых i, j имеем $(a_i = a_j) \equiv (b_i = b_j)$. Пусть π — перестановка из Σ_k. Говорим, что наборы a, b двойственны относительно π, если либо $(a_1, \ldots, a_n) = (\pi(b_1), \ldots, \pi(b_n))$, либо $(b_1, \ldots, b_n) = (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$.

Прежде чем переходить к дальнейшим определениям, сформулируем простейшие свойства четных функций, которые легко вытекают из основных определений.

Лемма 1. *Для любого $k \geqslant 4$ и любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из A_k справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k-3$, функция f сохраняет любое i-элементное подмножество из E_k.*

2. *Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k-2$, значение функции f на каком-либо наборе, содержащем i значений, однозначно определяет значение f на любом другом наборе того же типа.*

3. *При $i \in \{k-1, k\}$ множество всех n-наборов фиксированного типа, содержащих i значений, разбивается на два равномощных подмножества, содержащие каждое попарно двойственные относительно четных перестановок наборы. Значение функции f на каком-либо наборе одного подмножества определяет значение f на любом другом наборе того же подмножества.*

4. *Если функция f сохраняет множество E_2, то $B_2 f$ является самодвойственной функцией алгебры логики, сохраняющей* 0 *(в терминологии книги* [9] *— самодвойственной α-функцией).*

Напомним определения ряда однородных функций из работ [2, 3]:

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$s(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ y, & \text{если } x = z, \\ x & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$l_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ попарно различны,} \\ x_n & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функции r_k, d_k определены при $k \geqslant 4$:

$$r_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$d_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k, & \text{если } \{x_1, \ldots, x_k\} = E_k, \\ d(x_1, x_2, x_3) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При $k = 4$ пусть $f_0(x, y, z)$ — однородная функция, определяемая на множестве E_4^3 равенствами:

$$f_0(1, 2, 3) = f_0(0, 1, 1) = f_0(1, 0, 1) = f_0(1, 1, 0) = 0.$$

Наконец, при любом $n \geqslant 1$ и любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, будем рассматривать однородную селекторную функцию $u_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$.

Для любого $k \geqslant 4$ следующим образом определим четные функции α_k, β_k, γ_k, δ_k, ε_k:

$$B_{k-1}\alpha_k(x_1, \ldots, x_k) = x_k, \quad \alpha_k(0, 1, 2, \ldots, k-1) = \alpha_k(1, 0, 2, \ldots, k-1) = 0;$$

$$B_{k-2}\beta_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_{k-1},$$

$$\beta_k(0, 1, 2, \ldots, k-2) = \beta_k(1, 0, 2, \ldots, k-2) = 0;$$

$$B_{k-3}\gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-2}) = x_1, \quad \gamma_k(0, 1, \ldots, k-3) = k-2;$$

$$B_{k-1}\delta_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = d(x_1, x_2, x_3),$$

$$\delta_k(0, 1, 2, \ldots, k-1) = \delta_k(1, 0, 2, \ldots, k-1) = 0;$$
$$B_{k-2}\varepsilon_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}) = d(x_1, x_2, x_3),$$
$$\varepsilon_k(0, 1, 2, \ldots, k-2) = \varepsilon_k(1, 0, 2, \ldots, k-2) = 0.$$

Наконец, для $k \geqslant 5$ пусть $\zeta_k(x_1, \ldots, x_{k-2})$ — такая четная функция, что

$$B_{k-3}\zeta_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-2}) = d(x_1, x_2, x_3),$$
$$\zeta_k(0, 1, \ldots, k-3) = k-2.$$

Для любого $k \geqslant 2$ пусть O_1 обозначает класс всех селекторных функций из P_k. Из контекста всегда будет ясно, какое именно k имеется в виду. Мы приводим из книги [9] обозначения двух замкнутых классов булевых функций: L_4 — класс всех линейных α-функций, D_2 — класс всех самодвойственных монотонных функций.

Пусть f — функция из P_k, $2 \leqslant i \leqslant k$. Посредством $\Pi_i(f)$ обозначим следующее свойство: *если при некотором отождествлении переменных из функции f получается такая функция $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, что $B_2 f_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = x_j$, то $B_i f_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = x_j$.*

Пусть $k \geqslant 4$. Приведем теперь из работ [2, 3] определения всех замкнутых классов однородных функций из P_k, отличных от класса O_1. Через S_k обозначим класс всех однородных функций из P_k.

$$S_k^* = \{f\colon f \in S_k,\ B_{k-1}f \in P_{k-1}\},$$
$$S_kL_4 = \{f\colon f \in S_k,\ B_2 f \in L_4\},$$
$$S_kL_4^* = \{f\colon f \in S_k^*,\ B_2 f \in L_4\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq k-1$, пусть

$$S_k^iD_2 = \{f\colon f \in S_k,\ B_2 f \in D_2,\ \Pi_i(f)\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$, полагаем

$$S_k^iD_2^* = \{f\colon f \in S_k^*,\ B_2 f \in D_2,\ \Pi_i(f)\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k-2$, пусть

$$S_k^iO_1 = \{f\colon f \in S_k,\ B_i f \in O_1\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k-1$, полагаем

$$S_k^iO_1^* = \{f\colon f \in S_k^*,\ B_i f \in O_1\}.$$

Наконец, пусть

$$S_4^4L_4 = \{f\colon f \in S_4 \text{ и } f \text{ сохраняет множество функций } \{u_1^3(x, y, z),\ u_2^3(x, y, z),\ u_3^3(x, y, z),\ f_0(x, y, z)\}\}.$$

В работе [3] доказано, что при любом $k \geqslant 4$ все замкнутые классы, содержащиеся в S_k, исчерпываются классами S_k^*, S_kL_4, $S_kL_4^*$, $S_k^iD_2$ ($2 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq k-1$), $S_k^iD_2^*$ ($2 \leqslant i \leqslant k$), $S_k^iO_1$ ($2 \leqslant i \leqslant k-2$), $S_k^iO_1^*$ ($2 \leqslant i \leqslant k-1$), O_1; в случае $k = 4$ к перечисленным классам добавляется еще класс $S_4^4L_4$. Далее, базис класса S_k образуют функции $\{p, r_k\}$, базис класса S_k^* — функция p, класса S_kL_4 — функции $\{s, r_k\}$, класса $S_kL_4^*$ — функция s, класса $S_k^kD_2$ — функция d_k, класса $S_k^iD_2$ ($2 \leqslant i \leqslant k-2$) — функции $\{d_k, l_{i+1}\}$, класса $S_k^kD_2^*$ — функция d, класса $S_k^iD_2^*$ ($2 \leqslant i \leqslant k-1$) — функции $\{d, l_{i+1}\}$, класса $S_k^{k-2}O_1$ — функция r_k, класса $S_k^iO_1$ ($2 \leqslant i \leqslant k-3$) — функции $\{r_k, l_{i+1}\}$, класса $S_k^iO_1^*$ ($2 \leqslant i \leqslant k-1$) — функция l_{i+1}, класса $S_4^4L_4$ — функция f_0.

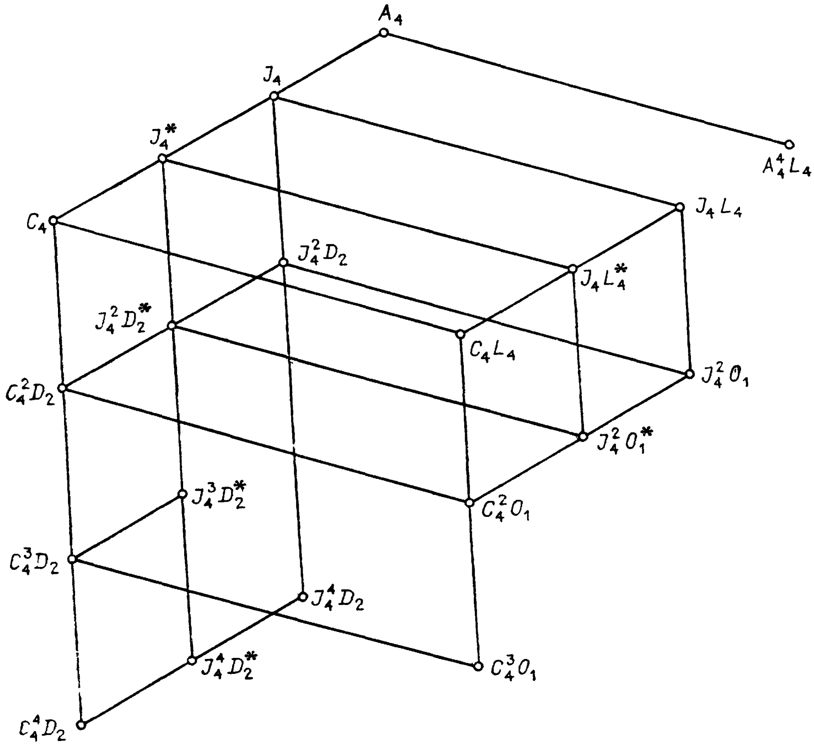

Рис. 1

Перейдем к определению замкнутых классов четных функций. Напомним, что через A_k мы обозначили класс всех четных функций из P_k. Положим далее

$$J_k = \{f\colon\ f \in A_k,\ B_{k-2}f \in P_{k-2}\},\quad J_kL_4 = \{f\colon\ f \in J_k,\ B_2f \in L_4\},$$
$$J_k^* = \{f\colon\ f \in J_k,\ B_{k-1}f \in P_{k-1}\},\quad J_kL_4^* = \{f\colon\ f \in J_k^*,\ B_2f \in L_4\},$$
$$C_k = \{f\colon\ f \in J_k^*,\ B_{k-1}f \in S_{k-1}\},\quad C_kL_4 = \{f\colon\ f \in C_k,\ B_2f \in L_4\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq k-1$, пусть

$$J_k^iD_2 = \{f\colon\ f \in J_k,\ B_2f \in D_2,\ \Pi_i(f)\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k$, пусть

$$J_k^iD_2^* = \{f\colon\ f \in J_k^*,\ B_2f \in D_2,\ \Pi_i(f)\},$$
$$C_k^iD_2 = \{f\colon\ f \in C_k,\ B_2f \in D_2,\ \Pi_i(f)\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k-2$, пусть

$$J_k^iO_1 = \{f\colon\ f \in J_k,\ B_if \in O_1\},$$
$$J_k^iO_1^* = \{f\colon\ f \in J_k^*,\ B_if \in O_1\}.$$

