В.Т.Жуков, О.Б.Феодоритова

О ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИИ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ордена Ленина Институт Прикладной Математики
им.М.В.Келдыша
Российской Академии Наук

В.Т.Жуков, О.Б.Феодоритова

О ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИИ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Москва,2001

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного Фонда CRDF (проект RM2-2243)

УДК.519.6

В.Т.Жуков, О.Б.Феодоритова

О предобуславливании стабилизированных конечно-элементных схем высокого порядка.

АННОТАЦИЯ

Изучены некоторые подходы к предобуславливанию конечно-элементных стабилизированных дискретизаций (SUPG/GLS) высокого порядка. Представлены результаты численных экспериментов. В качестве модели выбрано уравнение конвекции-диффузии. Рассмотрены три типа предкондиционеров при предположении, что конечно-элементная схема, построенная на линейных элементах, может быть решена эффективно.

Стр. 19, табл. 18, библ. назв. 5.

O.B.Feodoritova, V.T.Zhukov.

On preconditioning stabilized high order discretization.

ABSTRACT

Some approaches for construction of preconditioners are analyzed, that may be used to improve efficiency of iterative methods for linear systems arising from high order finite element discretization.

The results of numerical investigations of preconditioning techniques for stabilized high order finite element discretization (SUPG/GLS) are presented. As a model convection-diffusion equation is used. It is considered three types of preconditioners under assumption that linear element scheme can be efficiently solved.

1 Введение

В данной работе рассматриваются способы построения эффективных алгоритмов решения стабилизированных схем МКЭ высокого порядка, получаемых при дискретизации дифференциальных уравнений. В качестве конкретного примера взято уравнение конвекции-диффузии. Нас будут интересовать сингулярно-возмущенные задачи, в которых коэффициент диффузии мал по сравнению с модулем вектора конвективной скорости. В качестве дискретных аналогов используются hp-конечно-элементные аппроксимации SUPG/GLS, которые широко применяются при решении задач динамики вязкой жидкости. Хорошо известно, что системы линейных уравнений, возникающие при дискретизации, плохо обусловлены и обусловленность ухудшается с ростом числа степеней свободы, т.е., с уменьшением характерного размера h ячеек сетки и увеличением степени полиномов p, используемых для представления решения в ячейках сетки. Плохая обусловленность затрудняет получение достаточно точного решения и замедляет сходимость итерационных процессов.

По этой причине предобуславливание дискретной задачи является существенным требованием для эффективного применения, например, таких методов, как методы сопряженных направлений, обобщенный метод минимальных невязок.

Известно, что возможности стандартных предобуславливателей, основанных на приближенной факторизации матрицы A системы уравнений, ограничены, поэтому для систем уравнений hp-МКЭ на неструктурных сетках с большим числом неизвестных актуальной является разработка специальных алгоритмов решения.

Цель данной работы состоит в построении и изучении предобусловленных hp-схем, на неструктурных треугольных сетках, для которых число обусловленности $\mu = \|A\|\|A^{-1}\|$ равномерно ограничено по h и p (или является их слабо меняющейся функцией).

При построении предобуславливателей для схем высокого порядка ($p > 1$) мы считаем, что на заданной сетке схема с линейными элементами ($p = 1$) может быть решена эффективно. Это предположение разумно, так как если используются элементы высокого порядка, то сетка может быть более грубой, чем в случае расчета с помощью схемы первого порядка ($p = 1$).

Решение системы линейных уравнений, соответствующей аппроксима ции линейными элементами на такой грубой сетке, может быть получено относительно легко либо прямым методом, либо итерационным методом со стандартным предобуславливателем, либо многосеточным методом.

На практике указанное предположение выполняется уже при не–больших степенях полиномов $p = 2, 3$.

2 Постановка задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ с границей $\partial\Omega$ рассматривается модельная краевая задача для линейного уравнения конвекции-диффузии: найти $u(x, y)$ такое, что

$$\mathbf{L}u \equiv -\nabla \cdot (\varepsilon\ \nabla u) + p\nabla u + au = f, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \tag{2.2}$$

Здесь вязкость $\varepsilon(x, y)$, вектор конвективной скорости

$p = (p_1(x, y), p_2(x, y))$ а также $a(x, y)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ заданные функции, $\varepsilon(x, y) > 0$, $a(x, y) \geq 0$.

