

Ордена Ленина
Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Голубев Ю.Ф.

Движение точки с постоянным модулем скорости
в ньютоновом поле тяготения

Москва, 2001

УДК 531.1

Голубев Ю.Ф. Движение точки с постоянным модулем скорости в ньютоновом поле тяготения.

Аннотация

Исследована задача о движении материальной точки с постоянным модулем скорости в ньютоновом центральном поле тяготения. Решение приведено к квадратурам двумя способами: с использованием уравнений Лагранжа с множителем и с применением уравнений динамики, предложенных в [1] для систем с нелинейными по скоростям неголономными связями. Построена фазовая диаграмма движения. Изучена структура траекторий в зависимости от начальных условий. Проанализирована возможность выполнения элементарных маневров в окрестности притягивающего центра.

Golubev Yu.F. Motion of a Particle with a Constant Module of Velocity in the Newtonian Field of Gravity.

Abstract

The problem on a motion of a particle with a constant module of velocity in the Newtonian field of gravity is investigated. The solution is reduced to quadratures by two ways: by means of Lagrange equations with a multiplier and by means of dynamics equations proposed in [1] for systems with nonholonomous constraints which are nonlinear relatively of velocities. The phase diagram of the motion is drawn. The dependence of trajectories structure on initial conditions is investigated. A possibility of accomplishment of simplest maneuvers in a neighborhood of the center of gravity is analyzed.

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| 1. Общие уравнения динамики | 4 |
| 2. Векторное уравнение движения в ньютоновом центральном поле | 6 |
| 3. Уравнение движения в полярных координатах | 8 |
| 4. Приведение решения к квадратурам | 8 |
| 5. Качественное исследование движения | 10 |
| 6. Некоторые краевые задачи | 16 |
| 7. Свойства функций Θ_π , Θ_α , $\Theta(x, a)$ | 21 |
| Заключение | 24 |
| Литература | 25 |

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 01-01-00079, 96-15-96022) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (1.6-329, А0097).

Введение

Задача о движении материальной точки с постоянным модулем скорости в ньютоновом центральном поле тяготения полезна для изучения возможности построения различных маневров летательных аппаратов в космосе. В данной работе не будем останавливаться на способах, которыми реальный космический аппарат может поддерживать абсолютную скорость движения постоянной. Для простоты будем предполагать, что изменение массы аппарата в ходе маневра не происходит. Условие постоянства величины скорости представляется тогда как нелинейная по скоростям неголономная механическая связь, стесняющая движение материальной точки. В настоящее время существует несколько вариантов процедуры получения уравнений динамики для задач этого класса. Например, в предположении об идеальности связи в [2] были получены для рассматриваемой задачи уравнения движения с множителем Лагранжа в сферических координатах. Однако, их аналитическое решение в [2] не было выполнено.

В [1] предложен вариант общих уравнений динамики в лагранжевых координатах для систем с идеальными неголономными нелинейными по скоростям связями. Этот вариант не содержит множителей Лагранжа, а применяемая в нем процедура составления уравнений динамики обобщает процедуру составления уравнений Воронца. В ряде случаев (например, нелинейные аналоги систем Чаплыгина и, в частности рассматриваемая задача) указанный вариант общих уравнений динамики может оказаться предпочтительным, что и демонстрируется в дальнейшем изложении.

Задача о движении материальной точки с постоянной величиной скорости в центральном поле, в отличие от стандартной задачи о пассивном движении точки в центральном поле тяготения, не имеет векторного первого интеграла кинетического момента. Отсутствует в ней и интеграл энергии из-за того, что множество виртуальных перемещений точки не включает действительного перемещения. Вместе с тем, как это будет показано ниже, в данной задаче сохраняется направление вектора кинетического момента, и эту задачу можно выбором подходящей системы координат привести к аналогу системы Чаплыгина. В результате удастся получить дополнительный первый интеграл и выполнить достаточно подробный качественный анализ движения точки.

В п.1 в общем виде представлены некоторые уравнения динамики, подходящие для решения рассматриваемой задачи.

В п.2 выведено векторное уравнение движения материальной точки в центральном поле тяготения. Найден полный набор первых интегралов, решающих задачу.

В п.3 продемонстрирована техника решения данной задачи в полярных координатах без введения множителя Лагранжа с помощью уравнений динамики, разработанных для механических систем соответствующего типа в работе [1].

В п.4 осуществлено приведение решения к квадратурам. Получены формулы для расчета времени движения и угловой дальности.

В п.5 построена фазовая диаграмма радиального движения и выполнено качественное исследование его структуры.

В п.6 решены некоторые простейшие краевые задачи определения траекторий. К таким относятся получение требуемого значения полярного радиуса в конце движения, требуемых конечных значений радиуса и радиальной составляющей скорости, расчет угловой дальности полета и т.п.

П.7 посвящен исследованию характерных особенностей квадратур, выражаемых несобственными интегралами и служащих для расчета дальности полета.

В заключении сформулированы основные результаты.

1. Общие уравнения динамики

Пусть в пространстве R^3 конфигурация системы N материальных точек с учетом всех геометрических связей (механических и сервосвязей) однозначно определена координатами

$$q_1, \dots, q_n, \quad n \leq 3N,$$

так что радиусы-векторы всех материальных точек системы выражаются функциями

$$\mathbf{r}_\gamma = \mathbf{r}_\gamma(q_1, \dots, q_n, t), \quad \gamma = 1, \dots, N.$$

Предположим, что на систему наложены идеальные дифференциальные связи [1]

$$\Phi_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m \leq n,$$

где $\mathbf{v}_\gamma = \dot{\mathbf{r}}_\gamma$, $\gamma = 1, \dots, N$, суть производные радиусов-векторов по времени t . Учтем, что

$$\mathbf{v}_\gamma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\gamma}{\partial t},$$

и подставим эти выражения в уравнения связей. Тогда связи примут вид

$$\phi_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.1)$$

Пусть, как обычно

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^N m_{\gamma} \mathbf{v}_{\gamma}^2, \quad Q_i = \sum_{\gamma=1}^N \mathbf{F}_{\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\gamma}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

суть кинетическая энергия и обобщенные силы системы, \mathbf{F}_{γ} — активные силы, приложенные к ее точкам. В предположении, что связи идеальны, можно воспользоваться принципом Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0$$

для любых виртуальных перемещений $\{\delta q_i, i = 1, \dots, n\}$, определенных следующей системой уравнений [3]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Уравнения динамики с множителями Лагранжа λ_j примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Множители λ_j находятся с помощью уравнений связей (1.1).

Дадим вариант уравнений динамики с исключенными множителями Лагранжа [1, 4]. Будем считать, что ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}$$

равен m . Это означает, что система связей выделяет в пространстве скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ поверхность размерности $n - m$. Представим ее в параметрической форме:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, \dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_{n-m}), \quad i = 1, \dots, n$$

таким образом, что при произвольном задании скалярных параметров $\dot{\pi}_1, \dots, \dot{\pi}_{n-m}$, называемых квазискоростями, уравнения дифференциальных связей автоматически удовлетворяются.

Зависимости $\dot{\pi}_k(t)$ можно рассматривать как производные от квазиординат $\pi_k(t)$.

Возьмем стандартное правило частного дифференцирования по квазиординате π_k :

$$\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}, \quad (1.3)$$

где $f(q_1, \dots, q_n, t)$ — произвольная функция.

