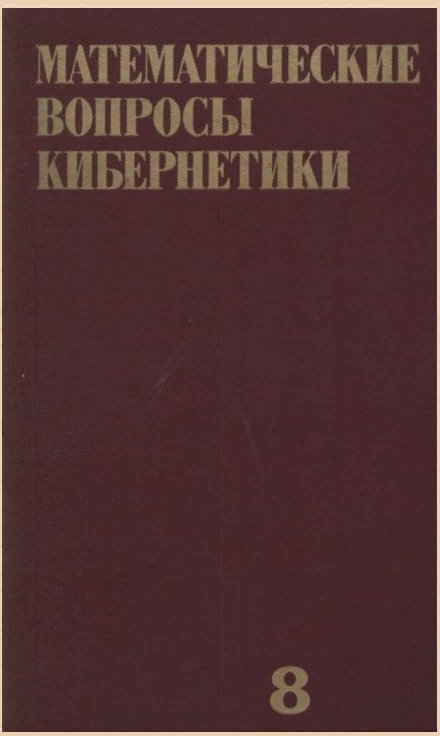

В. В. Кочергин

О мультипликативной сложности двоичных слов с заданным числом единиц

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СЛОЖНОСТИ ДВОИЧНЫХ СЛОВ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ ЕДИНИЦ *)

В. В. КОЧЕРГИН

(МОСКВА)

Конкатенацией слов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ конечной длины над произвольным алфавитом называется слово $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}$, полученное приписыванием справа к слову $\widetilde{\alpha}$ слова $\widetilde{\beta}$. В данной работе будут рассматриваться только слова над алфавитом $\{0, 1\}$.

Последовательность S двоичных слов (наборов)

$$\widetilde{\tau}_{-1} = 0, \quad \widetilde{\tau}_0 = 1, \quad \widetilde{\tau}_1, \ldots, \widetilde{\tau}_r = \widetilde{\alpha}$$

назовем *схемой конкатенации* (см. также [7]), реализующей (вычисляющей) слово (набор) $\widetilde{\alpha}$, если для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, r$, слово $\widetilde{\tau}_i$ можно представить в виде $\widetilde{\tau}_i = \widetilde{\tau}_j \widetilde{\tau}_m$, где индексы j и m удовлетворяют условиям $-1 \leqslant j, m \leqslant i-1$. *Сложностью* $l_c(S)$ данной схемы S, реализующей слово $\widetilde{\alpha}$, назовем число r. Положим $l_c(\widetilde{\alpha}) = \min l_c(S)$, где минимум берется по всем схемам конкатенации, реализующим слово $\widetilde{\alpha}$. Величину $l_c(\widetilde{\alpha})$ назовем *мультипликативной сложностью* слова (набора) $l_c(\widetilde{\alpha})$. Отметим, что схему конкатенации можно рассматривать как схему из функциональных элементов (см., например, [6]), имеющую два входа, на которые подаются, соответственно, 0 и 1, а каждый элемент схемы реализует конкатенацию наборов, подаваемых на его входы. Заметим также, что аналогичным образом можно ввести понятие мультипликативной сложности $l_c(M)$ системы двоичных слов (наборов) M — для этого надо потребовать, чтобы в последовательности S содержались все слова из множества M.

Обозначим через A_n^k множество всех двоичных наборов (слов) длины n, содержащих ровно k единиц. Положим

$$l_c(k, n) = \max_{\widetilde{\alpha} \in A_n^k} l_c(\widetilde{\alpha}), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Отметим, что при исследовании поведения функционала $l_c(k, n)$ в силу очевидного равенства $l_c(k, n) = l_c(n-k, n)$ можно считать, что $k \leqslant n/2$.

Для некоторых значений k асимтотически точные оценки величины $l_c(k, n)$ получаются путем переформулировки известных результатов.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–01175) и частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 473).

При $k=0$ из оценок аддитивной сложности натурального числа (в мультипликативной постановке — сложности возведения в заданную степень) [9] и [10] (см. также [2]) следует равенство *)

$$l_c(k, n) = \log n + \frac{\log n}{\log\log n}(1 + o(1)).$$

При любом фиксированном k из результата [12] вытекает соотношение

$$l_c(k, n) = (1 + o(1)) \log n.$$

При $k = \lfloor n/2 \rfloor$ из [11] получаем, что

$$l_c(k, n) = (1 + o(1))\frac{n}{\log n}.$$

В [4] установлен порядок роста (при $n \to \infty$) величины $l_c(k, n)$ в общем случае. В данной работе получена асимптотически точная оценка поведения величины $l_c(k, n)$ в общем случае.

Теорема. *Пусть $n \to \infty$, $k \leqslant n/2$. Тогда* **) ***)

$$l_c(k, n) \sim \log n + \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}.$$

Замечание. Строго говоря, утверждение теоремы должно быть сформулировано следующим образом. Пусть $\{(k_m, n_m)\}$, $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность пар целых чисел, удовлетворяющая условиям:

$$0 \leqslant k_m \leqslant n_m/2, \qquad n_m \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Тогда при $m \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$l_c(k_m, n_m) \sim \log n_m + \frac{\log C_{n_m}^{k_m}}{\log\log C_{n_m}^{k_m}}.$$

Доказательство. Как уже отмечено, при $k=0$ (с учетом того, что выражение $\log C_n^k / \log\log C_n^k$ при $k=0$ доопределено нулем) утверждение теоремы верно (см. [2, 9, 10]). Далее будем считать, что $k \geqslant 1$.

Прежде, чем перейти непосредственно к доказательству теоремы, напомним поведение величины $\log C_n^k / \log\log C_n^k$ при $n \to \infty$.