Дискретизация системы (2.1) – (2.2) основана на стабилизиронных методах конечных элементов SUPG/GLS. В качестве проекционных рассматриваются семейства $V_h \subset H_0^1$ конечно-элементных подпространств: подпространство V_h состоит из кусочно-полиноми–альных функций степени $k \geq 1$ (здесь и далее степень полинома обозначается через k) на триангуляции $T_h \in T$, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Дискретная задача формулируется следующим образом: найти $u_h \in V_h$ такое, что

$$B(u_h, v_h) = (f, v_h), \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{2.3}$$

Билинейная форма $B(.,.)$ имеет вид:

$$B(u, v) = (\varepsilon\nabla u, \nabla v) + (p\nabla u + au, v) + \sum_t \tau(\mathbf{L}u - f, \overline{\mathbf{L}}v)_{tri}$$

Параметр τ зависит от размера ячейки сетки, индекс (tri) указывает, что интегрирование ограничено ячейкой, t задает номер ячейки и, наконец, суммирование проводится по всем ячейкам сетки. Стабилизирующий оператор $\overline{\mathbf{L}}$ определяет тип метода:

$\bar{\mathbf{L}}v = \mathbf{L}v$ – Galerkin/least squares (GLS),

$\bar{\mathbf{L}}v = p\nabla v + av$ – streamline upwind/Petrov – Galerkin (SUPG).

В результате получается линейная система

$$Au = b \tag{2.4}$$

размера $N = dimV_h$, где u обозначает вектор неизвестных u_h в некотором базисе V_h, A - матрица жесткости.

Степень полиномов k, которая используется для построения конечно-элементного пространства V_h будем называть порядком дискретной схемы (2.3). Ограничимся случаем постоянной степени полиномов по всем ячейкам (треугольникам) сетки T_h.

Сложности решения таких систем известны. Они усиливаются с увеличением размера сетки.

3 Выбор базиса в V_h

Пусть Φ_1 и Φ_2 представляют два различных базиса конечно-элементного пространства V_h $(dimV_h = N)$:

$$\Phi_1 = \{\varphi_n(x), n = 1, ..., N\},$$
$$\Phi_2 = \{\bar{\varphi_n}(x), n = 1, ..., N\}, \quad x \in \mathbf{R^2}.$$

u и $\bar{u}$ обозначает вектор неизвестных $u_n \in V_h$ в базисе Φ_1 и Φ_2 соответственно.

$$u = (u_1, ..., u_N)^\top,$$
$$\bar{u} = (\bar{u_1}, ..., \bar{u_N})^\top,$$
$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \bar{u_i}\, \bar{\varphi_i}. \tag{3.1}$$

A и $\bar{A}$ матрицы жесткости билинейной формы (2.3) в базисах Φ_1 и Φ_2 :

$$a_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j), \qquad \bar{a_{ij}} = B(\bar{\varphi_i}, \bar{\varphi_j}).$$

Тогда $\bar{A} = C^\top AC$, где C матрица перехода от базиса Φ_1 к базису Φ_2, т.е., $\bar{\varphi_k} = \sum\limits_{j=1}^{N} c_{jk}\varphi_j, \quad k = 1, ..., N$, или, что эквивалентно, C - матрица перехода от вектора $\bar{u}$ к вектору u : $u = C\bar{u}$. Выбирая соответствующий базис в V_h, билинейная форма представляется матрицей жесткости, которая может быть эффективно предобусловлена. Традиционным является базис, построенный из полиномов Лагранжа. Будем далее называть его "узловым" базисом. Альтернативным является иерархический базис, в котором стандартный линейный конечно-элементный базис последовательно дополняется полиномами нарастающей степени. Далее этот базис будем для краткости именовать модальным.

В данном препринте ограничимся этими двумя случаями, хотя интересно было бы проанализировать ортогональный и, так называемый, низко-энергетический базисы.

4 Предобуславливание линейных систем, возникающих при конечно-элементной дискретизации высокого порядка

Система (2.4) плохо обусловлена и ее число обусловленности $\mu = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ возрастает с ростом порядка схемы k и уменьшением сеточного размера h. Построение эффективного предобуславливателя для решения такой системы важная тема численного анализа.