Приведем дифференциальные связи к виду

$$\dot{q}_{p+\nu} = \varphi_{p+\nu}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p), \quad p = n - m, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (1.4)$$

приняв $\dot{\pi}_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, p$, и составим функции

$$T^* = T^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p, t), \quad \varphi_{p+\nu}^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p, t).$$

Функция T^* получается из кинетической энергии системы T заменой скоростей $\dot{q}_{p+\nu}$, $\nu = 1, \dots, m$, их выражениями через дифференциальные связи, а функции $\varphi_{p+\nu}^*$ совпадают по виду с соответствующими функциями $\varphi_{p+\nu}$. Однако, производные функций T^* и $\varphi_{p+\nu}^*$ берутся с учетом правила (1.3) дифференцирования по квазикоординате:

$$\frac{\partial q_{p+\nu}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{q}_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_k}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p.$$

Частные производные от функций T , $\varphi_{p+\nu}$ будем по-прежнему вычислять так, как будто все их аргументы независимы. Тогда координаты q_i , определяющие движение механической системы, стесненное дифференциальными связями, удовлетворяют [1] следующей системе уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i^* + \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad p = n - m, \quad (1.5)$$

где

$$Q_i^* = Q_i + \sum_{\nu=1}^m Q_{p+\nu} \frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{\nu=1}^m Q_{p+\nu} \frac{\partial q_{p+\nu}}{\partial q_i},$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+\nu}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_{p+\nu}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \varphi_{p+\nu}^*}{\partial q_i} \right].$$

Система уравнений (1.5) справедлива при любых наложенных на систему связях. Но она не полна. Чтобы эту систему замкнуть, достаточно добавить к ней кинематические уравнения (1.4).

2. Векторное уравнение движения в ньютоновом центральном поле

Возьмем неподвижный правоориентированный ортонормированный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с началом O в притягивающем центре. Радиус-вектор материальной точки и ее вектор скорости обозначим соответственно

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = \dot{r}_1\mathbf{e}_1 + \dot{r}_2\mathbf{e}_2 + \dot{r}_3\mathbf{e}_3.$$

Тогда условие постоянства модуля скорости можно представить в виде

$$\mathbf{v}^2 = \dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2 = v_0^2 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Сила тяготения \mathbf{F} и ее силовая функция U имеют соответственно вид

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{r^3} \mathbf{r}, \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \quad U = \frac{\mu m}{r},$$

где μ — постоянная тяготения, m — масса точки.

Приняв связь (2.1) идеальной, рассмотрим уравнение движения с множителем Лагранжа λ . В соответствии с (1.2) найдем

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \lambda \mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Следовательно, реакция идеальной связи направлена вдоль вектора скорости.

Множитель λ нетрудно определить. Продифференцировав уравнение связи (2.1) в силу уравнения движения, найдем

$$0 = \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \lambda v_0^2, \quad \lambda = \frac{\mu}{r^3 v_0^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}.$$

Таким образом, уравнение (2.2) принимает вид

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3 v_0^2} [\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})].$$

Умножив обе части этого уравнения слева векторно на \mathbf{r} , получим уравнение изменения удельного кинетического момента $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ материальной точки относительно притягивающего центра O :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \lambda \boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu \boldsymbol{\sigma}}{r^3 v_0^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}). \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что вектор кинетического момента сохраняет свою ориентацию в абсолютном пространстве, а движение материальной точки происходит в неподвижной плоскости, перпендикулярной этому вектору. Умножим обе части уравнения (2.3) скалярно на $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} = \frac{\mu \sigma^2}{r^2 v_0^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{v} \right) = \sigma^2 \frac{\mu \dot{r}}{r^2 v_0^2}, \quad \dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r}.$$

Видим, что если в какой-нибудь момент времени оказалось $\sigma = 0$ (скорость направлена вдоль радиуса-вектора), то это равенство будет справедливо и в любой другой момент времени. Если $\sigma \neq 0$, то имеет место первый интеграл

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{v_0^2} \left(\frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r} \right), \quad \sigma_0 = \sigma(t_0), \quad r_0 = r(t_0), \quad (2.4)$$

выражающий зависимость величины кинетического момента от расстояния до притягивающего центра.

3. Уравнение движения в полярных координатах

Направим базисный вектор \mathbf{e}_3 по вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда движение будет происходить в плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, а радиус-вектор \mathbf{r} материальной точки примет вид

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2.$$

Полярные координаты (r, ϑ) выберем так, чтобы было

$$r_1 = r \cos \vartheta, \quad r_2 = r \sin \vartheta.$$

Воспользуемся уравнениями (1.5), приняв $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$. Кинетическая энергия, силовая функция и уравнение связи имеют вид

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2), \quad U = \frac{\mu m}{r}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}}{r} = \varphi(r, \dot{r}).$$

Здесь знак “+” перед корнем выбран из-за того, что направление вектора \mathbf{e}_3 совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\sigma}$. После исключения величины $\dot{\vartheta}$ из выражения для кинетической энергии получим $T^* \equiv mv_0^2/2$. Кроме того

$$\tilde{Q}_r = mr^2\dot{\vartheta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right], \quad Q_r^* = -\frac{\mu m}{r^2}.$$

Составим динамическое уравнение (1.5):

$$\tilde{Q}_r + Q_r^* = 0 \longrightarrow r^2\dot{\vartheta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{\mu}{r^2} = 0. \quad (3.1)$$

Умножим это уравнение на \dot{r} и выполним стандартное преобразование выражения в квадратных скобках:

$$r^2\dot{\vartheta} \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} - \varphi \right) - \frac{\mu \dot{r}}{r^2} = 0.$$

Учтем, что $\sigma = r^2\dot{\vartheta} = r\sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}$. Тогда последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\mu \dot{r}}{r^2 v_0^2}$$

и дает уже полученный выше первый интеграл (2.4).

4. Приведение решения к квадратурам

Сначала рассмотрим стационарные движения. Первое из них — это движение точки вдоль луча, исходящего из притягивающего центра. Такому

движению отвечает $\sigma \equiv 0$. Как уже отмечалось, указанное решение существует. Для его реализации достаточно направить скорость точки коллинеарно начальному радиусу-вектору, и точка будет двигаться с постоянной скоростью вдоль соответствующего луча в направлении либо от притягивающего центра, либо к притягивающему центру.

Второе стационарное движение — это движение точки по окружности с постоянной величиной скорости v_0 . Чтобы получить такое решение, рассмотрим уравнение (3.1). В нем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} = -\frac{\dot{r}}{r\sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}}{r^2}.$$

Приняв теперь в (3.1) $\dot{r} \equiv 0$ (направление скорости перпендикулярно радиусу-вектору), найдем условие согласования начального значения радиуса:

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}.$$

Другими словами, начальное значение радиуса должно быть таким, чтобы скорость v_0 оказалась для него первой космической скоростью. Отметим, что при таком движении по окружности $\lambda \equiv 0$, и реакция связи отсутствует.