Используя формулу Стирлинга нетрудно показать, что при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\log C_n^k \sim \log\left(\frac{n}{k}\right)^k + \log\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k},$$

из которого, в свою очередь, следует, что $\log\log C_n^k \sim \log\log\left(\frac{n}{k}\right)^k$. Поэтому

$$\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \sim \frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^k + \log\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^k},$$

при этом для k, «близких» к $n/2$ (т. е. если $n/2 - k = o(n)$), справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \sim \frac{n}{\log n}.$$

*) Здесь и далее $\log x$ означает $\log_2 x$.

**) Запись $f \sim g$ означает, что выполняется равенство $f = (1 + o(1))g$.

***) Доопределим выражение $\log C_n^k / \log\log C_n^k$ при $k=0$ нулем.

Кроме того, если выполняется соотношение $k = o(n)$, то

$$\log\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} = (n-k)\log\left(1 + \frac{k}{n-k}\right) = O(k) = o\left(\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k}\right),$$

и, следовательно, при $k = o(n)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \sim \frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^k}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^k}.$$

Верхняя оценка. Пусть $\widetilde{\alpha}_n^k$ — некоторый набор из множества A_n^k, имеющий наибольшую мультипликативную сложность среди наборов из этого множества, т. е. удовлетворяющий условию $l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) = l_c(k, n)$. Обозначим в наборе $\widetilde{\alpha}_n^k$ через n_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, число нулей между i-й и $(i+1)$-й единицами. Таким образом, $n = \sum\limits_{i=0}^{k} n_i + k$.

Случай 1. $1 \leqslant k < n^{1/\log\log n}$.

Заметим, что в условиях случая 1 справедливы асимптотические равенства

$$\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \sim \frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^k}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^k} \sim \frac{k\log n}{\log(k\log n)}.$$

Сведем задачу о верхней оценке сложности конкатенации слов к задаче о верхней оценке сложности вычисления набора степеней одной переменной (задача Д. Кнута [2, разд. 4.6.3., упр. 32]).

Обозначим через $l(x^{n_0}, x^{n_1}, \ldots, x^{n_k})$ (считаем, что $n_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$) наименьшее число операций умножения, достаточное для вычисления по переменной x набора степеней $x^{n_0}, x^{n_1}, \ldots, x^{n_k}$ (допускается многократное использование промежуточных результатов). Очевидно, что

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) \leqslant l(x^{n_0}, x^{n_1}, \ldots, x^{n_k}) + 2k.$$

Используя теорему 1 из [1], получаем:

$$l_c(k, n) = l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) \leqslant \log \max_{0 \leqslant i \leqslant k} n_i + \frac{\log \prod\limits_{n_i \neq 0} n_i}{\log\log \prod\limits_{n_i \neq 0} n_i}(1 + o(1)) + O(k).$$

Оценим сверху величину

$$\frac{\log \prod\limits_{n_i \neq 0} n_i}{\log\log \prod\limits_{n_i \neq 0} n_i}.$$

Пусть среди чисел n_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, ровно s отличны от 0. Тогда, используя условие случая 1, возрастание функции $x^{1/x}$ при $x < e$ и возрастание функции $\log x / \log\log x$ при больших значениях аргумента, имеем:

$$\frac{\log \prod\limits_{n_i \neq 0} n_i}{\log\log \prod\limits_{n_i \neq 0} n_i} \leqslant \frac{\log\left(\frac{n}{s}\right)^s}{\log\log\left(\frac{n}{s}\right)^s} \leqslant \frac{\log\left(\frac{n}{k+1}\right)^{k+1}}{\log\log\left(\frac{n}{k+1}\right)^{k+1}} \leqslant \frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k+1}}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k+1}} \leqslant \frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k+1}}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k}}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^{k}} + O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right) \leqslant \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}(1 + o(1)) + O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

С другой стороны,

$$k = \frac{\log k + \log\log\frac{n}{k}}{\log n - \log k}\,\frac{\log\left(\frac{n}{k}\right)^k}{\log\log\left(\frac{n}{k}\right)^k} \leqslant \frac{\log k}{\log n - \log k}\,\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}(1 + o(1)).$$

Но в условиях случая 1 выполняется неравенство $\log k = o(\log n)$, поэтому

$$k = o\left(\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}\right).$$

Таким образом, окончательно, в случае 1 получаем неравенство

$$l_c(k, n) \leqslant \log n \ (1 + o(1)) + \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}(1 + o(1)).$$

Случай 2. $n^{1/\log\log n} \leqslant k \leqslant n^{1-1/\log\log n}$.

Условия этого случая равносильны следующим неравенствам:

$$\frac{1}{\log\log n} \log n \leqslant \log k \leqslant \left(1 - \frac{1}{\log\log n}\right) \log n,$$

из которых, в частности, следует, что $\log\log k \sim \log\log n$.

Отметим также, что в условиях случая 2 справедливо асимптотическое равенство

$$\log n + \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \sim \frac{k \log(n/k)}{\log k},$$

поэтому достаточно показать, что выполняется соотношение

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) \leqslant \frac{k \log(n/k)}{\log k} + o\left(\frac{k \log(n/k)}{\log k}\right).$$

Положим

$$I_1 = \{i \mid 0 \leqslant i \leqslant k,\ n_i < (n/k)(\log\log k)^4\},$$
$$I_2 = \{i \mid 0 \leqslant i \leqslant k,\ n_i \geqslant (n/k)(\log\log k)^4\}.$$

