



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 99 за 1996 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Платонов А. К.

Метод интерполяции  
функций, заданных на  
четырёхвершиннике

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Платонов А. К. Метод интерполяции функций, заданных на четырёхвершиннике // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1996. № 99. 25 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1996-99>

Ордена Ленина  
Институт прикладной математики  
им. М.В.Келдыша РАН

А.К.Платонов

МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ,  
ЗАДАНЫХ НА ЧЕТЫРЕХВЕРШИННИКЕ

Москва 1996

## АННОТАЦИЯ

Рассматриваются свойства линейной двумерной интерполяционной процедуры некоторого специального вида. Необходимость в такой процедуре обычно возникает при обработке сигналов физических приборов, используемых для наблюдения внешней среды, неизвестные свойства которой искажают получаемые сигналы. В этом случае используются тарировочные таблицы, получаемые заранее путем наблюдений среды с известным диапазоном свойств.

Особенность здесь заключается в нерегулярном характере аргументов получаемых таблиц. Это в двумерном случае приводит, как это показано в работе, к необходимости применения нелинейного преобразования в процедуре линейной интерполяции тарировочной таблицы.

Построен метод такой интерполяции и изучены его геометрические характеристики.

## THE INTERPOLATION METHOD FOR FUNCTION THAT GIVEN ON TETRAGON

The subjects of consideration are the peculiarities of a special kind 2D linear interpolation method. It usually needs for sensors data processing when unknown environment characteristics corrupt signal. For this case the calibration tables are used that are got preliminary by the known range environment characteristics observing.

The point here is the irregular relative positions of the table arguments that are obtained by a sensor data measuring. This work shows that in the 2D calibration table case it leads to necessity of using the nonlinear transformation inside of the linear interpolation procedure.

The method of the such kind interpolation are constructed and it's geometrical configuration are studied.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов  
РФФИ № 96 – 01 – 01003, 96 – 01 – 01444 и гранта INTAS 94 – 1234

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Постановка задачи.....	5
Проблема линейной интерполяции двумерной функции .....	6
Равномерная сетка четырехвершинника .....	8
Двумерное интерполяционное отображение четырехвершинника общего вида на единичный квадрат.....	11
Случаи вырождения рассматриваемого отображения.....	13
Заключительные замечания.....	25
Литература.....	25

### *Введение*

В задачах обработки результатов эксперимента типична проблема интерпретации снятых в процессе эксперимента показаний измерительных приборов, — если эти показания не являются прямыми измерениями и только косвенно связаны с искомыми параметрами. В этом случае, как это известно со времени Роджера Бэкона, существуют лишь два подхода к решению проблемы интерпретации: на базе *ноумена* наблюдаемого явления (т.е. его внутренней умопостигаемой сущности) или на базе его *феномена* (т.е. картины его внешнего проявления в опыте). В настоящее время первый подход предполагает наличие хорошо разработанной математической модели явления с неизвестными параметрами, определяемыми по полученным измерениям. Этот подход является основным в задачах небесной механики или математической физики. С другой стороны феноменологический подход широко развит в задачах экспериментальной физики, робототехники, — там, где модель наблюдаемого явления отсутствует, но существует повторяемость результатов измерений при совпадении условий их проведения.

Ниже рассматриваются некоторые обстоятельства, связанные с математическим содержанием интерпретации измеряемого феномена явления, когда основным методом обработки измерений является использование экспериментально полученной тарировочной характеристики измерительного прибора, вместо использования модели его работы. Тарировочная характеристика снимается на стенде в условиях хорошо определенных значений искомым величин и связывает прямо (здесь отсутствует модель явления) эти величины с показаниями измерительного прибора. В последующих экспериментах в предположении о повторяемости наблюдаемого феномена получаемые измерения интерпретируются с помощью обратного преобразования тарировочной характеристики прибора для определения искомым параметров наблюдаемого явления. Если в измерениях присутствуют случайные шумы измерительного прибора, то повторяемость обеспечивается методами фильтрации (осреднения) измерений. Систематические погрешности измерений в данном случае автоматически учитываются в содержании тарировочной характеристики. Однако, систематические ошибки измерений, связанные с изменением самого наблюдаемого явления,

приводят к необходимости параметризации тарифовочной характеристики и превращения ее в функцию многих величин.

Наиболее прост случай измерения и определения единственного параметра, т.е. случай одной функции ("измерение") одного переменного ("искомое значение"). Если это функция монотонна, то проблема интерпретации заключается в выборе способа описания тарифовочной зависимости и алгоритма процедуры доступа к ее значениям. Если же тарифовочная зависимость не монотонна, то возникает дополнительная проблема разрешения возможной неоднозначности интерпретации полученных измерений.

В общем случае тарифовочная зависимость имеет более сложную природу, т.к. измеряемые значения и определяемые параметры могут быть векторными величинами. Например, в случае определения двух параметров явления по двум измерениям разного состава (физически разных величин) искомая тарифовочная характеристика описывается двумя функциями двух переменных. При этом одна из функций может служить лишь для параметризации тарифовочной зависимости (поскольку, значения измерений зависят от этого параметра наблюдаемого явления) и не представлять интереса для исследования явления. Именно такая ситуация присутствует в описываемом ниже примере интерпретации измерений лазерного дальномера.

Следует иметь в виду, что область определения этих функций и область их значений могут быть весьма ограниченными (в реальности существуют лишь определенные комбинации значений измерений и параметров явления). В этом случае ошибки измерений могут выводить получаемые значения из области определения тарифовочных функций, что исключает саму возможность их интерпретации. Наличие такой ситуации значительно усложняет процесс подготовки тарифовочной характеристики системы измерений, заставляя (ввиду снижения разрешающей способности системы измерений) в ущерб точности интерпретации расширять область определения тарифовочной таблицы на величину возможных погрешностей измерений.

Описанные обстоятельства исследуются ниже. Исследование проводится на удобном примере упомянутого случая двухфункциональной зависимости от двух переменных. Основное внимание уделяется описанию геометрических свойств отображения результатов измерений в пространство определяемых параметров на

основе интерполяции тарифовочной характеристики измерительной системы. В заключение приводится пример такой характеристики при интерпретации сигналов лазерного измерителя дальности.

### *Постановка задачи*

Рассмотрим случай двухфункциональной интерполяционной зависимости, заданной на четырехвершиннике. А именно:

Пусть необходимо определить две неизвестные величины  $S$  и  $D$  с помощью измерения двух величин  $X$  и  $Y$ , зависящих от  $S$  и  $D$ . С этой целью предварительно выполняются четыре тарифовочных измерения параметров  $X$  и  $Y$  для двух пар известных значений определяемых параметров  $S$  и  $D$  – функций  $X(S,D)$  и  $Y(S,D)$ .

Таким образом, имеется четыре значения двумерной вектор – функции

$$\{S,D\} = F(X(S,D), Y(S,D)),$$

для двух пар точек  $(X,Y)_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ), связанных общими значениями параметров  $S_j$  и  $D_j$  ( $j = 1,2$ ) функции  $f(S,D)$ , – обратной функции  $F$ :

$$\{X,Y\}_1 = f(S_1, D_1);$$

$$\{X,Y\}_2 = f(S_2, D_1);$$

$$\{X,Y\}_3 = f(S_1, D_2);$$

$$\{X,Y\}_4 = f(S_2, D_2).$$

Используя эти тарифовочные данные в предположении постоянной и линейной зависимости функций  $F(X,Y)$  и  $f(S,D)$  от своих аргументов, требуется определить значения  $S$  и  $D$  по новым измерениям  $X$  и  $Y$  в окрестности тарифовочных данных.

Пусть на плоскости  $X,Y$  задана декартова система координат  $XOY$  с началом в точке  $(X=0, Y=0)$ . Тогда четырем значениям функции  $f$  соответствуют векторы

$$f_1, f_2, f_3, f_4,$$

годографы которых в последовательности  $f_1 - f_2 - f_3$  и  $f_1 - f_3 - f_4$  для указанной связи составляют в общем случае четырехвершинник, показанный на рис. 1 и 2 (заметим, – именно четырехвершинник, а не четырехугольник ввиду того, что условия соединения заданных четырех точек могут привести к пересечению сторон).

Точки  $M_i\{X,Y\}$  определены следующими условиями:

$$M_1(X,Y) = f(S_1, D_1),$$

$$M_2(X,Y) = f(S_2, D_1),$$

$$M_3(X,Y) = f(S_1, D_2),$$

$$M_4(X,Y) = f(S_2, D_2).$$

Эти условия формируют векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$  сторон, соединяющих вершины — двумерные вектор — функции  $f(S_j, D_j)$ , значения которых найдены в результате тарировки измерителя.

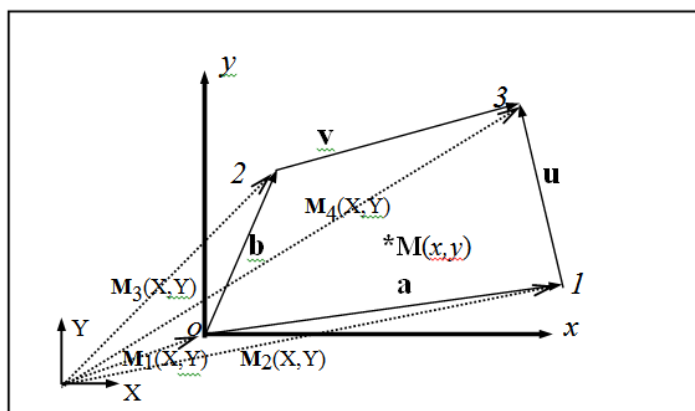


Рис.1 Четырехвершинник интерполяции

### *Проблема линейной интерполяции двумерной функции*

Известные значения параметров  $S$  и  $D$  (т.е. — функций  $F(X, Y)$ ) в вершинах четырехвершинника позволяют на его сторонах использовать обычный алгоритм линейной интерполяции. Однако, определение значений искомых параметров внутри четырёхвершинника связано с некоторыми трудностями. Принципиальным обстоятельством здесь является необходимость согласования внутренней области четырехвершинника с линейными шкалами каждой из его сторон. Это приводит к определению системы прямых линий "внутри" четырехвершинника общего вида, соединяющих соответствующие точки линейных шкал "противоположных" сторон четырехвершинника (кавычки поставлены здесь не случайно: в ряде случаев не так просто визуально определить область внутренности и противоположность сторон четырехвершинника — см. ниже рис. 3). Систему прямых, опирающуюся на равномерные шкалы противоположных сторон четырехвершинника будем называть его "равномерной" линейной сеткой и докажем ниже сохранение ее внутренней равномерности.

