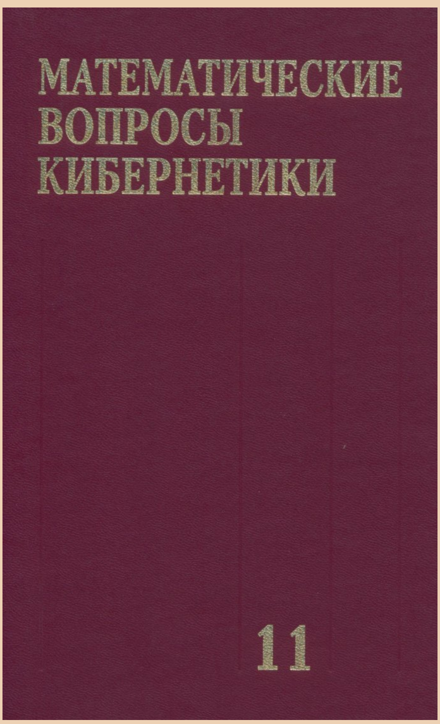

А. О. Иванов,
А. А. Тужилин

Отношение Штейнера. Современное состояние

ОТНОШЕНИЕ ШТЕЙНЕРА. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ *)

А. О. ИВАНОВ, А. А. ТУЖИЛИН

(МОСКВА)

§ 1. Введение

Настоящий обзор посвящен современным результатам, связанным с изучением отношения Штейнера метрических пространств, в частности, римановых многообразий и нормированных пространств. Понятие отношения Штейнера возникает как характеристика «хорошести» приближенных решений знаменитой проблемы Штейнера, состоящей (в самой общей постановке) в поиске кратчайшей сети, затягивающей конечный набор точек N метрического пространства. А именно, в качестве приближения рассматривается минимальное остовное дерево Δ на множестве N, и отношение Штейнера множества N определяется как отношение длины кратчайшей сети, затягивающей N, к длине дерева Δ. Отношение Штейнера метрического пространства — это точная нижняя грань отношений Штейнера всевозможных граничных множеств.

Интерес к приближенным решениям проблемы Штейнера объясняется, с одной стороны, широким спектром важных практических приложений кратчайших сетей (транспортная задача, разводка микросхем, построение филогенетических деревьев, и т. д.) и, с другой стороны, тем, что проблема Штейнера является NP-трудной (см. [13]). В реальных приложениях кратчайшие сети приходится строить для нескольких сотен, а то и тысяч, граничных точек, что делает, на данный момент, невозможным поиск точного решения. В свою очередь, поиск минимального остовного дерева — это хорошо известная и быстро решаемая задача (даже в теории графов она решается быстрее чем за кубическое время).

Отношение Штейнера представляет собой нетривиальную характеристику метрического пространства, которая, хотя и не сводится к другим известным характеристикам, однако оказывается тесно связана со многими из них, такими как число Юнга, число Хадвигера и пр. Поэтому изучение отношения Штейнера представляет не только практический, но и научный интерес.

Авторы выражают искреннюю благодарность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к их работе. Мы очень признательны О. Б. Лупанову и О. М. Касим-Заде за полезные обсуждения, проходившие в рамках научного семинара, и за предложение написать настоящий обзор.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01–01–00583 и 01–15–99268), программы «Университеты России» (проект 015.04.02.17) и программы INTAS (проект 97–0808).

Приведем теперь необходимые определения.

Пусть V — произвольное конечное множество. Напомним, что *графом G на множестве V* называется пара (V, E), где E — некоторое конечное семейство пар элементов множества V. В семействе E могут встречаться пары с одинаковыми элементами, а также одинаковые пары. Элементы из V называются *вершинами графа G*, а элементы из E — *ребрами графа G*. Ребра вида (v, v) называются *петлями*, а повторяющиеся пары из E называются *кратными ребрами*. Если задан граф G, то множество его вершин обычно обозначается через $V(G)$, а множество его ребер — через $E(G)$. Для удобства мы будем часто обозначать ребро $e=\{x, y\}\in E(G)$ через xy.

Иногда бывает удобно рассматривать граф как топологическое пространство, склеенное из отрезков, каждый из которых соответствует некоторому ребру графа. Такие графы мы будем называть *топологическими*, а непрерывное отображение топологического графа G в топологическое пространство будем называть *сетью*; при этом топологический граф G, а также обычный граф, соответствующий G, назовем *типом* этой сети или ее *топологией*. Таким образом, ребра сети — это непрерывные кривые в объемлющем пространстве. Кроме того, вся терминология теории топологических пространств переносится на топологические графы и сети. Если объемлющее пространство является гладким многообразием, то сеть в таком пространстве назовем *гладкой* (*кусочно-гладкой*), если все ребра сети являются гладкими (кусочно-гладкими).