Итак, в каждой ячейке сетки приближенное решение u_h линейно комбинируется из базисных функций $\{\varphi_n(x), n = 1, ..., 3k\}$

$$u_h = \sum_{i=1}^{3k} u_i \varphi_i,$$

где $k > 0$ порядок аппроксимации, $u_i, i = 1, ..., 3k$ вектор неизвестных. Каждой коэффициент ассоциирован с определенной точкой треугольника. При $k = 1$ эти точки совпадают с вершинами треугольника. В случае $k > 1$ появляются дополнительные $(k-1)$ точка на каждой стороне треугольника. Базис порядка $k > 2$ должен к тому же содержать точки, лежащие внутри треугольника. Эти "внутренние" точки могут быть исключены на этапе дискретизации с помощью процедуры, известной в методе конечных элементов как "static condensation".

Таким образом, мы имеем две группы неизвестных: первая связана с узлами триангуляции (вершинами треугольников) и будет далее именоваться узлами грубой (coarse) сетки u_c. Остальные узлы, сопоставленные дополнительным точкам на ребрах, будем называть узлами подробной (fine) сетки u_f.

4.1 hp-предобуславливание ("Schwab")

Подход, рассмотренный в этом подразделе, опирается на работу [1], в которой автор на примере 2D уравнения Пуассона рассматривает hp-дискретизацию на произвольных сетках регулярной формы и самого общего распределения степени k.

Работа представляет оптимальный предобуславливатель при условии, что линейная система, возникающая при аппроксимации в ячейках линейными элементами может быть решена эффективно.

В двумерном случае показано, что выбор модального базиса позволяет построить блочно-диагональный предобуславливатель для матрицы A так, что число обусловленности предобусловленной системы равномерно ограничено по h и растет логарифмически с ростом порядка k используемых полиномов.

Этот предобуславливатель устроен следующим образом. Обозначим через N_c число узлов грубой сетки, т.е. число внутренних узлов триангуляции без учета узлов Дирихле, а через N_{ed} число внутренних ребер.

Предобуславливатель M состоит из $N_c \times N_c$ блока, соответствующего внутренним узлам триангуляции и N_{ed} диагональных блоков размером $(k-1) \times (k-1)$ каждый (в нашем случае размеры блоков постоянны в результате принятой постоянной по задаче степени полиномов). Эти блоки соответствуют "реберным" модам.

Мы построили такой предобуславливатель и численно проверили, что он действительно является оптимальным для уравнения Лапласа, но не дает положительных результатов в случае доминирования конвекции. Этот факт имеет объяснение: связью отдельных блоков матрицы A в этом случае нельзя пренебречь.

В литературе [3] приведен аналогичный негативный результат в трехмерном случае даже для уравнения Лапласа.

4.2 Точное исключение неизвестных

Перенумерум вектор неизвестных присвоив начальные индексы f-узлам u_f, а следующие c-узлам u_c. Тогда линейная система (2.4) будет иметь блочную форму:

$$Au = \begin{pmatrix} A_{ff} & A_{fc} \\ A_{cf} & A_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_f \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_f \\ b_c \end{pmatrix} = b$$

Применим LU-разложение

$$A = LU = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{cf}\, A_{ff}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ff} & A_{cf} \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

где

$$S = A_{cc} - A_{cf}\; A_{ff}^{-1}\; A_{fc}$$

Shur Complement блока A_{cc}.

Таким образом, алгоритм решения системы (2.4) будет состоять из двух шагов.

1. *Прямой ход:* решаем линейную систему с нижне-треугольной матрицей L

$$L \begin{pmatrix} w_f \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_f \\ b_c \end{pmatrix}$$

В результате имеем: $w_f = b_f$ и $w_c = b_c - A_{cf}\ A_{ff}^{-1}\ b_f$

2. *Обратный ход:* решаем линейную систему с верхне-треугольной матрицей U

$$U \begin{pmatrix} u_f \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_f \\ w_c \end{pmatrix}$$

Этот шаг разделяется на две части:

(a) Решить $Su_c = w_c$

(b) Решить $A_{ff}u_f = b_f - A_{fc}u_c$

Детали практического применения этого подхода здесь не рассматриваются. Их можно найти, например, в [4]. Нас же будет интересовать только вопрос предобуславливания блоков S и A_{ff}.

