



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 46 за 1999 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю. Ф., Дитковский А.Е.

Управляемое вращение
упругого стержня на
плоскости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю. Ф., Дитковский А.Е.
Управляемое вращение упругого стержня на плоскости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.
1999. № 46. 25 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1999-46>

Ю.Ф. Голубев, А.Е. Дитковский

**УПРАВЛЯЕМОЕ ВРАЩЕНИЕ
УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НА ПЛОСКОСТИ**

Ордена Ленина
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Ю.Ф. Голубев, А.Е. Дитковский

Управляемое вращение упругого стержня на плоскости

Москва, 1999

Голубев Ю.Ф., Дитковский А.Е. Управляемое вращение упругого стержня на плоскости.

Аннотация

Рассматривается задача об управлении вращением упругого стержня. Требуется перевести стержень в плоскости из заданного начального углового положения в заданное конечное угловое положение с гашением упругих отклонений в конце маневра. Учитываются упругие продольная и изгибная деформации. Выведены уравнения плоского движения стержня под действием управляющего момента. Управление построено в виде рядов для случая, когда продольная жесткость существенно превосходит изгибную, для случая нерастяжимого стержня и для случая жесткого тонкого стержня.

Yuri F. Golubev, Andrey E. Ditkovskiy. Controlled Rotation of Elastic Pivot on Plane.

Abstract

Problem of elastic pivot rotation control is considered. Purpose of control is to transfer the pivot on plane from the given initial angular position to the given final angular position without oscillations at the end of manoeuvre taking into account longitudinal and bending deformations. General equations of motion are deduced. Required control moment is built for the case when the longitudinal stiffness greatly exceeds the bending stiffness, for the case of non-tensile pivot and for the case of stiff thin pivot.

Содержание

Введение	3
1. Вывод уравнений плоского движения упругого стержня . . .	4
2. Построение управляющего момента в случаях жесткого и нерастяжимого стержней	10
3. Построение управляющего момента в случае жесткого тонкого стержня	13
4. Численный анализ полученных решений	20
Заключение	23
Литература	24

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 98-01-00065, 98-01-00805).

Введение

В прикладных задачах управления в связи с экономией материалов и уменьшением веса конструкций возникает необходимость учета упругой податливости их элементов. Управляемое движение манипуляторов с упругими звеньями исследовалось в [1], [2], [4].

В работе [1] рассматривались плоские вращательные движения упругого нерастяжимого стержня, нагруженного абсолютно твердым телом, под действием управляющего момента сил. Решались задачи управления о приведении системы из некоторого начального состояния в заданное угловое положение с гашением упругих колебаний или в состояние вращения системы как единого целого с фиксированной угловой скоростью. При помощи асимптотических методов было получено решение поставленных задач управления в двух случаях. В первом случае масса стержня много меньше массы закрепленного на одном из его концов тела (квазистатическое приближение). Во втором случае жесткость стержня была весьма велика, а амплитуда и период собственных колебаний малы. В первом случае решение задачи строилось методом последовательных приближений, во втором случае использовалось разложение решения до первой степени малого параметра.

В работе [2] была получена система интегродифференциальных уравнений в частных производных и граничные условия для манипулятора, состоящего из твердого тела и упругого нерастяжимого стержня. Исследовались задачи управления о приведении манипулятора за время T из произвольного начального состояния в конечное с гашением относительных отклонений. В предположении о пренебрежимой малости центробежных сил была предложена схема решения данной задачи путем сведения ее к некоторой задаче математической физики и проблеме моментов.

В работе [4] рассматривался двухзвенный манипулятор, последнее звено которого моделировалось как упругий стержень. Ставилась задача о нахождении управляющих моментов M_i ($i = 1, 2, 3$), обеспечивающих движение схвата манипулятора по заданному фазовому многообразию при условии минимума квадратичной формы $Z = \sum_{i=1}^3 \alpha_i M_i^2$ ($\alpha_i = const > 0$). Задача была решена с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа.

В работах [2] и [4] существенным было предположение, что угловая скорость вращения мала, поэтому в уравнениях движения не учитывались слагаемые при квадрате угловой скорости (центробежные силы).

В предлагаемой работе рассматриваются уравнения вращения упругого стержня с учетом центробежных сил.

В п.1 при помощи принципа Остроградского выводятся общие уравнения движения для плоского управляемого вращения стержня, и формулируется краевая задача. Из общих уравнений выведены уравнения движения для трех частных случаев:

- случая нерастяжимого стержня;
- случая жесткого стержня;
- случая жесткого тонкого стержня.

В п.2 для случаев жесткого и нерастяжимого стержней строится управляющий момент в виде ряда по степеням малого параметра, переводящий систему из некоторого начального углового положения в конечное при условии равенства нулю угловой скорости, относительных отклонений и скоростей в конце маневра.

В п.3 для случая жесткого тонкого стержня решается задача отыскания управляющего момента и мгновенной формы стержня с использованием обратного метода решения задач динамики. Поставлена задача о приведении системы из заданного начального в заданное конечное состояние при условии гашения упругих отклонений и скоростей в конечный момент времени. Решения найдены в виде рядов по степеням малого параметра.

В п.4 представлены результаты численного решения задачи управления для различных моделей упругого стержня.

В заключении сформулированы основные результаты настоящей работы.

1. Вывод уравнений плоского движения упругого стержня

Рассматривается упругий однородный стержень, который может совершать вращательные движения в горизонтальной плоскости $Ox'y'$. Через точку O перпендикулярно плоскости движения проходит ось вращения Oz , относительно которой приложен момент управляющих сил. Пусть l – длина стержня, ρ – его плотность, σ – площадь поперечного сечения. Для описания движения введем вращающуюся вокруг оси Oz вместе со стержнем систему координат $Oxyz$. Ось Ox зададим по направлению касательной к нейтральной линии стержня в точке O (рис. 1.1).

Обозначим x расстояние от конца O недеформированного стержня до некоторой его точки G . Пусть $\delta \mathbf{r}$ вектор перемещения точки G стержня, а $u(t, x)$, $w(t, x)$ – проекции вектора $\delta \mathbf{r}$ на оси системы координат Oxy . В каждый фиксированный момент времени перемещение $\delta \mathbf{r}(t, x)$ есть вектор-функция аргумента x , определяющая мгновенную форму стержня. При

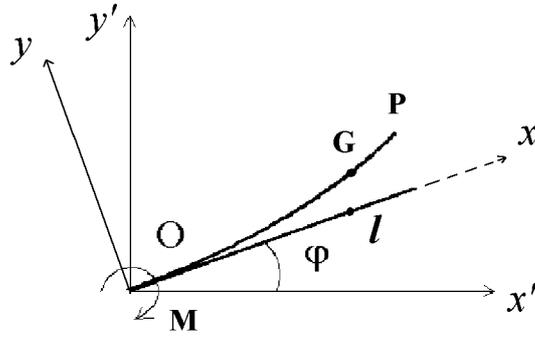


Рис. 1.1. Вращение однородного упругого стержня.

фиксированном значении x смещение $\delta \mathbf{r}(t, x)$ есть вектор-функция времени, однозначно определяющая положение соответствующей точки стержня.

Для вывода уравнений движения упругого стержня воспользуемся принципом Остроградского [3].