Построение внутри четырехвершинника равномерной и параметризованной в интервале  $[0..1]$  линейной сетки равнозначно отображению на его внутренность координатной сетки, заданной на единичном квадрате. Искомое отображение оказывается нелинейным (единственное линейное отображение квадрата на произвольный четырехвершинник — проективное преобразование не сохраняет равномерности шкал сторон). Обратное отображение

внутренности четырехвершинника на внутренность единичного квадрата (см. рис.2) обеспечивает определение параметров линейной ин-терполяции функций  $S$  и  $D$ , заданных в вершинах четырехвер-шинника, в любой точке  $X,Y$  внутри четырехвершинника.

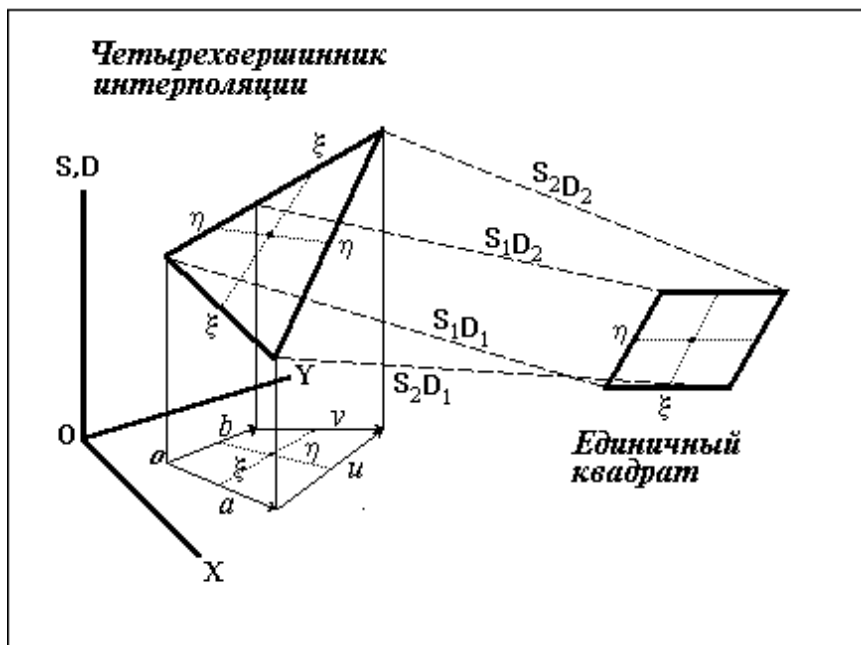


Рис. 2. Интерполяционное преобразование

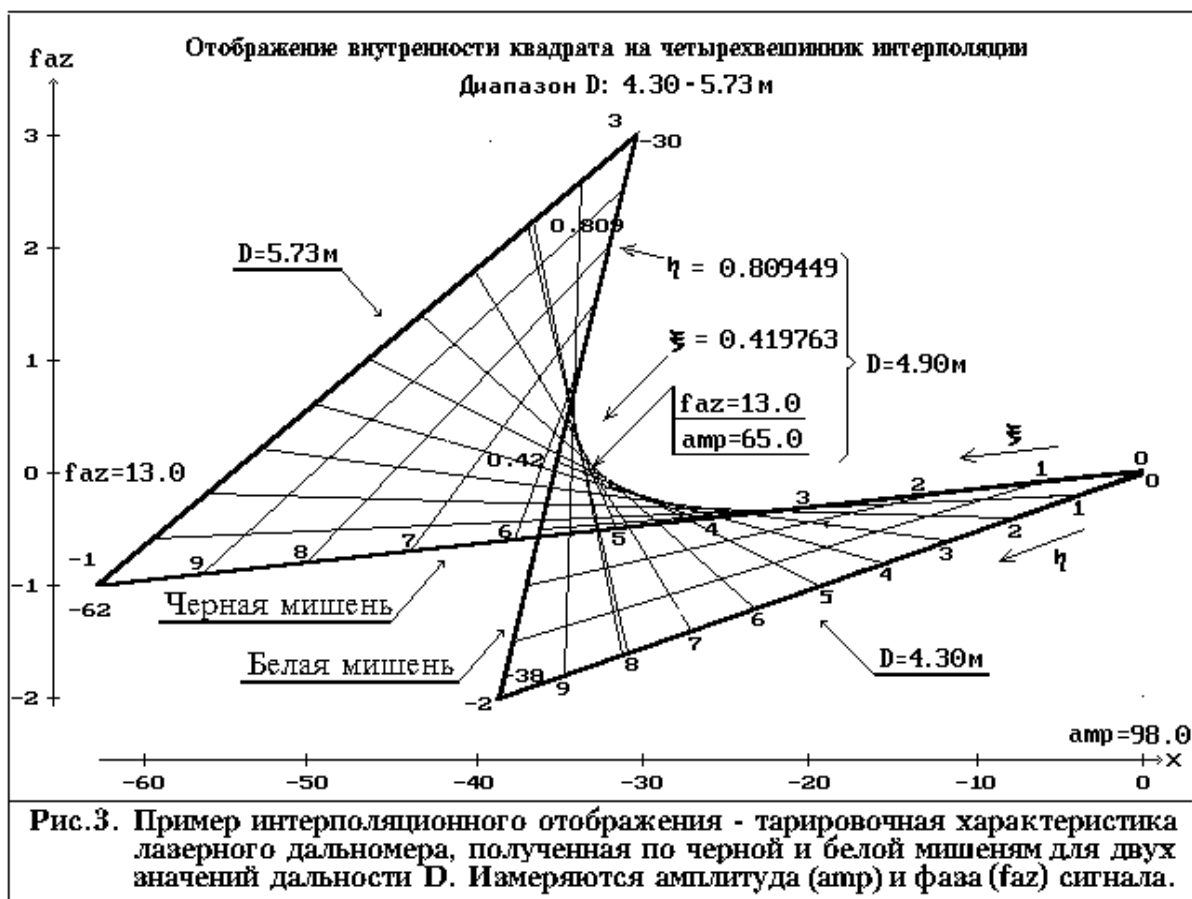


Рис.3. Пример интерполяционного отображения - тарифовочная характеристика лазерного дальномера, полученная по черной и белой мишеням для двух значений дальности  $D$ . Измеряются амплитуда (amp) и фаза (faz) сигнала.



Итак, интерпретация тарифовочной двухфункциональной зависимости, заданной на четырехвершиннике, выполняется отображением его "внутренности" на внутренность единичного квадрата с последующим применением линейной интерполяции заданных значений функций, перенесенных в вершины единичного квадрата.

### ***Равномерная сетка четырехвершинника***

Рассмотрим связь двух пространств: пространства значений определяемых параметров  $S$  и  $D$  (плоскость с определённой на ней системой координат  $SOD$ ) и пространства значений измеряемых параметров  $X$  и  $Y$  (плоскость с определённой на ней системой координат  $XOY$ ).

Определим на плоскости  $XOY$  декартову систему координат  $oxu$  с началом в первой измеренной точке  $M_1(X, Y) = f(S_1, D_1)$ . Тогда в этой системе определены векторы

$$\mathbf{a} = f(S_2, D_1) - f(S_1, D_1);$$

$$\mathbf{b} = f(S_1, D_2) - f(S_1, D_1);$$

$$\mathbf{u} = f(S_2, D_2) - f(S_2, D_1);$$

$$\mathbf{v} = f(S_2, D_2) - f(S_1, D_2).$$

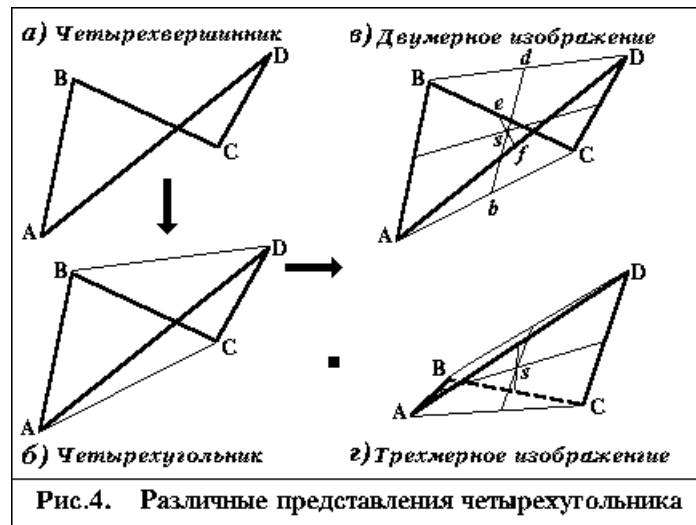
Рассмотрим далее четырехвершинник, построенный на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  с равномерной сеткой на нём. Заметим, что четырехвершинник имеет ориентацию, определяемую направлениями векторов – сторон. Это связано с определением в его вершинах значений функций  $S$  и  $D$ . Начальная точка  $f(S_1, D_1)$  находится в начале выбранной системы координат. Важное значение в дальнейшем будут иметь конечная точка четырехвершинника  $f(S_2, D_2)$  и вектор

$$\mathbf{I} = \mathbf{v} - \mathbf{a}.$$

Построим внутри четырехвершинника сетку – прямых путем деления его противоположных сторон на равное число отрезков и соединения прямыми линиями соответствующих концов таких отрезков. Докажем, что внутри четырехвершинника общего вида отрезки прямых подобной сетки пересекаются в пространстве и сохраняют пропорциональность отрезков сторон. Для этого (см. рис.4 **а)** и **б)**) восполним любой четырехвершинник недостающими прямыми до полного графа (в виде четырехугольника с его диагоналями) и рассмотрим свойства такого четырехугольника.