Для любого i, $2 \leqslant i \leqslant k-1$, пусть

$$C_k^iO_1 = \{f\colon\ f \in C_k,\ B_if \in O_1\}.$$

Для $k \geqslant 5$ полагаем

$$A_kL_4 = \{f\colon\ f \in A_k,\ B_2f \in L_4\}.$$

Для $k \geqslant 5$ и любого i, $2 \leqslant i \leqslant k-3$, $i = k$, пусть

$$A_k^iD_2 = \{f\colon\ f \in A_k,\ B_2f \in D_2,\ \Pi_i(f)\}.$$

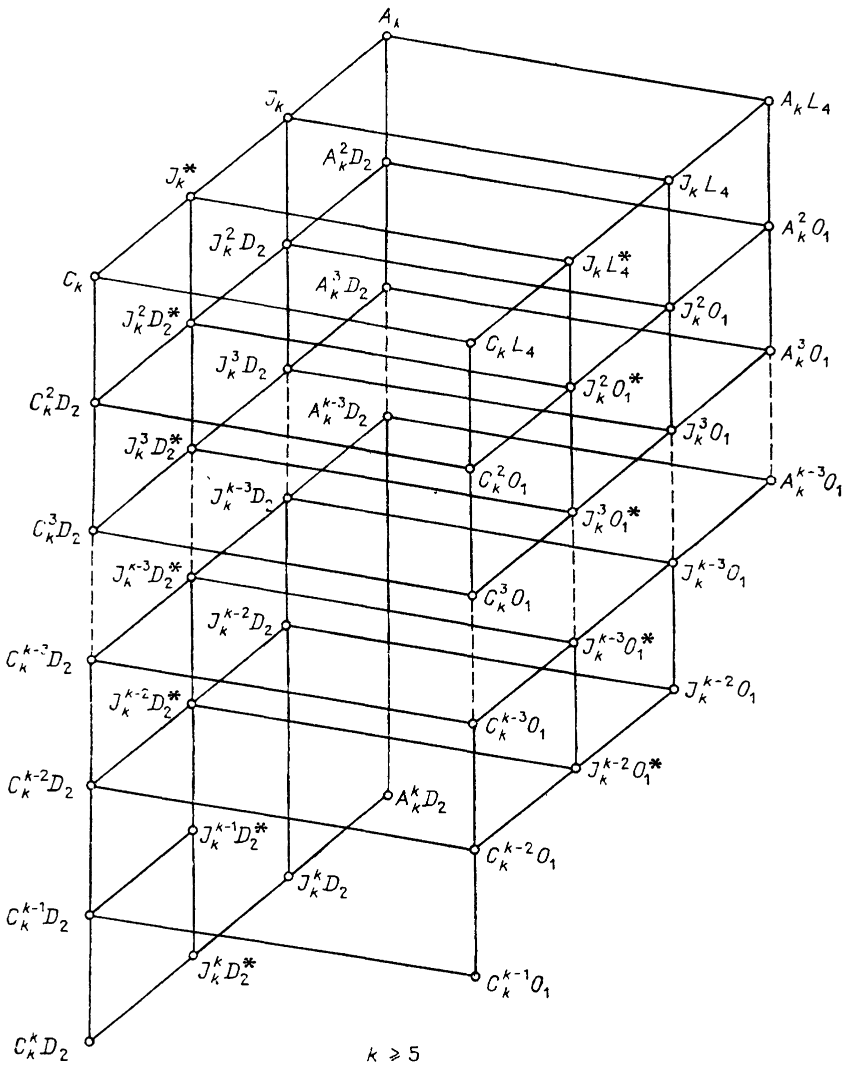

Рис. 2

Для $k \geqslant 5$ и любого i, $2 \leqslant i \leqslant k-3$, пусть

$$A_k^i O_1 = \{f\colon\ f \in A_k,\ B_i f \in O_1\}.$$

Наконец, через $A_4^4 L_4$ обозначаем класс всех линейных над полем Галуа $GF(4)$ функций из A_4.

Диаграммы включений замкнутых классов четных функций, отличных от замкнутых классов однородных функций, представлены на рис. 1, 2. Функциональная замкнутость этих классов устанавливается так же, как и в работе [3].

§ 2. Построение базисов

Лемма 2. *Для любого $k \geqslant 4$ функция α_k образует базис класса $C_k^{k-1}O_1$, при $2 \leqslant i \leqslant k-2$ функции $\{\alpha_k, l_{i+1}\}$ образуют базис класса $C_k^i O_1$. Порядки всех классов $C_k^2 O_1, \ldots, C_k^{k-1} O_1$ равны k.*

Доказательство. Положим

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \alpha_k(\alpha_k(x_1, x_2, \ldots, x_k), x_2, \ldots, x_k).$$

Имеем

$$B_{k-1}g_1(x_1, \ldots, x_k) = x_k,$$

$$g_1(0, 1, 2, \ldots, k-1) = 0, \quad g_1(1, 0, 2, \ldots, k-1) = k-1.$$

В силу четности перестановки $(012)(3)\ldots(k-1)$ имеем также $\alpha_k(1, 2, 0, 3, \ldots, k-1) = 1$. Поэтому, как легко убедиться,

$$l_k(x_1, \ldots, x_k) = \alpha_k(x_1, x_3, x_2, x_4, \ldots, x_{k-1}, g_1(x_1, \ldots, x_k)).$$

Таким образом, в силу результатов работы [3], суперпозициями функции α_k можно получить любую функцию из класса $S_k^{k-1}O_1^*$.

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $C_k^{k-1}O_1$. Можно считать, что $n \geqslant k$, иначе функция f является просто селекторной. Определим в классе $S_k^{k-1}O_1^*$ такие функции $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)$, что для любого n-набора a, содержащего k значений, выполняется соотношение $\{h_1(a), \ldots, h_k(a)\} = E_k$. Если наборы a, a' двойственны относительно транспозиции $(01)(2)\ldots(k-1)$, то в силу однородности функций $h_1, \ldots, h_k$ аналогичное утверждение справедливо и для наборов

$$(h_1(a), \ldots, h_k(a)), \ (h_1(a'), \ldots, h_k(a')).$$

А тогда, ввиду неоднородности функции α_k, пара

$$(\alpha_k(h_1(a), \ldots, h_k(a)), \quad \alpha_k(h_1(a'), \ldots, h_k(a')))$$

отлична от пар $(0, 1), (1, 0), (2, 2), \ldots, (k-1, k-1)$. Это, в свою очередь, означает, что наборы

$$(a, \alpha_k(h_1(a), \ldots, h_k(a))), \quad (a', \alpha_k(h_1(a'), \ldots, h_k(a')))$$

не однотипны. Следовательно, в классе $S_k^{k-1}O_1^*$ можно выбрать такую функцию $g_2(x_1, \ldots, x_n, y)$, что будет выполняться равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_2(x_1, \ldots, x_n, \alpha_k(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))).$$

Итак, функция α_k образует базис класса $C_k^{k-1}O_1$. Аналогичным образом рассматриваются классы $C_k^iO_1$ $(2 \leqslant i \leqslant k-2)$. Независимость системы $\{\alpha_k, l_{i+1}\}$ вытекает из $\alpha_k \in C_k^{k-1}O_1$, $l_{i+1} \in S_k^iO_1^*$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что при любом i $(2 \leqslant i \leqslant k-1)$ любая функция $f \in C_k^iO_1$, зависящая от $k-1$ переменных, принадлежит классу $S_k^iO_1^*$. Поэтому порядок класса $C_k^iO_1$ не может быть меньше k.

Лемма 3. *Для любого $k \geqslant 4$ функция β_k образует базис класса $J_k^{k-2}O_1^*$, при $2 \leqslant i \leqslant k-3$ функции $\{\beta_k, l_{i+1}\}$ образуют базис класса $J_k^iO_1^*$. Порядки всех классов $J_k^2O_1^*, \ldots, J_k^{k-2}O_1^*$ равны $k-1$.*

Доказательство. Положим

$$g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \beta_k(\beta_k(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_2, \ldots, x_{k-1}).$$

Имеем

$$B_{k-2}g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_{k-1},$$

$$g_1(0, 1, 2, \ldots, k-2) = 0, \ g_1(1, 0, 2 \ldots, k-2) = k-2.$$

В силу четности перестановки $(012)(3)\ldots(k-1)$, получим

$$\beta_k(1, 2, 0, 3, \ldots, k-2) = \beta_k(2, 1, 0, 3, \ldots, k-2) = 1.$$

Поэтому при $k \geqslant 5$ будем иметь

$$l_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \beta_k(x_1, x_3, x_2, x_4, \ldots, x_{k-2}, g_1(x_1, \ldots, x_{k-1})),$$

а при $k=4$ —

$$l_3(x_1, x_2, x_3) = \beta_4(g_1(x_1, x_2, x_3), x_1, \beta_4(x_1, x_2, x_3)).$$

Дальнейшие рассуждения близки к соответствующим рассуждениям из предыдущей леммы. Рассмотрение классов $J_k^iO_1^*$ $(2 \leqslant i \leqslant k-3)$, происходит аналогично рассмотрению классов $C_k^iO_1$ в лемме 2. Независимость системы $\{\beta_k, l_{i+1}\}$ вытекает из $\beta_k \in J_k^{k-2}O_1^*$, $l_{i+1} \in S_k^iO_1^*$. Так как всякая функция от $k-2$ переменных из класса $J_k^iO_1^*$ $(2 \leqslant i \leqslant k-2)$ принадлежит классу $S_k^iO_1^*$, то порядок класса $J_k^iO_1^*$ не может быть меньше $k-1$.

Лемма 4. *Для любого $k \geqslant 4$ функции $\{\beta_k, r_k\}$ образуют базис класса $J_k^{k-2}O_1$, при $2 \leqslant i \leqslant k-3$ функции $\{\beta_k, r_k, l_{i+1}\}$ образуют базис класса $J_k^iO_1$. Порядки всех классов $J_k^2O_1, \ldots, J_k^{k-2}O_1$ равны $k-1$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $J_k^{k-2}O_1$ и $n \geqslant k-1$. Согласно результатам работы [3], функция r_k образует базис класса $S_k^{k-2}O_1$. Поэтому суперпозициями функции r_k можно определить в классе $S_k^{k-2}O_1$ такую функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, что для любого n-набора a, содержащего $k-1$ значений, набор $(a, g(a))$ содержит все k значений. Теперь нетрудно видеть, что в классе $J_k^{k-2}O_1^*$ найдется функция $f_1(x_1, \ldots, x_n, y)$, которая удовлетворяет соотношению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)).$$

Аналогичным образом рассматриваются классы $J_k^iO_1$ $(2 \leqslant i \leqslant k-3)$. Независимость системы $\{\beta_k, r_k\}$ вытекает из $\beta_k \in J_k^{k-2}O_1^*$, $r_k \in S_k^{k-2}O_1$, а системы $\{\beta_k, r_k, l_{i+1}\}$ — из включений $\{\beta_k, r_k\} \subset J_k^{k-2}O_1$, $\{\beta_k, l_{i+1}\} \subset \subset J_k^i O_1^*$, $\{r_k, l_{i+1}\} \subset S_k^iO_1$. Так как всякая функция от $k-2$ переменных из класса $J_k^iO_1$ $(2 \leqslant i \leqslant k-2)$ принадлежит классу $S_k^iO_1$, то порядок класса $J_k^iO_1$ не может быть меньше $k-1$.