Чтобы исследовать нестационарные движения, воспользуемся первым интегралом (2.4), который представим в виде

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{f(x)}{a}, \quad f(x) = xe^{-x}, \quad (4.1)$$

где обозначено

$$y = \frac{\dot{r}}{v_0}, \quad x = \frac{\mu}{v_0^2 r}, \quad a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Область определения переменной x выражается неравенствами

$$f(x) = xe^{-x} \leq a, \quad x > 0. \quad (4.2)$$

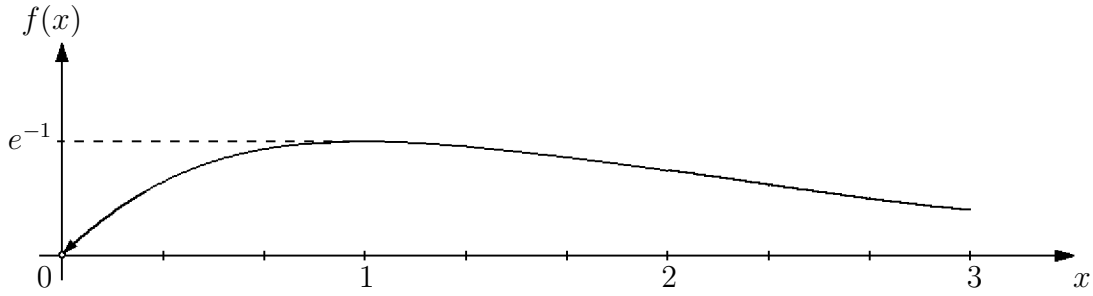
Отметим, что n -я производная функции $f(x)$ дается формулой

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1}(n - x)e^{-x}. \quad (4.3)$$

При $x > 0$ функция $f(x)$ положительна и имеет единственный максимум, когда $x = 1$. Значение этого максимума равно $f(1) = e^{-1}$. Кроме того, $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. При $x = 2$ она имеет точку перегиба. График функции $f(x)$ представлен на рис. 4.1.

При $\dot{r} \neq 0$ справедливы формулы:

$$|\dot{r}| = v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dr} \dot{r} = -\frac{\mu(\text{sign } \dot{r})}{v_0 r^2} \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}, \quad (4.4)$$

Рис. 4.1. Функция $f(x) = xe^{-x}$.

$$\frac{v_0\sqrt{1-y^2}}{r} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dx} \frac{dx}{dr} \dot{r} = -\frac{d\vartheta}{dx} \frac{\mu \dot{r}}{v_0^2 r^2} \longrightarrow \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{v_0}{a\dot{r}} e^{-x}.$$

Поэтому в области постоянства знака \dot{r} имеют место квадратуры:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= -\frac{\mu a(\text{sign } \dot{r})}{v_0^3} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}, \\ \vartheta - \vartheta_0 &= -(\text{sign } \dot{r}) \int_{x_0}^x \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

5. Качественное исследование движения

Разрешив уравнение (4.1) относительно y , получим на плоскости (x, y) семейство кривых по параметру a , образующих фазовую диаграмму (рис. 5.1) радиальной составляющей движения:

$$|y| = \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}. \quad (5.1)$$

В зависимости от величины a могут представиться следующие случаи.

5.1: $ae > 1$ или $ef(x_0) > \sqrt{1 - y_0^2}$. Это означает, что модуль радиальной составляющей начальной скорости достаточно велик. Переменная y ни при каком значении радиуса не обращается в нуль. Из-за того, что $f(x) > 0$, не обращается в нуль и трансверсальная составляющая скорости. Если $\dot{r}_0 < 0$, то точка устремляется к притягивающему центру и $x \rightarrow \infty$, а если $\dot{r}_0 > 0$, то она удаляется от притягивающего центра и $x \rightarrow 0$. При этом полярный радиус меняется монотонно, а угловая скорость радиуса-вектора устремляется к нулю. Радиус-вектор точки может сделать несколько оборотов вокруг притягивающего центра. Однако, число оборотов не будет бесконечным. Покажем это. Заметим, что поскольку $f(x) \leq e^{-1}$, то

$$|y| \geq \sqrt{1 - \frac{1}{a^2 e^2}}, \quad |\dot{r}| \geq v_0 \sqrt{1 - \frac{1}{a^2 e^2}}.$$

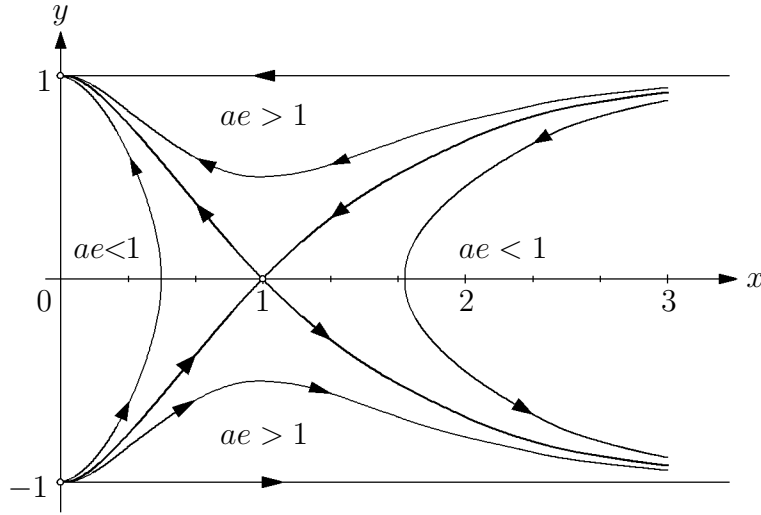


Рис. 5.1. Фазовая диаграмма радиальной составляющей движения.

Рассмотрим варианты

5.1.1: $\dot{r}_0 > 0$: радиус монотонно возрастает, а x монотонно убывает. Поэтому

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_x^{x_0} \frac{v_0}{a\dot{r}} e^{-x} dx \leq \int_x^{x_0} \frac{e}{\sqrt{a^2 e^2 - 1}} e^{-x} dx < \frac{e}{\sqrt{a^2 e^2 - 1}} (1 - e^{-x_0}).$$

5.1.2: $\dot{r}_0 < 0$: радиус монотонно убывает, а x монотонно возрастает. Поэтому

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{x_0}^x \frac{v_0}{a|\dot{r}|} e^{-x} dx \leq \int_{x_0}^x \frac{e}{\sqrt{a^2 e^2 - 1}} e^{-x} dx < \frac{e}{\sqrt{a^2 e^2 - 1}} e^{-x_0}.$$

5.2: $ae = 1$ или $ef(x_0) = \sqrt{1 - y_0^2}$. Для таких начальных условий величина y обращается в нуль при значении $x = 1$, которому отвечает радиус круговой орбиты движения со скоростью v_0 . На рис. 5.1 рассматриваемому случаю соответствует сепаратриса, проходящая через точку $(1, 0)$. Сепаратриса пересекает ось Ox под углом $\pi/4$. Чтобы доказать это, обозначим $z = x - 1$. Тогда из (5.1) при $a = e^{-1}$ и малом $|z|$ будем иметь с точностью до величин четвертого порядка малости под знаком квадратного корня

$$|y| = \sqrt{1 - (z + 1)^2 e^{-2z}} \approx \sqrt{1 - (z^2 + 2z + 1)(1 - 2z + 2z^2)} \approx |z| \sqrt{1 - 2z - 2z^2}.$$

Таким образом, при $x \rightarrow 1$ величина $|y|$ асимптотически подобна величине $|x - 1|$.

Точке $(1, 0)$ на рис. 5.1 отвечает движение вокруг притягивающего центра по круговой орбите с постоянной величиной скорости. Исследуем движение по сепаратрисе. Могут представиться следующие случаи.