Хорошо известно свойство средних линий четырехугольника общего вида (прямых, соединяющих середины его противоположных сторон) — точка их пересечения делит их пополам. Менее известен факт, что в этой же точке пересекаются средние линии диагоналей четырехугольника (прямые, соединяющие середины этих диагоналей), и что эта точка также делит пополам эти средние линии диагоналей (рис. 4 — *в*).

Первое свойство легко доказывается путем соединения средних точек смежных сторон четырехугольника (соответствующие линии оказываются параллельными диагоналям) и рассмотрением полученного таким образом параллелограмма с его диагоналями. Второй факт вытекает из рассмотрения двух средних линий  $be$  и  $df$  двух треугольников  $ABC$  и  $ABD$  с общим основанием  $AB$  (Рис.4*в*). Эти средние линии параллельны и равны половине стороны  $AB$ . Следовательно, треугольники  $sbe$  и  $sdf$  равны, и точка  $s$  делит пополам отрезки  $bd$  и  $ef$ . Иными словами, точка  $s$ , являющаяся точкой пересечения средних линий четырехугольника  $ABCD$ , делит пополам и среднюю линию его диагоналей.



Опираясь на эти факты, легко объяснить геометрически необходимость сохранения для любого четырехвершинника пропорциональности отрезков *внутри* его равномерной сетки. Действительно, четырехвершинник общего вида может иметь форму "правильного" четырехугольника  $ABDC$  (4 его стороны), или "X-образного" четырехугольника  $ABCD$  (2 стороны и 2 диагонали), или (в случае вырождения одной из его сторон) — треугольника, например, —  $ABC$ . Во всех этих случаях объединением пар соседних клеток по каждому направлению сетки получается частный случай четырехвершинника со средними линиями, разделенными пополам.

Отсюда следует равенство отрезков каждой прямой равномерной сетки и их пропорциональность в любом выбранном масштабе.

Упомянутые свойства сохраняются и в случае пространственного четырехвершинника, образованного скрещивающимися отрезками прямых. Рассмотрим (рис. 4) параллельную проекцию на любую плоскость такого четырехвершинника с его пространственной равномерной сеткой, получаемой трансляцией двух линейных образующих, скользящих по его противоположным сторонам.

При таком проектировании прямые переходят в прямые и равенство их отрезков сохраняется. Следовательно, при этом проектировании равномерные узлы сторон пространственного четырехвершинника переходят в равномерные узлы их проекций, которые в проекции порождают равномерную сетку прямых линий. В результате получается некий четырехвершинник с упомянутым свойством: узлы равномерной сетки проекции делят линии сетки на равные доли.

Но, т.к. характер такой картины узлов не меняется с изменением ракурса исходного четырехвершинника (т.е. — направления проектирования), то это означает, что прямые линии сетки *пересекаются не только в проекциях, но и самом пространстве* (т.е. две линейчатые поверхности не скрещиваются, а образуют такую же систему узлов).

Таким образом, две пары скрещивающихся (в общем случае) прямолинейных отрезков — сторон пространственного четырехвершинника — порождают единую поверхность с системой пересекающихся в пространстве линейных образующих, которой принадлежит и равномерная пространственная сетка четырехвершинника. Этот факт имеет важное значение: он объясняет причину независимости результата линейной интерполяции  $L(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \xi)$  двумерной функции  $\mathbf{F}$ , заданной на четырехвершиннике, от порядка суперпозиции двух одномерных интерполяций по его противоположным сторонам с пропорциональными сдвигами, — соответственно  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi, \eta) &= L(L(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B), \xi), L(\mathbf{F}(C), \mathbf{F}(D), \xi), \eta) = \\ &= L(L(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(C), \eta), L(\mathbf{F}(B), \mathbf{F}(D), \eta), \xi). \end{aligned}$$

**Двумерное интерполяционное отображение четырехвершинника  
общего вида на единичный квадрат**

Будем представлять  $\xi$  и  $\eta$  в виде относительных координат точек сетки для двух пар противоположных сторон ( $\mathbf{a}, \mathbf{v}$  и  $\mathbf{b}, \mathbf{u}$ ) – рис.2. Параметры  $\xi$  и  $\eta$  меняются от 0 до 1 для последовательностей соответствующих точек векторов сторон от их начала к концу. Используя в любом порядке линейно-выпуклую комбинацию двух точек одной пары сторон по относительным координатам другой пары получим связь декартовых координат точек сетки  $\mathbf{M}(x, y)$  с их относительными координатами  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\mathbf{M}(X, Y) = \mathbf{M}(A) + \mathbf{M}(x, y);$$

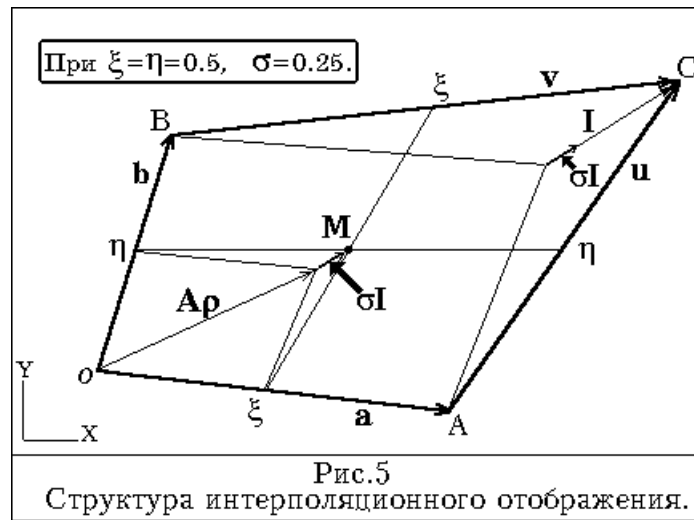
где

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{a} \cdot \xi \cdot (1 - \eta) + (\mathbf{b} + \mathbf{v} \cdot \xi) \cdot \eta$$

или

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{b} \cdot \eta \cdot (1 - \xi) + (\mathbf{a} + \mathbf{u} \cdot \eta) \cdot \xi.$$

Из равенства двух последних выражений следует необходимость равенства  $(\mathbf{v} - \mathbf{a}) = (\mathbf{u} - \mathbf{b})$  (которое очевидно из сравнения четырехвершинника  $\mathbf{abvu}$  и параллелограмма  $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, [(\mathbf{b} + \mathbf{a}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})]$ ), что объясняет принцип суперпозиции интерполяций (см. рис.5).



Таким образом, любая точка  $\mathbf{M}$  внутри четырехвершинника в линейном приближении выражается в системе  $oxy$  в векторной форме, как

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot \xi + \mathbf{b} \cdot \eta + (\mathbf{v} - \mathbf{a}) \cdot \xi \cdot \eta$$

или, если обозначить через  $\mathbf{I}$  вектор  $(\mathbf{v} - \mathbf{a}) = (\mathbf{u} - \mathbf{b})$ , – в виде:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\rho} + \mathbf{I} \cdot \sigma_{\rho}. \quad (*)$$

Здесь введены в рассмотрение матрица  $\mathbf{A}$ , вектор  $\boldsymbol{\rho}$  и скаляр  $\sigma$ :

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma_{\rho} = \xi \cdot \eta.$$

Формула (\*) описывает искомое отображение внутренности четырехвершинника на внутренность единичного квадрата. Для определения свойств такого отображения представляет интерес геометрический смысл ее параметров. Матрица  $\mathbf{A}$  описывает аффинную часть этого отображения:  $\xi, \eta$ -преобразование сжатия параллелограмма с вершинами  $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ , построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Вектор  $\mathbf{l}$  представляет собой вектор смещения конечной вершины  $\mathbf{C}$  четырехвершинника от вершины  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  этого параллелограмма. Этот ненулевой вектор характеризует отличие четырехвершинника от параллелограмма и определяет направление сдвига узлов сетки параллелограмма к сетке четырехвершинника. Нелинейный скалярный параметр  $\sigma_\rho = \xi \cdot \eta$  численно равен площади, связанной с вектором  $\rho$  в единичном квадрате отображения (\*).

Для заданной точки  $\mathbf{s}$  в четырехвершиннике общего вида значения координат  $\xi$  и  $\eta$  заранее неизвестны. Их определение необходимо для решения задачи интерполяции функции  $\mathbf{F}$ , заданной в точках  $\xi = 0, \xi = 1, \eta = 0$  и  $\eta = 1$ . Для этого необходимо построить преобразование, обратное описанному.

Если ввести в рассмотрение скалярные комплексы — определители:

$$\begin{vmatrix} a_x & I_x \\ a_y & I_y \end{vmatrix} = e, \quad \begin{vmatrix} b_x & I_x \\ b_y & I_y \end{vmatrix} = f, \quad \begin{vmatrix} M_x & I_x \\ M_y & I_y \end{vmatrix} = g,$$

и исключить из системы уравнений (\*) квадратичный член  $\sigma_\rho$ , то, можно увидеть необходимость существования линейной связи  $\xi$  и  $\eta$  для любой данной точки  $M$ :

$$e \cdot \xi + f \cdot \eta = g. \quad (**)$$

Это соотношение заменяет одно из уравнений (\*). Второе уравнение в этих обозначениях можно заменить одним из квадратных уравнений относительно  $\xi$  или  $\eta$ :

$$e \cdot \xi^2 + (d - g) \cdot \xi + l = 0,$$

или

$$f \cdot \eta^2 - (d + g) \cdot \eta + h = 0,$$

где

$$d = |\mathbf{A}|, \quad h = \begin{vmatrix} a_x & I_x \\ a_y & I_y \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad l = \begin{vmatrix} b_x & I_x \\ b_y & I_y \end{vmatrix}.$$

### *Случаи вырождения рассматриваемого отображения*

В общем случае решение одного из полученных квадратных уравнений с последующим использованием соотношения (\*\*) позволяет определить искомые координаты  $\xi, \eta$  заданной точки  $\mathbf{M}$ .