Получим выражение для кинетической энергии системы. Радиус-вектор точки G в системе координат $Oxyz$ имеет вид:

$$\mathbf{r}(t, x)_{Oxyz} = \begin{pmatrix} x + u(t, x) \\ w(t, x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

а в неподвижной системе координат $Ox'y'z$

$$\mathbf{r}(t, x)_{Ox'y'z} = \begin{pmatrix} (x + u) \cos \varphi - w \sin \varphi \\ (x + u) \sin \varphi + w \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

где φ - угол поворота системы координат $Oxyz$ относительно $Ox'y'z$. Квадрат скорости точки G равен

$$\dot{\mathbf{r}}^2(t, x) = (x\dot{\varphi} + \dot{w})^2 + w^2\dot{\varphi}^2 + 2xu\dot{\varphi}^2 + u^2\dot{\varphi}^2 + \dot{u}^2 + 2u\dot{w}\dot{\varphi} - 2\dot{u}w\dot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{\mathbf{r}}^2 \rho \sigma dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \sigma \left[\left(x\dot{\varphi} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + w^2\dot{\varphi}^2 + 2xu\dot{\varphi}^2 + \right. \\ &\left. + u^2\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2u\dot{\varphi} \frac{\partial w}{\partial t} - 2w\dot{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx. \end{aligned}$$

Согласно теории тонких прямолинейных стержней потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \varkappa \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l E\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx, \quad (1)$$

где постоянная α равна произведению модуля Юнга E на момент инерции I сечения стержня относительно поперечной оси.

В частности, для круга радиуса R имеем

$$I = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Первое слагаемое в выражении (1) есть потенциальная энергия упругой изгибной деформации [5]. Действительно, величина, обратная радиусу кривизны R_{kr} , вычисляется по формуле

$$\frac{1}{R_{kr}} = \frac{|w_x u_{xx} - w_{xx} (u_x + 1)|}{((u_x + 1)^2 + w_x^2)^{3/2}},$$

где u_x , u_{xx} , w_x , w_{xx} — частные производные по x . Оставляя только члены первого порядка, получаем

$$\frac{1}{R_{kr}^2} \approx \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2.$$

Таким образом, величина $\partial^2 w / \partial x^2$ в линейном приближении пропорциональна радиусу кривизны мгновенной формы стержня.

Второе слагаемое в выражении (1) представляет собой в линейном приближении потенциальную энергию деформации растяжения стержня.

Пусть M — момент сил, приложенный к стержню в точке O . Согласно принципу Остроградского должно быть [3]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + M \delta \varphi) dt = 0 \quad (2)$$

для любых $\delta w(t, x)$ и $\delta u(t, x)$, при которых в заданные начальный и конечный моменты времени положение стержня не варьируется, а конец O стержня закреплён и не изменяет своего положения с течением времени

$$\delta w(t_0, x) = \delta w(t_1, x) = 0,$$

$$\delta u(t_0, x) = \delta u(t_1, x) = 0,$$

$$\delta \varphi(t_0) = \delta \varphi(t_1) = 0,$$

$$\delta w(t, 0) = 0, \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \delta u(t, 0) = 0.$$

В подробной записи равенство (2) примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho \sigma \left[\left(x \dot{\varphi} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(x \frac{d\delta \varphi}{dt} + \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) + w^2 \dot{\varphi} \frac{d\delta \varphi}{dt} + w \dot{\varphi}^2 \delta w + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +x\dot{\varphi}^2\delta u + 2xu\dot{\varphi}\frac{d\delta\varphi}{dt} + u\dot{\varphi}^2\delta u + u^2\dot{\varphi}\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\delta u}{\partial t} + \dot{\varphi}\frac{\partial w}{\partial t}\delta u + \\
& +u\dot{\varphi}\frac{\partial\delta w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial t}\frac{d\delta\varphi}{dt} - w\dot{\varphi}\frac{\partial\delta u}{\partial t} - \dot{\varphi}\frac{\partial u}{\partial t}\delta w - w\frac{\partial u}{\partial t}\frac{d\delta\varphi}{dt} \Big] dx dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l E\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial\delta u}{\partial x} dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varkappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} dx dt + \int_{t_0}^{t_1} M\delta\varphi dt = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям члены, содержащие производные от вариаций, а также, учитывая, что δu , δw и $\delta\varphi$ произвольны, получим с точностью до членов первого порядка малости следующую систему интегродифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями:

$$\begin{cases} \int_0^l \rho\sigma \left[x^2\ddot{\varphi} + x\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}\frac{\partial u}{\partial t} + \ddot{\varphi}u \right) \right] dx = M, \\ x\ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - w\dot{\varphi}^2 + \frac{\varkappa}{\rho\sigma} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\dot{\varphi}\frac{\partial u}{\partial t} + u\ddot{\varphi} = 0, \\ x\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u\dot{\varphi}^2 + \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dot{\varphi}\frac{\partial w}{\partial t} + w\ddot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, l) \equiv 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(t, l) \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) \equiv 0. \quad (4)$$

Поскольку конец стержня O неподвижен и зашпелен, то следует добавить еще три условия

$$w(t, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(t, 0) \equiv 0, \quad u(t, 0) \equiv 0. \quad (5)$$

Система уравнений (3) с краевыми условиями (4), (5) полностью описывает плоское вращение упругого стержня. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Случай нерастяжимого стержня* (линейное приближение) [2].

Если предположить, что стержень нерастяжим, то должно быть

$$\int_0^x \sqrt{(1 + u_x)^2 + w_x^2} dx = x$$

для любого x такого, что $0 \leq x \leq l$.

Поэтому

$$\sqrt{(1 + u_x)^2 + w_x^2} = 1, \quad (1 + u_x)^2 + w_x^2 = 1.$$

Предполагая, что смещения малы по сравнению с длиной стержня, а также малы их производные, получим с точностью до малых второго порядка

$$u_x = -\frac{1}{2}w_x^2,$$

Уравнения движения в этом случае с точностью до членов первого порядка малости можно получить с помощью системы уравнений (3), отбрасывая члены второго и выше порядка малости. Последние два уравнения системы (3) объединятся в одно, поскольку теперь δu в тождестве (2) следует заменить выражением

$$\delta u = -w_x \delta w + \int_0^x w_{\xi\xi} \delta w d\xi.$$

В третьем уравнении системы (3) существенным окажется только член $x\dot{\varphi}^2$. При этом

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l x \dot{\varphi}^2 \delta u dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \dot{\varphi}^2 (-xw_x + bw_{xx}) \delta w dx dt,$$

где $b = \int_x^l \xi d\xi$. Таким образом, в уравнениях движения для нерастяжимого стержня член $x\dot{\varphi}^2$ в третьем уравнении системы (3) преобразуется в выражение вида $\dot{\varphi}^2 (-xw_x + bw_{xx})$. Все остальные члены в третьем уравнении системы (3) при умножении на δu будут второго и выше порядка малости. В результате получим следующую систему интегродифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями:

$$\begin{cases} \int_0^l \rho\sigma \left(x^2 \ddot{\varphi} + x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dot{\varphi} x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x w_\xi^2 d\xi - \dot{\varphi} x \int_0^x w_\xi^2 d\xi \right) dx = M, \\ \rho\sigma \left[x \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(w - x \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dot{\varphi}^2 \right] + \varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \\ w(t, 0) \equiv 0, \quad w_x(t, 0) \equiv 0, \quad w_{xx}(t, l) \equiv 0, \quad w_{xxx}(t, l) \equiv 0. \end{cases}$$

Эту систему с точностью до малых первого порядка можно переписать в виде [1, 2]:

$$\begin{cases} \int_0^l \rho\sigma \left(x^2 \ddot{\varphi} + x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx = M, \\ \rho\sigma \left\{ x \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[w + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \dot{\varphi}^2 \right\} + \varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \\ w(t, 0) \equiv 0, \quad w_x(t, 0) \equiv 0, \quad w_{xx}(t, l) \equiv 0, \quad w_{xxx}(t, l) \equiv 0. \end{cases} \quad (6)$$

2. Случай жесткого стержня.