Для предобуславливания S было выбрано два варианта в зависимости от используемого базиса.

- Узловой базис. Обозначим через A_{lin} стабилизированную конечно-элементную дискретизацию порядка $k = 1$; соответствующее конечно-элементное пространство состоит из кусочно-линейных полиномов. Именно этот оператор $M = A_{lin}$ используется для предобуславливания S. Сам же оператор M может быть обращен, например, с помощью ILU-факторизации.

- Модальный базис. В этом случае для предобуславливания S используется блок A_{cc}.

В роли предобуславливателя для A_{ff} были выбраны и проанализированы приближенный обратный оператор (SPAI) в форме, представленной M. Grote и T. Huckle [2] и ILU- факторизация.

4.3 Приближенное исключение неизвестных

Мы представляем специальный вариант многосеточного метода. Он может быть интерпретирован как приближенное исключение неизвестных для дискретизаций высокого порядка и использован и для решения систем уравнений, и для предобуславливания.

Как и в случае точного исключения неизвестных полный вектор неизвестных разделяется на две группы (u_c, u_f). Соответственно система уравнений (2.4) распадается на две части. К первой принадлежат уравнения, соответствующие c-узлам, которые имеют шаблон "звезда см. Рис.1.

Вторая часть состоит из уравнений для f-узлов с шаблоном "ромб см. Рис.2. Объединение всех треугольников, которые формируют "звезду" будем называть макро-элементом. Нам понадобится специальная классификация узлов, входящих в состав макро-элемента. А именно, введем в рассмотрение c, e, r-узлы (см. Рис.1): c по прежнему обозначает узел триангуляции, r определяет точки, лежащие строго внутри макроэлемента и e задает точки, расположенные на его границе; r и e точки являются f-узлами сетки.

Алгоритм основан на исключении f-компонент решения и построении уравнений для c-сетки. Это исключение выполняется приближенно и может быть интерпретировано как много-сеточная процедура. Один итерационный шаг этой многосеточной процедуры выглядит следующим образом:

1. По всей границе макроэлемента значения e-переменных u_e рассчитываются линейной интерполяцией с-переменных вдоль соответствующего ребра.

$$u_e^{i+1} = (u_{c,1}^{i+1} - u_{c,1}^i)w_e + (u_{c,2}^{i+1} - u_{c,2}^i)(1 - w_e) + u_e^i, \tag{4.1}$$

   где верхний индекс i задает номер итерационного шага, $u_{c,1}^i, u_{c,2}^i$ начальная и конечная с-компоненты ребра, w_e - коэффициент интерполяции. Это может быть относительное расстояние от рассматриваемого f-узла e до конечной с-точки на ребре. Кроме того, мы использовали оператор интерполяции, основанный на решении исходной задачи, для обеспечения свойства "upwinding" в операторе интерполяции (4.1).

2. r-компоненты "звезды"исключаются точно решением соответствующей линейной системы небольшой размерности, равной числу r-переменных в макроэлементе.

3. В результате выполнения этих двух шагов f-переменные исключаются из исходной системы уравнений и мы получаем уравнения только для с-переменных. Эта система решалась с помощью известного метода подпространств Крылова GMRES с ILU в качестве предобуславливателя.

4. Итерационный шаг завершается интерполяцией полученной на предыдущем этапе поправки в узлы подробной сетки. Процедура интерполяции выполняется совместно с релаксацией. В результате находится новое итерационное приближение $u = (u_c, u_f)$ уравнения (2.4).

Остановимся подробнее на процедуре релаксации. Она основана на следующем свойстве: r-компоненты одного макроэлемента являются e-компонентами другого. Поэтому после расчета r-компонент в макроэлементе эти значения используются (вместо линейной интерполяции) в качестве граничных e-значений в соседних макроэлементах.

Это напоминает альтернирующую процедуру Шварца.

Для улучшения свойств процедуры релаксации мы дополнительно проводим релаксацию по "ромбам" (обычно 2-4 дополнительные сглаживающие итерации).