Однако, следует иметь ввиду случаи вырождения квадратичной зависимости в линейную. Заметим, что такое вырождение связано не только с отсутствием смещения (вектор  $\mathbf{I}=\mathbf{0}$ ) четырехвершинника относительно "аффинного параллелограмма". Оно возникает и в случаях параллельности какой-либо пары сторон четырехвершинника. Но тогда процедура определения интерполяционных координат  $\xi, \eta$  точки  $\mathbf{M}$  не сводима к процедуре обращения матрицы  $\mathbf{A}$ , что приводит к необходимости в разных ситуациях конфигурации четырехвершинника, использовать разные процедуры решения.

Опишем эти процедуры для разных случаев вырождения.

Пусть  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  – матрицы аффинного преобразования, построенного на базисе из векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{b}$  или  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{u}$ , т.е.:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} v_x & b_x \\ v_y & b_y \end{vmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{vmatrix} a_x & u_x \\ a_y & u_y \end{vmatrix}.$$

и пусть  $\det \mathbf{A} = d = |\mathbf{A}|$ ,  $\det \mathbf{V} = |\mathbf{V}|$  и  $\det \mathbf{U} = |\mathbf{U}|$ . Тогда следует проверять условия вырождения:

1) Вектор  $\mathbf{I}=\mathbf{0}$ .

- Если  $\det \mathbf{A} = 0$ , то это – параллелограмм без внутренностей, в котором решение определено, если точка  $\mathbf{M}$  лежит на прямой совпадающих векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Соответствующая компонента вектора  $\rho$  равна относительному расстоянию точки  $\mathbf{M}$  от точки  $o$  (начала векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ) на соответствующем векторе. Решения нет, если точка  $\mathbf{M}$  лежит вне указанной прямой.
- Если  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , то это – четырехвершинник, представляющий собой параллелограмм. В этом случае решается система:

$$\mathbf{A} \cdot \rho = \mathbf{M}.$$

2) Вектор  $\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$ .

- a.** – Если  $e=0$ , и  $f=0$ , и  $g=0$  (все векторы – коллинеарны).
- Если  $\det \mathbf{A} = 0$  и  $\det \mathbf{V} = 0$ , то это – четырехугольник без внутренностей, в котором решение, строго говоря, не определено.

Решение может быть условно определено из (\*) по  $\xi$  при выбранном  $\eta$  (например,  $\eta=0$ ), либо по  $\eta$  – при выбранном  $\xi$  (например,  $\xi=0$ ).

**б.** – Если  $e=f=0$ , а  $g \neq 0$ , то решения нет.

**в.** – Если  $e=0$ , а  $f \neq 0$ , то значение  $\eta$  определяется из (\*\*), как

$$\eta = g/f,$$

а значение  $\xi$  – из того уравнения системы (\*), для которого выполняется условие

$$a_x + I_x \cdot \eta \neq 0$$

или, соответственно, –  $a_y + I_y \cdot \eta \neq 0$ .

Тогда  $\xi = (M_i - b_i \cdot \eta) / (a_i + I_i \cdot \eta)$ , где  $i = x | y$ .

В противном случае  $\xi = 0$ .

**г.** – Если  $e \neq 0$ , а  $f = 0$ , то значение  $\xi$  определяется из (\*\*), как

$$\xi = g/e,$$

а значение  $\eta$  – из того уравнения системы (\*), для которого выполняется условие

$$b_x + I_x \cdot \xi \neq 0$$

или, соответственно, –  $b_y + I_y \cdot \xi \neq 0$ .

Тогда  $\eta = (M_i - a_i \cdot \xi) / (b_i + I_i \cdot \xi)$ , где  $i = x | y$ .

В противном случае  $\eta = 0$ .

**д.** – Если  $e \neq 0$ , и  $f \neq 0$ , – все стороны непараллельны. Применяется описанная выше стандартная процедура (решение квадратного и линейного уравнений). Если существуют действительные корни квадратного уравнения, то выбирается тот его корень, которому соответствуют либо оба, либо одно из неравенств:

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

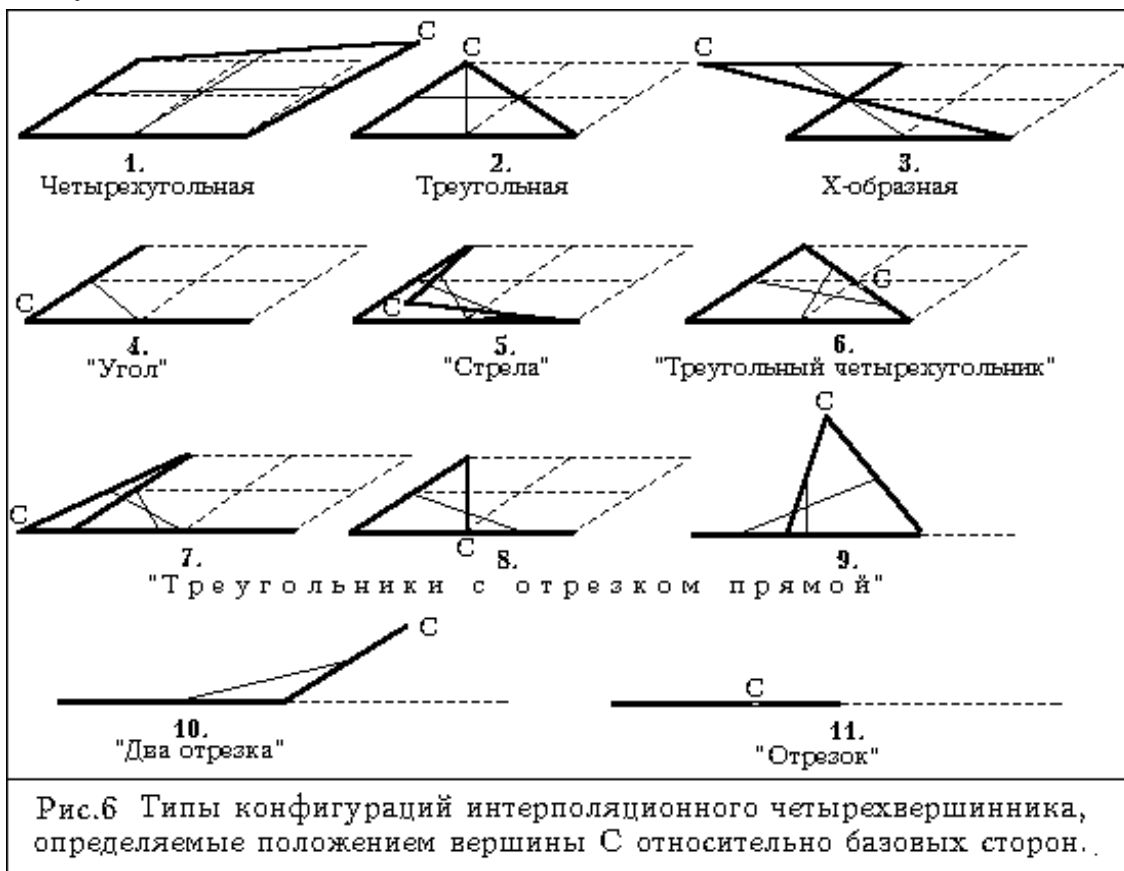
что соответствует *интерполяционному* характеру решения.

Заметим: что решение имеет *экстраполяционный* характер во всех случаях, когда найдено  $0 > \xi > 1$  или  $0 > \eta > 1$ .

Интересен случай, когда  $\det A = 0$ , либо  $\det V = 0$ , либо  $\det U = 0$ . Это означает, что в четырехвершиннике имеются две смежные коллинеарные стороны. Такая ситуация не приводит к осложнениям (решение определяется стандартной процедурой) ввиду сохранения (см. ниже рис.12) пространственной равномерной сетки у смежных коллинеарных сторон, хотя сама эта сетка лежит вне контура четырехвершинника. Это пример упомянутых выше случаев нетривиального определения "внутренности" четырехвершинника, кото-

рая оказывается *вне* его контура (оставаясь внутренностью единичного квадрата). Подобная ситуация подробно рассматривается ниже.

Ввиду симметрии выражений (\*), (\*\*) относительно базовых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , вид фигуры интерполяции зависит от их взаимного положения и положения вершины  $C$ . Всего имеется 11 различных типов таких фигур, показанных на рис.6. На рисунке пунктирными линиями нанесен базовый параллелограмм или его вырождение в отрезок определенной длины. Для упрощения на рисунке не нанесены векторы смещения  $\mathbf{I}$ , — они всегда соединяют вершину параллелограмма с точкой  $C$ . Тонкими сплошными линиями показаны два центральных элемента равномерной сетки каждого из четырехвершинников (они иногда сливаются в одну линию), соединяющие середины их противоположных сторон. Точка их пересечения (если она существует) соответствует центральной точке "внутренности" четырехвершинника с координатами  $\xi=0,5$  и  $\eta=0,5$  (см., например, конфигурации № 5 и № 7).





