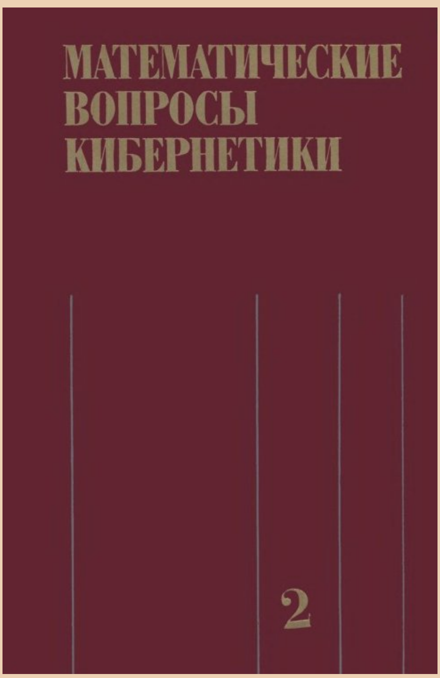

А. Б. Угольников

О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ФОРМУЛАМИ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

А. Б. УГОЛЬНИКОВ

(МОСКВА)

Рассматривается задача о реализации функций многозначной логики формулами [8, 9]. В работе приведен пример последовательности функций 5-значной логики, сложность которых в классе формул над некоторой (неполной) конечной системой имеет рост «двойной экспоненты» от числа переменных. Известно [6], что в двузначной логике такой эффект невозможен. Первые экспоненциальные оценки сложности (для схем из функциональных элементов) были получены Г. А. Ткачевым [4]. О сложности реализации булевых функций формулами см. в [1—3, 5, 7].

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная система функций из P_5, f — функция из $[\mathfrak{A}]$, Φ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая f, а $\tilde{\alpha}$ — произвольный набор, компоненты которого принадлежат множеству $E_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Обозначим через $L(\Phi)$ число символов переменных и констант, входящих в Φ — *сложность* формулы, а через $l(\Phi)$ — *глубину* формулы Φ (определение см. в [6, 7]). Положим $\Phi(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha})$, $L_{\mathfrak{A}}(f) = \min L(\Phi)$, где минимум берется по всем формулам Φ над $\mathfrak{A}$, реализующим функцию f.

Обозначим через E^n множество всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таких, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_5$, через H^n обозначим множество всех наборов $\tilde{\alpha}$ из E^n таких, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{3, 4\}$, а через F^n — множество всех наборов из H^n, имеющих менее $[n/2]$ вхождений символа 3. Определим функции $\varphi(x, z)$, $\mu(x, y)$, $\chi(x, y, z)$ и $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ $(n > 1)$ из P_5 следующим образом. Положим

$$\varphi(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 2, & \text{если } z = 4, \quad x \in \{2, 4\}, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\chi(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq y, \\ \varphi(x, z), & \text{если } x = y; \end{cases}$$

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если } x, y \in \{3, 4\}, \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in F^n, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 1 [6]. *Для любого $n > 3$ имеет место соотношение*

$$L_{\{\chi,\mu\}}(f_n) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left(2^{C_n^{[n/2]}} - 1\right).$$

Лемма. *Для любого $n > 3$ имеет место соотношение*

$$L_{\{\varphi,\mu\}}(f_n) = \left[\frac{n}{2}\right]\cdot C_n^{[n/2]}.$$

Доказательство леммы. Нижняя оценка. Пусть Φ — произвольная формула над $\{\varphi, \mu\}$, реализующая f_n. Рассмотрим произвольную подформулу A формулы Φ и произвольный набор $\tilde{\alpha}$ из F^n. Из определения функций φ, μ и f_n следует, что $A(\tilde{\alpha}) \notin \{0, 1\}$. Поэтому в Φ нет подформул вида $\varphi(A, x_i)$, $\varphi(x_i, A)$, $\varphi(A, \varphi(B, C))$, $\mu(\varphi(A, B), C)$ или $\mu(A, \varphi(B, C))$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, A, B, C — формулы. Таким образом, формула Φ имеет следующий вид:

$$\Phi = \varphi(\varphi(\ldots\varphi(\varphi(Z_1, Z_2), Z_3)\ldots), Z_N),$$

где $Z_1, \ldots, Z_N$ — нетривиальные формулы над $\{\mu\}$, N — натуральное.