5.2.1: $0 < x_0 < 1$, $\dot{r}_0 > 0$. Начальная точка расположена по другую сторону от круговой орбиты, чем притягивающий центр. Радиальная составляющая скорости \dot{r} и радиус r монотонно возрастают, $x \rightarrow 0$, и точка

уходит в бесконечность, совершив, может быть, конечное число витков вокруг притягивающего центра. Действительно,

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_x^{x_0} \frac{v_0}{a\dot{r}} e^{-x} dx \leq \int_x^{x_0} \frac{v_0}{a\dot{r}_0} e^{-x} dx < \frac{v_0}{a\dot{r}_0} (1 - e^{-x_0}). \quad (5.2)$$

5.2.2: $0 < x_0 < 1$, $\dot{r}_0 < 0$. Тогда $\dot{r} \rightarrow 0$ монотонно, $x \rightarrow (1 - 0)$, радиус убывает, причем $r \rightarrow \mu/v_0^2$. Таким образом, траектория приближается к круговой орбите вокруг притягивающего центра. Покажем, что $t \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow (1 - 0)$. Для рассматриваемого случая справедлива формула

$$\dot{x} = \frac{v_0^3}{\mu} x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}.$$

Воспользовавшись формулой (4.3), применим разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$:

$$f(x) = e^{-1} - \frac{e^{-1}(x-1)^2}{2} + R_3(x).$$

Остаточный член R_3 возьмем в форме Лагранжа

$$R_3 = \frac{(3-X)e^{-X}}{3!} (x-1)^3, \quad x \leq X \leq 1.$$

Очевидно, что при $0 < x < 1$ мы будем иметь

$$0 \geq R_3 \geq \frac{(x-1)^3}{2} \rightarrow f(x) \geq e^{-1} \left\{ 1 - \frac{(x-1)^2}{2} [1 - e(x-1)] \right\}.$$

Справедливы соотношения:

$$x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}} \leq \sqrt{\left(1 - \frac{f(x)}{a}\right) \left(1 + \frac{f(x)}{a}\right)} \leq \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{f(x)}{a}}.$$

Учтем теперь оценку для функции $f(x)$

$$x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}} \leq (1-x) \sqrt{1 - e(x_0 - 1)}$$

и выполним интегрирование

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{\mu}{v_0^3} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}} \geq \frac{\mu}{v_0^3 \sqrt{1 - e(x_0 - 1)}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{1-x} = \\ &= \frac{\mu}{v_0^3 \sqrt{1 - e(x_0 - 1)}} \ln \frac{1-x_0}{1-x}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $x \rightarrow (1 - 0)$ время движения по траектории неограниченно увеличивается, и траектория навивается извне на круговую орбиту с бесконечным числом витков вокруг притягивающего центра.

5.2.3: $1 < x_0 < +\infty$, $\dot{r}_0 < 0$. Начальная точка расположена относительно круговой орбиты со стороны притягивающего центра. Радиальная составляющая скорости отрицательна. Поэтому полярный радиус точки будет монотонно убывать, радиальная составляющая скорости, оставаясь отрицательной, будет расти по абсолютной величине, а точка будет неограниченно приближаться к притягивающему центру, причем направление скорости будет асимптотически стремиться к направлению, противоположному направлению радиуса-вектора. Радиус-вектор точки может сделать вокруг притягивающего центра лишь конечное число оборотов:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{x_0}^x \frac{v_0}{a|\dot{r}|} e^{-x} dx \leq \int_{x_0}^x \frac{v_0}{a|\dot{r}_0|} e^{-x} dx < \frac{v_0}{a|\dot{r}_0|} e^{-x_0}. \quad (5.3)$$

5.2.4: $1 < x_0 < +\infty$, $\dot{r}_0 > 0$. Начальная точка расположена относительно круговой орбиты со стороны притягивающего центра. Радиальная составляющая скорости положительна. Поэтому полярный радиус точки будет монотонно возрастать, приближаясь к радиусу круговой орбиты. При этом $x \rightarrow 1 + 0$, а радиальная составляющая скорости будет стремиться к нулю. Для рассматриваемого случая

$$\dot{r} = v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}, \quad \dot{x} = -\frac{v_0^3}{\mu} x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}.$$

С учетом формул пункта 5.2.2 получим по крайней мере для $x \leq 3$

$$R_3 \geq 0, \quad f(x) \geq e^{-1} \left[1 - \frac{(x-1)^2}{2} \right].$$

Поэтому

$$t - t_0 = \frac{\mu}{v_0^3} \int_x^{x_0} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}} \geq \frac{\mu}{v_0^3 x_0^2} \int_x^{x_0} \frac{dx}{x-1} = \frac{\mu}{v_0^3 x_0^2} \ln \frac{x_0 - 1}{x - 1}.$$

таким образом, и в этом случае время достижения значения $x = 1$ оказывается бесконечным, и точка движется по орбите, имеющей бесконечное число витков и навивающейся на круговую орбиту со стороны притягивающего центра.

5.3: $ae < 1$ или $ef(x_0) < \sqrt{1 - y_0^2}$. Это означает, что модуль начальной радиальной составляющей скорости сравнительно мал. Теперь уравнение

$$f(x) = xe^{-x} = a \quad (5.4)$$

имеет два действительных корня: $x_\pi < 1$, $x_\alpha > 1$:

$$f(x_\pi) = f(x_\alpha) = a,$$

так что область определения (4.2) представляет собой объединение двух полуинтервалов

$$(0, x_\pi] \cup [x_\alpha, +\infty).$$

Рассмотрим соответствующие варианты.

5.3.1: $0 < x_0 < x_\pi < 1$, $\dot{r}_0 > 0$. Начальная точка отделена от притягивающего центра круговой орбитой. В процессе движения точка удаляется в бесконечность, радиальная составляющая скорости увеличивается, а число витков ее траектории при этом конечно, т.к. справедлива оценка (5.2).

5.3.2: $0 < x_0 < x_\pi < 1$, $\dot{r}_0 < 0$. Начальная точка расположена со стороны круговой орбиты, противоположной притягивающему центру. В процессе движения полярный радиус убывает, величина $x \rightarrow x_\pi$, радиальная скорость, будучи отрицательной, монотонно возрастает до нуля. Время достижения значения $x = x_\pi$ конечно, т.к.

$$f(x_\pi) = a, \quad f'(x) = (1-x)e^{-x} > 0, \quad f''(x) = -(2-x)e^{-x} < 0$$

и $f(x) \leq a + f'(x_\pi)(x - x_\pi)$. Учтем также, что

$$\sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{f(x)}{a}\right) \left(1 + \frac{f(x)}{a}\right)} \geq \sqrt{1 - \frac{f(x)}{a}}.$$

Следовательно

$$t - t_0 = \frac{\mu}{v_0^3} \int_{x_0}^{x_\pi} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}} \leq \frac{\mu}{v_0^3 x_0^2} \sqrt{\frac{a}{f'(x_\pi)}} \int_{x_0}^{x_\pi} \frac{dx}{\sqrt{x_\pi - x}}. \quad (5.5)$$

В итоге

$$t - t_0 \leq \frac{2\mu}{v_0^3 x_0^2} \sqrt{\frac{a(x_\pi - x_0)}{f'(x_\pi)}}.$$

Кроме того, из (4.4) найдем

$$\ddot{r} = v_0 \frac{f(x)f'(x)\dot{x}}{a^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}} = \frac{v_0^4}{\mu a^2} x^2 f(x)f'(x). \quad (5.6)$$

В данном случае имеем $f'(x_\pi) > 0$. Поэтому $\ddot{r}(x_\pi) > 0$, и скорость точки, достигнув нулевого значения при $x = x_\pi$, станет положительной, а полярный радиус начнет неограниченно возрастать.