### *Область существования решения*

Представляет интерес выяснить причины возможного отсутствия решения в такой, казалось бы, всегда определенной задаче. Рассмотрим для этого геометрический смысл параметров  $\xi$  и  $\eta$  на плоскости  $oxy$  четырехвершинника с заданной точкой  $M$  (см. рис.5.). С одной стороны значения этих параметров определяют узлы равномерной сетки четырехвершинника по соответствующим пропорциональным сдвигам точек на его сторонах. С другой стороны эти параметры являются компонентами некоторого вектора ("аффинного вектора") в косоугольной системе координат двух начальных сторон ориентированного четырехвершинника, т.е., определяют узлы другой — "аффинной сетки" в системе этих двух сторон. Напомним, что ориентация четырехвершинника связана с определением интерполируемых функций в его вершинах. Концы таких аффинных векторов всюду одинаково смещены относительно узлов равномерной сетки — вдоль обратного направления вектора  $I$ . При этом величина смещения (доля вектора  $I$ ), каждого аффинного вектора определяется произведением компонент разложения  $\xi$  и  $\eta$  по базовым сторонам четырехвершинника.

Из приведенного описания геометрической структуры интерполяционного отображения следует ряд соображений:

— Заданная точка  $M$  (она всегда находится в искомом узле однородной сетки) должна иметь возможность достигнуть соответствующий узел аффинной сетки в направлении вектора  $I$  с учетом знака произведения  $\xi \cdot \eta$ . Это не всегда возможно, если т.  $M$  находится вне угла, образованного базовыми сторонами четырехвершинника, и это возможно всегда, когда т.  $M$  принадлежит его внутренности. Для доказательства этого рассмотрим рис.7, на котором показаны три четырехвершинника с одинаковыми базовыми сторонами и разными положениями т.  $S$ : типа "четыреугольник" —  $S_1$ , типа "стрела" —  $S_2$  и "X-вершинник" —  $S_3$ . На рисунке показаны также три вектора смещения  $I$  с соответствующими векторами  $\sigma_p \cdot I$  долевых сдвигов (жирные пунктиры), базовый параллелограмм и две пары линий аффинной и однородной сеток для  $\xi = \eta = 0,5$  (тонкие пунктиры).

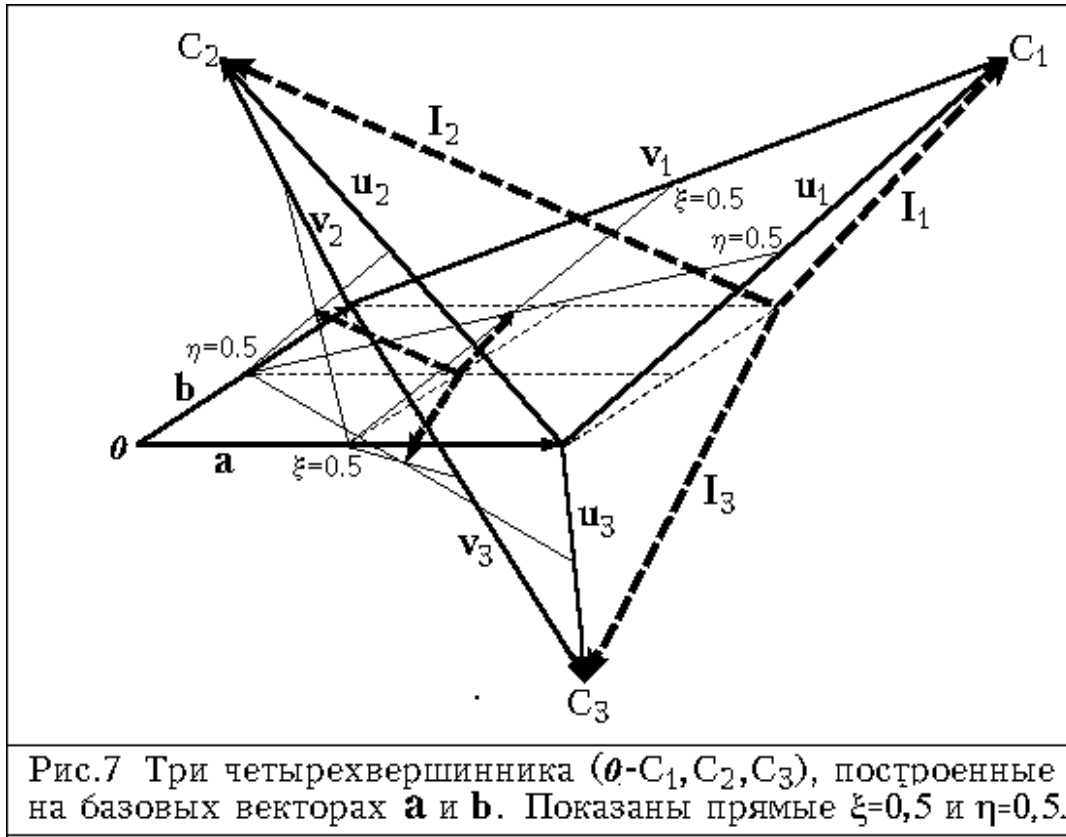


Рис.7 Три четырехвершинника ( $\theta-C_1, C_2, C_3$ ), построенные на базовых векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Показаны прямые  $\xi=0,5$  и  $\eta=0,5$ .

Из рисунка видно, что для невырожденного четырехвершинника построение однородной сетки путем равномерного движения прямых  $\xi$  и  $\eta$  по двум отрезкам его *несмежных* сторон между двумя другими несмежными его сторонами гарантирует всюду плотное заметание этими прямыми внутренности четырехвершинника.

Заметим, что это – очевидное утверждение для конфигураций типа “четыреугольник”, “треугольник” и “треугольный четырехвершинник” в виду выпуклости их контуров. Но в конфигурации типа “X–вершинник” концы одной из прямых всегда движутся в противоположных направлениях, что приводит к их самопересечению и может породить “мертвые” (незаметаемые) зоны. Однако, легко увидеть: что такая зона не принадлежит внутренности контура X–вершинника ввиду того, что движение транслируемой прямой начинается и кончается на его “X–сторонах”. Аналогичные рассуждения применимы и в случае конфигурации типа “треугольник с отрезком”.

Что касается невыпуклой конфигурации четырехвершинника типа “стрела”, то поскольку ее внутренние стороны попарно противоположны внешним, каждая транслируемая прямая в середине своего движения всегда терпит совпадение с одной из своих направляющих. При таком совпадении невыпуклая фигура четырехвер-

шинника разбивается на два треугольника, всюду плотно заметаемые отрезками этой прямой до и после такого совпадения.

Таким образом, "по построению" доказывается, что *внутри контура четырехвершинника при любой его конфигурации не может быть областей, не принадлежащих сетке прямых, опирающихся на равномерные шкалы противоположных сторон.* Отсюда следует, что любая заданная точка  $M$  (она всегда находится в искомом узле однородной сетки) должна по необходимости быть связана с соответствующим узлом аффинной сетки *в постоянном направлении вектора  $I$*  – с учетом знака произведения  $\xi \cdot \eta$ .

Более того, из приведенных рассуждений следует, что при невыпуклом четырехвершиннике областью существования решения является также *некоторая часть внешности его контура*, о чем упоминалось раньше. Это связано с наличием самопересечения транслируемых прямых в их движении по сторонам невыпуклого контура.

Если такое самопересечение не происходит в единственной точке (что возможно в случае симметричного  $X$  – вершинника), то существует гладкая огибающая подобного пучка прямых. Эта огибающая не может принадлежать внутренности контура четырехвершинника, т.к. в этом случае внутри контура появилась бы "мертвая зона", ограниченная линейной границей контура и гладкой огибающей кривой. Следовательно, в таких случаях прямые однородной сетки должны пересекать контур, образуя, **"внешнюю внутренность (!) четырехвершинника"** (как уже говорилось, она, принадлежит внутренности единичного квадрата отображения).

Таким образом, под "внутренностью четырехвершинника" следует понимать фигуру, ограниченную его контуром и огибающей самопересекающихся линий его равномерной сетки.

Заметим, что в ситуации сеточных прямых с самопересечением возникает двузначность решения, что объясняет возникновение квадратичной зависимости (\*) рассматриваемого интерполяционного преобразования.