Пусть $s = s(n)$ — некоторый параметр, удовлетворяющий условиям

$$s = o((\log\log n)^3), \qquad \log\log n = o(s)$$

(точное значение параметра s определим позже). Разобьем набор $\widetilde{\alpha}_n^k$ на поднаборы $0^{n_0}, 10^{n_1}, 10^{n_2}, \ldots 10^{n_k}$. Последовательно объединим (когда это возможно) наборы вида 10^{n_i}, где $i \in I_1$, в непересекающиеся группы по s штук, стоящих подряд, а индексы i, соответствующие наборам 10^{n_i}, вошедшим в такие группы, отнесем к множеству J_1. Положим $J_2 = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus J_1$. Легко понять, что

$$|J_1| \leqslant |I_1|, \qquad |J_2| \leqslant |I_2| + (s-1)(|I_2| + 1).$$

Реализуем сначала все наборы вида 10^{n_i}, где $i \in J_2$ (без ограничения общности можно считать, что все такие n_i отличны от нуля). Аналогично оценке в случае 1, опираясь на теорему 1 из [1] и учитывая, что

$$|J_2| \leqslant \frac{k}{(\log\log k)^4} + (s-1)\left(\frac{k}{(\log\log k)^4} + 1\right) \leqslant \frac{2ks}{(\log\log k)^4},$$

получаем:

$$l_c(\{10^{n_i} \mid i \in J_2\}) \leqslant \log \max_{i \in J_2} n_i + \frac{\log \prod_{i \in J_2} n_i}{\log\log \prod_{i \in J_2} n_i}(1 + o(1)) + O\left(\frac{ks}{(\log\log k)^4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \log n + \frac{\log\left(\left(\frac{n(\log\log k)^4}{2ks}\right)^{\frac{2ks}{(\log\log k)^4}}\right)}{\log\log\left(\left(\frac{n(\log\log k)^4}{2ks}\right)^{\frac{2ks}{(\log\log k)^4}}\right)} + O\left(\frac{ks}{(\log\log k)^4}\right).$$

Далее, используя неравенство $\log\left(\frac{n}{k}\right) \geqslant \frac{\log n}{\log\log n}$, получаем:

$$\log n \leqslant \log\log n \log(n/k) = (1+o(1))\log\log k \log(n/k) = o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right);$$

$$\frac{\log\left(\left(\frac{n(\log\log k)^4}{2ks}\right)^{\frac{2ks}{(\log\log k)^4}}\right)}{\log\log\left(\left(\frac{n(\log\log k)^4}{2ks}\right)^{\frac{2ks}{(\log\log k)^4}}\right)} \leqslant \frac{2ks}{(\log\log k)^4}\cdot\frac{(\log(n/k)+O(\log\log\log n))}{\log\left(\frac{2ks}{(\log\log k)^4}\right)+\log\log\left(\frac{n(\log\log k)^4}{2ks}\right)} =$$

$$= \frac{k\log(n/k)}{\log k}O\left(\frac{s}{(\log\log k)^4}\right) + O\left(\frac{ks\log\log\log n}{(\log\log k)^4\log k}\right) = o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right) + o\left(\frac{ks}{(\log\log k)^4}\right);$$

$$\frac{ks}{(\log\log k)^4} \leqslant \frac{ks}{(\log\log k)^4}\cdot\frac{\log\log n\log(n/k)}{\log n} \leqslant \frac{s\log\log n}{(\log\log k)^4}\cdot\frac{k\log(n/k)}{\log k} = o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right).$$

Таким образом,

$$l_c(\{10^{r_i} \mid i\in J_2\}) = o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right).$$

Рассмотрим два подслучая: $(n/k)(\log\log k)^4 \geqslant \lceil k/(\log\log k)^3\rceil + 1$ и $(n/k)(\log\log k)^4 < \lceil k/(\log\log k)^3\rceil + 1$.

С л у ч а й 2.1. Пусть выполняется неравенство

$$\frac{n}{k}(\log\log k)^4 \geqslant \left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil + 1.$$

Положим $d_{01}=0$. Для $i=1,\ldots,s$ последовательно определим d_{i0}, r_i, d_{i1} следующим образом:

$$d_{i0} = \left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil}{d_{i-1,1}+1}\right\rfloor, \quad r_i = \left\lfloor\frac{\log\left(\frac{\frac{n}{k}(\log\log k)^4}{d_{i0}+1}\right)}{\log\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil}\right\rfloor, \quad d_{i1} = \left\lfloor\frac{\frac{\frac{n}{k}(\log\log k)^4}{d_{i0}+1}}{\left(\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil\right)^{r_i}}\right\rfloor.$$

Отметим, что $d_{ij} \leqslant \lceil k/(\log\log k)^3\rceil$ ($i=1,2,\ldots,s$, $j=0,1$), а величины r_i ($i=1,2,\ldots,s$) равны либо r_1, либо r_1+1, и $r_1 \geqslant 0$.

Кроме того, при $i=1,2,\ldots,s$ в силу неравенств

$$r_i \leqslant \frac{\log\left(\frac{\frac{n}{k}(\log\log k)^4}{d_{i0}+1}\right)}{\log\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil} < r_i + 1$$

выполняются соотношения

$$1 \leqslant d_{i1} \leqslant \left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil - 1.$$

Из последнего неравенства также следует неравенство

$$d_{i+1,0} \geqslant 1 \qquad (i=1,2,\ldots,s).$$

Определим множества M_{ij}, $i=1,\ldots,s$, $j=1,\ldots,r_i$, нулевых наборов (т. е. наборов, состоящих только из нулей) следующим образом:

$$M_{ij} = \left\{0^{ad_{i0}\left(\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil\right)^{j-1}} \;\middle|\; a=0,1,\ldots,\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil - 1\right\}.$$

Теперь определим множества M_i, $i=1,2,\ldots,s$, наборов, содержащих ровно одну единицу:

$$M_1 = \{10^b \mid b=0,1,\ldots,d_{1,0}\},$$

$$M_i = \left\{0^{ad_{i-1,0}\left(\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil\right)^{r_{i-1}-1}}10^b \;\middle|\; a=0,1,\ldots,d_{i-1,1},\ b=0,1,\ldots,d_{i0}\right\},\ i=2,\ldots,s.$$

Дополнительно положим

$$M_{s+1}=\left\{0^{ad_{s0}\left(\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil\right)^{r_s-1}}\,\middle|\,a=0,1,\ldots,d_{s1}\right\}.$$