Лемма 5. *Для любого $k \geqslant 5$ функция γ_k образует базис класса $A_k^{k-3}O_1$, при $2 \leqslant i \leqslant k-4$ функции $\{\gamma_k, l_{i+1}\}$ образуют базис класса $A_k^iO_1$. Порядки всех классов $A_k^2O_1, \ldots, A_k^{k-3}O_1$ равны $k-2$.*

Доказательство. Функции

$$\gamma_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-2}), \quad \gamma_k(x_1, x_3, x_2, x_4, \ldots, x_{k-2})$$

принимают на наборе $(0, 2, 3, \ldots, k-2)$ разные значения из множества $\{1, k-1\}$. Обозначим через g_1 ту из них, которая принимает значение 1. Через g_2 обозначим ту из функций

$$\gamma_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-2}), \gamma_k(x_1, x_3, x_2, x_4, \ldots, x_{k-2}),$$

которая на наборе $(0, 1, 3, \ldots, k-2)$ принимает значение $k-1$. Далее, функции

$$\gamma_k(x_1, g_1(x_1, x_3, \ldots, x_{k-1}), \quad g_2(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{k-1}), x_4, \ldots, x_{k-2}),$$
$$\gamma_k(x_1, g_2(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{k-1}), g_1(x_1, x_3, \ldots, x_{k-1}), x_4, \ldots, x_{k-2})$$

на наборе $(0, 1, \ldots, k-2)$ принимают различные значения из множества $\{2, k-2\}$. Обозначим через g_3 ту из них, которая принимает значение 2. Имеем, очевидно, $B_{k-3}g_3(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_1$. Кроме того, если набор $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1})$ содержит $k-2$ значений и $a_2 \neq a_3$, то $g_3(a) = a_1$. Пусть теперь g_4 — та из функций

$$\gamma_k(x_1, \gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-2}), \quad g_3(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_4, \ldots, x_{k-2}),$$
$$\gamma_k(x_1, g_3(x_1, \ldots, x_{k-1}), \quad \gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-2}), x_4, \ldots, x_{k-2}),$$

которая принимает значение $k-1$ на наборе $(0, 1, \ldots, k-2)$. Ясно, что $B_{k-3}g_4(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_1$ и, кроме того, функция g_4 принимает значение a_1 на любом наборе $(a_1, \ldots, a_{k-1})$, содержащем ровно $k-2$ значений. То есть получаем $B_{k-2}g_4(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_1$. Итак, функция g_4 принадлежит классу $J_k^{k-2}O_1$, причем $g_4(0, 1, \ldots, k-2) = k-1$. Если $g_4(1, 0, 2, \ldots, k-2) = k-1$, то $g_4 = r_k$. В противном случае, в силу леммы 16 (которая не зависит от данной леммы), функция g_4 образует базис класса $J_k^{k-2}O_1$. В обоих случаях суперпозициями функции g_4 можно получить функцию r_k.

Возьмем теперь произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $A_k^{k-3}O_1$. Можно считать, что $n \geqslant k-2$, ибо в противном случае функция f является селекторной. Пусть $m = \binom{n}{k-2}$ и $(y_1^1, \ldots, y_{k-2}^1), \ldots, (y_1^m, \ldots, y_{k-2}^m)$ — все $(k-2)$-наборы переменных вида $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-2}})$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-2} \leqslant n$. Функции $\gamma_k(y_1^1, \ldots, y_{k-2}^1), \ldots, \gamma_k(y_1^m, \ldots, y_{k-2}^m)$ будем считать функциями от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$ и обозначать $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что если набор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ содержит не менее $k-2$ значений, то набор $(a, h_1(a), \ldots, h_m(a))$ — уже не менее $k-1$ значений. Кроме того, если набор a содержит не менее $k-1$ значений и набор a' двойствен набору a относительно транспозиции $(01)(2)\ldots(k-1)$, то наборы $(a, h_1(a), \ldots, h_m(a))$, $(a', h_1(a'), \ldots, h_m(a'))$ не однотипны. Поэтому в классе $S_k^{k-2}O_1$ (базисом которого является функция r_k) можно найти такую функцию $f_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$, что будет выполняться равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n, h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Итак, функция γ_k образует базис класса $A_k^{k-3}O_1$. Классы $A_k^iO_1$, $2 \leqslant i \leqslant k-4$, рассматриваются стандартным образом. Независимость системы $\{\gamma_k, l_{i+1}\}$ вытекает из $\gamma_k \in A_k^{k-3}O_1$, $l_{i+1} \in S_k^iO_1^*$. Так как всякая функция от $k-3$ переменных из класса $A_k^iO_1$ $(2 \leqslant i \leqslant k-3)$ принадлежит классу $S_k^iO_1^*$, то порядок класса $A_k^iO_1$ не может быть меньше $k-2$.

Следующие леммы 6—9 доказываются по одной схеме с использованием лемм 2—5 и результатов работы [3].

Лемма 6. *Для любого $k \geqslant 4$ функции $\{s, \alpha_k\}$ образуют базис класса C_kL_4. Порядок класса C_kL_4 равен k.*

Лемма 7. *Для любого $k \geqslant 4$ функции $\{s, \beta_k\}$ образуют базис класса $J_kL_4^*$. Порядок класса $J_kL_4^*$ равен $k-1$.*

Лемма 8. *Для любого $k \geqslant 4$ функции $\{s, r_k, \beta_k\}$ образуют базис класса J_kL_4. Порядок класса J_kL_4 равен $k-1$.*

Лемма 9. *Для любого $k \geqslant 5$ функции $\{s, \gamma_k\}$ образуют базис класса A_kL_4. Порядок класса A_kL_4 равен $k-2$.*

Лемма 10. *Функция γ_4 образует базис класса $A_4^4L_4$. Порядок класса $A_4^4L_4$ равен 2.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функции $x+y$ и $3x+2y$ задаются в поле Галуа $GF(4)$ табл. 1, 2 и, кроме того, что $\gamma_4(x, y) = 3x + 2y$. Поэтому $\gamma_4 \in A_4^4L_4$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $A_4^4L_4$. Тогда в поле $GF(4)$ имеет место представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}.$$

В силу леммы 1, $f(x, \ldots, x) = x$. Отсюда следует, что $a_{n+1} = 0$ и

$$a_1 + \ldots + a_n = 1. \qquad (2)$$

При $n=1$ условию (2) удовлетворяет только значение $a_1=1$, а при $n=2$ (см. табл. 1) — только значения $a_1=3$, $a_2=2$ и $a_1=2$, $a_2=3$.

Таблица 1

x	y			
	0		2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Таблица 2

x	y			
	0	1	2	3
0	0	2	3	1
1	3	1	0	2
2	1	3	2	0
3	2	0	1	3

Используя табл. 1, 2, получаем (в поле $GF(4)$)

$$\begin{aligned} x+y+z&=3(3x+2y)+2(3z+2x),\\ 2x+2y+z&=3(3x+2z)+2y,\\ 3x+3y+z&=3x+2(2y+3z). \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть теперь $n\geqslant 3$. Без ограничения общности можно считать, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от первых трех переменных, т. е. коэффициенты a_1, a_2, a_3 отличны от 0. Предположим, что среди коэффициентов a_1, a_2, a_3 есть два одинаковых, например, $a_1=a_2$. Так как в поле $GF(4)$ имеем $x+x=0$, то соотношение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_1x_1+a_1x_2+f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$

вместе с равенствами (3) показывает, как получить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из функции $f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n)$, зависящей существенно не более чем от $n-2$ переменных.

Пусть все три числа a_1, a_2, a_3 различны. Так как в поле $GF(4)$ имеем $1+2+3=0$, то, в силу (2), $n>3$ и среди коэффициентов $a_4, \ldots, a_n$ есть хотя бы один ненулевой. Тогда этот коэффициент совпадает с одним из коэффициентов a_1, a_2, a_3, и мы вновь можем выбрать тройку ненулевых коэффициентов, среди которых имеются два одинаковых. Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любого $k\geqslant 4$ функция δ_k образует базис класса $C_k^kD_2$, функция ε_k образует базис класса $J_k^kD_2^*$, функции $\{d_k, \varepsilon_k\}$ образуют базис класса $J_k^kD_2$. Для любого $k\geqslant 5$ функция ζ_k образует базис класса $A_k^kD_2$. Порядок класса $C_k^kD_2$ равен k, порядки классов $J_k^kD_2^*$, $J_k^kD_2$ равны $k-1$, порядок класса $A_k^kD_2$ равен $k-2$.*

Доказательство. Утверждения о базисах доказываются по одной схеме. Рассмотрим, например, класс $C_k^kD_2$. Нетрудно видеть, что $\delta_k\in C_k^kD_2$ и $\delta_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_3)=d(x_1, x_2, x_3)$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $C_k^kD_2$. Можно считать, что $n\geqslant k$, ибо в противном случае функция f принадлежит классу $S_k^kD_2^*$ (отсюда, кстати, вытекает, что порядок класса $C_k^kD_2$ не может быть меньше k) и, согласно результатам работы [3], может быть получена суперпозициями функции d. Пусть $m=\binom{n}{k}$ и $(y_1^1, \ldots, y_k^1), \ldots, (y_1^m, \ldots, y_k^m)$ — все k-наборы переменных вида $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, где $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n$. Функ-

ции $\delta_k(y_1^1, \ldots, y_k^1), \ldots, \delta_k(y_1^m, \ldots, y_k^m)$ будем считать зависящими от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$ и обозначать $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)$. Так как $B_{k-1}f \in S_{k-1}^{k-1}D_2^*$, то суперпозициями функции d в классе $S_k^kD_2^*$ можно определить такую функцию $f(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$, что $B_{k-1}f_1 = B_{k-1}f$. Этим условием функция f_1, в силу свойства $\Pi_k(f_1)$, определяется также и на некоторых наборах, содержащих k значений (чтобы убедиться в этом, достаточно отождествить в функции f_1 переменные, которым отвечают в рассматриваемом наборе равные значения, и на полученную функцию взглянуть с точки зрения свойства $\Pi_k(f_1)$). Остальные наборы, содержащие k значений, на которых функция f_1 пока не определена, назовем свободными. Заметим, что если a — свободный набор и набор a' двойствен набору a относительно транспозиции $(01)(2)\ldots(k-1)$, то набор a' также свободен (ибо функция f_1 принадлежит классу $S_k^kD_2^*$), а наборы $(a, h_1(a), \ldots, h_m(a))$, $(a', h_1(a'), \ldots, h_m(a'))$ не однотипны. Эти соображения позволяют доопределить функцию f_1 на свободных наборах так, чтобы в итоге выполнялось равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n, h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Так как всякая функция от $k-2$ переменных из классов $J_k^kD_2^*$, $J_k^kD_2$ однородна, то порядки классов $J_k^kD_2^*$, $J_k^kD_2$ не могут быть меньше $k-1$. Аналогично, любая функция от $k-3$ переменных из класса $A_k^kD_2$ однородна. Поэтому порядок класса $A_k^kD_2$ не может быть меньше $k-2$.