Граф G называется *взвешенным*, если на множестве его ребер задана неотрицательная функция $\omega\colon E(G)\to\mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. При этом число $\omega(e)$ называется *весом ребра $e\in E(G)$*. Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа G* и обозначается через $\omega(G)$. Если G — связный взвешенный граф, то из всех связных остовных подграфов в G наименьшего веса всегда можно выбрать дерево, которое называется *минимальным остовным деревом* и обозначается через MST_G. Отметим, что если все веса строго больше нуля, то любой связный остовный подграф в G наименьшего веса является деревом.

Пусть X — множество, ρ — некоторая метрика на X, и N — произвольное конечное подмножество в X. Пусть G — полный граф на множестве N. Метрика ρ порождает весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру $xy\in E(G)$ число $\rho(x, y)$. Эту весовую функцию мы будем обозначать той же буквой ρ. Минимальное остовное дерево во взвешенном графе G обозначим через MST_N. *Минимальным деревом Штейнера на множестве N* или *минимальным деревом Штейнера, затягивающим множество N*, называется дерево Γ, $N\subset V(\Gamma)$, для которого

$$\rho(\Gamma)=\inf_{\{\bar N:\ \bar N\supset N\}}\rho(\mathrm{MST}_{\bar N}),\tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным подмножествам $\bar N$ в X, содержащим N. Минимальное дерево Штейнера на множестве N обозначается через SMT_N.

Отметим, что, вообще говоря, не для всякого N существует SMT_N. Одной из причин этого может служить неполнота метрического пространства (X, ρ), хотя, как показывает приводимый ниже пример, полнота метрического пространства не гарантирует существование минимального дерева Штейнера.

Пример. Пусть X — множество неотрицательных целых чисел. Введем на X функцию расстояния $\bar\rho$, положив

$$\bar\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y. \end{cases}$$

Легко проверить, что $(X, \bar\rho)$ — полное метрическое пространство. *) Положим $W = X \times X \times X$, и для любых $x = (x^1, x^2, x^3) \in W$ и $y = (y^1, y^2, y^3) \in W$ пусть $\rho(x, y) = \max\limits_i \bar\rho(x^i, y^i)$. Ясно, что (W, ρ) — полное метрическое пространство. Наконец, определим множество N так: $N = \{A_1, A_2, A_3\}$, где $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 1)$ и $A_3 = (0, 1, 1)$.

Отметим, что треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний со стороной длины 2, поэтому $\rho(\mathrm{MST}_N) = 4$. Но для произвольной точки $S \notin N$ выполняется $\rho(A_i, S) > 1$, поэтому длина любого дерева, построенного на $N \cup \{S\}$ строго больше 3. С другой стороны, при $t > 1$ для $S = (t, t, t)$ имеем

$$\sum_i \rho(A_i, S) = 3 + \frac{3}{t} \to 3 \quad \text{при } t \to \infty,$$

поэтому $\rho(\mathrm{SMT}_N) = 3$. Таким образом, в полном метрическом пространстве (W, ρ) не существует минимального дерева Штейнера, затягивающего N.

В приводимом ниже важном частном случае минимальные деревья Штейнера существуют для любого граничного множества.

Предложение 1.1. *Пусть X — связное полное риманово многообразие, а ρ — расстояние между точками из X, равное точной нижней грани длин всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки. Тогда для любого конечного подмножества N в X существует затягивающее его минимальное дерево Штейнера.*

Хотя, как мы видели, в случае общих метрических пространств минимальное дерево Штейнера может не существовать, тем не менее сама точная нижняя грань из определения SMT_N существует всегда. В дальнейшем, даже если SMT_N не существует, точную нижнюю грань (1) будем обозначать через $\rho(\mathrm{SMT}_N)$.

Определение. *Отношением Штейнера $m(X, \rho)$ метрического пространства (X, ρ)* называется следующая величина:

$$m(X, \rho) = \inf_{\{N:\ N \subset X\}} \frac{\rho(SMT_N)}{\rho(MST_N)}.$$

Если вид функции ρ ясен из контекста, то мы для краткости будем писать $m(X)$ вместо $m(X, \rho)$.

§ 2. Отношения Штейнера общих метрических пространств

Из определения вытекает, что $0 \leqslant m(X, \rho) \leqslant 1$. В действительности, отношение Штейнера лежит в более узких пределах, что вытекает из простого наблюдения, доказанного Е. Ф. Муром (см. [6]).