Рассмотрим формулу Z_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$. Пусть в нее входит k переменных, например, $x_1, \ldots, x_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Предположим, что $k < [n/2]$. Тогда для набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из F^n такого, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 3$, $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 4$, имеем $Z_j(\tilde{\alpha}) = 3$, $\Phi(\tilde{\alpha}) = 1$, что противоречит определению f_n. Поэтому $k \geqslant [n/2]$, и $L(Z_j) \geqslant [n/2]$ для всех $j = 1, \ldots, N$.

Рассмотрим некоторую совокупность $[n/2]$ различных переменных, например, $x_1, \ldots, x_{[n/2]}$. Предположим, что среди формул $Z_1, \ldots, Z_N$ нет такой формулы, в которую входят только эти переменные. Тогда для набора $\tilde{\alpha}$ из F^n такого, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{[n/2]} = 3$, $\alpha_{[n/2]+1} = \ldots = \alpha_n = 4$, выполняются соотношения: $Z_1(\tilde{\alpha}) = \ldots = Z_N(\tilde{\alpha}) = 4$, $\Phi(\tilde{\alpha}) = 2$, что противоречит определению функции f_n. Таким образом, для каждого набора различных переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{[n/2]}}$ среди формул $Z_1, \ldots, Z_N$ найдется такая формула, которая содержит все эти переменные и не содержит никаких других. Поэтому $N \geqslant C_n^{[n/2]}$ и $L(\Phi) \geqslant [n/2]\, C_n^{[n/2]}$.

Соответствующая верхняя оценка при $n > 3$ очевидна.

Доказательство теоремы. Нижняя оценка. Пусть Φ — произвольная формула над $\{\chi, \mu\}$, реализующая f_n. Установим некоторые ее свойства.

1. В Φ нет подформул A вида $A = \chi(B, C, x_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, B, C — формулы. Действительно, в противном случае для набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из F^n такого, что $\alpha_i = 3$, $\alpha_j = 4$ при всех $j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$, имеем $A(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$, $\Phi(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$, что противоречит определению функции f_n.

2. В Φ нет подформул вида $\mu(\chi(A_1, A_2, A_3), A_4)$ или $\mu(A_1, \chi(A_2, A_3, A_4))$, где $A_1, \ldots, A_4$ — формулы (в противном случае при $\tilde{\alpha} = (4, \ldots, 4)$ из F^n имеем $\Phi(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$, что противоречит определению f_n).

3. В Φ нет подформул вида $\chi(C_1, C_2, \chi(C_3, C_4, C_5))$, где $C_1, \ldots, C_5$ — формулы (в противном случае при $\tilde{\alpha} = (4, \ldots, 4)$ имеем $\Phi(\tilde{\alpha}) \neq 2$).

Рассмотрим в Φ произвольную подформулу D вида $D = \chi(A, B, C)$, где A, B, C — формулы. Предположим, что для некоторого набора $\tilde{\alpha}$ из E^n выполняется неравенство $A(\tilde{\alpha}) \neq B(\tilde{\alpha})$. Тогда имеют место соотношения: $D(\tilde{\alpha}) = 0$, $\Phi(\tilde{\alpha}) = 0$ (в силу свойства 3 и того, что $\chi(0, y, z) = \chi(x, 0, z) = 0$ для всех допустимых значений x, y, z), что противоречит определению f_n.