Лемма 12. *Для любого $k \geqslant 4$ функции $\{d, \alpha_k\}$ образуют базис класса $C_k^{k-1}D_2$, при $2 \leqslant i \leqslant k-2$ функции $\{d, l_{i+1}, \alpha_k\}$ образуют базис класса $C_k^iD_2$; функции $\{\varepsilon_k, \alpha_k\}$ образуют базис класса $J_k^{k-1}D_2^*$ функции $\{d, \beta_k\}$ — базис класса $J_k^{k-2}D_2^*$, при $2 \leqslant i \leqslant k-3$ функции $\{d, l_{i+1}, \beta_k\}$ образуют базис класса $J_k^iD_2^*$; функции $\{d, r_k, \beta_k\}$ образуют базис класса $J_k^{k-2}D_2$, при $2 \leqslant i \leqslant k-3$ функции $\{d, r_k, l_{i+1}, \beta_k\}$ образуют базис класса $J_k^iD_2$. Для любого $k \geqslant 5$ функции $\{d, \gamma_k\}$ образуют базис класса $A_k^{k-3}D_2$, при $2 \leqslant i \leqslant k-4$ функции $\{d, l_{i+1}, \gamma_k\}$ образуют базис класса $A_k^iD_2$. Порядки классов $C_k^iD_2$ $(2 \leqslant i \leqslant k-1)$ и класса $J_k^{k-1}D_2^*$ равны k, порядки классов $J_k^iD_2^*$, $J_k^iD_2$ $(2 \leqslant i \leqslant k-2)$ равны $k-1$, порядки классов $A_k^iD_2$ $(2 \leqslant i \leqslant k-3)$ равны $k-2$.*

Доказательство. Утверждения о базисах в классах $C_k^iD_2$ $(2 \leqslant i \leqslant k-1)$, $J_k^iD_2^*$, $J_k^iD_2$ $(2 \leqslant i \leqslant k-2)$, $A_k^iD_2$ $(2 \leqslant i \leqslant k-3)$ доказываются по одной схеме. Заметим, прежде всего, что в указанных случаях при удалении функции d из приведенного базиса получается базис соответствующего класса $C_k^iO_1$, $J_k^iO_1^*$, $J_k^iO_1$ или $A_k^iO_1$ (см. леммы 2—5). Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ любого из рассматриваемых классов $C_k^iD_2$, $J_k^iD_2^*$, $J_k^iD_2$, $A_k^iD_2$ суперпозициями функции d определяем в классе $S_k^kD_2^*$ такую функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, что $B_ig = B_if$. Далее, в соответствующем классе $C_k^iO_1$, $J_k^iO_1^*$, $J_k^iO_1$ или $A_k^iO_1$ определяем такие функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n'}(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$B_if_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1, \ldots, B_if_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n$$

и функции $f_1, \ldots, f_n$ совпадают с функцией f на всех наборах, содержащих более i значений. Ясно, что тогда будем иметь

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Нетрудно также видеть, что если m меньше порядка базиса одного из классов $C_k^iD_2$ $(2\leqslant i\leqslant k-1)$, $J_k^iD_2^*$, $J_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k-2)$, $A_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k-3)$, то всякая функция от m переменных из этого класса является однородной. Таким образом, в рассмотренных случаях порядок приведенного базиса равен порядку класса.

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса $J_k^{k-1}D_2^*$. Тогда в классе $J_k^kD_2^*$ имеется такая функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, что $B_{k-1}g=B_{k-1}f$. В силу леммы 11, функцию g можно получить суперпозициями функции ε_k. А далее продолжаем, как и в предыдущем случае. Так как любая функция от $k-1$ переменных из класса $J_k^{k-1}D_2^*$ очевидным образом принадлежит классу $J_k^kD_2^*$, то порядок класса $J_k^{k-1}D_2^*$ не может быть меньше k.

Независимость систем функций, приведенных в формулировке леммы, вытекает из следующих отношений: $d\in S_k^kD_2^*$, $\alpha_k\in C_k^{k-1}O_1$, $\{d, l_{i+1}\}\subset S_k^iD_2^*$, $\{d, \alpha_k\}\subset C_k^{k-1}D_2$, $\{l_{i+1}, \alpha_k\}\subset C_k^iO_1$, $\varepsilon_k\in J_k^kD_2^*$, $\beta_k\in J_k^{k-2}O_1^*$, $\{d, \beta_k\}\subset J_k^{k-2}D_2^*$, $\{l_{i+1}, \beta_k\}\subset J_k^iO_1^*$, $\{d, r_k\}\subset S_k^{k-2}D_2$, $\{r_k, \beta_k\}\subset J_k^{k-2}O_1$, $\{d, r_k, l_{i+1}\}\subset S_k^iD_2$, $\{d, r_k, \beta_k\}\subset J_k^{k-2}D_2$, $\{d, l_{i+1}, \beta_k\}\subset J_k^iD_2^*$, $\{r_k, l_{i+1}, \beta_k\}\subset J_k^iO_1$, $\gamma_k\in A_k^{k-3}O_1$, $\{d, \gamma_k\}\subset A_k^{k-3}D_2$, $\{l_{i+1}, \gamma_k\}\subset A_k^iO_1$.

Лемма 13. *Для любого $k\geqslant 4$ функции $\{p, \alpha_k\}$ образуют базис класса C_k, функции $\{p, \beta_k\}$ образуют базис класса J_k^*, функции $\{p, r_k, \beta_k\}$ образуют базис класса J_k, функции $\{p, \gamma_k\}$ образуют базис класса A_k. Порядок класса C_k равен k, порядки классов J_k^*, J_k равны $k-1$, порядок класса A_4 равен 3, при $k\geqslant 5$ порядок класса A_k равен $k-2$.*

Доказательство. При рассмотрении всех классов, отличных от класса A_4, проходят стандартные рассуждения. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса A_4, $m=(n-1)n$, $(y_1, z_1), \ldots, (y_m, z_m)$ — всевозможные пары переменных (x_i, x_j), $i\neq j$. Суперпозициями функции p, образующей базис класса S_4^*, строим в классе S_4^* такую функцию $f_1(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m)$, чтобы выполнялось равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1, \ldots, x_n, \gamma_4(y_1, z_1), \ldots, \gamma_4(y_m, z_m)).$$

Такая функция f_1 в классе S_4^* действительно существует. В самом деле, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ содержит ровно два различных значения, то набор $(x_1, \ldots, x_n, \gamma_4(y_1, z_1), \ldots, \gamma_4(y_m, z_m))$ — все четыре значения. Поэтому значение $f_1(x_1, \ldots, x_n, \gamma_4(y_1, z_1), \ldots, \gamma_4(y_m, z_m))$ в этом случае может быть определено произвольно. Если же n-набор a содержит не менее трех значений, а набор a' двойствен набору a относительно транспозиции $(01)(2)(3)$, то значения функций $x_1, \ldots, x_n, \gamma_4(y_1, z_1), \ldots, \gamma_4(y_m, z_m)$ на наборах a, a' образуют наборы, которые содержат четыре значения и, кроме того, не однотипны.

Ясно, что всякая функция от двух переменных из класса A_4 является либо селекторной, либо с точностью до перестановки переменных совпадает с функцией γ_4. Поэтому порядок класса A_4 не может быть меньше трех.

Независимость всех систем функций, приведенных в формулировке леммы, вытекает из отношений: $p\in S_k^*$, $\alpha_k\in C_k^{k-1}O_1$, $\beta_k\in J_k^{k-2}O_1^*$, $\{p, r_k\}\subset S_k$, $\{p, \beta_k\}\subset J_k^*$, $\{r_k, \beta_k\}\subset J_k^{k-2}O_1$, $\gamma_k\in A_k^{k-3}O_1\,(k\geqslant 5)$, $\gamma_4\in A_4^4L_4$.

§ 3. Леммы о полноте

В этом параграфе мы установим, что при любом $k\geqslant 4$ в классе A_k содержатся лишь те замкнутые классы, которые определены в § 1. Наше доказательство состоит в том, что для любого из перечисленных в § 1 замкнутых классов Q (исключение составляют классы однородных функций, для которых соответствующий процесс осуществлен в работе [3]) мы указываем те содержащиеся в нем и попарно не сравнимые по включению классы $Q_1, \ldots, Q_t$, что невхождение системы функций $T \subset Q$ ни в один из классов $Q_1, \ldots, Q_t$ обеспечивает полноту T в Q. Ясно, что каждый из указанных замкнутых классов $Q_1, \ldots, Q_t$ будет предполным в Q. Так как описанный процесс применяется ко всем замкнутым классам четных функций, то тем самым не будет пропущен ни один из замкнутых классов, принадлежащих классу A_k.

Лемма 14. *Для любого $k \geqslant 4$ класс $S_k^{k-1}O_1^*$ — единственный предполный в классе $C_k^{k-1}O_1$, при $2 \leqslant i \leqslant k-2$ классы $S_k^iO_1^*$, $C_k^{i+1}O_1$ — единственные предполные в классе $C_k^iO_1$.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in C_k^{k-1}O_1 \diagdown S_k^{k-1}O_1^*$. Тогда, по определению класса $C_k^{k-1}O_1$, найдутся такие n-наборы a, a', двойственные относительно транспозиции $(01)(2)\ldots(k-1)$ и содержащие каждый по k значений, что $(f(a), f(a')) \notin \{(0, 1), (1, 0), (2,2), \ldots \ldots (k-1, k-1)\}$. Заменим в функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ переменными $y_1, \ldots \ldots, y_k$ переменные, принимающие в наборе a соответственно значения $0, \ldots, k-1$. Полученную функцию обозначим $g(y_1, \ldots, y_k)$. Ясно, что $(g(0, 1, 2, \ldots, k-1), g(1, 0, 2, \ldots, k-1)) \notin \{(0, 1), (1, 0), (2, 2), \ldots, (k-1, k-1)\}$ и $B_{k-1}g \in O_1$. Без ограничения общности можно считать, что $B_{k-1}g(y_1, \ldots, y_k) = y_k$. Положим

$$b_1 = g(0, 1, 2, \ldots, k-1), \ b_2 = g(1, 0, 2, \ldots, k-1)$$

и рассмотрим два возможных случая.

1. $b_1 = 0$. Если $b_2 = 0$, то, очевидно, $g = \alpha_k$ и, в силу леммы 2, функция g образует базис класса $C_k^{k-1}O_1$. Пусть $b_2 \neq 0$. Тогда $b_2 \neq 1$ (иначе функция g была бы однородной). Поэтому, если определить

$$g_1(y_1, y_2, \ldots, y_k) = g(g(y_1, \ldots, y_k), y_2, \ldots, y_k),$$

то будем иметь

$$g_1(0, 1, 2, \ldots, k-1) = 0, \quad g_1(1, 0, 2, \ldots, k-1) = k-1,$$
$$B_{k-1}g_1(y_1, \ldots y_k) = y_k.$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$\alpha_k(y_1, \ldots, y_k) = g_1(y_1, \ldots, y_{k-1}, g_1(y_2, y_1, y_3, \ldots, y_k)).$$

2. $b_1 \neq 0$. В силу неоднородности функции g, одно из чисел b_1, b_2 отлично от $k-1$. Пусть это будет b_1. Возьмем такую четную перестановку π, что $\pi(b_1) = 0$ и $\pi(k-1) = k-1$. Положим

$$i_1 = \pi(0) + 1, \ldots, i_{k-1} = \pi(k-2) + 1, \quad i_k = \pi(k-1) + 1 = k,$$
$$g_2(y_1, \ldots, y_k) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}).$$

Тогда будем иметь

$$g_2(0, \ldots, k-1) = g(i_1 - 1, \ldots, i_k - 1) = g(\pi(0), \ldots, \pi(k-1)) =$$
$$= \pi(b_1) = 0, \quad B_{k-1}g_2(y_1, \ldots, y_k) = B_{k-1}g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) = y_{i_k} = y_k.$$

Кроме того, функция g_2, очевидно, не однородна. Следовательно, мы пришли к уже рассмотренному случаю.