Очевидно, что

$$|M_{ij}|=\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil,\qquad i=1,\ldots,s,\quad j=1,\ldots,r_i.$$

В силу неравенств

$$d_{i0}(d_{i-1,1}+1)\leqslant\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil,$$

при $i=1,\ldots,s$ справедливы соотношения

$$|M_i|\leqslant(d_{i-1,1}+1)(d_{i,0}+1)=2d_{i0}(d_{i-1,1}+1)\leqslant 2\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil.$$

Кроме того,

$$|M_{s+1}|\leqslant\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil.$$

Положим

$$M^{(0)}=\bigcup_{i=1}^{s}\bigcup_{j=1}^{r_i}M_{ij},\qquad M^{(1)}=\bigcup_{i=1}^{s+1}M_i.$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$l_c(M^{(0)})\leqslant\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r_i}M_{ij},$$

так как все наборы из $M^{(0)}$ можно последовательно реализовать, используя на каждый новый набор ровно одну операцию конкатенации.

Аналогично, для получения всех наборов из $M^{(1)}$, учитывая, что все наборы из $M^{(0)}$ уже получены, достаточно $O(|M^{(1)}|)$ операций конкатенации.

Таким образом,

$$l_c(M^{(0)}\cup M^{(1)})=O(|M^{(0)}\cup M^{(1)}|)=\left(\sum_{i=1}^{s}r_i\right)\frac{k}{(\log\log k)^3}O(1).$$

Произвольный набор $\widetilde{\sigma}$ вида

$$\widetilde{\sigma}=10^{u_1}10^{u_2}\ldots10^{u_s},$$

где $u_i\leqslant(n/k)(\log\log k)^4$, $i=1,\ldots,s$, можно представить в следующем виде:

$$\widetilde{\sigma}=\widetilde{\mu}_1\widetilde{\mu}_{11}\ldots\widetilde{\mu}_{1,r_1}\widetilde{\mu}_2\widetilde{\mu}_{21}\ldots\widetilde{\mu}_{2,r_2}\widetilde{\mu}_3\ldots\ldots\widetilde{\mu}_s\widetilde{\mu}_{s1}\ldots\widetilde{\mu}_{s,r_s}\widetilde{\mu}_{s+1},$$

где $\widetilde{\mu}_{ij}\in M_{ij}$ $(i=1,\ldots,s,\ j=1,\ldots,r_i)$, $\widetilde{\mu}_i\in M_i$ $(i=1,\ldots,s+1)$.

Теперь, имея наборы из $M^{(0)}$ и $M^{(1)}$, для получения набора $\widetilde{\sigma}$ достаточно использовать не более $\sum_{i=1}^{s}r_i+s$ операций конкатенации.

Таким образом, окончательно получаем:

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k)\leqslant l_c(\{10^{n_i}\mid i\in J_2\})+l_c(M^{(0)}\cup M^{(1)})+\left(\sum_{i=1}^{s}r_i+s\right)\frac{k}{s}+|J_2|.$$

Используя доказанные выше соотношения

$$l_c(\{10^{n_i} \mid i \in J_2\}) = o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right), \qquad |J_2| \leqslant \frac{2ks}{(\log\log k)^4} = o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right),$$
$$l_c(M^{(0)} \cup M^{(1)}) = \left(\sum_{i=1}^{s} r_i\right)\frac{k}{(\log\log k)^3}O(1),$$

и учитывая наложенное на параметр s ограничение ($s = o((\log\log k)^3)$), получаем:

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{s} r_i + s\right)\frac{k}{s} + \left(\sum_{i=1}^{s} r_i\right)\frac{k}{(\log\log k)^3}O(1) + o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{s} r_i + s\right)\frac{k}{s}(1 + o(1)) + o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right).$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{s} r_i + s \leqslant \frac{s\log\left(\frac{n}{k}(\log\log k)^4\right) + s}{\log\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil},$$

так как, учитывая неравенства $d_{i1} \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, s$, имеем:

$$\left(\tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right)^s = \prod_{i=1}^{s}\left((d_{i0}+1)\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil^{r_i}\frac{\frac{n}{k}(\log\log k)^4}{(d_{i0}+1)\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil^{r_i}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil^{\sum_{i=1}^{s} r_i}\prod_{i=1}^{s}\left(\left(\left\lfloor\frac{\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil}{d_{i-1,1}+1}\right\rfloor + 1\right)d_{i1}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil^{\sum_{i=1}^{s} r_i + s}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{2}\,\frac{d_{i1}+1}{d_{i-1,1}+1}\right) \geqslant \left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil^{\sum_{i=1}^{s} r_i + s} 2^{-s}.$$

Окончательно в случае 2.1 получаем:

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) \leqslant \left(\frac{s\log\left(\frac{n}{k}(\log\log k)^4\right) + s}{\log\left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil}\right)\frac{k}{s}(1 + o(1)) + o\left(\frac{k\log\left(\frac{n}{k}\right)}{\log k}\right).$$

Положим $s = \lceil(\log\log n)^2\rceil$ (при таком выборе параметра s условия, наложенные на этот параметр, выполняются). Тогда

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k) \leqslant \frac{k\log(n/k)}{\log k}(1 + o(1)).$$

Случай 2.2. Пусть выполняется неравенство

$$\frac{n}{k}(\log\log k)^4 < \left\lceil\frac{k}{(\log\log k)^3}\right\rceil + 1.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{2k}{(\log\log k)^3} \geqslant \left\lceil\frac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil + 1.$$

Введем параметр $t = t(n, k, s)$ таким образом:

$$t = \left\lceil \frac{\log \left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil^s}{\log \frac{k}{(\log\log k)^3}} \right\rceil .$$

Тогда выполняются следующие соотношения:

$$t \geqslant s\frac{\log(n/k)}{\log k} \geqslant \frac{s\log n}{\log k \log\log n} \geqslant \frac{s}{\log\log n}.$$

Поэтому в условиях, наложенных на s, при $n \to \infty$ выполняется усло вие $t \to \infty$.