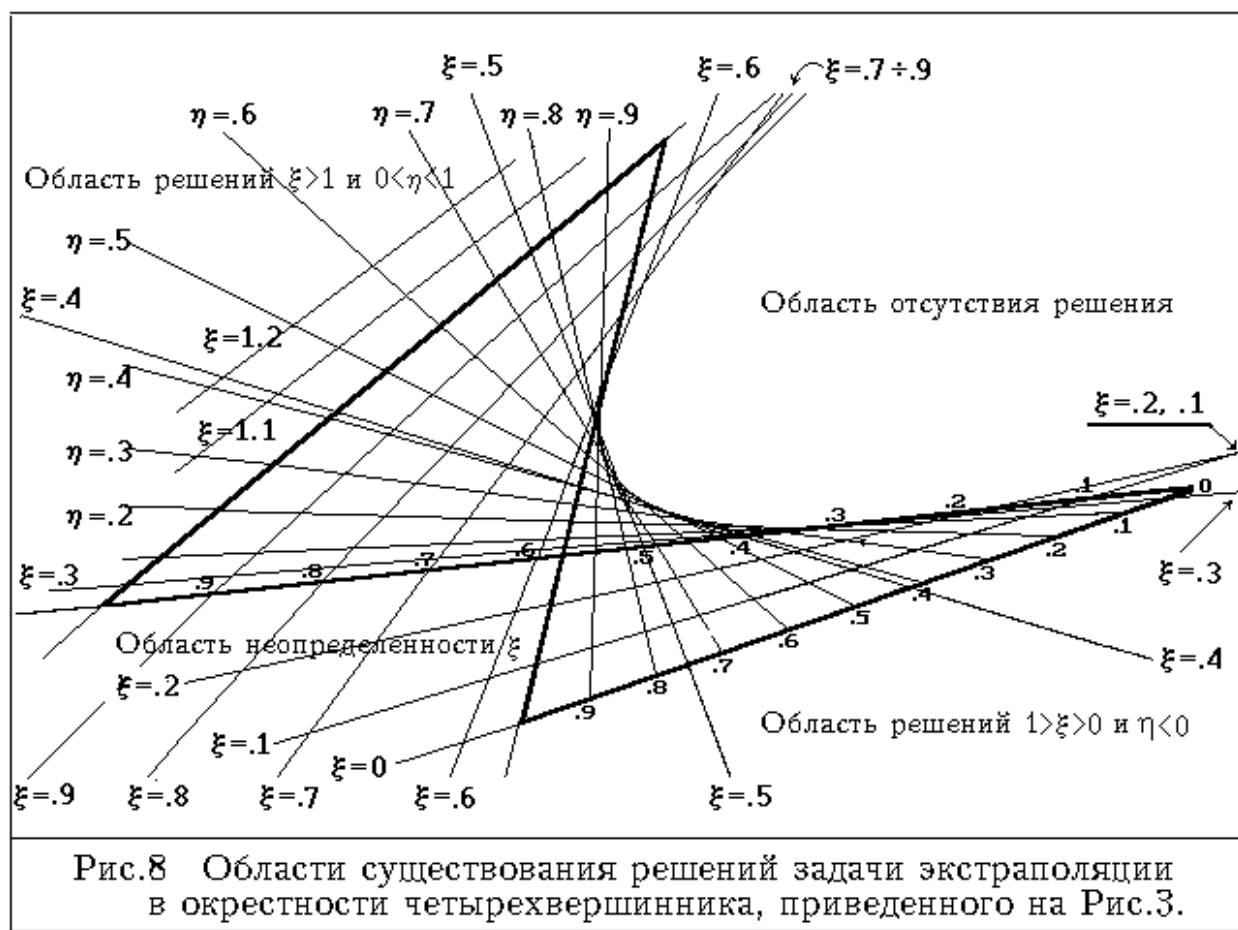
"Наружность" общего четырехвершинника (она соответствует решениям задачи экстраполяции) за исключением тривиального случая аффинного преобразования устроена более сложно. Уже в простом линейном случае четырехугольника с двумя параллельными сторонами продолжение равномерной сетки в его окрестности

представляет собой для одного параметра пучек прямых с общей точкой, пересекаемых параллельными прямыми другого параметра. Таким образом, в общей точке первого параметра (являющейся точкой пересечения непараллельных сторон четырехвершинника) существует особенность, а на содержащей ее прямой второго параметра решение отсутствует.

В более общем случае неправильного выпуклого четырехугольника две пары противоположных сторон имеют (каждая свою) точку пересечения, но требование равномерности сетки приводит к отсутствию общей точки в каждом из двух соответствующих пучков прямых. В результате, однозначное решение экстраполяционной задачи существует лишь в области расходимости прямых сетки.

У стрелообразного четырехвершинника точки пересечения противоположных сторон принадлежат его контуру. Это приводит к ситуации, когда экстраполяционные прямые ( $\xi < 0$ , или  $\xi > 1$ ,  $\eta < 0$  или  $\eta > 1$ ) могут пересекать контур четырехвершинника (часть его внешности оказывается у него внутри!). В то же время, все решения экстраполяционной задачи оказываются возможными лишь вне прямых фигуры "стрелы". Внутри этой фигуры, ограниченной огибающей интерполяционного решения и прямыми "острия стрелы", решения нет.

Наиболее сложно устроена внешность X-вершинника, который можно трактовать, как "скрученный" четырехугольник. При таком "скручивании" происходит частичное самоналожение пучков, что порождает области неоднозначности решений. В невыпуклой части контура со стороны начала базовых векторов (аналогично предыдущему случаю) существует область отсутствия решения, ограниченная огибающей интерполяционной задачи и некоторыми прямыми равномерной сетки. Эта ситуация хорошо видна на примере X-вершинника, показанного на рис. 3 и 8.



### *Пример: Тарировочная характеристика лазерного дальномера*

Рассмотрим одну из проблем использования лазерного дальномера в качестве сенсора информационной системы мобильного робота, предназначенного для автоматического перемещения по заранее неизвестной местности.

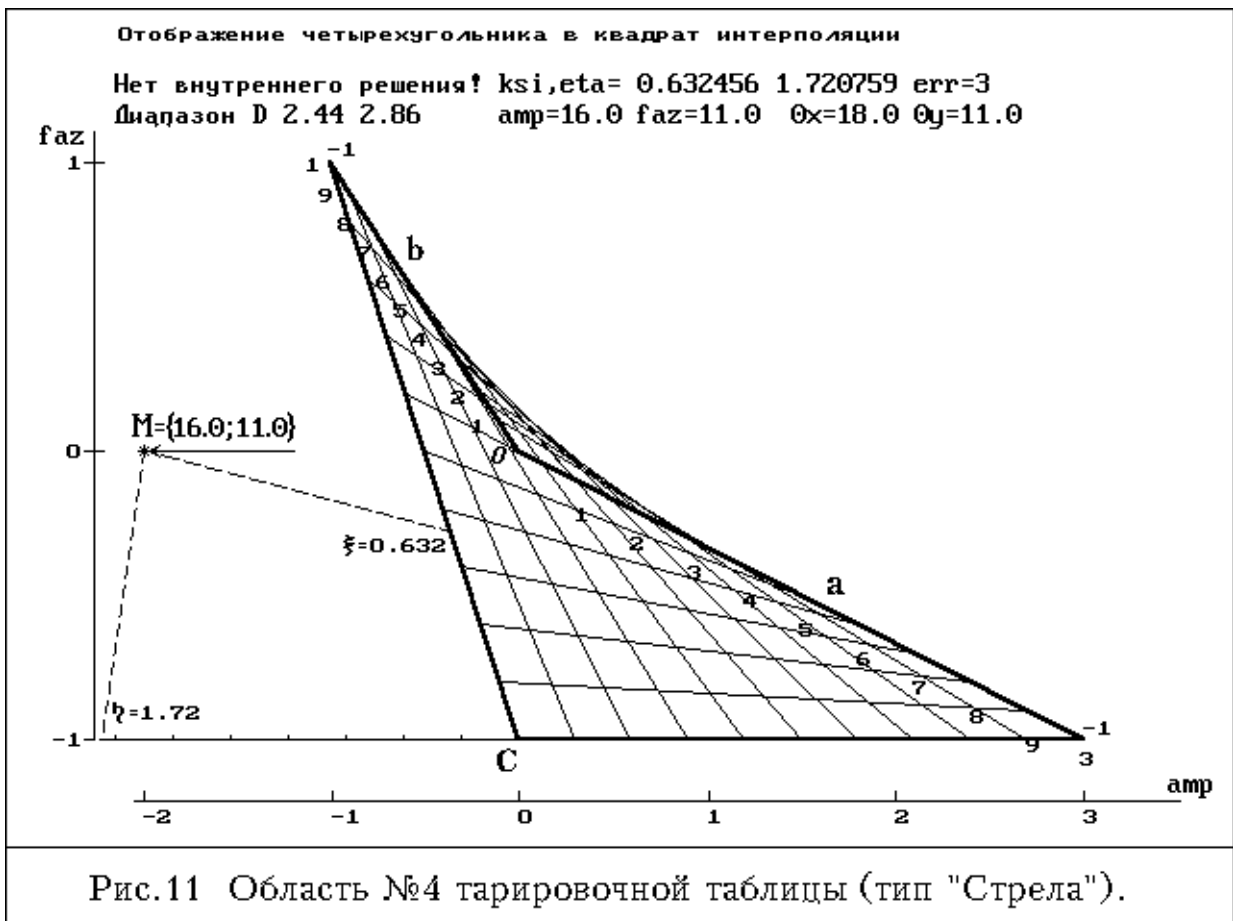
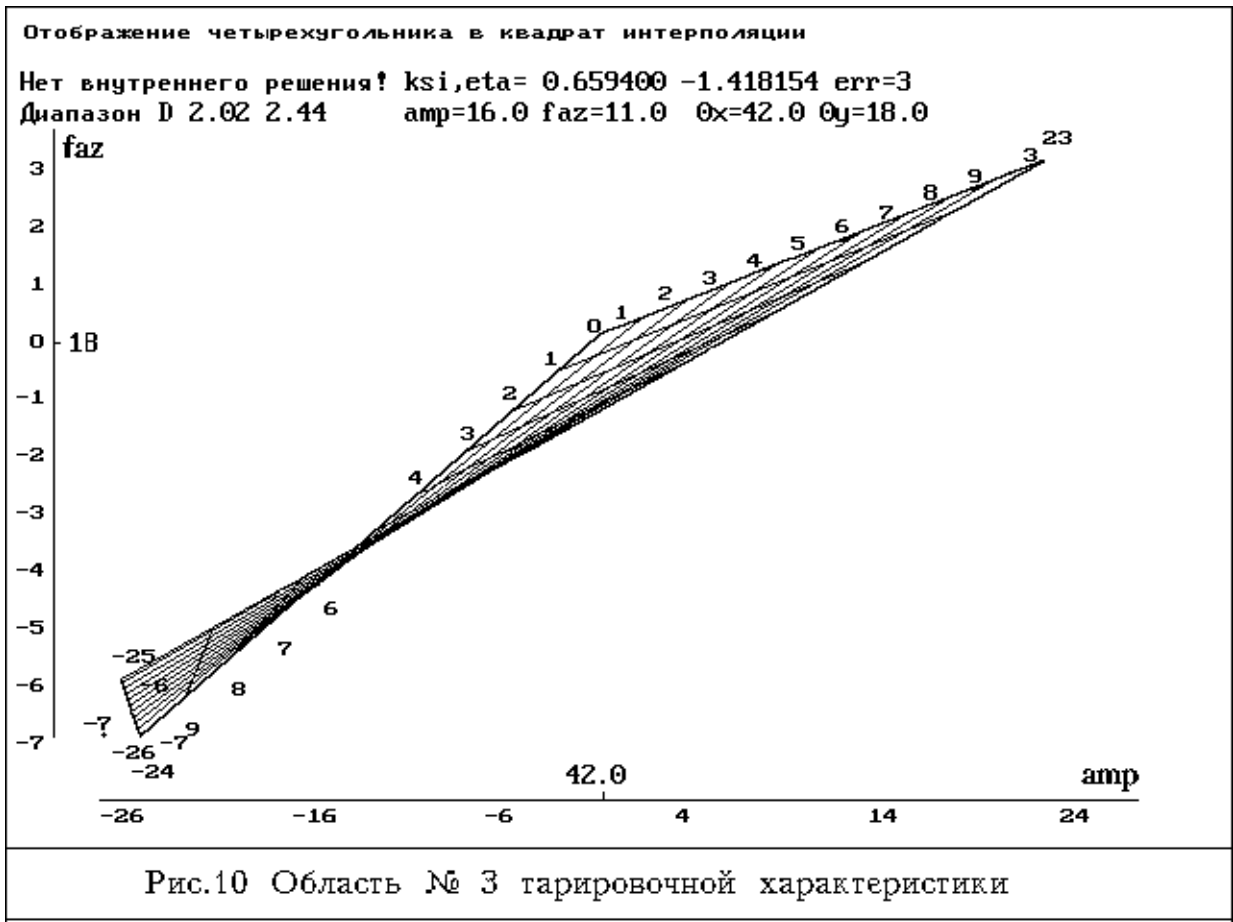
Для измерения с помощью лазерного дальномера расстояний порядка нескольких метров удобен фазовый метод определения весьма малой задержки локационного сигнала. Однако, в этом случае значение получаемого измерения в сильной степени зависит от характеристик отражающей поверхности, влияющих на форму возвращаемого сигнала. Исследования особенностей такого способа получения информации о рельефе среды передвижения показали необходимость использования фотометрических данных при интерпретации дальномерных сигналов [1]. Таким образом, в обработку включаются два измерения — значения фазового сдвига и уровня яркости принимаемого сигнала, связанные с искомым значением наклонной дальности и характеристиками отражения от облучаемой поверхности.