При $x \rightarrow (x_\pi - 0)$ материальная точка может сделать вокруг притягивающего центра лишь конечное число витков. Действительно

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_x^{x_\pi} \frac{v_0}{a|\dot{r}|} e^{-x} dx \leq \int_x^{x_\pi} \frac{v_0 dx}{a\sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}} \leq \frac{2v_0}{\sqrt{af'(x_\pi)}} \sqrt{x_\pi - x}.$$

Таким образом, при $x \rightarrow (x_\pi - 0)$ разность $\vartheta - \vartheta_0$ оказывается ограниченной.

5.3.3: $x_\alpha < x_0 < +\infty$, $\dot{r}_0 < 0$. В начальный момент времени точка расположена относительно круговой орбиты со стороны притягивающего центра. В процессе движения $x \rightarrow \infty$, полярный радиус монотонно убывает, но модуль радиальной составляющей скорости монотонно возрастает, направление скорости асимптотически стремится к направлению, обратному направлению радиуса-вектора, и точка стремится к притягивающему центру, сделав быть может конечное число витков вокруг него, т.к. справедлива оценка (5.3).

5.3.4: $x_\alpha < x_0 < +\infty$, $x_\alpha < 2$, $\dot{r}_0 > 0$. В начальный момент времени точка расположена относительно круговой орбиты со стороны притягивающего центра. Сначала полярный радиус возрастает, а $x \rightarrow x_\alpha$, где радиальная скорость обнуляется. Поскольку при $x < 2$ функция $f(x)$ выпукла вверх, то справедлива оценка (5.5). Следовательно переменная x достигает значения x_α за конечное время. Согласно (5.6) имеем $\ddot{r}(x_\alpha) < 0$. Поэтому радиальная скорость точки, пройдя через 0, станет отрицательной, полярный радиус начнет убывать, а точка будет неограниченно приближаться к притягивающему центру не более, чем за конечное число оборотов вокруг него в соответствии с оценкой (5.3).

5.3.5: $x_\alpha < x_0 < +\infty$, $x_\alpha \geq 2$, $\dot{r}_0 > 0$. В начальный момент времени точка расположена относительно круговой орбиты со стороны притягивающего центра. Сначала радиус возрастает, а $x \rightarrow (x_\alpha + 0)$, где радиальная составляющая скорости обнуляется. Однако теперь функция $f(x)$ выпукла вниз. Рассмотрим окрестность $x_\alpha < x_0 < x_\alpha + 1$. Для нее

$$t - t_0 = \frac{\mu}{v_0^3} \int_x^{x_0} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}}} \leq \frac{\mu}{v_0^3 x_\alpha^2} \sqrt{\frac{a}{f(x_\alpha) - f(x_\alpha + 1)}} \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x - x_\alpha}}.$$

Поэтому

$$t - t_0 \leq \frac{2\mu}{v_0^3 x_\alpha^2} \sqrt{\frac{a}{f(x_\alpha) - f(x_\alpha + 1)}} (\sqrt{x_0 - x_\alpha} - \sqrt{x - x_\alpha}),$$

и время достижения значения $x = x_\alpha$ оказывается конечным. При $x = x_\alpha$ имеем $\ddot{r}(x_\alpha) < 0$. Как и в предыдущем случае, радиальная скорость, пройдя

через 0, становится отрицательной, а радиус неограниченно устремляется к нулю. Материальная точка может совершить не более конечного числа витков вокруг притягивающего центра в соответствии с оценкой (5.3).

Фазовая диаграмма на рис. 5.1 содержит еще две прямые $y = 1$ и $y = -1$. Обе отвечают движению вдоль радиуса-вектора с постоянной скоростью v_0 . На прямой $y = 1$ точка удаляется в бесконечность, а на прямой $y = -1$ точка неограниченно приближается к притягивающему центру.

6. Некоторые краевые задачи

Рассмотрим задачи, связанные с необходимостью обеспечения требуемых краевых условий.

6.1: вывод на орбиту, близкую к круговой. Пусть дан радиус круговой орбиты $r_{\text{кр}}$, а начальный полярный радиус точки есть $r_0 \neq r_{\text{кр}}$. Как следует из анализа пункта 5.2, не существует фазовой траектории, приводящей из позиции с радиусом r_0 на круговую орбиту за конечное время. Однако, можно указать траекторию, бесконечно близко подходящую к заданной круговой орбите. Дополним начальные условия так, чтобы исходная точка движения на фазовой диаграмме (рис. 5.1) принадлежала ветви сепаратрисы, приводящей в точку $(1, 0)$. С этой целью назначим

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{кр}}}}, \quad x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}, \quad \dot{r}_0 = \begin{cases} -v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)}, & x_0 < 1; \\ v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)}, & x_0 > 1. \end{cases}$$

Тогда, очевидно,

$$a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}} = e^{-1},$$

и мы получаем решение задачи.

6.2: достижение заданного значения полярного радиуса. Пусть даны два значения полярного радиуса r_0 и r_1 , а также скорость v_0 . Требуется найти все множество траекторий, двигаясь по которым, начиная от точки с полярным радиусом r_0 , можно достичь точку с полярным радиусом r_1 .

Полярным радиусам сопоставим значения x_0 и x_1 :

$$x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}, \quad x_1 = \frac{\mu}{v_0^2 r_1}$$

и воспользуемся фазовой диаграммой (рис. 5.1). В зависимости от значений x_1, x_0 рассмотрим следующие случаи.

6.2.1: $0 < x_1 < x_0 < 1$. Очевидно, что тогда $r_1 > r_0 > r_{\text{кр}}$, и при любом значении \dot{r}_0 из полуинтервала

$$-v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)} < \dot{r}_0 \leq v_0$$

полярный радиус r_1 достигается, а другие значения \dot{r}_0 не могут служить решением. Здесь нижний предел области решений \dot{r}_0 отвечает сепаратрисе, приводящей в точку $(1, 0)$ на рис. 5.1.

6.2.2: $0 < x_1 \leq 1 \leq x_0$. Имеем $r_1 \geq r_{\text{кр}} \geq r_0$, и достичь значения радиуса r_1 из области отрицательных значений переменной y на рис. 5.1 невозможно. Решение задачи записывается в виде

$$v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)} < \dot{r}_0 \leq v_0.$$

Здесь нижний предел выделяет точку на сепаратрисе, попадающей в точку $(1, 0)$ сверху.

6.2.3: $1 < x_1 < x_0$. Другими словами, $r_{\text{кр}} > r_1 > r_0$. Достичь значения радиуса r_1 можно только из области положительных значений переменной y . Решение задачи дается неравенством

$$v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x_0)}{f^2(x_1)}} \leq \dot{r}_0 \leq v_0,$$

в котором нижний предел отвечает фазовой кривой, попадающей сверху в точку $(x_1, 0)$ на рис. 5.1. Если выполнено неравенство

$$v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x_0)}{f^2(x_1)}} < \dot{r}_0 < v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)},$$

то значение r_1 будет достигнуто дважды: первый раз — на восходящем участке траектории, а второй раз — на нисходящем.