Будем преобразовывать формулу Φ и одновременно строить формулу G над $\{\varphi, \mu\}$, реализующую f_n. Пусть Φ имеет вид $\Phi = \chi(A_1, B_1, C_1)$, A_1, B_1, C_1 — формулы, и пусть $L(A_1) \leqslant L(B_1)$. Положим $\Phi_1 = \chi(A_1, A_1, C_1)$, $G_1 = \varphi(A_1, C_1)$. Очевидно, что формулы Φ_1 и G_1 реализуют функцию f_n и выполняется неравенство $L(\Phi_1) \leqslant L(\Phi)$. В силу свойств 1—3 формула A_1 — либо формула над $\{\mu\}$, либо имеет вид $A_1 = \chi(A_2, B_2, C_2)$, A_2, B_2, C_2 — формулы. Во втором случае (пусть $L(A_2) \leqslant L(B_2)$) положим $A_1^1 = \chi(A_2, A_2, C_2)$, $A_1^2 = \varphi(A_2, C_2)$, $\Phi_2 = \chi(A_1^1, A_1^1, C_1) = \chi(\chi(A_2, A_2, C_2), \chi(A_2, A_2, C_2), C_1)$, $G_2 = \varphi(A_1^2, C_1) = \varphi(\varphi(A_2, C_2), C_1)$. Проделаем над формулами A_2 аналогичное преобразование и т. д. В конце концов, после некоторого числа N преобразований, мы получим формулу Φ_N над $\{\chi, \mu\}$, реализующую f_n, такую, что $L(\Phi_N) \leqslant L(\Phi)$, в которой всякая нетривиальная подформула либо есть формула над $\{\mu\}$, либо имеет вид $\chi(A, A, B)$, A, B — формулы, и некоторую формулу G над $\{\varphi, \mu\}$, реализующую f_n, причем выполняется соотношение $l(\Phi_N) = l(G)$. Легко видеть, что формула Φ_N содержит $2^N - 1$ символов χ, а сложность формулы Φ_N удовлетворяет неравенству $L(\Phi_N) \geqslant M(2^N - 1 + 2 \cdot 2^{N-1}) = M(2^{N+1} - 1)$, где $M = \min L(Q)$ (минимум берется по всем подформулам Q формулы Φ_N, которые представляют собой формулы над $\{\mu\}$ и максимальны относительно этого свойства). Из леммы следует, что $N \geqslant C_n^{[n/2]} - 1$, $M \geqslant [n/2]$. Поэтому $L(\Phi) \geqslant L(\Phi_N) \geqslant [n/2]\left(2^{C_n^{[n/2]}} - 1\right)$. Соответствующая верхняя оценка, при $n > 3$, очевидна. В заключение приведем обобщение теоремы 1.

Обозначим через $H^n_{[n/2]}$ множество всех наборов из H^n, имеющих $[n/2]$ вхождений символа 3. Рассмотрим некоторое упорядочивание наборов из $H^n_{[n/2]}$: $\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^{C_n^{[n/2]}}$. Пусть $\lambda(n)$ — некоторая целочисленная функция такая, что $1 < \lambda(n) \leqslant C_n^{[n/2]}$. Положим $F_{\lambda(n)} = \{\tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^{\lambda(n)}\}$. Обозначим через $G_{\lambda(n)}$ множество всех наборов $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из H^n таких, что для некоторого набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из $F_{\lambda(n)}$ выполняются соотношения: $\alpha_1 \geqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \geqslant \beta_n$. Определим функции $f_n^{\lambda(n)}(x_1, \ldots, x_n)$, $n > 1$, из P_5 следующим образом. Положим

$$f_n^{\lambda(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in (H^n \setminus G_{\lambda(n)}), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 2. *Для любой наперед заданной целочисленной функции $\lambda(n)$ такой, что $1 < \lambda(n) \leqslant C_n^{[n/2]}$, при $n > 3$ имеет место соотношение*

$$L_{\{\chi,\mu\}}(f_n^{\lambda(n)}) = \left[\frac{n}{2}\right](2^{\lambda(n)} - 1).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3.— М.: Физматгиз, 1960.— С. 61—80.
2. Лупанов О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\vee$, &, $^-$ // Проблемы кибернетики. Вып. 6.— М.: Физматгиз, 1961.— С. 5—14.
3. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем.— М.: изд-во МГУ, 1984.
4. Ткачев Г. А. О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестник Московского ун-та. Сер. выч. мат. и кибернетика.— 1977.— № 1.— С. 45—57.
5. Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // ДАН СССР.— 1979.— Т. 249, № 1.— С. 60—63.
6. Угольников А. Б. О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, N 6.— С. 1341—1344.
7. Угольников А. Б. О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Мат. заметки.— 1987.— Т. 42, N 4.— С. 603—612.
8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.
9. Яблонский С. В. Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, М.: Наука. 1974. С. 9—66.