Оператор интерполирования P с грубой с-сетки на подробную f-сетку описан ниже:

1. В каждом макро-элементе граничные значения, т.е. e-переменные, рассчитываются с использованием линейной интерполяции с-компонент

вдоль соответствующего ребра или берутся уже пересчитанные значения, полученные в процессе интерполяции по соседнему макро-элементу, содержащему это ребро.

2. r-компоненты в каждом макро-элементе получается из решения соответствующей локальной линейной системы.

Оператор проектирования явно не строится. Оператор A_{cc}, получаемый в результате предложенного алгоритма имеет форму RAP, где R - оператор проектирования, сопряженный оператору интерполирования P.

Развитие представленного алгоритма не завершено в настоящий момент. Необходимы специальные усилия для обеспечения надежности алгоритма. Для получения сходимости, независящей от сеточного размера, в общем случае необходимо предпринять целый ряд дополнительных усилий. Тем не менее, простые примеры, приведенные ниже, можно назвать обнадеживающими.

5 Результаты численных экспериментов

Численно проанализированы различные технологии предобуславливания для систем, возникающих при SUPG дискретизации высокого порядка. Для вычисления числа обусловленности μ использовалось SVD-разложение матрицы $M^{-1}A$, где M - предобуславливатель.

Предварим анализ предобуславливателей сравнительными таблицами числа обусловленности матрицы жесткости A в различных базисах. Напомним, что в данном препринте рассматриваются только узловой и модальный базисы. Сравнение проведено для двух случаев - оператора Лапласа и "мягкой"конвекции ($Re \approx 1$). Модальный базис, как и ожидалось, показывает лучшие характеристики в обоих случаях.

Тест No.1 описание.

- двумерное уравнение Лапласа
- граничные условия Дирихле
- $\Omega = [0,1] \times [0,1]$
- регулярная триангуляция: каждая ячейка прямоугольной $N \times N$ сетки разделена на два треугольника.

Таблица 1. Число обусловленности A.(сетка 8×8)

Степень полинома k	узловой базис	модальный базис
2	137	42
3	276	53
4	635	74

Таблица 2. Число обусловленности A.(сетка 8×8).

$$\mathbf{L}u \equiv -\nabla \cdot (\varepsilon\, \nabla u) + (p\,, \nabla u), \qquad \varepsilon = 0.1, \quad p = (1, 0),$$

Степень полинома k	узловой базис	модальный базис
2	97	30
3	195	40
4	448	58

hp-предобуславливание ("Schwab").

Анализируется предобуславливатель, представленный C.Schwab. Согласно результатам [1] рассмотрен только модальный базис. Возможности этого подхода продемонстрированы на двух тестах: первый соответствует уравнению Пуассона (теоретически обоснованный вариант), второй представляет случай доминирующей конвекции.

Тест No.1 (узловой базис, описание приведено выше).

Таблица 3. Число обусловленности A. Порядок схемы $k = 2$.

Сетка	$size(A)$	$\mu(A)$	$\mu(M_{Schwab}^{-1}A)$
4x4	49	18.0	9.6
8x8	225	46.0	13.0
16x16	961	200.0	16.0
32x32	3969	880.0	18.0

$size(A)$ - размер матрицы .

Тест No.2 описание.

- $\mathbf{L}u \equiv -\nabla \cdot (\varepsilon\, \nabla u) + (p\,, \nabla u), \qquad \varepsilon = 10^{-5}, \quad p = (1, 0),$
- граничные условия Дирихле,
- $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$,
- регулярная триангуляция: каждая ячейка прямоугольной $N \times N$ сетки разделена на два треугольника.

Таблица 4. Число обусловленности A. Порядок схемы $k = 2$.

Сетка	$size(A)$	$\mu(A)$	$\mu(M^{-1}_{Schwab}A)$
4x4	49	97.	92.
8x8	225	400.	440.
16x16	961	1200.	1600.
32x32	3969	2700.	3900.

Заключение. Как и доказано в [1] M_{Schwab} является предобуславливателем для оператора Лапласа, но не дает хороших результатов в случае конвективного преобладания. Свойства M_{Schwab} анализировались для двух случаев $k = 2$ и 3, но представлены только для $k = 2$. Повышение степени полиномов ухудшает все характеристики и этот факт не нуждается в комментариях.

Точное исключение неизвестных.