6.2.4: $0 < x_0 < x_1 < 1$. В этом случае $r_0 > r_1 > r_{\text{кр}}$. Полярный радиус r_1 может быть достигнут лишь при

$$-v_0 \leq \dot{r}_0 \leq -v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x_0)}{f^2(x_1)}}.$$

Верхний предел в данном неравенстве отвечает фазовой кривой, пересекающей “снизу” ось Ox в точке $(x_1, 0)$. Если выполнено неравенство

$$-v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)} < \dot{r}_0 < -v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x_0)}{f^2(x_1)}},$$

то значение полярного радиуса r_1 будет достигнуто дважды: сначала на нисходящем и затем на восходящем участках траектории.

6.2.5: $0 < x_0 \leq 1 \leq x_1$. Имеем $r_0 \geq r_{\text{кр}} \geq r_1$. Полярный радиус r_1 достигается только при выполнении следующего условия

$$-v_0 \leq \dot{r}_0 < -v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)}.$$

Здесь верхний предел выделяет точку на сепаратрисе, попадающей в точку $(1, 0)$ “снизу”.

6.2.6: $1 < x_0 < x_1$. Это эквивалентно неравенству $r_{\text{кр}} > r_0 > r_1$. Достичь радиуса r_1 можно лишь при выполнении неравенства

$$-v_0 \leq \dot{r}_0 < v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)}.$$

Верхний предел отвечает сепаратрисе, попадающей в точку $(1, 0)$ на рис. 5.1 “сверху”.

Рассмотренные случаи исчерпывают решение задачи 6.2.

6.3. Достижение радиуса с требуемой радиальной скоростью. Даны значения полярного радиуса r_0 и r_1 , а также скорость v_0 . Требуется найти траекторию, двигаясь по которой, начиная от точки с полярным радиусом r_0 , достигается полярный радиус r_1 с заданной радиальной скоростью \dot{r}_1 .

Решение этой задачи можно получить методом обращения времени. Пусть задача решена, и t_1 — момент достижения радиуса r_1 . Введем независимую переменную $\tau = t_1 - t$. В обращенном времени τ радиус r_1 соответствует моменту $\tau = 0$ с заданной начальной радиальной составляющей скорости $r'_0 = -\dot{r}_1$. Полярный радиус r_0 становится конечным. Теперь можно воспользоваться результатами задачи 6.2, сделав подстановку

$$x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_1}, \quad x_1 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}.$$

Решение задачи существует, если для соответствующего случая расположения чисел x_0 и x_1 на оси Ox рис. 5.1 заданная величина r'_0 попадает в область решения задачи 6.2. Тогда r'_0 выделяет на рис. 5.1 единственную кривую $\{y(\tau), x(\tau)\}$. Для нее будем иметь

$$y_0 = \frac{r'_0}{v_0} = -\frac{\dot{r}_1}{v_0}, \quad a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Точки кривой, для которых $x = x_1$, доставляют решение задачи:

$$|y_1| = \sqrt{1 - \frac{f^2(x_1)}{a^2}}, \quad r'_1 = \pm v_0 |y_1|.$$

Знак решения выбирается в соответствии с ветвью кривой фазовой диаграммы, доставляющей решение. После этого окончательно будем иметь $\dot{r}_0 = -r'_1$.

Отметим, что здесь величина t_1 носит вспомогательный характер и введена лишь для удобства рассуждений. Ее конкретное значение в процессе решения никак не участвует. Отметим также, что задача 6.3 может иметь не более двух решений.

6.4. Расчет угловой дальности. Предположим, что заданы начальное r_0 , конечное r_1 значения полярного радиуса, величина скорости v_0 и начальная радиальная составляющая скорости \dot{r}_0 , причем $|\dot{r}_0| \leq v_0$. Обозначим ϑ_0, ϑ_1 соответственно начальное и конечное значение угловой координаты ϑ . Требуется найти угловую дальность $\theta = \vartheta_1 - \vartheta_0$ при движении с заданной величиной скорости v_0 от начальной точки с радиусом r_0 к конечной точке с радиусом r_1 .

Сначала заметим, что если $|\dot{r}_0| = v_0$, то движение происходит вдоль луча, выходящего из притягивающего центра, и тогда $\theta = 0$. В дальнейшем будем считать, что $|\dot{r}_0| < v_0$, и найдем величины

$$x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}, \quad x_1 = \frac{\mu}{v_0^2 r_1}, \quad y_0 = \frac{\dot{r}_0}{v_0}, \quad a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

6.4.1: $ae < 1, x_0 \leq x_\pi, x_1 \leq x_\pi$. Пусть сначала $x_1 < x_0 \leq x_\pi, y_0 \leq 0$. В соответствии с рис. 5.1 находим, что в данном случае общего положения отрезок фазовой кривой, соответствующей движению с указанным параметром a , состоит из двух участков: движение от начальной точки (x_0, y_0) по фазовой кривой до точки $(x_\pi, 0)$ (радиус уменьшается) и затем движение от точки $(x_\pi, 0)$ при $y > 0$ до точки с заданным значением абсциссы x_1 (радиус увеличивается). Значение радиуса в перицентре орбиты выражается тогда формулой $r_\pi = \mu/(v_0^2 x_\pi)$. Обозначим

$$\Theta_\pi(x, a) = \int_x^{x_\pi} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}, \quad x \leq x_\pi. \quad (6.1)$$

Угловая дальность от начальной до конечной точки движения вычисляется следующим образом

$$\theta = \Theta_\pi(x_0, a) + \Theta_\pi(x_1, a). \quad (6.2)$$

Если $x_1 = x_0, y_0 \leq 0$ то справедливо равенство:

$$\theta = \begin{cases} 0, & y_1 = y_0; \\ 2\Theta_\pi(x_0, a), & y_1 = -y_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Рассмотрим вариант $x_1 \leq x_0, y_0 > 0$. Тогда полярный радиус при движении монотонно возрастает. Следовательно будет $y_1 > 0$, и

$$\theta = \Theta_\pi(x_1, a) - \Theta_\pi(x_0, a). \quad (6.4)$$

Заметим, что сочетание параметров $(x_1 < x_0) \& (y_1 < 0)$ нереализуемо.

Далее, пусть $x_0 < x_1 \leq x_\pi, y_0 < 0$. Тогда

$$\theta = \begin{cases} \Theta_\pi(x_0, a) - \Theta_\pi(x_1, a), & y_1 \leq 0; \\ \Theta_\pi(x_0, a) + \Theta_\pi(x_1, a), & y_1 > 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Если $(x_0 < x_1 \leq x_\pi) \& (y_0 > 0)$ либо $x_1 > x_\pi$, то решение задачи отсутствует. Объединив формулы (6.2–6.5), получим окончательно с указанием области существования решения

$$\begin{aligned} \theta &= \Theta_\pi(x_1, a) \operatorname{sign} y_1 - \Theta_\pi(x_0, a) \operatorname{sign} y_0, \\ (x_1 \leq x_0 \leq x_\pi) \&(y_1 \geq 0), \quad (x_0 \leq x_1 \leq x_\pi) \&(y_0 \leq 0). \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.4.2: $ae < 1$, $x_0 \geq x_\alpha$, $x_1 \geq x_\alpha$. Обозначим

$$\Theta_\alpha(x, a) = \int_{x_\alpha}^x \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}, \quad x \geq x_\alpha. \quad (6.7)$$