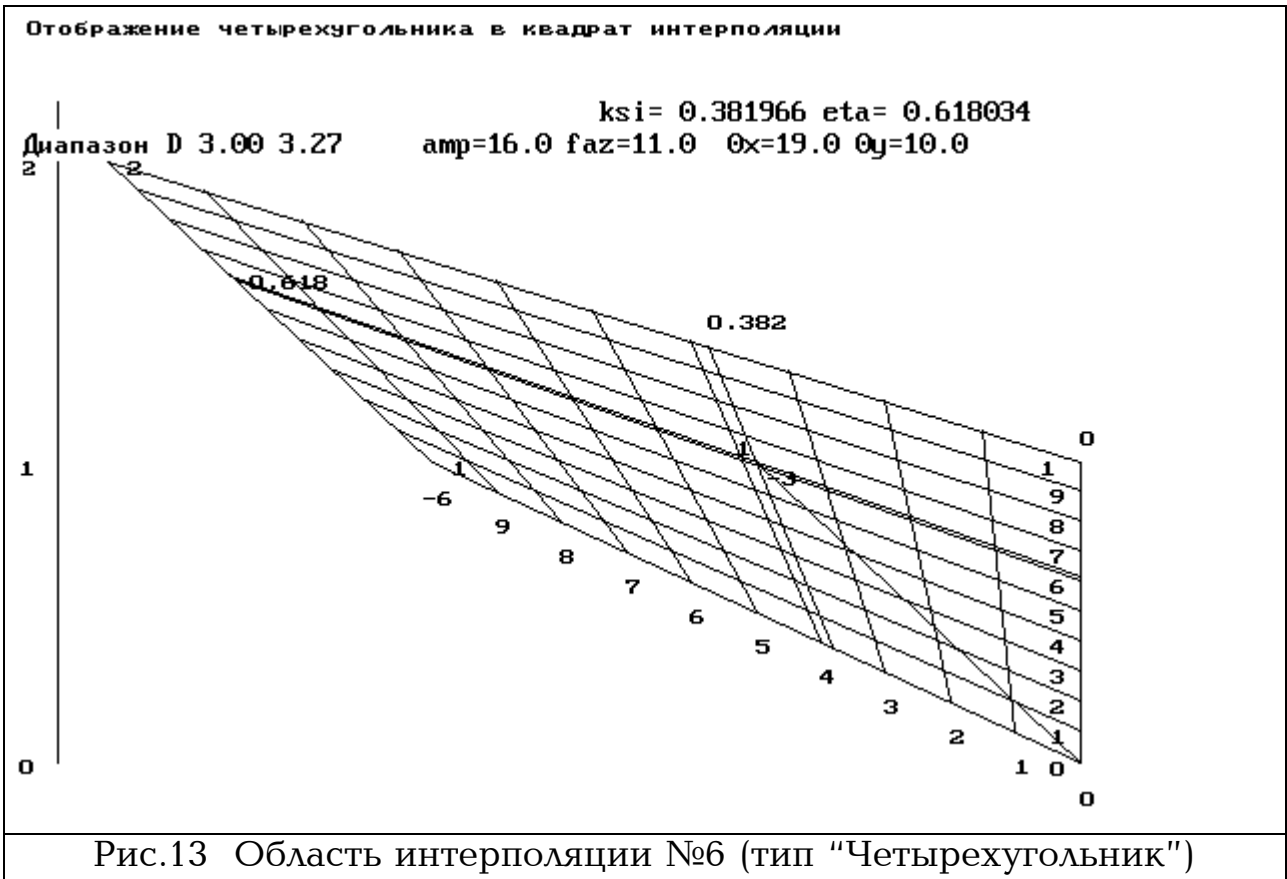
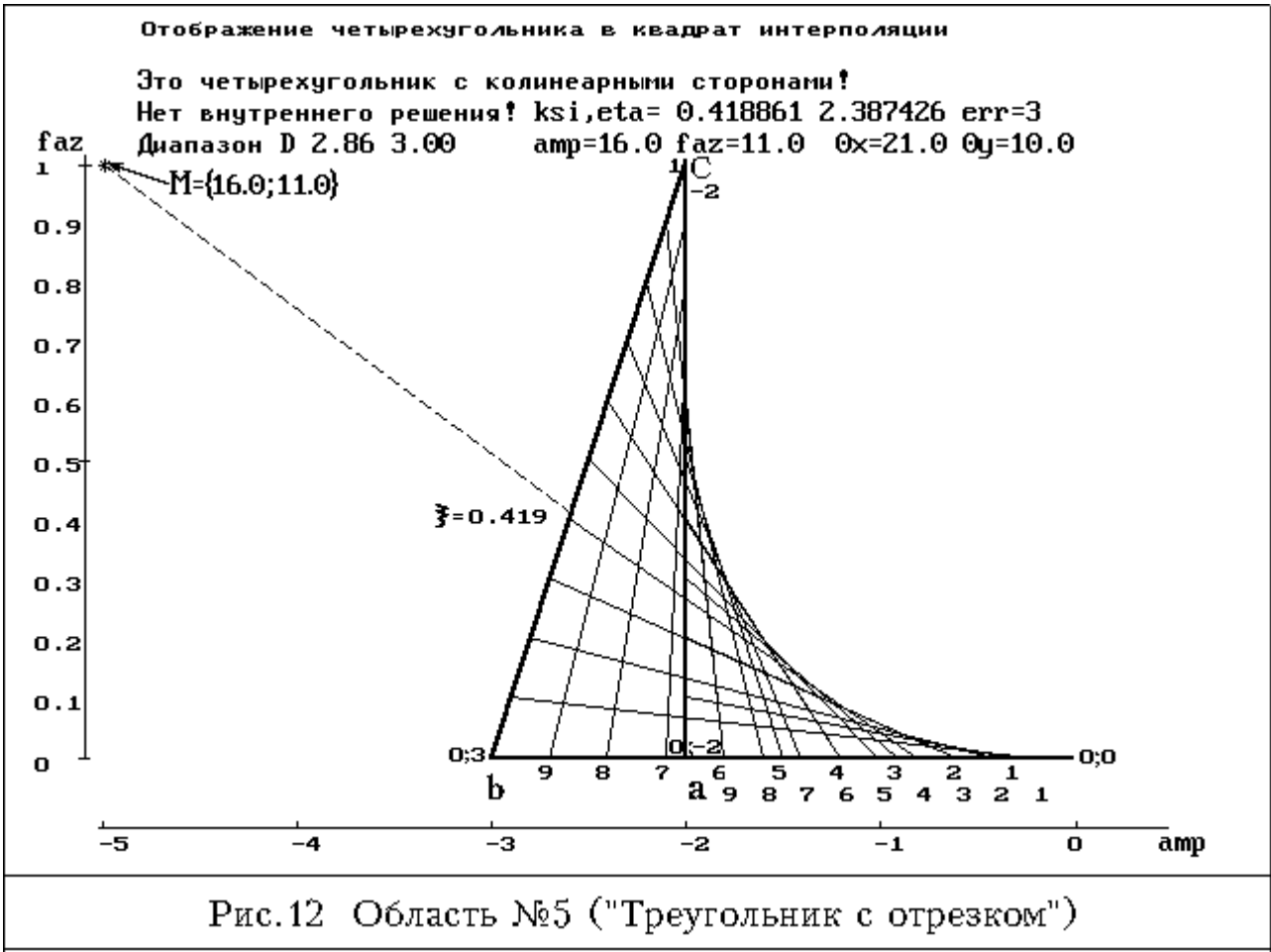
Интерпретация такого двумерного вектора измерений реализуется с помощью тарифовочной характеристики прибора, получаемой заранее путем облучения мишеней с известными характеристиками отражения, расположенных на известном расстоянии. Пример такой тарифовочной характеристики показан на рис.9.