Пусть теперь $2 \leqslant i \leqslant k-2$ и $f_1 \in C_k^iO_1 \diagdown S_k^iO_1^*$, $f_2 \in C_k^iO_1 \diagdown C_k^{i+1}O_1$. Как и выше, из функции f_1 подстановкой переменных $y_1, \ldots, y_k$ получаем неоднородную функцию $g(y_1, \ldots, y_k)$. Далее, $B_if_2 \in O_1$ и $B_{i+1}f_2 \notin O_1$. Следовательно, переменные функции f_2 можно так заменить переменными $y_1, \ldots, y_{i+1}$, что получится функция $g_2(y_1, \ldots, y_{i+1})$, обладающая свойствами: $B_ig_2 \in O_1$, $g_2 \notin O_1$. Так как $i+1 \leqslant k-1$, то функция g_2 однородная, сохраняющая множество E_{k-1}. В силу результатов работы [3], функция g_2 образует базис класса $S_k^iO_1^*$. Поэтому суперпозициями функции g_2 можно определить в классе $S_k^iO_1^*$ такие функции $h_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, h_{k-1}(y_1, \ldots, y_k)$, что

$$B_{k-1}h_1(y_1, \ldots, y_k) = \ldots = B_{k-1}h_{k-1}(y_1, \ldots, y_k) = y_k$$

и $h_1(0, 1, \ldots, k-1) = 0, \ldots, h_{k-1}(0, 1, \ldots, k-2, k-1) = k-2$. Полагая теперь

$$g_3(y_1, \ldots, y_k) = g_1(h_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, h_{k-1}(y_1, \ldots, y_k), y_k),$$

будем иметь $g_3 \in C_k^{k-1}O_1 \setminus S_k^{k-1}O_1^*$. По доказанному, из функции g_3 суперпозициями можно получить функцию α_k. Остается воспользоваться леммой 2.

Лемма 15. *Для любого $k \geqslant 4$ класс $C_k^{k-2}O_1$ — единственный предполный в классе $J_k^{k-2}O_1^*$, при $2 \leqslant i \leqslant k-3$ классы $C_k^iO_1$, $J_k^{i+1}O_1^*$ — единственные предполные в классе $J_k^iO_1^*$.*

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства предыдущей леммы.

Лемма 16. *Для любого $k \geqslant 4$ классы $J_k^{k-2}O_1^*$, $S_k^{k-2}O_1$ — единственные предполные в классе $J_k^{k-2}O_1$, при $2 \leqslant i \leqslant k-3$ классы $J_k^iO_1$ $J_k^{i+1}O_1$, $S_k^iO_1$ — единственные предполные в классе $J_k^iO_1$.*

Доказательство. Допустим, что $f_1 \in J_k^{k-2}O_1 \setminus J_k^{k-2}O_1^*$, $f_2 \in J_k^{k-2}O_1 \setminus S_k^{k-2}O_1$. Тогда функция f_1 не сохраняет множества E_{k-1}. Следовательно, подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ из нее можно получить такую функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-1})$, что $g_1(0, 1, \ldots, k-2) = k-1$. Без ограничения общности будем считать, что $B_{k-2}g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_1$. Обозначим $a = g_1(1, 0, 2, \ldots, k-2)$. Если $a = k-1$, то в силу результатов работы [3], функция g_1 образует базис класса $S_k^{k-2}O_1$. Пусть $a \neq k-1$. При $a \neq 0$ положим

$$g_2(x_1, \ldots, x_{k-1}) = g_1(g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_1, x_3, \ldots, x_{k-1}).$$

Имеем $B_{k-2}g_2(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_1$, $g_2(1, 0, 2, \ldots, k-2) = a$ и в силу четности перестановки $(1\ 0\ k-1)(2)\ldots(k-2) - g_2(0, 1, \ldots, k-2) = 1$. Следовательно, по лемме 15, g_2 образует базис класса $J_k^{k-2}O^*$. Если $a = 0$, то, полагая

$$g_3(x_1, \ldots, x_{k-1}) = g_1(g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_2, \ldots, x_{k-1})$$

и учитывая четность перестановки $(0\ 1\ k-1)(2)\ldots(k-2)$, получим

$$B_{k-2}g_3(x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_1,\ g_3(0, 1, \ldots, k-2) = 1,\ g_3(1, 0, 2, \ldots, k-2) = 0.$$

Согласно результатам работы [3], функция g_3 образует базис класса $S_k^{k-2}O_1^*$. Таким образом, во всех случаях суперпозициями функции g_1 можно получить все функции класса $\cdot^{2}O_1^*$.

Пусть теперь $g_4(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, z)$ — такая функция из класса $S_k^{k-2}O_1^*$, что $B_{k-2}g_4(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, z) = x_1$ и

$$g_4(0, 1, \ldots, k-2, k-1, a) = g_4(1, 0, 2, \ldots, k-2, a, k-1) = k-1$$

(последнее соотношение возможно, поскольку при $a \neq k-1$ наборы, стоящие под знаком функции g_4, не однотипны). Имеем тогда

$$g_4(x_1, \ldots, x_{k-1}, g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), g_1(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{k-1})) = r_k(x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Итак, суперпозициями одной лишь функции f_1 можно получить функцию r_k.

Из функции f_2 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_k$ можно получить либо неоднородную функцию $h_1(x_1, \ldots, x_{k-1})$, либо неоднородную функцию $h_1'(x_1, \ldots, x_k)$. Второй случай легко свести к первому, если рассмотреть суперпозицию

$$h_1'(x_1, \ldots, x_{k-1}, r_k(x_1, \ldots, x_{k-1})).$$

Если функция h_1 сохраняет множество E_{k-1}, то в силу леммы 15 она образует базис класса $J_k^{k-2}O_1^*$. А тогда по лемме 4 функции f_1, f_2 образуют полную в $J_k^{k-2}O_1$ систему. Если же h_1 не сохраняет множества E_{k-1}, то пусть, например,

$$h_1(0, 1, \ldots, k-2) = k-1, \quad h_1(1, 0, 2, \ldots, k-2) = b \neq k-1.$$

Возьмем в классе $S_k^{k-2}O_1$ (базис которого — функция r_k) такую функцию $h_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$, что $B_{k-2}h_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) = x_{k-1}$, $h_2(0, 1, \ldots, k-2, k-1) = h_2(1, 0, 2, \ldots, k-2, b) = 0$. Тогда, как нетрудно видеть, будем иметь

$$\beta_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) = h_2(x_1, \ldots, x_{k-1}, h_1(x_1, \ldots, x_{k-1})).$$

Аналогично рассматривается случай $2 \leqslant i \leqslant k-3$.

Л е м м а 17. *Для любого $k \geqslant 5$ класс $J_k^{k-3}O_1$ — единственный предполный в классе $A_k^{k-3}O_1$, при $2 \leqslant i \leqslant k-4$ классы $J_k^iO_1$, $A_k^{i+1}O_1$ — единственные предполные в классе $A_k^iO_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим лишь класс $A_k^{k-3}O_1$. Пусть $f \in A_k^{k-3}O_1 \setminus J_k^{k-3}O_1$. Тогда функция f не сохраняет множества E_{k-2}. Следовательно, надлежащей подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-2}$ из функции f можно получить такую функцию $g(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что

$$g(0, 1, \ldots, k-3) \in \{k-2, k-1\}. \tag{4}$$

Ясно, что (4) будет выполняться при любой перестановке переменных в функции g. Поэтому можно считать, что $B_{k-3}g(x_1, \ldots, x_{k-2}) = x_1$. Если $g(0, 1, \ldots, k-3) = k-2$, то $g = \gamma_k$ и функция f, в силу леммы 5, образует базис класса $A_k^{k-3}O_1$. Если же $g(0, 1, \ldots, k-3) = k-1$, то $g(0, \ldots, k-5, k-3, k-4) = k-2$ и потому

$$g(x_1, \ldots, x_{k-4}, x_{k-2}, x_{k-3}) = \gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-2}).$$

Далее применяем лемму 5.

Л е м м а 18. *Для любого $k \geqslant 4$ классы $S_kL_4^*$, $C_k^2O_1$ — единственные предполные в классе C_kL_4, классы C_kL_4, $J_k^2O_1^*$ — единственные предполные в классе $J_kL_4^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрение обоих классов происходит по одной схеме с использованием лемм 6, 7. Рассмотрим класс $J_kL_4^*$. Пусть $f_1 \in J_kL_4^* \setminus C_kL_4$, $f_2 \in J_kL_4^* \setminus J_k^2O_1^*$, тогда $B_{k-1}f_1$ не является однородной функцией, а $B_2f_2 \in L_4 \setminus O_1$. Поэтому надлежащей подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ из функции f_1 можно получить неоднородную функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-1})$, а из функции f_2 подстановкой переменных x_1, x_2, x_3 — такую функцию $g_2(x_1, x_2, x_3)$, что $B_2g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Если функция g_2 однородна, то с точностью до перестановки переменных она совпадает с функцией s. В противном случае (тогда обязательно $k = 4$) перестановкой переменных x_1, x_2, x_3 добиваемся равенства $g_2(0, 1, 2) = 0$. Полагая

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = g_2(g_2(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3),$$

имеем $B_2g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1$, $g_3(0, 1, 2) = 0$, и так как $g_2(1, 0, 2) \neq 1$, то $g_3(1, 0, 2) \in \{0, 2\}$. Значит, в силу леммы 15, функция g_3 образует базис класса $J_4^2O_1^*$. Беря в классе $J_4^2O_1^*$ такую функцию $g_4(x_1, x_2, x_3, y)$, что $B_2g_4(x_1, x_2, x_3, y)=y$ и $g_4(a_1, a_2, a_3, y)=a_1$, если a_1, a_2, a_3 попарно различны, получаем

$$g_4(x_1, x_2, x_3, g_2(x_1, x_2, x_3))=s(x_1, x_2, x_3).$$

Теперь суперпозициями функции s строим в классе $S_k^{k-2}O_1^* (\subset S_kL_4^*)$ такие функции $h_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, h_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-1})$, что $B_{k-2}h_1(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{k-1})=\ldots=B_{k-2}h_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-1})=x_{k-1}$ и $h_1(0, 1, \ldots, k-2)=0, \ldots$ $\ldots, h_{k-2}(0, 1, \ldots, k-3, k-2)=k-3$. Тогда функция

$$g_1(h_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), \ldots, h_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_{k-1})$$

принадлежит множеству $J_k^{k-2}O_1^*\diagdown C_k^{k-2}O_1$ и, следовательно, в силу леммы 15 образует базис класса $J_k^{k-2}O_1^*$. Далее применяем лемму 7.