Положим $d_{01} = 0$. Для $i = 1, \ldots, t$ последовательно определим d_{i0}, r_i, d_{i1}

$$d_{i0} = \left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil}{d_{i-1,1}+1} \right\rfloor, \quad r_i = \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{2k}{(\log\log k)^3(d_{i0}+1)}\right)}{\log\left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil} \right\rfloor, \quad d_{i1} = \left\lfloor \frac{\frac{2k}{(\log\log k)^3(d_{i0}+1)}}{\left(\left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil\right)^{r_i}} \right\rfloor .$$

Дополнительно положим

$$d_{t+1,0} = \left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil}{d_{t,1}+1} \right\rfloor .$$

Отметим, что $d_{ij} \leqslant \lceil (n/k)(\log\log k)^4 \rceil$ $(i = 1, 2, \ldots, t,\ j = 0, 1)$, а величины r_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ равны либо r_1, либо $r_1 + 1$, и $r_1 \geqslant 0$.

Кроме того, при $i = 1, 2, \ldots, t$ в силу неравенств

$$r_i \leqslant \frac{\log\left(\frac{2k}{(\log\log k)^3(d_{i0}+1)}\right)}{\log\left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil} < r_i + 1$$

выполняются соотношения

$$1 \leqslant d_{i1} \leqslant \left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \right\rceil - 1.$$

Из последнего неравенства также следует неравенство

$$d_{i0} \geqslant 1 \ (i = 1, 2, \ldots, t+1).$$

Положим

$$M_1 = \{10^{a_0}10^{a_1}1 \ldots 0^{a_{r_1}}10^{a_{r_1+1}d_{20}} \mid a_0 = 0, 1, \ldots, d_{10},$$
$$a_j = 0, 1, \ldots, \lceil (n/k)(\log\log k)^4 \rceil - 1 \ (j = 1, \ldots, r_1),\ a_{r_1+1} = 0, 1, \ldots, d_{11}\}.$$

Все наборы из M_1 содержат ровно $r_1 + 2$ единиц.

Далее определим множества M_i, $i = 2, \ldots, t$, наборов, содержащих ровно $r_i + 1$ единиц следующим образом:

$$M_i = \{0^{a_0}10^{a_1}1 \ldots 0^{a_{r_i}}10^{a_{r_i+1}d_{i+1,0}} \mid a_0 = 0, 1, \ldots, d_{i,0},$$
$$a_j = 0, 1, \ldots, \lceil (n/k)(\log\log k)^4 \rceil - 1 \ (j = 1, \ldots, r_i),\ a_{r_i+1} = 0, 1, \ldots, d_{i1}\}.$$

Дополнительно положим

$$M_{t+1} = \{0^a \mid a = 0, 1, \ldots, \lceil (n/k)(\log\log k)^4 \rceil - 1\},$$
$$M_{t+2} = \{10^{a_1} \ldots 10^{a_p} \mid p = 1, \ldots r_1 + 1,$$
$$a_j = 0, 1, \ldots, \lceil (n/k)(\log\log k)^4 \rceil - 1 \ (j = 1, \ldots, p)\}.$$

Отметим, что в наборах из M_{t+2} количество единиц колеблется от 1 до $r_1 + 1$.

В силу неравенств $d_{i1} \geqslant 1$ и $d_{i1} \leqslant \frac{\frac{2k}{(\log\log k)^3 (d_{i0}+1)}}{\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil^{r_i}}$ при $i = 1, \ldots, t$ справедливы соотношения

$$|M_i| \leqslant (d_{i0} + 1)(d_{i1} + 1) \lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil^{r_i} \leqslant$$
$$\leqslant (d_{i0} + 1) \frac{\frac{4k}{(\log\log k)^3 (d_{i0}+1)}}{\left(\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil\right)^{r_i}} \lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil^{r_i} = \frac{4k}{(\log\log k)^3}.$$

Кроме того,

$$|M_{t+1}| \leqslant |M_{t+2}| = \sum_{p=1}^{r_1+1} \lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil^p < 2 \lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil^{r_1+1} \leqslant \frac{4k}{(\log\log k)^3}.$$

Положим

$$M = \bigcup_{i=1}^{t+2} M_i.$$

Все наборы из M можно последовательно реализовать, используя на каждый новый набор ровно одну операцию конкатенации следующим образом. Сначала последовательно реализуем наборы $0, 0^2, \ldots, 0^{\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil}$, т. е. все наборы из M_{t+1}, затем последовательно (в порядке возрастания числа единиц в наборе) — все наборы из M_{t+2}, а затем с использованием наборов из M_{t+1} и M_{t+2} — все наборы из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_t$. Поэтому справедливо равенство

$$l_c(M) = O\left(\frac{kt}{(\log\log k)^3}\right).$$

Докажем, что произвольный набор $\widetilde{\sigma}$ вида

$$\widetilde{\sigma} = 10^{u_1} 10^{u_2} \ldots 10^{u_s},$$

где $u_i \leqslant (n/k)(\log\log k)^4$, $i = 1, \ldots, s$, можно представить в следующем виде:

$$\widetilde{\sigma} = \widetilde{\mu}_1 \widetilde{\mu}_2 \ldots \widetilde{\mu}_{t'} \widetilde{\mu}_{t+1} \widetilde{\mu}_{t+2},$$

где $t' \leqslant t$, $\widetilde{\mu}_i \in M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t', t+1,)$, а $\widetilde{\mu}_{t+2}$ — либо набор из множества M_{t+2}, либо пустое слово (т. е. набор нулевой длины).