Пусть сначала $x_\alpha \leq x_0 < x_1$. При таком сочетании параметров должно быть $y_1 < 0$ (см. рис.5.1). Поэтому

$$\theta = \begin{cases} \Theta_\alpha(x_1, a) + \Theta_\alpha(x_0, a), & y_0 \geq 0; \\ \Theta_\alpha(x_1, a) - \Theta_\alpha(x_0, a), & y_0 < 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Если $x_1 = x_0$, то тогда

$$\theta = \begin{cases} 0, & y_1 = y_0; \\ 2\Theta_\alpha(x_0, a), & y_1 = -y_0 < 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

При $x_\alpha \leq x_1 < x_0$ получим, что решение существует лишь при $y_0 \geq 0$, и

$$\theta = \begin{cases} \Theta_\alpha(x_0, a) - \Theta_\alpha(x_1, a), & y_1 \geq 0; \\ \Theta_\alpha(x_0, a) + \Theta_\alpha(x_1, a), & y_1 < 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Объединив формулы (6.8–6.10), получим с учетом области существования решения

$$\begin{aligned} \theta &= \Theta_\alpha(x_0, a) \operatorname{sign} y_0 - \Theta_\alpha(x_1, a) \operatorname{sign} y_1, \\ (x_\alpha \leq x_0 \leq x_1) \&(y_1 \leq 0), \quad (x_\alpha \leq x_1 \leq x_0) \&(y_0 \geq 0). \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.4.3: $ae = 1$, $x_0 < 1$, $x_1 < 1$. Изображающая точка на рис. 5.1 может перемещаться только по сепаратрисе. Рассмотрим функцию

$$\Theta(x, a) = \int_0^x \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}. \quad (6.12)$$

Если $ae = 1$, то $\Theta(x, a) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1$. С учетом области существования решения получим

$$\begin{aligned} \theta &= [\Theta(x_0, a) - \Theta(x_1, a)] \operatorname{sign} y_0, \quad a = e^{-1}, \\ (x_1 \leq x_0 < 1) \&(y_0 > 0), \quad (x_0 \leq x_1 < 1) \&(y_0 < 0). \end{aligned} \quad (6.13)$$

6.4.4: $ae = 1$, $x_0 > 1$, $x_1 > 1$. Как и в случае 6.4.3, изображающая точка перемещается только по сепаратрисе. Здесь следует применить функцию

$$\Theta_\infty(x, a) = \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}. \quad (6.14)$$

Несмотря на то, что в правой части стоит несобственный интеграл, эта функция для любого $x \neq 1$ принимает конечное значение. При этом $\Theta_\infty(x, a) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1$. С учетом области существования решения, найдем

$$\begin{aligned} \theta &= [\Theta_\infty(x_1, a) - \Theta_\infty(x_0, a)] \operatorname{sign} y_0, \quad a = e^{-1}, \\ (1 < x_1 \leq x_0) \&(y_0 > 0), \quad (1 < x_0 \leq x_1) \&(y_0 < 0). \end{aligned} \quad (6.15)$$

6.4.5: $ae > 1$. В этом случае движение изображающей точки вдоль фазовой кривой происходит без каких-либо особенностей, и можно применить любую из функций $\Theta(x, a)$, $\Theta_\infty(x, a)$, которые связаны очевидным соотношением

$$\Theta(x, a) + \Theta_\infty(x, a) = \Theta(\infty, a) = \Theta_\infty(0, a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}.$$

С учетом области существования решения справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} \theta &= [\Theta(x_0, a) - \Theta(x_1, a)] \operatorname{sign} y_0 = [\Theta_\infty(x_1, a) - \Theta_\infty(x_0, a)] \operatorname{sign} y_0, \\ (x_1 \leq x_0) \&(y_0 > 0), \quad (x_0 \leq x_1) \&(y_0 < 0). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Данный случай исчерпывает решение задачи 6.4.

7. Свойства функций Θ_π , Θ_α , $\Theta(x, a)$

7.1. Сначала рассмотрим функцию Θ_π , определенную формулой (6.1). В ней x_π — наименьший корень уравнения (5.4), так что $a = x_\pi e^{-x_\pi}$. Изучим поведение функции $\Theta_\pi(x_\pi)$ в малой окрестности точки x . Пусть $x = x_\pi - y$, $y \geq 0$. Тогда из (6.1) получим

$$\Theta_\pi = \frac{1}{x_\pi} \int_0^y \frac{e^y dy}{\sqrt{1 - (1 - y/x_\pi)^2 e^{2y}}}. \quad (7.1)$$

Примем, что $y \ll 1$, и удержим в числителе и подкоренном выражении знаменателя лишь члены, линейные по y . После интегрирования и перехода к исходной переменной x найдем

$$\Theta_\pi \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_\pi(1 - x_\pi)}} \left[\sqrt{x_\pi - x} + \frac{1}{3}(x_\pi - x)^{3/2} \right]. \quad (7.2)$$

Отсюда ясно, что при фиксированном значении x функция $\Theta_\pi(x_\pi)$ в точке $x_\pi = x$ обращается в нуль и имеет вертикальную касательную.

Устремим x к нулю. Предел функции (7.2) имеет вид

$$\Theta_\pi^* = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1 - x_\pi)}} \left[1 + \frac{x_\pi}{3} \right].$$

В точке $x_\pi = 0$ получим $\Theta_\pi^* = \sqrt{2}$ и $d\Theta_\pi^*/dx_\pi = \sqrt{2}/3$.

Предположим теперь, что $x_\pi \rightarrow 1$. Обозначим

$$\beta(x, a) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}.$$

При фиксированном значении x мы можем задать β и вычислить соответствующее ему значение параметра a по формуле

$$a = e^{-x} \sqrt{x^2 + \beta^{-2}}.$$

Если β меняется в пределах

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2} - x^2 e^{-2x}}} \leq \beta < +\infty,$$

то значение параметра a лежит в диапазоне $x e^{-x} < a \leq e^{-1}$, левая часть которого соответствует пределу при $\beta \rightarrow +\infty$.

Пусть теперь задан сегмент $I = [x, x_1]$, причем $x < x_1 < 1$. Выберем

$$\beta(x_1) = \frac{e^{-x_1}}{\sqrt{e^{-2} - x_1^2 e^{-2x_1}}} + \varepsilon_1.$$

Назначим ε_1 так, чтобы при

$$a = e^{-x_1} \sqrt{x_1^2 + \beta^{-2}(x_1)} \tag{7.3}$$

было выполнено

$$\left| \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2} - x^2 e^{-2x}}} - \beta(x, a) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

Заметим, что при таком выборе $\beta(x_1)$ будет $x_\pi > x_1$. Действительно, согласно (7.3) найдем

$$a = x_\pi e^{-x_\pi} = e^{-x_1} \sqrt{x_1^2 + \beta^{-2}(x_1)} \quad \rightarrow \quad e^{-x_1} x_1 < e^{-x_\pi} x_\pi.$$

Но в рассматриваемом диапазоне функция $f(x)$ монотонно возрастает.