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$t' = \frac{t}{T}, \quad w' = \frac{w}{l}, \quad u' = \frac{u}{l}, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad (7)$$

где T - интервал времени, в течение которого рассматривается движение. Пусть M_0 - характерная величина размерности момента силы, например, $M_0 = \sup_t |M(t)|$. Тогда в новых переменных уравнения движения (3) примут вид (штрихи опущены):

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left[x^2 \ddot{\varphi} + x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} + \ddot{\varphi} u \right) \right] dx = Q, \\ \mu \chi \left(x \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - w \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} + u \ddot{\varphi} \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \\ \mu \left(x \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \frac{\partial w}{\partial t} + w \ddot{\varphi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = w_{xxx}(t, 1) \equiv 0,$$

$$u(t, 0) = u_x(t, 1) \equiv 0,$$

$$\mu = \frac{\rho l^2}{ET^2}, \quad \chi = \frac{\sigma l^2}{I}, \quad \beta = \frac{\rho \sigma l^3}{T^2 M_0}, \quad Q = \frac{M}{M_0}$$

Уравнения движения (6) для нерастяжимого стержня в новых переменных (7) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left(x^2 \ddot{\varphi} + x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx = Q, \\ \mu \chi \left\{ x \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[w + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \dot{\varphi}^2 \right\} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$w(t, 0) \equiv 0, \quad w_x(t, 0) \equiv 0, \quad w_{xx}(t, 1) \equiv 0, \quad w_{xxx}(t, 1) \equiv 0.$$

В случае, когда жесткость стержня велика, в уравнениях (8) и (9) будем иметь $\mu \ll 1$.

3. Случай жесткого тонкого стержня.

Пусть $\varkappa/\sigma = IE/\sigma = \tau = const$ при любом изменении E (τ сравнимая с единицей величина). Если поперечное сечение стержня круг, то это означает, что при изменении E радиус стержня меняется по закону $R = (4\tau/E)^{1/2}$.

Систему уравнений (8) можно представить в виде

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left[x^2 \ddot{\varphi} + x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} + \ddot{\varphi} u \right) \right] dx = Q, \\ x \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - w \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} + u \ddot{\varphi} + \theta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \\ \mu \left(x \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \frac{\partial w}{\partial t} + w \ddot{\varphi} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = w_{xxx}(t, 1) \equiv 0,$$

$$u(t, 0) = u_x(t, 1) \equiv 0,$$

$$\mu = \frac{\rho l^2}{ET^2}, \quad \chi = \frac{\sigma l^2}{I}, \quad \beta = \frac{\rho \sigma l^3}{T^2 M_0},$$

$$Q = \frac{M}{M_0}, \quad \theta = \frac{1}{\mu \chi} = \text{const}$$

и считать при этом, что θ сохраняет значение независимо от изменения μ . Физически это будет означать, что малым значениям μ будут отвечать малые значения диаметра стержня.

2. Построение управляющего момента в случаях жесткого и нерастяжимого стержней

Необходимо перевести стержень из некоторого заданного начального углового положения в конечное, причем в конце маневра должны быть выполнены следующие условия:

$$\dot{\varphi}(1) = 0, \quad w(1, x) = \dot{w}(1, x) = u(1, x) = \dot{u}(1, x) = 0. \quad (11)$$

Примем, что $\mu \ll 1$. В этом случае решение системы (8) можно построить в виде рядов по степеням малого параметра μ . Положив $\mu = 0$, получим $u^{(0)}(t, x) \equiv 0$, $w^{(0)}(t, x) \equiv 0$. Следовательно, можно принять

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i u^{(i)}(t, x), \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i w^{(i)}(t, x), \quad (12)$$

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi^{(i)}(t), \quad Q = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i Q^{(i)}(t).$$

Сравнивая в уравнениях (8) коэффициенты при нулевой и первой степенях μ , получим соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta}{3} \ddot{\varphi}^{(0)} = Q^{(0)}, \\ \frac{\beta}{3} \ddot{\varphi}^{(1)} + \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(1)} \right) \right] dx = Q^{(1)}, \\ \frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4} = -\chi x \ddot{\varphi}^{(0)}, \\ \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = -x (\dot{\varphi}^{(0)})^2, \end{array} \right. \quad (13)$$

$$w^{(1)}(t, 0) = w_x^{(1)}(t, 0) = w_{xx}^{(1)}(t, 1) = w_{xxx}^{(1)}(t, 1) \equiv 0, \quad (14)$$

$$u^{(1)}(t, 0) = u_x^{(1)}(t, 1) \equiv 0. \quad (15)$$

Пусть $\dot{\varphi}^{(0)}(t)$ — заданный закон изменения угловой скорости. Разрешая систему (13) для известной функции $\dot{\varphi}^{(0)}(t)$ с учетом краевых условий (14) и (15), получим

$$u^{(1)}(t, x) = (\dot{\varphi}^{(0)})^2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{3}\right), \quad (16)$$

$$w^{(1)}(t, x) = -\frac{\chi}{120} \ddot{\varphi}^{(0)} (x^5 - 10x^3 + 20x^2). \quad (17)$$

Подставляя $u^{(1)}$ и $w^{(1)}$ во второе уравнение системы (13), получим уравнение для определения $\varphi^{(1)}$ и $Q^{(1)}$. Функцию $\dot{\varphi}^{(1)}$ можно выбрать произвольно. Например, если $\dot{\varphi}^{(1)} \equiv 0$, то

$$Q^{(1)}(t) = \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(1)} \right) \right] dx.$$

Рассматривая члены при μ^2 и полагая $\dot{\varphi}^{(2)} \equiv 0$, получим выражения для определения второго приближения $u^{(2)}$, $w^{(2)}$, $Q^{(2)}$:

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(2)} \right) \right] dx = Q^{(2)}, \\ \frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial x^4} = -\chi \left[\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} - w^{(1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + u^{(1)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right], \\ \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} = - \left[-\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + u^{(1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + w^{(1)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right], \end{cases} \quad (18)$$

$$w^{(2)}(t, 0) = w_x^{(2)}(t, 0) = w_{xx}^{(2)}(t, 1) = w_{xxx}^{(2)}(t, 1) = u^{(2)}(t, 0) = u_x^{(2)}(t, 1) \equiv 0.$$

Второе и третье уравнения системы (18) можно разрешить, поскольку правые части этих уравнений представляют собой многочлены по степеням x . Затем, подставляя найденные выражения для $w^{(2)}$ и $u^{(2)}$ в первое уравнение системы (18), получим закон изменения $Q^{(2)}(t)$.