Любой набор, начинающийся с единицы, содержащий не более $\sum_{i=1}^{t} r_i + t + 1$ единиц, у которого между любыми двумя единицами, а также после последней единицы, находится не более $\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4 \rceil$ нулей, можно представить в таком виде. Поэтому для того, чтобы установить требуемый факт достаточно показать, что $\sum_{i=1}^{t} r_i+t+1 \geqslant s$. Действительно,

$$\left(\left\lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil\right)^s \leqslant \left(\frac{k}{(\log\log k)^3}\right)^t =$$

$$=\prod_{i=1}^{t}\left((d_{i0}+1)\left\lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil^{r_i}\frac{\frac{k}{(\log\log k)^3}}{(d_{i0}+1)\left\lceil \frac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil^{r_i}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant \left\lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil^{\sum_{i=1}^{t} r_i}\frac{1}{2^t}\prod_{i=1}^{t}((d_{io}+1)(d_{i1}+1))\leqslant$$

$$\leqslant \left\lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil^{\sum_{i=1}^{t} r_i}\prod_{i=1}^{t}((d_{io}+1)d_{i1})\leqslant$$

$$\leqslant \left\lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil^{\sum_{i=1}^{t} r_i} d_{10}d_{t1}\prod_{i=2}^{t}((d_{i-1,1}+1)d_i0)\leqslant \left\lceil \tfrac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil^{t+1+\sum_{i=1}^{t} r_i}.$$

Теперь в случае 2.2 можно оценить величину $l_c(\widetilde{\alpha}_n^k)$ следующим образом:

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k)\leqslant l_c(\{10^{n_i}\mid i\in J_2\})+l_c(M)+\frac{k(t+1)}{s}+|J_2|.$$

Как было показано выше,

$$l_c(\{10^{n_i}\mid i\in J_2\})+|J_2|=o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right).$$

Кроме того, учитывая, что $s=o((\log\log n)^3)$, получаем:

$$l_c(M)=O\left(\frac{kt}{(\log\log k)^3}\right)=O\left(\frac{ks\log\left(\frac{n}{k}(\log\log k)^4\right)}{(\log\log k)^3\log\frac{k}{(\log\log k)^3}}\right)=$$

$$=O\left(\frac{s}{(\log\log k)^3}\cdot\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right)=o\left(\frac{k\log(n/k)}{\log k}\right).$$

И, наконец, с использованием того факта, что $t\to\infty$, имеем:

$$\frac{k(t+1)}{s}=\frac{kt}{s}(1+o(1))=\frac{k\log\left(\left\lceil\frac{n}{k}(\log\log k)^4\right\rceil\right)}{\log\frac{k}{(\log\log k)^3}}(1+o(1))=\frac{k\log(n/k)}{\log k}(1+o(1)).$$

Следовательно в условиях случая 2.2 окончательно получаем:

$$l_c(\widetilde{\alpha}_n^k)\leqslant\frac{k\log(n/k)}{\log k}(1+o(1)).$$

Таким образом для случая 2 требуемая оценка доказана полностью.

Случай 3. $n^{1-1/\log\log n}<k\leqslant n/2$.

Доказательство верхней оценки в этом случае во многом аналогично доказательству асимптотически точной верхней оценки реализации класса булевых (двоичных) матриц с заданной долей единиц (заданной густоты) вентильными схемами глубины 2 (см. [8, теорема 1.4]).

Следуя [8], для произвольного двоичного набора $\widetilde{\alpha}$ обозначим через $Q(\widetilde{\alpha})$ величину $\log C_{|\widetilde{\alpha}|}^{\|\widetilde{\alpha}\|}$, где $|\widetilde{\alpha}|$ — длина набора $\widetilde{\alpha}$, а $\|\widetilde{\alpha}\|$ — число единиц в наборе $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $\tau=\tau(k,n)$ и $t=t(k,n)$ — некоторые параметры, удовлетворяющие условиям $\tau<1$, $t<(1-\tau)\log\log C_n^k$. Точные значения этих параметров укажем позже.

Разобьем исследуемый набор $\widetilde{\alpha}_n^k$ на поднаборы $\widetilde{\alpha}(1)$, $\widetilde{\alpha}(2),\ldots,\widetilde{\alpha}(s)$, «отрезая» слева на i-м шаге, $i=1,2,\ldots,s$, кусок $\widetilde{\alpha}(i)$ максимально возможной длины, удовлетворяющий условиям:

$$Q(\widetilde{\alpha}(i))<(1-\tau)\log\log C_n^k, \quad |\widetilde{\alpha}(i)|\leqslant 2^t.$$

Оценим число операций конкатенации, достаточное для реализации системы наборов $\widetilde{\alpha}(1)$, $\widetilde{\alpha}(2),\ldots,\widetilde{\alpha}(s)$. Среди них различных не более $(2^t)^2\, 2^{(1-\tau)\log\log C_n^k}$, так как длина каждого набора, а также и число единиц в наборе, не превосходит 2^t, а число различных наборов фиксированной длины a с фиксированным числом единиц b не превосходит величины $C_a^b<2^{(1-\tau)\log\log C_n^k}$. Для реализации одного набора требуется не более 2^t операций конкатенации, поэтому сложность реализации системы наборов $\widetilde{\alpha}(1)$, $\widetilde{\alpha}(2),\ldots,\widetilde{\alpha}(s)$ не превосходит величины $(2^t)^3\, 2^{(1-\tau)\log\log C_n^k}$. Но тогда

$$l_c(k,n)=l_c(\widetilde{\alpha}_n^k)\leqslant s+(2^t)^3\, 2^{(1-\tau)\log\log C_n^k}.$$

Оценим сверху величину s. Положим $I=\{i \mid 1\leqslant i\leqslant s, |\widetilde{\alpha}(i)|\leqslant 2^t-1\}$. Пусть $i\in I$. Обозначим $|\widetilde{\alpha}(i)|=a$, $\|\widetilde{\alpha}(i)\|=b$.