Теперь получим

$$\Theta_\pi > \int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}.$$

С другой стороны

$$\int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}} = \int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2} - x^2 e^{-2x}}} + \int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}} - \int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2} - x^2 e^{-2x}}}.$$

В силу выбора ε_1 справедлива оценка

$$\left| \int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}} - \int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2} - x^2 e^{-2x}}} \right| < (x_1 - x)\varepsilon.$$

Кроме того, при $x_1 \rightarrow 1$ будем иметь

$$\int_x^{x_1} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2} - x^2 e^{-2x}}} \rightarrow +\infty,$$

что соответствует движению по сепаратрисе. Поэтому при фиксированном x функция $\Theta_\pi(x, x_\pi)$ имеет вертикальную асимптоту $x_\pi = 1$ и стремится к $+\infty$, когда $x_\pi \rightarrow 1 - 0$.

На рис. 7.1 в области $0 < x_\pi < 1$ представлены зависимости $\Theta_\pi(x, x_\pi)$, полученные численно. Параметром здесь служит x , а аргументом x_π . Значение x для отдельного графика соответствует точке пересечения графика с осью абсцисс.

7.2. Поведение функции $\Theta_\alpha(x_\alpha)$, определенной формулой (6.7), во многом аналогично поведению функции Θ_π . Аналитическое исследование его можно провести сходным методом. На рис. 7.1 в области $x_\alpha > 1$ показано семейство функций $\Theta_\alpha(x, x_\alpha)$, найденное численно. Параметром семейства служит x . Значение x соответствует пересечению графика с осью абсцисс.

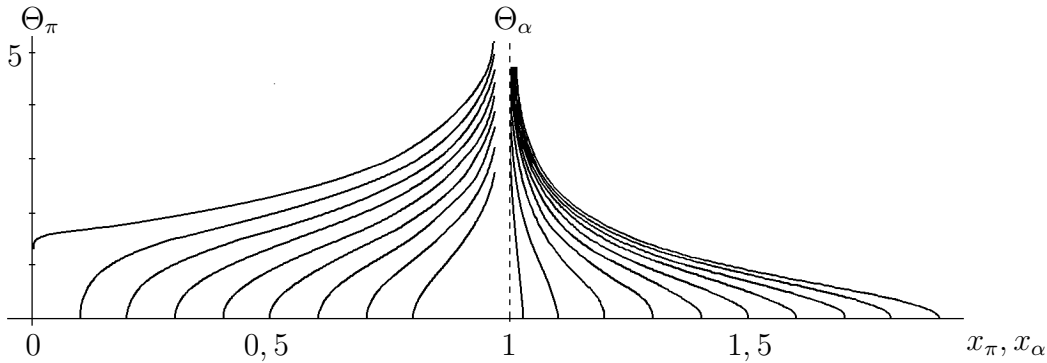


Рис. 7.1. Функции Θ_π и Θ_α .

7.3. Рассмотренные выше функции Θ_α и Θ_π удобны для расчета дальности в случае $a < e^{-1}$. При $a = e^{-1}$ следует воспользоваться в области $x < 1$ функцией $\Theta(x, a)$, определенной формулой (6.12), а в области $x > 1$ — функцией $\Theta_\infty(x, a)$, определенной формулой (6.14). Обе функции переменной x положительны и имеют вертикальную асимптоту при $x \rightarrow 1$.

7.4. При $a > e^{-1}$ любая из функций $\Theta(x, a)$, $\Theta_\infty(x, a)$ определена во всей области изменения x и потому пригодна для вычисления угловой дальности. На рис. 7.2 показано семейство функций $\Theta(x, a)$, где аргументом служит переменная a , а параметром — x . По физическому смыслу эта

функция выражает угловую дальность между бесконечно удаленной точкой траектории и точкой с радиусом, соответствующим данному значению x . Видим, что при увеличении a эта дальность монотонно убывает. При $x \geq 1$ и $a \rightarrow e^{-1}$ она неограниченно возрастает. Кривая, соответствующая $x = \infty$, ограничивает область изменения функции $\Theta(x, a)$. Значения функции $\Theta_\infty(x, a)$ могут быть получены как разность

$$\Theta_\infty(x, a) = \Theta(\infty, a) - \Theta(x, a).$$

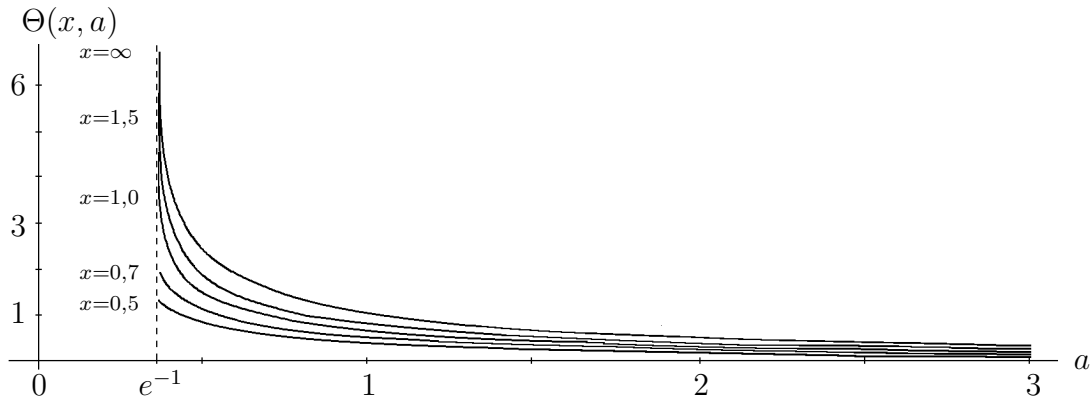


Рис. 7.2. Функции $\Theta(x, a)$.

Заключение

В работе изучено движение материальной точки с постоянной величиной скорости в центральном ньютоновом поле тяготения. Требование постоянства модуля скорости представляет собой неголономную нелинейную по скоростям дифференциальную связь. Задача решена двумя способами: посредством метода множителей Лагранжа, а также с помощью общих уравнений динамики, полученных в [1] для задач с нелинейными по скоростям неголономными связями. Показано, что задача имеет исчерпывающий набор аналитических первых интегралов.

Исследованы маневренные возможности точки в зависимости от величины ее скорости. Показано, что каждому значению скорости соответствует круговая орбита, отделяющая множество траекторий, имеющих бесконечно удаленную точку, от множества траекторий, содержащихся целиком внутри указанной орбиты.

Семейство траекторий выдерживает группу вращений вокруг притягивающего центра. Существуют траектории, навивающиеся с бесконечным числом оборотов на круговую орбиту как изнутри, так и снаружи орбиты относительно притягивающего центра. Кроме того существуют траектории, имеющие любое конечное число оборотов вокруг притягивающего

центра. Если такая орбита приходит из бесконечности, то совершив указанное число оборотов, она снова удаляется в бесконечность, не достигнув круговой орбиты. Аналогично, траектория, приходящая со стороны притягивающего центра, снова возвращается к притягивающему центру, не достигнув круговой орбиты.

Получены в виде квадратур формулы для расчета времени движения по траектории и угловой дальности полета. Качественно исследованы свойства несобственных интегралов, выражающих угловую дальность. Указанные свойства проиллюстрированы результатами численного исследования.

Список литературы

1. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн.—М.: Изд-во МГУ, 2000.—719 с. ISBN 5-211-04244-1
2. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. Учебное пособие для вузов.—М.: "Высшая школа", 1970.—272 с.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.—М.: Издательство АН СССР, 1962.—535 с.
4. Голубев Ю.Ф. Механические системы с сервосвязями.—М.: Наука. ПММ, т. 65 вып.2, 2001.—с. 211-224.