Исследованы два варианта представления решения. В каждой ячейке решение представляется полиномом степени $k > 1$. Сначала был рассмотрен узловой базис, построенный на базе полиномов Лагранжа, а затем - модальный (иерархический).

Тест No.1 (узловой базис, описание приведено выше).

Таблица 5. Число обусловленности S. $M = A_{lin}$.

		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
Сетка	$size(S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$
4x4	9	2.7	2.2	2.5	2.3	2.3	2.6
8x8	49	9.2	2.8	8.1	3.1	7.0	3.6
16x16	225	35.1	2.9	30.3	3.4	25.6	4.0
32x32	961	138.9	3.0	119.3	3.5	$56.8^{(*)}$	$4.1^{(*)}$

$^{(*)}$ Последний результат для порядка $k = 4$ был сосчитан на сетке 24×24 (размер матрицы 529×529).

Результаты, представленные в таблице показывают, что оператор $M = A_{lin}$ может рассматриваться как предобуславливатель для S в случае 2D Лапласа. Оператор же $M = A_{cc}$ не может выступать в этой роли, что видно из таблицы ниже.

Таблица 6. Число обусловленности A_{cc}.

Сетка	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
4x4	1.6	1.3	1.2
8x8	1.9	1.5	1.3
16x16	2.0	1.5	1.3

Число обусловленности A_{cc} практически не увеличивается с уменьшением сеточного размера h в отличие от числа обусловленности оператора S. Этот факт не дает нам никаких шансов использовать A_{cc} в качестве предобуславливателя для S в узловом базисе. Как будет видно позже в модальном базисе ситуация меняется.

Следующие три таблицы демонстрируют возможности SPAI в качестве предобуславливателя для A_{ff}. Параметр ϵ - желаемая точность в процессе минимизации Фробениусовой нормы

$$min\|I - M_{SPAI}A_{ff}\|_F < \epsilon$$

Параметр ρ информирует о количестве вычислительной работы: ρ равно отношению размера шаблона (т.е., числу ненулевых элементов) матрицы $M = M_{SPAI}$ к размеру шаблона A_{ff}:

$$\rho = \frac{nnz(M)}{nnz(A_{ff})}.$$

Иногда дополнительно приведена характеристика ρ_{dns} равная отношению размера шаблона $M = M_{SPAI}$ к размеру шаблону A_{ff}.

Таблица 7. Число обусловленности A_{ff}.
Порядок схемы $k = 2$.

Сетка	$size(A_{ff})$	$\mu(A_{ff})$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$ $\epsilon = 0.2$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$ $\epsilon = 0.1$
4x4	40	4.8	2.1, $\rho = 0.8$	1.4, $\rho = 1.6$
8x8	176	5.5	2.4, $\rho = 0.8$	1.5, $\rho = 1.7$
16x16	736	5.8	2.5, $\rho = 0.7$	1.5, $\rho = 1.7$
32x32	3008	5.8	2.6, $\rho = 0.7$	1.5, ρ=1.7, ρ_{dns}=3.e-3

Таблица 8. Число обусловленности A_{ff}.
Порядок схемы $k = 3$.

Сетка	$size(A_{ff})$	$\mu(A_{ff})$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$ $\epsilon = 0.1$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$ $\epsilon = 0.03$
4x4	80	20.1	2.0, $\rho = 1.9$	1.4, $\rho = 3.8$
8x8	352	25.7	2.4, $\rho = 2.2$	1.4, $\rho = 5.2$
16x16	1472	27.6	2.5, $\rho = 2.4$	1.4, $\rho = 5.9$

Таблица 9. Число обусловленности A_{ff}.
Порядок схемы $k = 4$.

Сетка	$size(A_{ff})$	$\mu(A_{ff})$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$ $\epsilon = 0.03$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$ $\epsilon = 0.01$
4x4	120	50.0	2.2, ρ =4.0	1.40, ρ =5.7, ρ_{dns}=0.6
8x8	528	66.6	2.7, ρ =5.4	1.65, ρ =9.0, ρ_{dns}=0.2
16x16	2208	72.4	4.0 , ρ =6.0	1.64, ρ =11., ρ_{dns}=0.1

Характеристики M_{SPAI} практически не изменяются по отношению к сеточному размеру h при неизменном порядке схемы k, но с увеличением степени полиномов k необходимо уменьшать параметр ϵ для сохранения предобуславливающих свойств SPAI-оператора, что в свою очередь сразу же приводит к увеличению вычислительной работы.