Отметим, что в наборе $\widetilde{\alpha}(i)$ есть хотя бы один ноль и хотя бы одна единица, так как иначе бы выполнялись соотношения

$$\log C_{a+1}^1=\log C_{a+1}^a=\log(a+1)\leqslant t<(1-\tau)\log\log C_n^k,$$

что противоречит максимальности набора $\widetilde{\alpha}(i)$.

Из соотношений

$$\left(1-\frac{b}{a}\right)C_{a+1}^b\leqslant C_a^b, \qquad \frac{b}{a}C_{a+1}^{b+1}\leqslant C_a^b$$

следует неравенство

$$\min\left(1-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right)\max(C_{a+1}^b, C_{a+1}^{b+1})\leqslant C_a^b.$$

Поэтому, используя неравенство $\min\left(1-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right)\geqslant\frac{1}{a}$, получаем:

$$\log\max(C_{a+1}^b, C_{a+1}^{b+1})\leqslant\log C_a^b-\log\min\left(1-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right)\leqslant\log C_a^b+t.$$

С другой стороны, ввиду максимальности набора $\widetilde{\alpha}(i)$, выполняется неравенство $\log\max(C_{a+1}^b, C_{a+1}^{b+1})\geqslant(1-\tau)\log\log C_n^k$. Следовательно, если $i\in I$, то справедлива оценка

$$Q(\widetilde{\alpha}(i))\geqslant(1-\tau)\log\log C_n^k-t.$$

Теперь, с одной стороны, имеем соотношения

$$\sum_{i=1}^{s}Q(\widetilde{\alpha}(i))\geqslant\sum_{i\in I}Q(\widetilde{\alpha}(i))\geqslant|I|((1-\tau)\log\log C_n^k-t),$$

а, с другой, учитывая неравенство $C_{a_1}^{b_1}C_{a_2}^{b_2}\ldots C_{a_s}^{s_1}\leqslant C_{a_1+a_2+\ldots+a_s}^{b_1+b_2+\ldots+b_s}$ полученное из сравнения коэффициентов при $x^{b_1+b_2+\ldots+b_s}$ в левой и правой частях тождества $(1+x)^{a_1}(1+x)^{a_2}\ldots(1+x)^{a_s}=(1+x)^{a_1+a_2+\ldots+a_s}$, — соотношения

$$\sum_{i=1}^{s}Q(\widetilde{\alpha}(i))=\log\left(C_{|\widetilde{\alpha}(1)|}^{\|\widetilde{\alpha}(1)\|}C_{|\widetilde{\alpha}(2)|}^{\|\widetilde{\alpha}(2)\|}\ldots C_{|\widetilde{\alpha}(s)|}^{\|\widetilde{\alpha}(s)\|}\right)\leqslant\log\left(C_{|\widetilde{\alpha}(1)|+|\widetilde{\alpha}(2)|+\ldots+|\widetilde{\alpha}(s)|}^{\|\widetilde{\alpha}(1)\|+\|\widetilde{\alpha}(2)\|+\ldots+\|\widetilde{\alpha}(s)\|}\right)=\log C_n^k.$$

Следовательно,

$$|I| \leqslant \frac{\log C_n^k}{(1-\tau)\log\log C_n^k - t}.$$

Кроме того, если $i \notin I$, то $|\tilde{\alpha}(i)| = 2^t$. Поэтому $s - |I| \leqslant n/2^t$.

Таким образом, при $\tau < 1$, $t < (1-\tau)\log\log C_n^k$ окончательно получаем:

$$l_c(k, n) \leqslant \frac{\log C_n^k}{(1-\tau)\log\log C_n^k - t} + \frac{n}{2^t} + 2^{3t}\, 2^{(1-\tau)\log\log C_n^k},$$

Положим

$$\tau = \left(\frac{3(\log n - \log\log C_n^k) + 4\log\log\log C_n^k}{\log\log C_n^k}\right)^{1/2}, \quad t = \frac{1}{2}\log\frac{n(\log\log C_n^k)^{2/3}}{\left(\log C_n^k\right)^{1-\tau/3}}.$$

В условиях случая 3 имеем $\log\log C_n^k \sim \log\left(k\log\left(\frac{n}{k}\right)\right) \sim \log k \sim \log n$. Поэтому $\tau = o(1)$, $t = o(\log\log C_n^k)$, и, следовательно,

$$\frac{\log C_n^k}{(1-\tau)\log\log C_n^k - t} = (1 + o(1))\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}.$$

Далее обозначим

$$B = B(k, n) = \frac{n^{1/2}\left(\log\log C_n^k\right)^{2/3}}{\left(\log C_n^k\right)^{1/2+\tau/6}}.$$

Тогда

$$\frac{n}{2^t} = B\,\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}; \qquad 2^{3t}\, 2^{(1-\tau)\log\log C_n^k} = B^3\,\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}.$$

Оценим величину $\log B$:

$$\log B = \frac{1}{2}\log n + \frac{2}{3}\log\log\log C_n^k - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\tau^2}{6}\right)\log\log C_n^k =$$

$$= \frac{1}{2}(\log n - \log\log C_n^k) + \frac{2}{3}\log\log\log C_n^k - \frac{\frac{1}{2}(\log n - \log\log C_n^k) + \frac{2}{3}\log\log\log C_n^k}{\tau} =$$

$$= \left(\frac{\tau - 1}{\tau}\right)\left(\frac{1}{2}(\log n - \log\log C_n^k) + \frac{2}{3}\log\log\log C_n^k\right).$$

Теперь, используя равенство $\tau = o(1)$, получаем, что $\log B \to -\infty$, т. е. $B = o(1)$. Следовательно,

$$\frac{n}{2^t} + 2^{3t}\, 2^{(1-\tau)\log\log C_n^k} = o\left(\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}\right).$$

Таким образом, окончательно в условиях случая 3 имеем оценку

$$l_c(k, n) \leqslant (1 + o(1))\frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}.$$

Верхняя оценка доказана.