Вообще, для любого $n > 1$ неизвестные функции $u^{(n)}$, $w^{(n)}$, $Q^{(n)}$ будут определяться из системы уравнений:

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(n)} \right) \right] dx = Q^{(n)}, \\ \frac{\partial^4 w^{(n)}}{\partial x^4} = -\chi \left[\frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial t^2} - w^{(n-1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t} + u^{(n-1)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right], \\ \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} = - \left[-\frac{\partial^2 u^{(n-1)}}{\partial t^2} + u^{(n-1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial t} + w^{(n-1)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right], \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} w^{(n)}(t, 0) = w_x^{(n)}(t, 0) = w_{xx}^{(n)}(t, 1) = w_{xxx}^{(n)}(t, 1) &\equiv 0, \\ u^{(n)}(t, 0) = u_x^{(n)}(t, 1) &\equiv 0, \end{aligned}$$

при условии, что $u^{(n-1)}$, $w^{(n-1)}$, $Q^{(n-1)}$ были найдены на предыдущем $n - 1$ шаге и $\dot{\varphi}^{(n)} \equiv 0$.

Таким образом, построены рекуррентные соотношения для определения членов порядка μ^n включительно.

Для второго приближения из системы (18) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(2)} \right) \right] dx, \\ w^{(2)} &= -\chi \left\{ \frac{\chi}{120} f(x) \left[-\frac{d^4 \varphi^{(0)}}{dt^4} + \ddot{\varphi}^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 \right] + \frac{5}{2} g(x) \ddot{\varphi}^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 \right\}, \\ u^{(2)} &= - \left\{ -\frac{1}{2} g(x) \left[2 (\ddot{\varphi}^{(0)})^2 + 2 \frac{d^3 \varphi^{(0)}}{dt^3} \dot{\varphi}^{(0)} - (\dot{\varphi}^{(0)})^4 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\chi}{120} f(x) \left[2 \frac{d^3 \varphi^{(0)}}{dt^3} \dot{\varphi}^{(0)} + (\ddot{\varphi}^{(0)})^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3024} x^9 - \frac{1}{84} x^7 + \frac{1}{18} x^6 - \frac{13}{18} x^3 + \frac{11}{7} x^2, \\ g(x) &= \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{60} x^5 - \frac{5}{12} x. \end{aligned}$$

Из системы уравнений (19), а также из (16) и (17) следует, что для обеспечения выполнения условий (11) до n -го порядка включительно, необходимо подбирать функцию $\dot{\varphi}^{(0)}(t)$ так, чтобы

$$\dot{\varphi}^{(0)}(1) = \ddot{\varphi}^{(0)}(1) = \dots = \frac{d^{2n+1} \varphi^{(0)}}{dt^{2n+1}}(1) = 0.$$

При этом коэффициенты в разложениях (12) будут полиномиально зависеть от x .

Рассмотрим случай нерастяжимого стержня. Задачу управления сформулируем так: необходимо перевести стержень из некоторого начального углового положения в конечное, причем в конечный момент времени должны быть выполнены следующие условия:

$$\dot{\varphi}(1) = 0, \quad w(1, x) = \dot{w}(1, x) = 0.$$

Примем, что $\mu \ll 1$. Аналогично случаю жесткого стержня получим формулы для нулевого и первого приближений:

$$Q^{(0)}(t) = \frac{\beta}{3} \ddot{\varphi}^{(0)}, \quad w^{(0)}(t, x) = 0,$$

$$w^{(1)} = -\frac{\chi}{120} \ddot{\varphi}^{(0)} (x^5 - 10x^3 + 20x^2),$$

$$Q^{(1)} = \beta \int_0^1 x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} dx.$$

Для любого $n > 1$ неизвестные функции $Q^{(n)}(t)$ и $w^{(n)}(t, x)$ будут определяться из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} Q^{(n)} = \beta \int_0^1 x \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2} dx, \\ \frac{\partial^4 w^{(n)}}{\partial x^4} = -\chi \left\{ \frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial t^2} - \left[w^{(n-1)} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial x} \right) \right] \dot{\varphi}^2 \right\}. \end{cases}$$

$$w^{(n)}(t, 0) \equiv 0, \quad w_x^{(n)}(t, 0) \equiv 0, \quad w_{xx}^{(n)}(t, 1) \equiv 0, \quad w_{xxx}^{(n)}(t, 1) \equiv 0,$$

При условии, что $w^{(n-1)}$, $Q^{(n-1)}$ были найдены на предыдущем $n - 1$ шаге и $\dot{\varphi}^{(n)} \equiv 0$.

Например, выражение для второго приближения $w^{(2)}(t, x)$ имеет вид:

$$w^{(2)} = -\frac{\chi^2}{120} \left[\left(-\frac{d^4 \varphi^{(0)}}{dt^4} + \ddot{\varphi}^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 \right) f_1(x) - 5f_2(x) \ddot{\varphi}^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 \right],$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{3024} x^9 - \frac{1}{84} x^7 + \frac{1}{18} x^6 - \frac{13}{18} x^3 + \frac{11}{7} x^2,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1008} x^9 - \frac{1}{60} x^7 + \frac{1}{30} x^6 + \frac{1}{20} x^5 - \frac{1}{6} x^4 + \frac{11}{35} x^2.$$

Заметим, что, как и в случае жесткого стержня, все коэффициенты $w^{(n)}(t, x)$ полиномиально зависят от x .

3. Построение управляющего момента в случае жесткого тонкого стержня

Требуется найти управляющий момент такой, чтобы в конечный момент времени выполнялись равенства для всех $0 \leq x \leq 1$:

$$\dot{\varphi}(1) = 0, \quad w(1, x) = \dot{w}(1, x) = u(1, x) = \dot{u}(1, x) = 0.$$

Рассмотрим систему (10) и в ней будем предполагать, что $\mu \ll 1$. В этом случае, как и в предыдущем, решение будем строить в виде ряда по степеням малого параметра μ .

Пусть

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i u^{(i)}(t, x), \quad w = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i w^{(i)}(t, x),$$

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \varphi^{(i)}(t), \quad Q = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i Q^{(i)}(t).$$

Для нулевого приближения из системы (10) получим следующие соотношения

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left[x^2 \ddot{\varphi}^{(0)} + x \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(0)} \right) \right] dx = Q^{(0)}, \\ x \ddot{\varphi}^{(0)} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2} - w^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} + \theta \frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial x^4} = 0, \\ \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w^{(0)}(t, 0) = w_x^{(0)}(t, 0) = w_{xx}^{(0)}(t, 1) = w_{xxx}^{(0)}(t, 1) &\equiv 0, \\ u^{(0)}(t, 0) = u_x^{(0)}(t, 1) &\equiv 0, \end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы (20) и из граничных условий следует, что

$$u^{(0)}(t, x) \equiv 0.$$

Таким образом, в нулевом приближении смещения точек стержня происходят перпендикулярно к прямой, вдоль которой располагался недеформированный стержень. В случае жесткого стержня, как было видно в предыдущем пункте, в нулевом приближении смещения тождественно равны нулю.