Итак, далее для узлового базиса будем рассматривать только оператор $M = A_{lin}$. Нас будет интерессовать его поведение в случае доминирования конвективного процесса.

Тест No.2 (узловой базис, описание приведено выше)

Таблица 10. Число обусловленности S.
$M = A_{lin}$.

		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
Сетка	$size(S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$
4x4	9	5.6	1.3	5.5	1.2	5.4	1.3
8x8	49	20.8	2.5	19.4	1.5	18.3	2.1
16x16	225	61.1	5.1	51.0	2.2	42.1	3.8

Приведенные в таблице результаты позволяют рассматривать оператор $M = A_{lin}$ как предобуславливатель для S и в конвективно-доминант–ном случае. Речь, однако, идет о случае "хороших" сеток. Безусловно необходимы дополнительные исследования в случае сеток с большим числом анизотропии и более сложных тестов (к которым относятся, например, циркуляционные течения, течения, соответствующие разрывным коэффициентам и т.д.).

Блок A_{ff} в случае преобладающего конвективного процесса ведет себя иначе, чем в случае двумерного Лапласа. Число обусловленности матрицы A_{ff} увеличивается при уменьшении шага сеточного "шага" h и увеличении степени полинома k. Оператор $SPAI$ демонстрирует в этом случае следующие свойства.

Таблица 11. Число обусловленности A_{ff}.
Порядок схемы $k = 2$.

Сетка	$size(A_{ff})$	$\mu(A_{ff})$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$
4x4	40	22.9	1.7, ρ =2.0, ρ_{dns} =0.2, ϵ =0.1
8x8	176	73.7	1.4, ρ =6.3, ρ_{dns} =0.2, ϵ =0.006
16x16	736	187.7	1.4, ρ =11.5, ρ_{dns} =0.07, ϵ =0.003

Таблица 12. Число обусловленности A_{ff}.
Порядок схемы $k = 3$.

Сетка	$size(A_{ff})$	$\mu(A_{ff})$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$
4x4	80	50.6	1.3, ρ =2.6, ρ_{dns} =0.3, ϵ =0.01
8x8	352	148.	1.3, ρ =6.5, ρ_{dns} =0.2, ϵ =0.003
16x16	1472	354.	1.3, ρ =13.0, ρ_{dns} =0.079, ϵ =0.001

Таблица 13. Число обусловленности A_{ff}.
Порядок схемы $k = 4$.

Сетка	$size(A_{ff})$	$\mu(A_{ff})$	$\mu(M_{SPAI}A_{ff})$
4x4	120	125.2	1.3, ρ =3.2, ρ_{dns} =0.3, ϵ =0.003
8x8	528	365.9	1.3, ρ =7.4, ρ_{dns} =0.2, ϵ =0.001
16x16	2208	877.5	1.5, ρ =16.5, ρ_{dns} =0.1, ϵ =0.0003

Для сохранения числа обусловленности $M_{SPAI}\ A_{ff}$ на одном и том же уровне, независящем от размера сетки и порядка схемы, мы вынуждены уменьшать параметр ϵ, т.е. увеличивать размер шаблона M_{SPAI}. Более предпочтителен в роли предобуславливателя для A_{ff} ILU подход.

Table 14. Число обусловленности $M_{ILU}^{-1}A_{ff}$.

Сетка	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
4x4	1.1	1.3	1.3
8x8	1.2	1.9	2.0
16x16	1.3	3.8	5.0

В случае модального базиса оператор $M = A_{cc}$ играет роль аналогичную оператору $M = A_{lin}$ в узловом базисе. Результаты численных экспериментов практически не отличаются.

Тест No.1. (модальный базис, описание приведено выше)

Таблица 15. Число обусловленности S.
$M = A_{cc}$.

		$k=2$		$k=3$		$k=4$	
Сетка	$size(S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$	$\mu(S)$	$\mu(M^{-1}S)$
4x4	9	2.7	2.1	2.5	2.3	2.3	2.6
8x8	49	9.2	2.7	8.1	3.1	7.0	3.6
16x16	225	35.1	2.9	30.3	3.4	25.6	4.0

Результаты экспериментов для теста 2 не приведены по причине полного их совпадения с соответствующими данными в узловом базисе.