Нижняя оценка. Случай 1. $\log n \geqslant \log C_n^k \log\log C_n^k$.

В условиях этого случая из очевидной оценки $l_c(k, n) \geqslant \log n$ следует соотношение

$$\log n + \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \leqslant l_c(k, n)(1 + o(1)).$$

Случай 2. $\log n < \log C_n^k \log\log C_n^k$.

Если рассматривать схемы конкатенации как схемы из функциональных элементов, то мощностная нижняя оценка (см., например, [5, теорема Д2]) сложности схем из функциональных элементов дает следующее неравенство

$$l_c(k, n) \geqslant \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k}(1 + o(1)).$$

Покажем, как можно усилить эту оценку, «объединяя» ее (путем обобщения метода из [10]) с оценкой $l_c(k, n) \geqslant \log n$. Обозначим через $|\tilde{\alpha}|$ длину произвольного двоичного набора $\tilde{\alpha}$.

Схему конкатенации для набора $\tilde{\alpha}$

$$\tilde{\tau}_{-1} = 0,\ \tilde{\tau}_0 = 1,\ \tilde{\tau}_1,\ \ldots,\ \tilde{\tau}_r = \tilde{\alpha}$$

назовем *приведенной*, если для любой пары (i, j), $-1 \leqslant i < j \leqslant r$, выполняется неравенство $|\tilde{\tau}_i| \leqslant |\tilde{\tau}_j|$.

Схему конкатенации S для набора $\tilde{\alpha}$ назовем *минимальной*, если выполняется равенство $l_c(S) = l_c(\tilde{\alpha})$.

Очевидно, что среди минимальных схем конкатенации для произвольного набора $\tilde{\alpha}$ найдется хотя бы одна приведенная.

Пусть $R(\lambda, \varepsilon, \nu)$ — число минимальных приведенных схем конкатенации вида

$$\tilde{\tau}_{-1} = 0,\ \tilde{\tau}_0 = 1,\ \tilde{\tau}_1,\ \ldots,\ \tilde{\tau}_r,$$

удовлетворяющих условиям

$$\lfloor \log|\tilde{\tau}_r| \rfloor \geqslant \lambda, \qquad r \leqslant \lambda + (1 - \varepsilon)\frac{\nu}{\log \nu}.$$

Положим $\varepsilon = \varepsilon(\nu) = (\log \nu)^{-1/2}$.

Пусть $\lambda \leqslant \nu \log \nu$. Тогда при всех достаточно больших ν

$$R(\lambda, \varepsilon, \nu) < \frac{2^\nu}{(2^{\varepsilon(\nu)/4})^\nu}.$$

Этот факт легко устанавливается практически дословным повторением доказательства леммы 2.3 из [3].

Далее, положим $\lambda = \lfloor \log n \rfloor$, $\nu = \log C_n^k$. Отметим, что при $n \to \infty$ величина ν стремится к бесконечности, и верно условие $\lambda \leqslant \nu \log \nu$.

Положим

$$\tilde{R}(k, n) = \left| \left\{ \tilde{\alpha} \in A_n^k \;\middle|\; l_c(\tilde{\alpha}) \leqslant \lfloor \log n \rfloor + \left(1 - \frac{1}{(\log\log C_n^k)^{1/2}}\right) \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \right\} \right|.$$

Тогда при всех достаточно больших n справедливы неравенства

$$\tilde{R}(k, n) \leqslant R(\lfloor \log n \rfloor, (\log\log C_n^k)^{-1/2}, \log C_n^k) \leqslant \left(\frac{2}{2^{(\log\log C_n^k)^{-1/2}/4}}\right)^{\log C_n^k} < C_n^k.$$

Таким образом, в условиях случая 2 при всех достаточно больших значениях n имеем:

$$l_c(k, n) > \lfloor \log n \rfloor + \left(1 - \frac{1}{(\log\log C_n^k)^{1/2}}\right) \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k},$$

и, следовательно,

$$\log n + \frac{\log C_n^k}{\log\log C_n^k} \leqslant l_c(k, n)(1 + o(1)).$$

Нижняя оценка, а с ней и вся теорема, доказана.

В заключение автор выражает благодарность Н. П. Редькину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гашков С. Б., Кочергин В. В. Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней // Методы дискретного анализа в теории графов и сложности. Вып. 52. — Новосибирск, ИМ СО РАН, 1992. — С. 22–40.
2. Кнут Д. Е. Искусство программирования для ЭВМ, т. 2 — М.: Мир — 1977.
3. Кочергин В. В. О сложности вычислений одночленов и наборов степеней // Дискретный анализ. Вып. 27. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1975. — С. 94–107.
4. Кочергин В. В. О сложности получения двоичных слов с заданным числом единиц схемами конкатенации // Труды III Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (22–27 июня 1998 г.). — М.: Диалог-МГУ, 1998. — С. 58–62.
5. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 31–110.
6. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
7. Мерекин Ю. В. Нижняя оценка сложности для схем конкатенации слов // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, № 1. — С. 52–56.
8. Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 5–102.
9. Brauer A. On addition chains // Bull. Amer. Math. Soc. — 1939. — V. 45. — P. 736–739.
10. Erdos P. Remarks on number theory. III: On addition chains // Acta Arith. — 1960. — V. 6. — P. 77–81.
11. Strassen V. Berechnungen in partiellen Algebren endlichen Typs // Computing. — 1973. — V. 11. — P. 181–196.
12. Yao A. C.-C. On the evaluation of powers // SIAM J. Comput. — 1976. — V. 5. — P. 100–103.

Поступило в редакцию 4 VI 1999