С учетом того, что $u^0(t, x) = 0$, система уравнений (20) запишется в виде

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \rho \sigma \left(x^2 \ddot{\varphi}^{(0)} + x \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2} \right) dx = Q^{(0)}, \\ x \ddot{\varphi}^{(0)} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2} - w^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + \theta \frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial x^4} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

$$w^{(0)}(t, 0) = w_x^{(0)}(t, 0) = w_{xx}^{(0)}(t, 1) = w_{xxx}^{(0)}(t, 1) \equiv 0, \quad (22)$$

Предполагая функцию $\dot{\varphi}^{(0)}(t)$ заданной, сначала разрешим второе уравнение системы (21) для краевых условий (22), а затем, подставляя полученное решение для $w^{(0)}(t, x)$ в первое уравнение, найдем нулевое приближение $Q^{(0)}(t)$ для вращательного момента.

Итак, имеем

$$x \ddot{\varphi}^{(0)} + \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2} - w^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + \theta \frac{\partial^4 w^{(0)}}{\partial x^4} = 0, \quad (23)$$

$$w^{(0)}(t, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}(t, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2}(t, 1) \equiv 0, \quad \frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial x^3}(t, 1) \equiv 0. \quad (24)$$

Будем искать решение уравнения (23) в виде

$$w^{(0)} = \sum_k X_k^{(0)}(x) T_k^{(0)}(t) \quad (25)$$

и предположим, что функция $f(x) = x$ раскладывается в ряд по $X_k^{(0)}$:

$$x = \sum_k c_k X_k^{(0)}(x). \quad (26)$$

Тогда получим

$$X_k^{(0)} \ddot{T}_k^{(0)} - X_k^{(0)} T_k^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + \theta (X_k^{(0)})'''' + c_k X_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} = 0$$

или

$$\theta \frac{(X_k^{(0)})''''}{X_k^{(0)}} = -\frac{\ddot{T}_k^{(0)}}{T_k^{(0)}} + \dot{\varphi}^{(0)} - c_k \frac{\ddot{\varphi}^{(0)}}{T_k^{(0)}} = d,$$

где d - некоторая константа, штрихом обозначена производная по x , а точкой — производная по t .

Будем искать решение, для которого $d > 0$. Пусть действительное λ_k таково, что

$$\lambda_k^4 = \frac{d}{\theta}.$$

Тогда общим решением служит

$$X_k^{(0)}(x) = C_{1k} \cos \lambda_k x + C_{2k} \sin \lambda_k x + C_{3k} \operatorname{sh} \lambda_k x + C_{4k} \operatorname{ch} \lambda_k x.$$

Учитывая граничные условия (22), получим

$$X_k^{(0)}(x) = B_k (\cos \lambda_k x - \operatorname{ch} \lambda_k x + A_k (\sin \lambda_k x - \operatorname{sh} \lambda_k x)), \quad (27)$$

где

$$A_k = -\frac{\cos \lambda_k + \operatorname{ch} \lambda_k}{\sin \lambda_k + \operatorname{sh} \lambda_k},$$

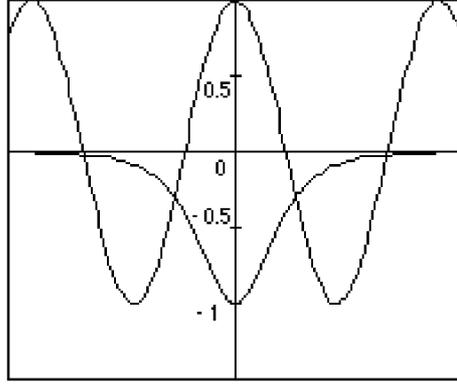
λ_k в соответствии с граничными условиями удовлетворяют уравнению

$$1 + \cos \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k = 0.$$

На рис. 3.1 корни этого уравнения соответствуют пересечениям функций $\cos \lambda_k$ и $-\operatorname{ch}^{-1} \lambda_k$. Видно, что большие по величине корни λ_k оказываются близкими к нулям функции $\cos \lambda_k$.

Найденные функции $X_k^{(0)}$ оказываются ортогональными [6]. Действительно, опустив для краткости верхний индекс, получим

$$\int_0^1 X_i X_j dx = \lambda_j^{-4} \int_0^1 X_i X_j'''' dx = \lambda_j^{-4} X_i X_j''' \Big|_0^1 - \lambda_j^{-4} \int_0^1 X_i' X_j''' dx =$$

Рис. 3.1. Определение корней λ_k .

$$= -\lambda_j^{-4} \int_0^1 X_i' X_j''' dx = \dots = \lambda_j^{-4} \int_0^1 X_i'''' X_j dx = \lambda_j^{-4} \lambda_i^4 \int_0^1 X_i X_j dx.$$

Отсюда

$$(1 - \lambda_j^{-4} \lambda_i^4) \int_0^1 X_i X_j dx = 0.$$

Поэтому для различных значений индексов i и j условие ортогональности выполняется. Константы B_k в выражении (27) выберем из условия ортонормированности функций $X_k^{(0)}$. Тогда

$$B_k = \left(\int_0^1 \left(\tilde{X}_k^{(0)} \right)^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\tilde{X}_k^{(0)} = X_k^{(0)} \Big|_{B_k=1}.$$

Коэффициенты c_k разложения функции x можно теперь вычислить по формулам:

$$c_k = \int_0^1 x X_k^{(0)} dx.$$

Ряд (26) будет сходиться в пространстве L_2 [6].

Найдем уравнения для функций $T_k^{(0)}$. Пусть функция $\dot{\varphi}^{(0)}(t)$ известна, и

$$\dot{\varphi}^{(0)}(0) = \dot{\varphi}^{(0)}(1) = 0,$$

то есть угловая скорость в начальный и конечный моменты времени равна нулю. Тогда для определения функций $T_k^{(0)}(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{T}_k^{(0)} = \left((\dot{\varphi}^{(0)})^2 - \theta \lambda_k^4 \right) T_k^{(0)} - c_k \ddot{\varphi}^{(0)}. \quad (28)$$

В качестве граничных зададим условия

$$T_k^{(0)}(1) = \dot{T}_k^{(0)}(1) = 0.$$

Это соответствует гашению относительных колебаний в конечный момент времени для всех $0 \leq x \leq 1$.

Решив уравнение (28), можем вычислить $w^{(0)}(t, x)$ по формуле (25). Выражение для нулевого приближения $Q^{(0)}$ примет вид

$$Q^{(0)}(t) = \beta \int_0^1 \left(x^2 \ddot{\varphi}^{(0)} + x \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial t^2} \right) dx,$$

Если предположить, что $\varphi^{(1)} \equiv 0$, то для первого приближения из системы (10) получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(1)} \right) \right] dx = Q^{(1)}, \\ \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} - w^{(1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + u^{(1)} \ddot{\varphi}^{(0)} + \theta \frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4} = 0, \\ x (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} + w^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

$$w^{(1)}(t, 0) = w_x^{(1)}(t, 0) = w_{xx}^{(1)}(t, 1) = w_{xxx}^{(1)}(t, 1) \equiv 0, \quad (30)$$

$$u^{(1)}(t, 0) = u_x^{(1)}(t, 1) \equiv 0, \quad (31)$$

Поскольку функция $w^{(0)}(t, x)$ известна, то из третьего уравнения системы (29) следует

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = - \sum_k \left(c_k X_k^{(0)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} X_k^{(0)} \dot{T}_k^{(0)} + X_k^{(0)} T_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = - \sum_k \left(c_k (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{T}_k^{(0)} + T_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right) X_k^{(0)}, \quad (32)$$