На рисунке показаны 13 областей интерполяции для диапазона дальностей в пределах 6 м, полученные по черной и белой мишеням (2 диапазона – №№ 12 и 13 получены по отражению от горизонтальной поверхности с большой компонентой зеркального отражения). Следует обратить внимание на области №5 ("треугольник с отрезком), 8,10 ("отрезки") и 3,11 ("X – вершинники") Область, отмеченная на рисунке знаком "!" не принадлежит ни одному четырехвершиннику, – она окружена ими.

Ниже на рис. 10-15 приведены некоторые представительные области интерполяции (они получены на экране дисплея в виде, повернутом относительно горизонтальной оси на рис.9.). На каждом из рисунков показана т.М(x,y) и ее координаты  $\xi$  и  $\eta$ .







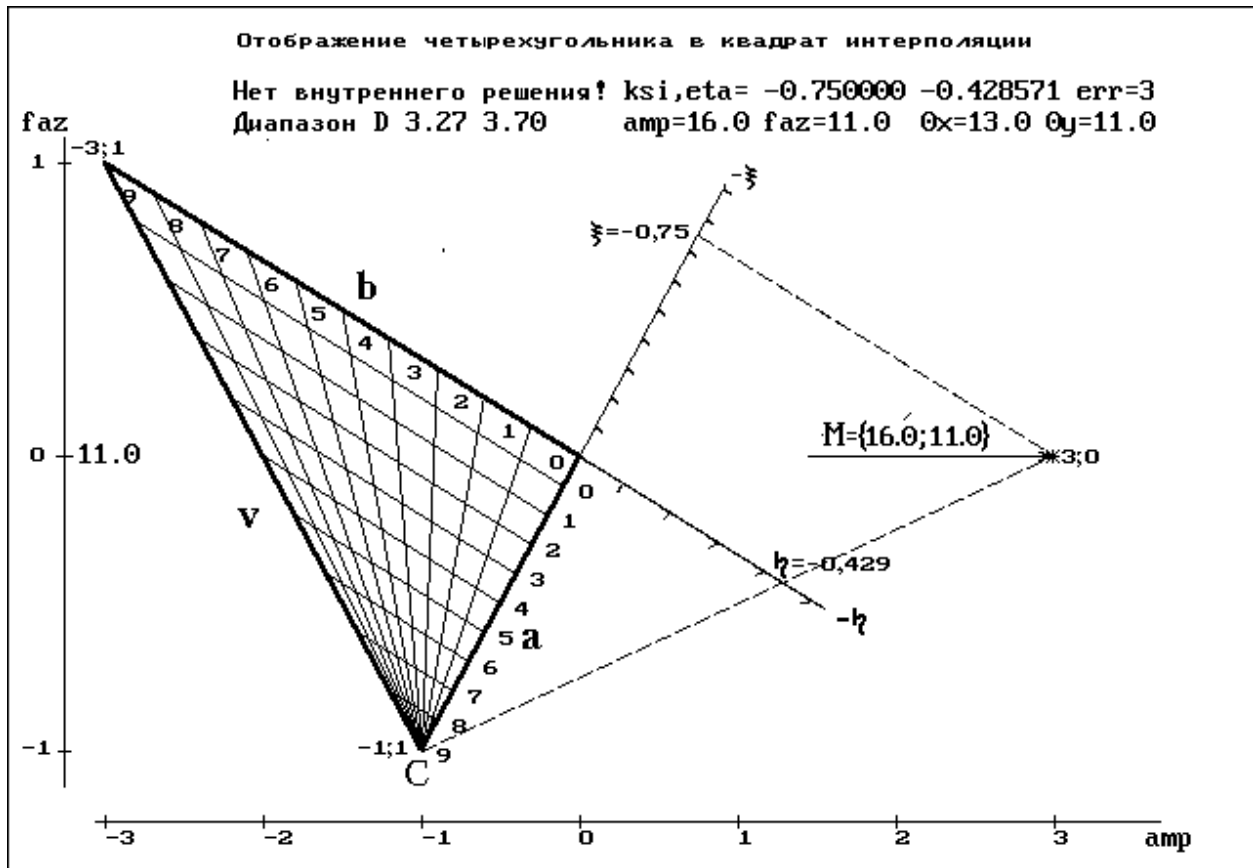


Рис.14 (Область №7 (тип "Треугольник" - вектор  $u = 0$ )).

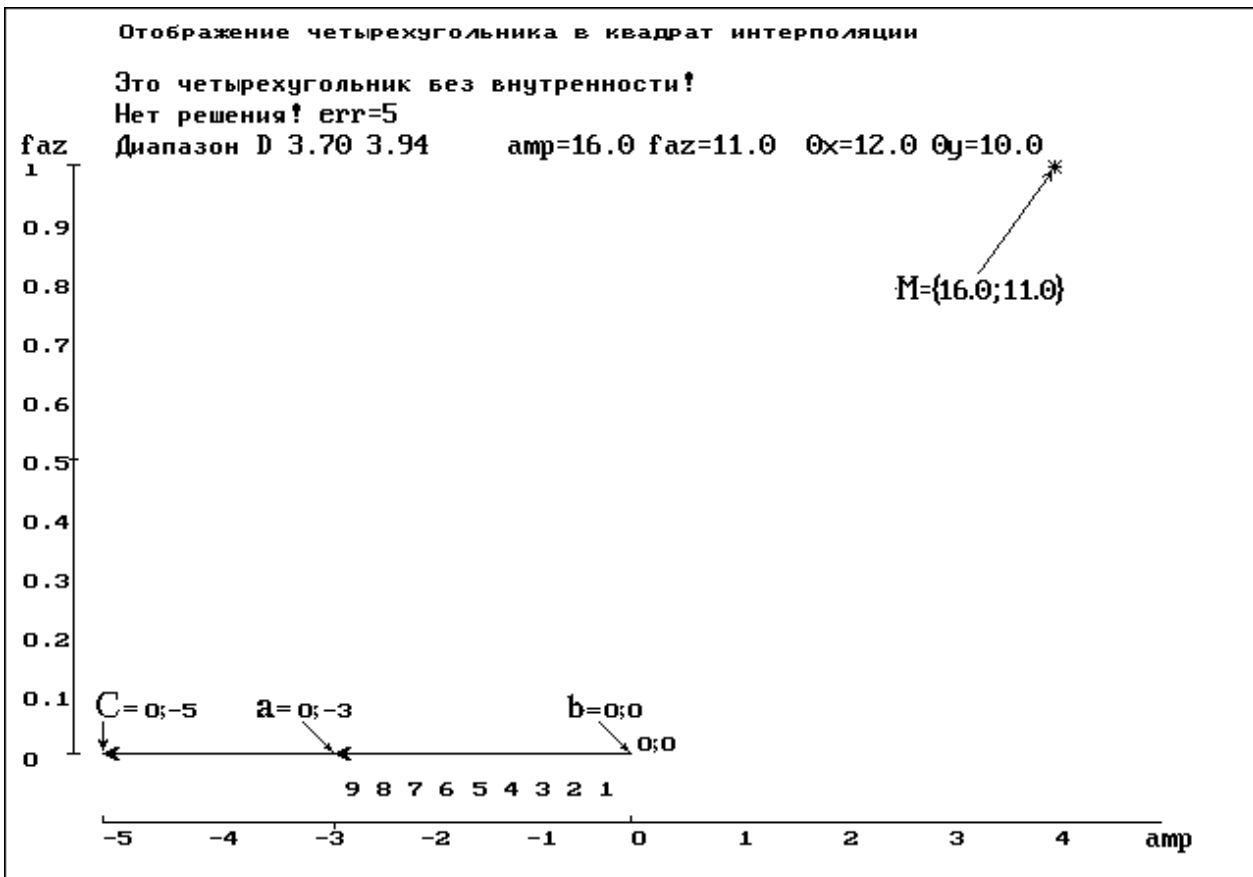


Рис.15 Область №8 (Тип "Отрезок")

### *Заключительные замечания*

Описанное преобразование относится к классу неточечных геометрических бирациональных преобразований (в смысле определений [2]) в множестве равномерно – сеточных прямых гиперболоида на четырехвершиннике. Оно в общем случае является нелинейным точечным отображением (\*) точек сетки единичного квадрата плоскости, но при этом сохраняется принцип суперпозиции. Это преобразование является движением (в смысле [3]), поскольку в числовой плоскости единичного квадрата направление обхода образа любой точки четырехвершинника замкнутой жордановой кривой остается неизменным. Этот факт определяет групповые свойства данного геометрического преобразования.

На двумерном множестве координат нерегулярных точек такое преобразование определяет негладкое многообразие параметров для кусочно – линейной интерполяции функций, заданных в этих точках. Подобный подход может быть полезен при обработке экспериментальных данных.

Основное внимание в данной работе уделялось изучению свойств и особенностей полученного преобразования двумерных данных. Наиболее близким исследованием является ранняя работа [4], в которой был впервые описан локальный способ гладкого восполнения функций, заданных на неравномерной (но прямоугольной) сетке.

### *Литература*

1. Платонов А.К., Безбогов С.А., Кирильченко А.А., Ярошевский В.С. "Исследование особенностей дальномерной лазерной обзорно – информационной системы". М: Препринт ИПМ РАН, № 9, 1994
2. Яглом И.М. Геометрические преобразования. М.: Гостехиздат, 1955
3. Гильберт Д. Основания геометрии. М – Л: ОГИЗ Гостехиздат, 1948
4. Рябенский В.С. "Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции функций по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки" М.: Препринт ИПМ АН СССР, № 24 за 1974 г.