Лемма 19. *Для любого $k \geqslant 4$ классы $J_kL_4^*$, $J_k^2O_1$, S_kL_4 — единственные предполные в классе J_kL_4.*

Доказательство. Пусть $f_1 \in J_kL_4\diagdown J_kL_4^*$, $f_2 \in J_kL_4\diagdown J_k^2O_1$, $f_3 \in J_kL_4\diagdown S_kL_4$. Тогда функция f_1 не сохраняет множества E_{k-1}, $B_2f_2 \in L_4\diagdown O_1$ и функция f_3 неоднородна. Из функции f_1 подходящей подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ получаем такую функцию $g_1(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{k-1})$, что $g_1(0, 1, \ldots, k-2)=k-1$. Из функции f_2 надлежащей подстановкой переменных x_1, x_2, x_3 получаем функцию $g_2(x_1, x_2, x_3)$, которая удовлетворяет условию $B_2g_2(x_1, x_2, x_3)=x_1+x_2+x_3$. Если функция g_2 однородна и сохраняет множество E_3, то с точностью до перестановки переменных она совпадает с функцией s. В этом случае дальнейшие рассуждения следуют уже известной схеме.

Допустим, что g_2 либо неоднородна, либо не сохраняет множества E_3. Тогда обязательно $k=4$. Рассмотрим спачала случай, когда g_2 неоднородна. Здесь одно из значений $g_2(0, 1, 2)$, $g_2(1, 0, 2)$ отлично от 3 и, следовательно, подходящей перестановкой переменных x_1, x_2, x_3 можно добиться равенства $g_2(0, 1, 2)=0$. Положим

$$h(x_1, x_2, x_3)=g_2(x_1, x_2, g_2(x_1, x_2, x_3)).$$

Легко видеть, что $B_2h(x_1, x_2, x_3)=x_3$ и $h(0, 1, 2)=1$. Поэтому, согласно результатам работы [3] и леммам 15, 16, функция h образует базис одного из классов $S_4^2O_1^*$, $J_4^2O_1^*$, $J_4^2O_1$. В частности, суперпозициями функции h можно получить функцию $l_3(x_1, x_2, x_3)$. Имеем тогда

$$s(x_1, x_2, x_3)=g_2(x_1, l_3(x_1, x_3, x_2), l_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Допустим теперь, что функция g_2 однородна, но не сохраняет множества E_3. Как нетрудно убедиться, функция g_2 в этом случае совпадает с функцией f_0. Так как $f_0(0, 1, 2)=f_0(1, 0, 2)=3$, то из функции f_3 подстановкой переменных x_1, x_2, x_3 и функции $f_0(x_1, x_2, x_3)$ можно получить неоднородную функцию $g_3(x_1, x_2, x_3)$. Случай $B_2g_3(x_1, x_2, x_3)=x_1+x_2+$ $+x_3$ рассмотрен выше. Поэтому предположим, что $B_2g_3 \in O_1$. Тогда в силу лемм 15, 16, функция g_3 образует базис одного из классов $J\ O_1^*$, $J_4^2O_1$. В частности, из функции g_3 можно получить функцию l_3. Имеем теперь, как и выше,

$$s(x_1, x_2, x_3)=f_0(x_1, l_3(x_1, x_3, x_2), l_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Лемма 20. *Класс $S_4^4L_4$ — единственный предполный в классе $A_4^4L_4$.*

Доказательство этой леммы просто, и мы его опускаем.

Лемма 21. *Для любого $k \geqslant 5$ классы $J_k\acute{L}_4$, $A_k^2O_1$ — единственные предполные в классе A_kL_4.*

Доказательство. Пусть $f_1 \in A_k L_4 \backslash J_k L_4$, $f_2 \in A_k L_4 \diagdown A_k^2 O_1$. Тогда функция f_1 не сохраняет множества E_{k-2} и $B_2 f \in L_4 \backslash O_1$. Следовательно, подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-2}$ из функции f_1 можно получить такую функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что $g_1(0, 1, \ldots, k-3) \in \{k-2, k-1\}$. Так как $g_1(1, 0, 2, \ldots, k-3) \in \{k-2, k-1\}$ и $g_1(0, 1, \ldots, k-3) \neq \neq g_1(1, 0, 2, \ldots, k-3)$, то можно считать, что $g_1(0, 1, \ldots, k-3) = k-2$. Подстановкой переменных x_1, x_2, x_3 из функции f_2 получаем такую функцию $g_2(x_1, x_2, x_3)$, что $B_2 g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Если функция g_2 сохраняет множество E_3, то с точностью до перестановки переменных она совпадает с функцией s. Если же g_2 не сохраняет E_3, то непременно $k = 5$. Можно считать, что $g_2(0, 1, 2) = 3$, ибо в противном случае имеем, очевидно, $g_2(1, 0, 2) = 3$. Положим

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = g_2(g_2(x_1, x_3, x_2), x_3, x_2).$$

Тогда $B_2 g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1$ и $g_3(0, 1, 2) = g_3(4, 2, 1) = 3$. Следовательно, $g_3 = \gamma_5$ и функция g_3, в силу леммы 5, образует базис класса $A_5^2 O_1$. Так как $l_3 \in S_5^2 O_1^* \subset A_5^2 O_1$, то теперь получаем

$$s(x_1, x_2, x_3) = g_2(x_1, l_3(x_1, x_3, x_2), l_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Таким образом, во всех случаях суперпозициями функции f_2 можно получить функцию s. Выбрав теперь в классе $S_k L_4^*$ такие функции $h_2(x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots, h_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что

$$B_{k-3} h_2(x_1, \ldots, x_{k-2}) = \ldots = B_{k-3} h_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-2}) = x_1,$$
$$h_2(0, 1, \ldots, k-3) = 1, \ldots, h_{k-2}(0, 1, \ldots, k-3) = k-3,$$

получим

$$\gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-2}) = g_1(x_1, h_2(x_1, \ldots, x_{k-2}), \ldots, h_{k-2}(x_1, \ldots, x_{k-2})).$$

Остается применить лемму 9.

Лемма 22. *Для любого $k \geqslant 4$ класс $S_k^k D_2^*$ — единственный предполный в классе $C_k^k D_2$, при $2 \leqslant i \leqslant k-1$ классы $S_k^i D_2^*$, $C_k^i O_1$, $C_k^{i+1} D_2$ — единственные предполные в классе $C_k^i D_2$.*

Доказательство. Пусть $f \in C_k^k D_2 \diagdown S_k^k D_2^*$. Тогда функция f неоднородна и посредством подстановки переменных $x_1, \ldots, x_k$ из нее можно получить неоднородную функцию $g(x_1, \ldots, x_k)$. Ясно, что $B_2 g \notin \notin O_1$, иначе, согласно определению класса $C_k^k D_2$, функция g была бы селекторной. В соответствии с результатами из [9] функция $B_2 g$ образует базис класса D_2. Поэтому суперпозициями функции g можно получить такую функцию $h(x_1, x_2, x_3)$, что $B_2 h(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$. Так как $B_3 h \in S_3$ и функция h сохраняет множество E_3, то с точностью до перестановки переменных функция h совпадает с функцией d. Пусть

$$a = g(0, 1, \ldots, k-1), \; b = g(1, 0, 2, \ldots, k-1).$$

Ввиду неоднородности функции g имеем $(a, b) \notin \{(0, 1), (1, 0), (2, 2), \ldots, (k-1, k-1)\}$. Значит, в классе $S_k^k D_2^*$ (базис которого — функция d) можно определить такую функцию $f_1(x_1, \ldots, x_k, y, z)$, что

$$B_{k-1} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, y, z) = d(x_1, x_2, x_3)$$

и

$$f_1(0, 1, \ldots, k-1, a, b) = f_1(1, 0, 2, \ldots, k-1, b, a) = 0.$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$\delta_k(x_1, \ldots, x_k) = f_1(x_1, \ldots, x_k, g(x_1, \ldots, x_k), g(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_k)).$$

Остается воспользоваться леммой 11. Классы $C_k^i D_2$, $2 \leqslant i \leqslant k-1$, рассматриваются более просто.

Лемма 23. *Для любого* $k \geqslant 4$ *класс* $C_k^k D_2$ *— единственный предполный в классе* $J_k^k D_2^*$, *классы* $C_k^{k-1} D_2$, $J_k^k D_2^*$ *— единственные предполные в классе* $J_k^{k-1} D_2^*$, *при* $2 \leqslant i \leqslant k-2$ *классы* $C_k^i D_2$, $J_k^i O_1^*$, $J_k^{i+1} D_2^*$ *— единственные предполные в классе* $J_k^i D_2^*$.

Доказательство. Рассмотрим только класс $J_k^k D_2^*$. Остальные классы рассматриваются более просто. Пусть $f \in J_k^k D_2^* \setminus C_k^k D_2$. Тогда функция $B_{k-1} f$ неоднородна. Следовательно, подходящей подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ из нее можно получить неоднородную функцию $g(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Ясно, что $B_2 g \in D_2 \setminus O_1$. Поэтому суперпозициями функции g можно определить такую функцию $h(x_1, x_2, x_3)$, что $B_2 h(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$. Если функция h однородна, то с точностью до перестановки переменных она совпадает с функцией d. В противном случае непременно $k = 4$. Тогда, если $h(0, 1, 2) = 0$, то при $h(1, 0, 2) = 0$ имеем, очевидно, $h = \varepsilon_4$, а при $h(1, 0, 2) = 2$ —

$$h(x_1, x_2, h(x_2, x_1, x_3)) = \varepsilon_4(x_1, x_2, x_3).$$

Если же $h(0, 1, 2) \neq 0$, то к рассмотренному случаю приводят перестановки переменных в функции h: при $h(0, 1, 2) = 1$ — $h(x_3, x_1, x_2)$, а при $h(0, 1, 2) = 2$ —$h(x_2, x_3, x_1)$. Таким образом, из функции h суперпозициями всегда можно получить функцию d. Далее действуем, как при рассмотрении класса $C_k^k D_2$.

Лемма 24. *Для любого* $k \geqslant 4$ *классы* $S_k^k D_2$, $J_k^k D_2^*$ *— единственные предполные в классе* $J_k^k D_2$, *классы* $S_k^{k-2} D_2$, $J_k^{k-2} O_1$, $J_k^{k-2} D_2^*$, $J_k^k D_2$ *— единственные предполные в классе* $J_k^{k-2} D_2$, *при* $2 \leqslant i \leqslant k-3$ *классы* $S_k^i D_2$, $J_k^i O_1$, $J_k^i D_2^*$, $J_k^{i+1} D_2$ *— единственные предполные в классе* $J_k^i D_2$.