Отсюда с учетом краевых условий (31)

$$u^{(1)} = - \sum_k \left(c_k (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{T}_k^{(0)} + T_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right) F_k,$$

где

$$F_k = \frac{B_k}{\lambda_k^2} (-\cos \lambda_k x - \operatorname{ch} \lambda_k x + A_k (-\sin \lambda_k x - \operatorname{sh} \lambda_k x)) + D_1 x + D_2,$$

$$D_1 = -\frac{B_k}{\lambda_k} (\sin \lambda_k - \operatorname{sh} \lambda_k + A_k (-\cos \lambda_k - \operatorname{ch} \lambda_k)), \quad D_2 = \frac{2B_k}{\lambda_k^2}.$$

Рассмотрим второе уравнение системы (29) с краевыми условиями (30). Его решение будем искать в виде

$$w^{(1)} = \sum_m X_m^{(1)}(x) T_m^{(1)}(t). \quad (33)$$

Пусть

$$F_k = \sum_m A_{mk}^{(1)} X_m^{(1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= - \sum_k \left(c_k (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{T}_k^{(0)} + T_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right) \sum_m A_{mk}^{(1)} X_m^{(1)} = \\ &= \sum_m \left(- \sum_k \left(c_k (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{T}_k^{(0)} + T_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right) A_{mk}^{(1)} \right) X_m^{(1)} = \\ &= \sum_m g_m^{(1)}(t) X_m^{(1)}(x), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$g_m^{(1)}(t) = - \sum_k \left(c_k (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{T}_k^{(0)} + T_k^{(0)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right) A_{mk}^{(1)}.$$

Учитывая (34) и (33), из второго уравнения системы (29) получим:

$$X_m^{(1)} \ddot{T}_m^{(1)} - X_m^{(1)} T_m^{(1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + \theta (X_m^{(1)})'''' + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{g}_m^{(1)} X_m^{(1)} + g_m^{(1)} \ddot{\varphi}^{(0)} X_m^{(1)} = 0$$

или

$$\theta \frac{(X_m^{(1)})''''}{X_m^{(1)}} = - \frac{\ddot{T}_m^{(1)}}{T_m^{(1)}} + (\dot{\varphi}^{(0)})^2 - \frac{2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{g}_m^{(1)}}{T_m^{(1)}} - \frac{\ddot{\varphi}^{(0)} g_m^{(1)}}{T_m^{(1)}} = d.$$

Отсюда видно, что функции $X_m^{(1)}(x)$ совпадают с функциями $X_m^{(0)}$, и для них будет справедливо условие ортогональности. Поэтому выражения для $A_{mk}^{(1)}$ примут вид

$$A_{mk}^{(1)} = \int_0^1 F_k X_m^{(1)} dx.$$

Функции $T_m^{(1)}(t)$ должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{T}_m^{(1)} = \left((\dot{\varphi}^{(0)})^2 - \theta \lambda_m^4 \right) T_m^{(1)} - 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{g}_m^{(1)} - \ddot{\varphi}^{(0)} g_m^{(1)}.$$

Соответствующие краевые условия примут вид

$$T_m^{(1)}(1) = \dot{T}_m^{(1)}(1) = 0.$$

Теперь из первого уравнения системы (29) можно вычислить первое приближение для вращательного момента $Q^{(1)}(t)$.

Аналогично для любого n -го приближения ($n > 1$) в предположении, что $\dot{\varphi}^{(n)} \equiv 0$, будем иметь

$$w^{(n)} = \sum_m X_m^{(n)}(x) T_m^{(n)}(t),$$

$$u^{(n)} = \sum_m g_m^{(n)}(t) X_m^{(n)}(x),$$

где

$$X_m^{(n)}(x) = B_m (\cos \lambda_m x - \operatorname{ch} \lambda_m x + A_m (\sin \lambda_m x - \operatorname{sh} \lambda_m x)),$$

$$A_m = -\frac{\cos \lambda_m + \operatorname{ch} \lambda_m}{\sin \lambda_m + \operatorname{sh} \lambda_m},$$

$$B_m = \left(\int_0^1 (\tilde{X}_m^{(0)})^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{X}_m^{(0)} = X_m^{(0)}|_{B_m=1},$$

$$g_m^{(n)}(t) = -\sum_k \left(-\ddot{g}_k^{(n-1)} + g_k^{(n-1)} (\dot{\varphi}^{(0)})^2 + 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{T}_k^{(n-1)} + T_k^{(n-1)} \ddot{\varphi}^{(0)} \right) A_{mk}^{(n)},$$

числа λ_m удовлетворяют уравнению

$$1 + \cos \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m = 0,$$

а функции $T_m^{(n)}(t)$ являются решением дифференциального уравнения

$$\ddot{T}_m^{(n)} = \left((\dot{\varphi}^{(0)})^2 - \theta \lambda_m^4 \right) T_m^{(n)} - 2\dot{\varphi}^{(0)} \dot{g}_m^{(n)} - \ddot{\varphi}^{(0)} g_m^{(n)}$$

с краевыми условиями

$$T_m^{(n)}(1) = \dot{T}_m^{(n)}(1) = 0. \quad (35)$$

Краевые условия (35) соответствуют гашению относительных колебаний стержня в конце маневра.

Выражение для n -ого приближения управляющего вращательного момента примет вид

$$Q^{(n)}(t) = \beta \int_0^1 \left[x \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2} + 2x \left(\dot{\varphi}^{(0)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + \ddot{\varphi}^{(0)} u^{(n)} \right) \right] dx.$$

Итак, в случае жесткого тонкого стержня уравнения движения дают возможность определить мгновенную форму стержня и управляющий вращательный момент в виде рядов до членов порядка μ^n включительно.

4. Численный анализ полученных решений

Вычисления были проведены для следующих значений параметров:

$$\rho = 7500 \text{ кг/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad l = 1 \text{ м}, \quad R = 0.01 \text{ м}, \quad T = 1 \text{ с}.$$

Закон изменения скорости брался в виде

$$\dot{\varphi}^{(0)} = Ct^5 (t - 1)^5,$$

где C — некоторая константа.

На рис. 4.1 – 4.4 представлены графики зависимостей основных характеристик движения от времени для случаев нерастяжимого, жесткого и жесткого тонкого стержня. Расчеты показали, что для вычислений параметров движения с точностью до шестого знака после запятой достаточно рассматривать разложения решений до второго порядка по μ . Константу C полагали равной 10000. Это соответствует максимуму угловой скорости ≈ 9.8 рад/с. Поскольку вычисления проводились для одних и тех же параметров, видна схожесть соответствующих графиков. В реальных условиях выбор той или иной модели упругого стержня напрямую зависит от конкретной постановки задачи.

На рис.4.5 изображены графики зависимостей $w^{(0)}(t, 1)$, $\dot{w}^{(0)}(t, 1)$ и $Q^{(0)}(t)$ для случая жесткого тонкого стержня при $C = 80000$ (максимум скорости ≈ 78 рад/с). Видно, что на начальном этапе движение является колебательным, но после достижения максимума угловой скорости колебательный характер движения вследствие действия центробежных сил исчезает.