Заключение. Операторы $M = A_{lin}$ и $M = A_{cc}$ ведут себя одинаково в двух предложенных выше тестах. Узловой базиса требует для построения предобуславливателя расчета оператора A_{lin}, в то время как для перехода в модальный базис нам необходимо построить матрицу перехода.

Приближенное исключение неизвестных.

Этот подход анализировался только для случая узлового базиса. В предложенных экспериментах была использована простейшая релаксационная процедура: фактически это блочный вариант алгоритма Гаусса-Зейделя без какой-либо специальной перенумерации.

На каждом итерационном шаге m рассчитывалась невязка

$\|b - Au_m\|_{L_2}$. Начальная невязка равнялась $\|b\|_{L_2}$, что соответствует выбору нулевого начального приближения.

Уравнения на с-сетке решались с помощью GMRES предобусловленном ILU.

Итерации продолжались до тех пор, пока относительная невязка не станет меньше указанной точности,

$$\frac{\|b - Au_m\|_{L_2}}{\|b\|_{L_2}} < 10^{-5}.$$

Средняя скорость сходимости оценивалась как

$$\left(\frac{\|b - Au_m\|_{L_2}}{\|b\|_{L_2}}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Тест No.1 (описание можно найти выше).

Таблица 16. Средняя скорость сходимости.

Сетка	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
8x8	0.27	0.27	0.27	0.28
16x16	0.32	0.35	0.40	0.43
32x32	0.38	0.42	0.49	0.53
64x64	0.38	0.45	0.52	0.59

Тест No.2 (описание можно найти выше).

Таблица 17. Средняя скоость сходимости.

Сетка	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
8x8	0.34	0.33	0.51
16x16	0.44	0.31	0.49
32x32	0.44	0.30	0.47

Тест 2 имеет пограничный слой возле границы $x = 1$. Он довольно прост и показывает постоянную скорость сходимости (приближенно 0.6 для порядков k = 2,3,4) на последовательности сеток: 8x8, 16x16, 32x32.

Нижеприведенный тест более реалистичен.

Тест No.3.

- задача Прандтля (решение Блазиуса): $\varepsilon = 10^{-5}$, p взято из точного решения;
- граничные условия Дирихле;
- рассчетная область - четырехугольник с вершинами [0.5; 0],[20.5; 0], [17.5; 0.105], [0.47; 0.03];
- регулярная триангуляция: каждая ячейка прямоугольной $N \times N$ сетки разделена на два треугольника.
- узловой базис.

Таблица 18. Средняя скорость сходимости.

Сетка	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
8x8	0.65	0.52	0.66
16x16	0.75	0.80	0.88
32x32	0.78	(*)	(*)
64x64	0.78	(*)	(*)

Знак (*) указывает случаи деградации процесса сходимости. Для этого существуют разные причины:

1. Выбор стабилизирующего параметра τ является очень важным моментом, определяющим сходимость многосеточного метода. Этот факт был установлен в работе [5].

2. Релаксационная процедура должна быть изменена (специальная нумерация, прогонка, т.д.).

Заключение. Алгоритм демонстрирует потенциальные возможности для достижения хорошей сходимости. Для конвективно доминирующего случая предложенный алгоритм показывает типичное для многосеточного метода поведение.

Список литературы

[1] C.Schwab, *P- and HP- Finite Element Methods, Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics,* Oxford University Press, 2000.

[2] M.Grote, T.Huckle, *Parallel Preconditioning with Sparse Approximate Inverses,* SIAM J.Sci.Comput., 18, 1997, pp.838-853.

[3] S.Sherwin, M.Casarin, *Low Energy Basis Preconditioning for Elliptic Substructured Solvers Based on Unstructured Spectral/hp Element Discretizations*,

[4] T.Chan, S.Go, L.Zikatanov, *Lectures Notes on Multilevel Methods for Elliptic Problems on unstructured Grids,* Lecture course "28-th CFD March,1997.

[5] A.Ramage, *A Multigrid Preconditioner for Stabilised Discretisation of Advection-Diffusion Problems,* Strathclyde Math. Reseach Report No.33, August,1998.