Доказательство. Пусть $f_1 \in J_k^k D_2 \setminus S_k^k D_2$, $f_2 \in J_k^k D_2 \setminus J_k^k D_2^*$. Тогда функция f_1 неоднородна, а функция f_2 не сохраняет множества E_{k-1}. Из функции f_2 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ получаем такую функцию $g_2(x_1, \ldots, x_{k-1})$, что $g_2(0, 1, \ldots, k-2) = k-1$. Ясно, что $B_2 g_2 \in D_2 \setminus O_1$. Поэтому суперпозициями функции g_2 можно получить такую функцию

$$g_3(x_1, x_2, x_3),$$

что

$$B_2 g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3.$$

Если функция g_3 сохраняет множество E_3, то либо, согласно работе [3], функция g_3 образует базис класса $S_k^k D_2^*$, либо, согласно лемме 23 (и только при $k = 4$),— базис класса $J_k^k D_2^*$. В частности, суперпозициями функции g_3 можно получить функцию d. Предположим, что функция g_3 не сохраняет множества E_3. Тогда обязательно $k = 4$. В силу симметричности функции $B_2 g_3$ можно считать, что $g_3(0, 1, 2) = 3$. Если $g_3(1, 0, 2) = 3$, то $g_3 = d_4$ и, согласно работе [3], функция g_3 образует базис класса $S_4^4 D_2$. Пусть $g_3(1, 0, 2) = a \in E_3$. Нетрудно проверить, что при $a \in \{0, 1\}$ функция

$$g_4(x_1, x_2, x_3) = g_3(x_1, x_2, g_3(x_1, x_2, x_3))$$

удовлетворяет равенствам:

$$B_2 g_4(x_1, x_2, x_3) = B_2 g_3(x_1, x_2, x_3),$$

$$g_4(0, 1, 2) = g_3(0, 1, 3) = \bar{a} \ (\bar{a} \text{ — булевское отрицание } a),$$

$$g_4(1, 0, 2) = g_3(1, 0, a) = a.$$

То есть функция g_4 с точностью до перестановки переменных совпадает с функцией d. При $a=2$ имеем просто

$$g_3(x_1, g_3(x_1, x_2, x_3), x_3) = d(x_1, x_2, x_3).$$

Таким образом, во всех случаях суперпозициями функции g_2 можно получить функцию d. Обозначим $b = g_2(1, 0, 2, \ldots, k-2)$. Суперпозициями функции d строим в классе $S_k^k D_2^*$ такую функцию $g_5(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, z)$, что

$$B_{k-2} g_5(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, y, z) = d(x_1, x_2, x_3)$$

(при $k=4$ просто $B_2 g_5(x_1, x_2, x_3, y, z) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$) и $g_5(0, 1, \ldots, k-2, k-1, b) = g_5(1, 0, 2, \ldots, k-2, b, k-1) = k-1$. Ясно, что тогда будем иметь

$$g_5(x_1, \ldots, x_{k-1}, g_2(x_1, \ldots, x_{k-1}), g_2(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{k-1})) = d_k(x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Из функции f_1 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ и, быть может, функции $d_k(x_1, \ldots, x_{k-1})$ строим неоднородную функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Пусть

$$c_1 = g_1(0, 1, \ldots, k-2), \quad c_2 = g_1(1, 0, 2, \ldots, k-2).$$

В классе $S_k^k D_2^*$ выбираем такую функцию $g_6(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, z)$, чтобы выполнялись соотношения:

$$B_{k-2} g_6(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, y, z) = d(x_1, x_2, x_3)$$

(при $k=4$ — $B_2 g_6(x_1, x_2, x_3, y, z) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$),

$$g_6(0, 1, \ldots, k-2, c_1, k-1) = g_6(1, 0, 2, \ldots, k-2, c_2, k-1) = 0.$$

Легко видеть, что тогда получим

$$\varepsilon_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) = g_6(x_1, \ldots, x_{k-1}, g_1(x_1, \ldots, x_{k-1}), d_k(x_1, \ldots, x_{k-1})).$$

Применяя теперь лемму 11, убеждаемся, что система функций $\{f_1, f_2\}$ полна в классе $J_k^k D_2$. Аналогичным образом рассматриваются остальные классы.

Лемма 25. *Для любого $k \geqslant 5$ класс $J_k^k D_2$ — единственный предполный в классе $A_k^k D_2$, классы $J_k^{k-3} D_2$, $A_k^{k-3} O_1$, $A_k^k D_2$ — единственные предполные в классе $A_k^{k-3} D_2$, при $2 \leqslant i \leqslant k-4$ классы $J_k^i D_2$, $A_k^i O_1$, $A_k^{i+1} D_2$ — единственные предполные в классе $A_k^i D_2$.*

Доказательство. Пусть $f \in A_k^k D_2 \setminus J_k^k D_2$. Тогда функция f не сохраняет множества E_{k-2}. Следовательно, подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-2}$ из нее можно получить такую функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что $g_1(0, 1, \ldots, k-3) \in \{k-2, k-1\}$. Можно считать, что $g_1(0, 1, \ldots, k-3) = k-2$, ибо в противном случае $g_1(1, 0, 2, \ldots, k-3) = k-2$. Ясно, что $B_2 g_1 \in D_2 \setminus O_1$. Поэтому суперпозициями функции g_1 получаем такую функцию $g_2(x_1, x_2, x_3)$, что $B_2 g_2 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Если функция g_2 не сохраняет множества E_3 (а это может быть лишь в случае $k=5$), то с точностью до перестановки переменных функция g_2 совпадает с функцией ζ_5 и потому, в силу леммы 11, образует базис класса $A_5^5 D_2$. Если же g_2 сохраняет множество E_3, то с точностью до перестановки переменных g_2 совпадает с d. Из функции d суперпозициями строим в классе $S_k^k D_2^*$ такую функцию $g_3(x_1, \ldots, x_{k-2}, y)$, что

$$B_{k-3} g_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-2}, y) = d(x_1, x_2, x_3)$$

и $g_3(0, 1, \ldots, k-3, k-2) = k-2$. Легко видеть, что будем иметь

$$\zeta_k(x_1, \ldots, x_{k-2}) = g_3(x_1, \ldots, x_{k-2}, g_1(x_1, \ldots, x_{k-2})).$$

Остается еще раз применить лемму 11.

Пусть $f_1 \in A_k^{k-3}D_2 \setminus J_k^{k-3}D_2$, $f_2 \in A_k^{k-3}D_2 \setminus A_k^{k-3}O_1$, $f_3 \in A_k^{k-3}D_2 \setminus A_k^k D_2$. Тогда функция f_1 не сохраняет множества E_{k-2}, $B_2 f_2 \in D_2 \setminus O_1$, а из функции f_3 отождествлением переменных можно получить такую функцию g_3, что $B_{k-3}g_3 \in O_1$ и $g_3 \notin O_1$. Суперпозициями функции f_2 строим функцию $g_2(x_1, x_2, x_3)$ с условием $B_2 g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Как и выше, функция g_2 с точностью до перестановки переменных совпадает либо с функцией d, либо (только при $k=5$) с функцией ζ_k. Из функции f_1 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-2}$ получаем такую функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что $g_1(0, 1, \ldots, k-3) = k-2$, а из функции g_3 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_k$ — такую функцию $g_4(x_1, \ldots, x_k)$, что $B_{k-3}g_4(x_1, \ldots, x_k) = x_1$ и $g_4 \neq x_1$. Так как $g_4 \neq x_1$, то, в силу леммы 1, на одном из наборов

$$(0, 1, \ldots, k-3, k-2, k-1), \ (0, 1, \ldots, k-3, k-1, k-2)$$

функция g_4 принимает значение, отличное от 0. Пусть, например, это набор $(0, 1, \ldots, k-3, k-2, k-1)$. Положим

$$g_5(x_1, \ldots, x_{k-2}) = g_4(x_1, \ldots, x_{k-2}, g_1(x_1, \ldots, x_{k-2}), g_1(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_{k-2})).$$

Тогда имеем

$$B_{k-3}g_5(x_1, \ldots, x_{k-2}) = x_1, \quad g_5(0, 1, \ldots, k-3) \neq 0.$$

Поэтому, в силу результатов работы [3] и леммы 17, функция g_5 образует базис одного из классов $S_k^{k-3}O_1^*$, $A_k^{k-3}O_1$. Выбирая теперь в классе $S_k^{k-3}O_1^*$ функцию $g_6(x_1, \ldots, x_{k-2}, y)$ с условиями

$$B_{k-3}g_6(x_1, \ldots, x_{k-2}, y) = x_1, \ g_6(0, 1, \ldots, k-3, k-2) = k-2,$$

будем, очевидно, иметь

$$\gamma_k(x_1, \ldots, x_{k-2}) = g_6(x_1, \ldots, x_{k-2}, g_1(x_1, \ldots, x_{k-2})).$$

Обращаясь к лемме 12, видим, что система $\{f_1, f_2, f_3\}$ полна в классе $A_k^{k-3}D_2$.

Случай $2 \leqslant i \leqslant k-4$ рассматривается аналогично. Следует лишь отметить, что из функции g_3 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{i+1}$ получается базис класса $S_k^iO_1^*$.

Лемма 26. *Для любого $k \geqslant 4$ классы S_k^*, $C_k^2D_2$, C_kL_4 — единственные предполные в классе C_k, а классы C_k, $J_k^2D_2^*$, $J_kL_4^*$ — единственные предполные в классе J^**

Доказательство. Оба класса C_k, J_k^* рассматриваются аналогично. Рассмотрим, например, класс J_k^*. Пусть $f_1 \in J_k^* \setminus C_k$, $f_2 \in J_k^* \setminus J_k^2D_2^*$, $f_3 \in J \setminus J_kL_4^*$. Тогда $B_{k-1}f_1 \notin S_{k-1}$ (при рассмотрении класса C_k соответственно $f_1 \notin S_k$), $B_2f_2 \notin D_2$ и $B_2f_3 \notin L_4$. Так как функции класса J_k^* сохраняют множество E_2, то, в силу леммы 1, булево ограничение любой функции из J_k^* представляет собой самодвойственную функцию алгебры логики, сохраняющую константу 0. Иными словами, булевы ограничения функций из J_k^* образуют класс D_1 (см. [9]). Согласно работе [9], классы D_2 и L_4 — единственные предполные в классе D_1. Поэтому суперпозициями функций f_2, f_3 можно получить такую функцию $g_2(x, y, z)$, что $B_2g_2(x, y, z) = xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}$. Так как функции из J_k^* сохраняют множество E_3, то, согласно работе [3], функция g_2 образует базис класса S^*. В частности, из нее суперпозициями можно получить функцию p. Далее из функции f_1 подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-1}$ строим неоднородную функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-1})$ (в случае класса C_k — неоднородную функцию $g_1(x_1, \ldots, x_k)$). Наконец, стандартным приемом из функций класса $S_k^{k-2}O_1^* \subset S_k^*$ и функции g_1 получаем функцию β_k (в случае класса C_k из функций класса $S_k^{k-1}O_1^*$ и функции g_1 — функцию α_k). Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться леммой 13.