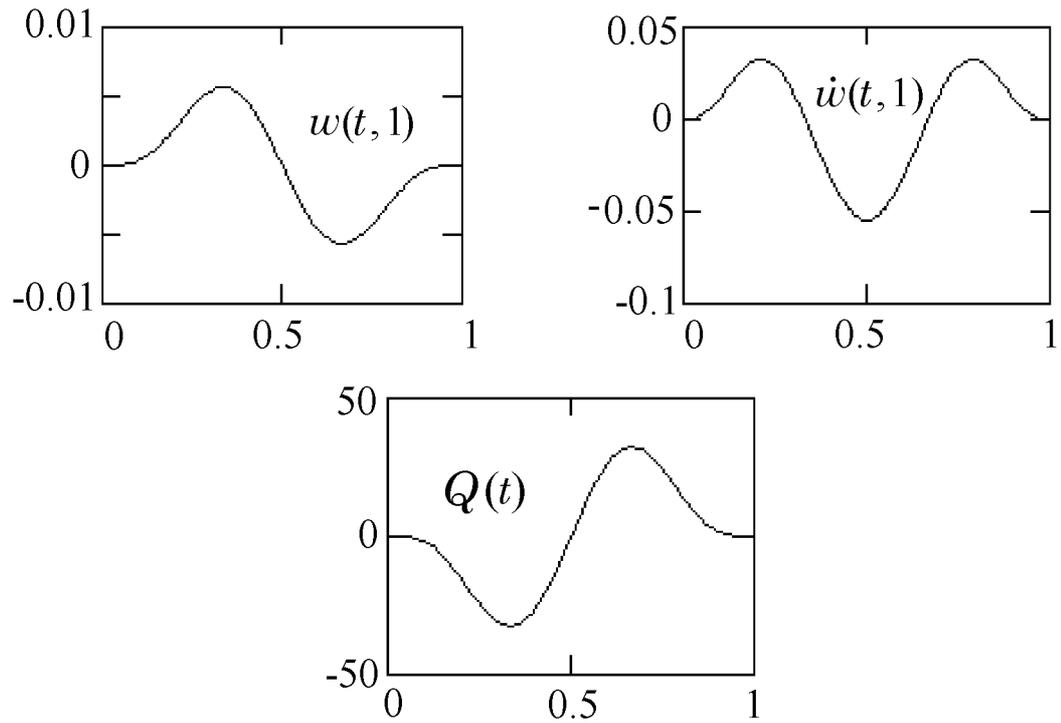


Рис. 4.1. Графики зависимостей $w(t, 1)$, $\dot{w}(t, 1)$ и $Q(t)$ для случая нерастяжимого стержня.

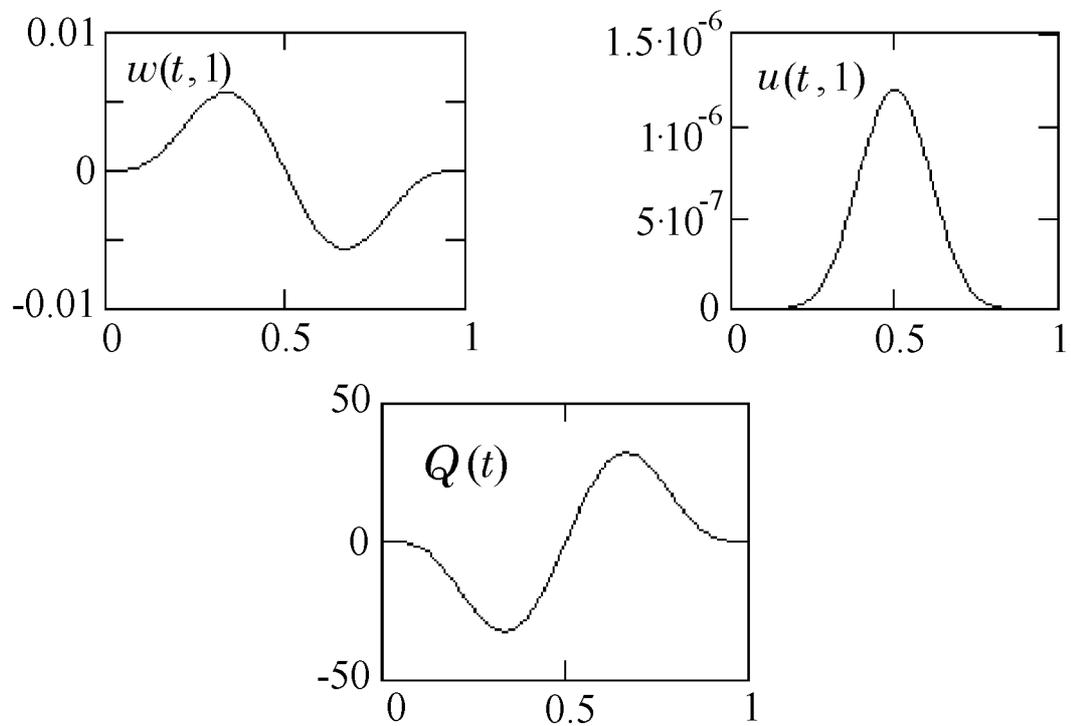


Рис. 4.2. Графики зависимостей $w(t, 1)$, $u(t, 1)$ и $Q(t)$ для случая жесткого стержня.

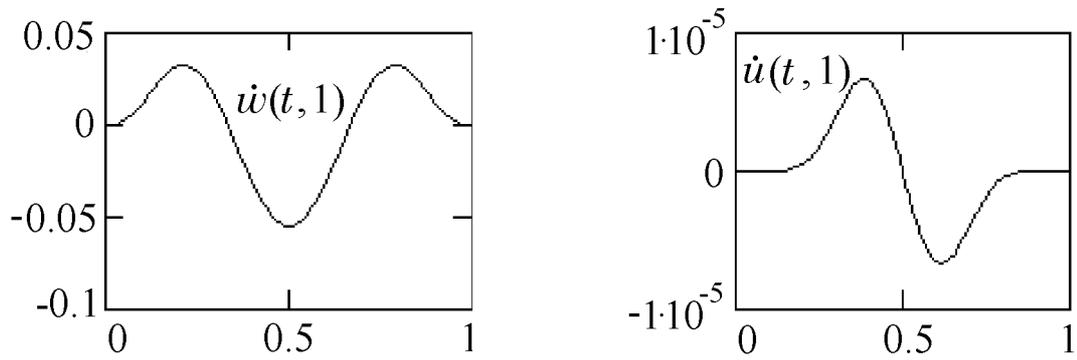


Рис. 4.3. Графики зависимостей $\dot{w}(t, 1)$ и $\dot{i}(t, 1)$ для случая жесткого стержня.

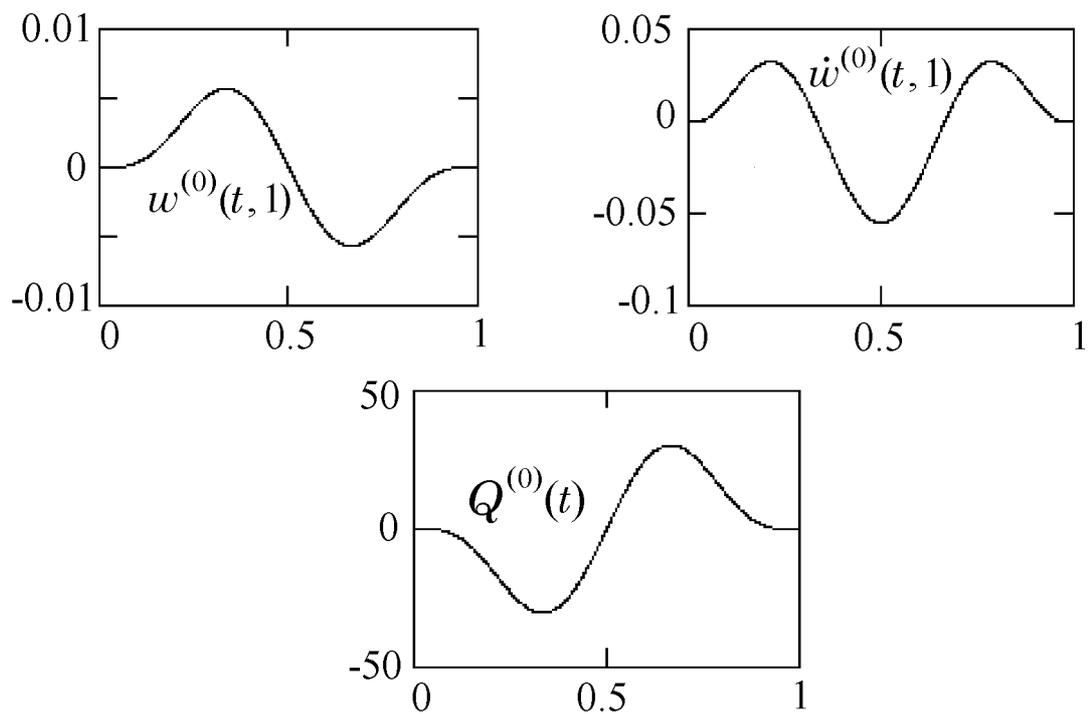


Рис. 4.4. Графики зависимостей $w^{(0)}(t, 1)$, $\dot{w}^{(0)}(t, 1)$ и $Q^{(0)}(t)$ для случая жесткого тонкого стержня.

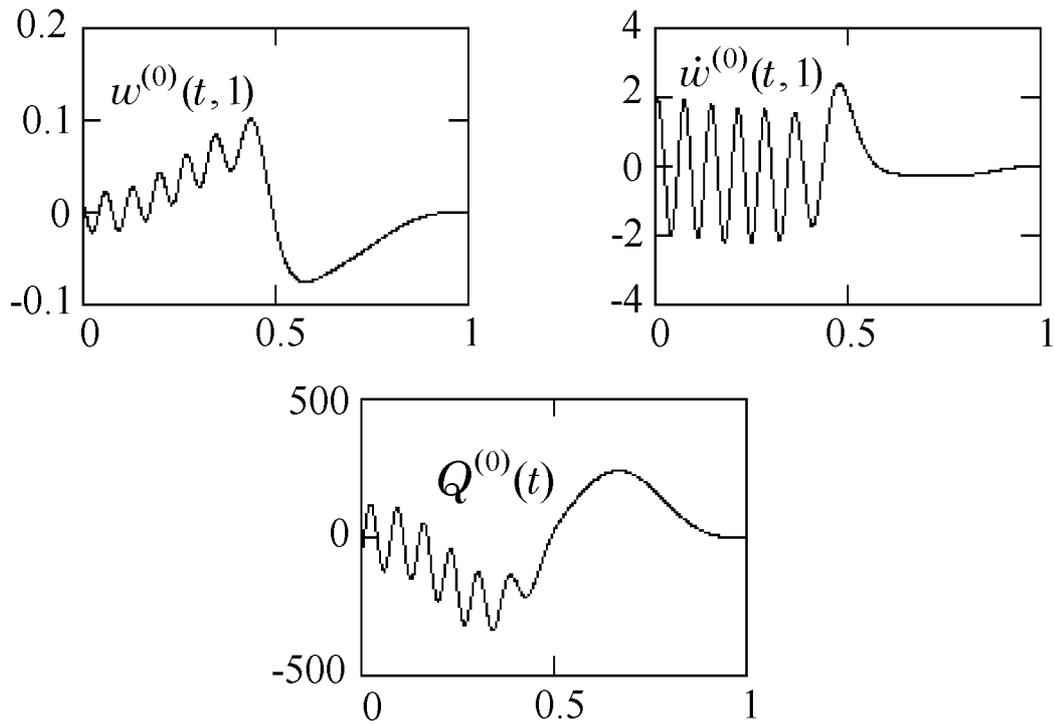


Рис. 4.5. Графики зависимостей $w^{(0)}(t, 1)$, $\dot{w}^{(0)}(t, 1)$ и $Q^{(0)}(t)$ для случая жесткого тонкого стержня при $C = 80000$.

Заключение

В данной работе развит метод исследования управляемого движения упругого стержня с учетом центробежных сил. Он основан на применении полуобратного метода решения задач динамики и позволяет получить закон изменения мгновенной формы стержня и построить управляющий момент для заданной угловой скорости. Представлены следующие основные результаты:

1) выведены полные уравнения вращения стержня вокруг неподвижной точки в плоскости в рамках линейной теории упругих стержней с учетом центробежных сил и проведено их упрощение для случаев нерастяжимого стержня, жесткого стержня и жесткого тонкого стержня; модель жесткого стержня соответствует случаю, когда к появлению малого параметра приводит увеличение только модуля Юнга при неизменных остальных параметрах; модель жесткого тонкого стержня соответствует случаю, когда обратно пропорционально увеличению модуля Юнга меняется линейный размер сечения стержня;

2) проведено исследование системы уравнений движения для случаев абсолютно жесткого, нерастяжимого и жесткого тонкого стержня полуоб-

ратным методом решения задач динамики; найдены формулы для определения мгновенной формы стержня и управляющего вращательного момента в виде рядов по степеням малого параметра при условии гашения угловой скорости и упругих отклонений в конечный момент времени; получены формулы, дающие возможность объяснить смысловые различия приближенных моделей движения упругого стержня в зависимости от способа вхождения в уравнения движения малого параметра, связанного с жесткостью стержня;

3) представлены результаты численного решения задачи управления для случаев нерастяжимого, жесткого и жесткого тонкого стержня; выявлено влияние центробежных сил на характер движения;

4) установлено, что в случаях жесткого и нерастяжимого стержней коэффициенты разложения решений по степеням малого параметра носят полиномиальный характер, тогда как коэффициенты разложения в случае жесткого тонкого стержня могут иметь высокочастотную колебательную составляющую;

5) найден закон вращения стержня, который дает практическое совпадение решений для всех рассмотренных моделей движения, несмотря на различие структуры коэффициентов разложения решений по степеням малого параметра.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Об управляемом вращении упругого стержня. Известия РАН, Прикладная математика и механика, т.46, вып.4, 1982, с. 587-595.
2. Бербюк В.Е., Демидюк М.В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами. Известия РАН, Механика твердого тела, N2, 1984, с. 59-67.
3. Галиуллин А.С. Аналитическая динамика. Учеб. пособие. — М.: Изд-во РУДН, 1998.—441 с. ISBN-5-209-00582-8
4. Гукасян А.А., Багдасарян А.В. Движение манипулятора по заданному фазовому многообразию. “Некоторые вопросы теоретической и прикладной механики. (Сборник статей) Изд. “Луйс”, Ер.:1997, стр.16-22.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости. М.,1987
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977