Лемма 27. *Для любого $k \geqslant 4$ классы S_k, J_k^*, $J_k^2D_2$, J_kL_4 — единственные предполные в классе J_k.*

Доказательство. Пусть $f_1 \in J_k \setminus S_k$, $f_2 \in J_k \setminus J_k^*$, $f_3 \in J_k \setminus J_k^2D_2$, $f_4 \in J_k \setminus J_kL_4$. Тогда функция f_1 неоднородна, функция f_2 не сохраняет множества E_{k-1}, $B_2f_3 \in D_1 \setminus D_2$ и $B_2f_4 \in D_1 \setminus L_4$. Так как, в силу работы [9], функции B_2f_3 и B_2f_4 образуют полную в D_1 систему, то суперпозициями функций f_3, f_4 можно получить такие функции $g_3(x, y, z)$, $g_4(x, y, z)$, что

$$B_2g_3(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz, \quad B_2g_4(x, y, z) = x + y + z.$$

В силу результатов работы [3] и лемм 23—25, функция g_3 образует базис одного из классов $S_k^kD_2^*$, $S_4^4D_2$, $J_4^4D_2^*$, $J_4^4D_2$, $A_5^5D_2$. Во всех случаях суперпозициями функции g_3 может быть получена функция d. Аналогичным образом, в соответствии с результатами работы [3] и леммами 18, 19, 21 функция g_4 образует базис одного из классов $S_kL_4^*$, $S_4^4L_4$, $J_4L_4^*$, J_4L_4, A_5L_4. Во всех случаях суперпозициями функции g_4 можно получить либо функцию s, либо (при $k=4$) — функцию f_0 из § 1. Согласно работе [3], система $\{d, s\}$ полна в классе S_k^*, а система $\{d, f_0\}$ — в классе S_4. Отсюда вытекает, что суперпозициями функций f_3, f_4 можно получить, как минимум, все функции класса S_k^* и, в частности, функцию p. Теперь стандартным образом из функции f_2, не сохраняющей множества E_{k-1}, и подходящих функций класса $S_k^{k-2}O_1^*$ строим функцию r_k, а с помощью нее и функции f_1 — функцию β_k. Затем применяем лемму 13.

Лемма 28. *Классы J_4, $A_4^4L_4$ — единственные предполные в классе A_4.*

Доказательство. Пусть $f_1 \in A_4 \setminus J_4$, $f_2(x_1, \ldots, x_n) \in A_4 \setminus A_4^4L_4$. Тогда функция f_1 не сохраняет множества $\{0, 1\}$, а функция f_2 не сохраняет отношения R (см. таблицу 1 в § 1). Из функции f_1 подстановкой переменных x, y получаем такую функцию $g_1(x, y)$, что $g_1(0, 1) \in \{2, 3\}$. Ясно, что функция g_1 с точностью до перестановки переменных совпадает с функцией γ_4. Далее, в лемме 10 указано, что столбцы отношения R можно рассматривать как столбцы значений селекторных функций $u_1^3(x, y, z)$, $u_2^3(x, y, z)$, $u_3^3(x, y, z)$ и некоторых функций $h(x, y, z)$, являющихся суперпозициями функции γ_4, на наборах $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 2)$. Так как g_2 не сохраняет отношения R, то можно выбрать такие функции $h_1(x, y, z), \ldots, h_n(x, y, z)$ из класса $A_4^4L_4$, что столбец значений функции

$$h(x, y, z) = g_2(h_1(x, y, z), \ldots, h_n(x, y, z)),$$

отвечающих наборам $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 2)$, не удовлетворяет отношению R, т. е. не содержится среди столбцов табл. 1. Обозначим этот столбец значений через H.

Предположим, что первые три значения столбца H совпадают с первыми тремя значениями одного из столбцов таблицы 1. Это означает, что ограничение функции h на множестве $\{0, 1\}^3$ совпадает с ограничением на множестве $\{0, 1\}^3$ некоторой функции $f(x, y, z)$ из класса $A_4^4L_4$. Тогда (см. также доказательство леммы 10) функция

$$g(x, y, z) = f_0(f(x, y, z), h(x, y, z), f_0(x, y, z))$$

удовлетворяет соотношениям: $B_2g(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) \neq \neq f_0(x, y, z)$. В силу результатов работы [3] и лемм 18, 19 функция g образует базис одного из классов $S_4L_4^*$, $J_4L_4^*$, J_4L_4. Пусть $g_3(x, y, z, v)$ — такая функция из класса $S_4L_4^*$, что

$$g_3(0,1,0,2) = g_3(0,1,2,2) = 0,$$
$$g_3(0,0,1,0) = g_3(1,0,0,3) = g_3(1,0,2,3) = 1.$$

Тогда, как нетрудно проверить, будем иметь

$$g_3(x, y, z, \gamma_4(x, y)) = p(x, y, z).$$

Согласно лемме 13 функции p, γ_4 образуют базис класса A_4.

Пусть теперь среди первых трех значений любого столбца таблицы 1 имеется по крайней мере одно, которое отлично от соответствующего значения столбца H. Как доказано в лемме 10, булево ограничение функции $\tau(h(x, y, z))$ является линейной α-функцией. Предположим сначала, что $B_2\tau(h(x, y, z)) = x$ (случаи переменных y, z рассматриваются совершенно аналогично). Тогда имеем $(h(0,0,1),\ h(0,1,0),\ h(1,0,0)) \in \in \{(0,2,1),\ (2,0,1),\ (0,0,3),\ (2,2,3)\}$. Так как $\gamma_4(2,0) = 1$ и $\gamma_4(3,1) = = 0$, то булево ограничение функции

$$g_4(x, y, z) = \gamma_4(h(x, y, z), x)$$

будет нелинейной α-функцией. Согласно результатам работы [9], суперпозициями функции g_4 можно определить такую функцию $g_5(x, y, z)$, что $B_2g_5(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$. В силу результатов из [3] и лемм 23, 24 функция g_5 образует базис одного из классов $S_4^4D_2^*$, $S_4^4D_2$, $J_4^4D_2^*$, $J_4^4D_2$. В частности, суперпозициями функции g_5 можно получить функцию d. Поскольку функции d, f_0 образуют базис класса S_4 (см. [3]), мы приходим к полной в A_4 системе $\{p, \gamma_4\}$ (см. лемму 13).

Пусть $B_2\tau(h(x, y, z)) = x + y + z$. Тогда $(h(0,0,1),\ h(0,1,0),\ h(1,0,0)) \in \{(1,1,3),\ (1,3,1),\ (3,1,1),\ (3,3,3)\}$. Вновь используя равенство $\gamma_4(3,1) = 0$, заключаем, что булево ограничение функции

$$\gamma_4(h(x, y, z), f_0(x, y, z))$$

нелинейно. Таким образом, мы пришли к рассмотренной выше ситуации.

Лемма 29. *Для любого $k \geqslant 5$ классы J_k, $A_k^2D_2$, A_kL_4 — единственные предполные в классе A_k.*

Доказательство. Пусть $f_1 \in A_k \setminus J_k$, $f_2 \in A_k \setminus A_k^2D_2$, $f_3 \in A_k \setminus \setminus A_kL_4$. Тогда функция f_1 не сохраняет множества E_{k-2}, $B_2f_2 \in D_2 \setminus O_1$, $B_2f_3 \in L_4 \setminus O_1$. Согласно результатам работы [9], функции B_2f_2, B_2f_3 образуют полную в D_1 систему. Поэтому суперпозициями функций f_2, f_3 можно получить такие функции $g_2(x, y, z)$, $g_3(x, y, z)$, что

$$B_2g_2(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz, \quad B_2g_3(x, y, z) = x + y + z.$$

Согласно результатам работы [3] и лемме 25, функция g_2 образует базис одного из классов $S_k^kD_2^*$, A_5D_2. В частности, из функции g_2 суперпозициями можно получить функцию d. Аналогично, в силу результатов работы [3] и леммы 21, функция g_3 образует базис одного из классов $S_kL_4^*$, A_5L_4. Поэтому суперпозициями функции g_3 можно получить функцию s. Функции d, s образуют базис класса S_k^* и потому из них можно получить функцию p.

Подстановкой переменных $x_1, \ldots, x_{k-2}$ из функции f_1 получаем такую функцию $g_1(x_1, \ldots, x_{k-2})$, что $g_1(0, 1, \ldots, k-3) = k-2$. Затем стандартным образом с помощью функций класса $S_k^{k-3}O_1^* \subset S_k^*$ и функции g_1 строим функцию γ_k. Остается теперь воспользоваться леммой 13.

Из лемм 2—29 вытекает следующая теорема.

Теорема. *Класс* A_4 *содержит ровно* 20 *замкнутых классов, отличных от замкнутых классов однородных функций*: C_4, $C_4^2D_2$, $C_4^3D_2$, $C_4^4D_2$, J_4^*, $J_4^2D_2^*$, $J_4^3D_2^*$, $J_4^4D_2^*$, J_4, $J_4^2D_2$, $J_4^4D_2$, A_4, C_4L_4, $C_4^2O_1$, $C_4^3O_1$, $J_4L_4^*$, $J_4^2O_1^*$, J_4L_4, $J_4^2O_1$, $A_4^4L_4$.

Все перечисленные классы имеют конечные базисы. Порядок класса $A_4^4L_4$ *равен* 2, *порядки классов* C_4, $C_4^2D_2$, $C_4^3D_2$, $C_4^4D_2$, $J_4^3D_2^*$, C_4L_4, $C_4^2O_1$, $C_4^3O_1$ *равны* 4, *порядки остальных классов равны* 3.

При любом $k\geqslant 5$ *класс* A_k *содержит равно* $8k-11$ *замкнутых классов, отличных от замкнутых классов однородных функций*: C_k, $C_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k)$, J_k^*, $J_k^iD_2^*\,(2\leqslant i\leqslant k)$, J_k, $J_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k,\ i\neq k-1)$, A_k, $A_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k-3,\ i=k)$, C_kL_4, $C_k^iO_1\,(2\leqslant i\leqslant k-1)$, $J_kL_4^*$, $J_k^iO_1^*\,(2\leqslant i\leqslant k-2)$, J_kL_4, $J_k^iO_1\,(2\leqslant i\leqslant k-2)$, A_kL_4, $A_k^iO_1\,(2\leqslant i\leqslant k-3)$.

Все перечисленные классы имеют конечные базисы. Порядки классов A_k, $A_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k-3,\ i=k)$, A_kL_4, $A_k^iO_1\,(2\leqslant i\leqslant k-3)$ *равны* $k-2$, *порядки классов* C_k, $C_k^iD_2\,(2\leqslant i\leqslant k)$, $J_k^{k-1}D_2^*$, C_kL_4, $C_k^iO_1\,(2\leqslant i\leqslant k-1)$ *равны* k, *порядки остальных классов равны* $k-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике.— М.: Наука, 1977.
2. Марченков С. С. Об однородных алгебрах // ДАН СССР.— 1981.— Т. 256, № 4.— С. 787—790.
3. Марченков С. С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39.— М.: Наука, 1982.— С. 85—106.
4. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 36.— М.: Наука, 1979.— С. 5—22.
5. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. Вып. 40.— М.: Наука, 1983.— С. 261—266.
6. Марченков С. С. О классификации алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // ДАН СССР.— 1982.— Т. 265, № 3.— С. 533—536.
7. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1.— М.: Наука, 1974.
8. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИ АН СССР. Т. 51, 1958, с. 5—142.
9. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.
10. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР.— 1959.— Т. 127, № 1.— С. 44—46.
11. Csákány B. Homogeneity and completeness // Lecture Notes in Computer Science.— 1981.— V. 117.— P. 81—89.
12. Csákány B., Gavalcová T. Finite homogeneous algebras I. // Acta Sci. Math.— 1980.— V. 42.— P. 57—65.
13. Marczewski E. Homogeneous operations and homogeneous algebras // Fund. Math.— 1964.— V. 56, № 1.— P. 81—103.
14. Post E. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies.— 1941.— V. 5.