Предложение 2.1 (Е. Ф. Мур). *Отношение Штейнера любого метрического пространства (X, ρ) не меньше* $1/2$:

$$m(X, \rho) \geqslant \frac{1}{2}.$$

*) Авторы пользуются случаем поблагодарить В. В. Рыжикова, сообщившего им об этой конструкции.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Любое число, лежащее между* $1/2$ *и* 1, *является отношением Штейнера для некоторого метрического пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $s \in (1/2, 1]$.

Л е м м а 2.1. *Для любого* $s \in (1/2, 1]$ *существует метрическое пространство* (X, ρ), *состоящее из конечного числа точек, такое что* $m(X, \rho) = s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in [1, 2]$ — некоторое число. Рассмотрим специальное метрическое пространство (X, ρ), состоящее из $(n+1)$ точек $c, x_1, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 1$, для которого расстояние $\rho(x, y)$ между разными точками x и y задается так:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} a, & \text{если } x = c \text{ или } y = c, \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $n = 1$, то, очевидно, $m(X) = 1$.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и $s \in (0, 1)$. Выберем произвольное $N \subset X$, состоящее из $k > 1$ точек. Имеется два случая.

(1) $c \in N$. Тогда $\rho(\mathrm{MST}_N) = a(k-1)$ (так как дерево с k вершинами имеет $(k-1)$ ребро, а расстояние между разными точками в X не меньше a), откуда $\rho(\mathrm{MST}_N) \geqslant a(k-1)$, но остовное дерево, соединяющее точку $c \in N$ с остальными точками из N имеет длину $a(k-1)$. Далее, $\rho(\mathrm{SMT}_N) = a(k-1)$ по тем же соображениям. Поэтому $\rho(N) = 1$.

(2) $c \notin N$. Тогда $\rho(\mathrm{MST}_N) = 2(k-1)$, так как расстояние между любыми точками из N равно 2. Далее, если SMT_N не содержит дополнительных точек, то его длина равна $2(k-1)$. Если оно содержит одну дополнительную точку, совпадающую с c, то его длина равна ak. Если же оно содержит хотя бы одну дополнительную точку, отличную от c, то его длина больше или равна $\min(2(k-1), ak)$, поэтому $\rho(\mathrm{SMT}_N) = \min(2(k-1), ak)$. Таким образом,

$$m(N) = \min\left(1, \frac{ak}{2(k-1)}\right),$$

откуда

$$\min_{N,\, c \notin N} m(N) = \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \min\left\{1, \frac{ak}{2(k-1)}\right\} = \min\left\{1, \frac{an}{2(n-1)}\right\} = \frac{an}{2(n-1)},$$

где последнее равенство имеет место в силу того, что $n \geqslant 2$ и $a \leqslant 2$. Отсюда заключаем, что

$$m(X, \rho) = \frac{an}{2(n-1)}.$$

Нам осталось показать, что для любого $s \in (1/2, 1)$ существуют такие $a \in [1, 2]$ и $n \geqslant 2$, что

$$s = \frac{an}{2(n-1)} \iff a = 2s\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Так как $1 < 2s < 2$ и $(1 - 1/n) \to 1$ при $n \to \infty$, то последнее действительно имеет место. Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. Можно показать [6], что отношение Штейнера для любого конечного подмножества произвольного метрического пространства строго больше $1/2$. Отсюда, в частности, вытекает, что ни для какого метрического пространства, состоящего из конечного числа точек, отношение Штейнера не может равняться $1/2$.

Нам осталось построить пример метрического пространства (X, ρ), для которого отношение Штейнера равно $1/2$. В качестве X возьмем множество всех натуральных чисел и зададим на нем расстояние ρ следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2, & x > 1,\ y > 1, \\ 1, & x \neq y,\ x = 1 \text{ или } y = 1. \end{cases}$$

Тогда для любого конечного $N \subset X$, состоящего из n чисел, отличных от 1, $\rho(MST_N) = 2(n-1)$, а SMT_N имеет дополнительную вершину $s = 1$, соединенную ребрами со всеми точками из N, поэтому $\rho(\mathrm{SMT}_N) = n$, откуда

$$\frac{\rho(\mathrm{SMT}_N)}{\rho(MST_N)} = \frac{n}{2(n-1)},$$

что стремится к $1/2$ при $n \to \infty$. Таким образом, для такого метрического пространства $m(X, \rho) = 1/2$. Доказательство предложения закончено.

На самом деле, имеются важные достаточно широкие классы метрических пространств, на которых достигаются максимальное и минимальное возможные значения отношения Штейнера.

Напомним, что метрика называется *ультраметрикой*, если для любых точек x, y, z выполняется $\rho(x, z) \leqslant \max(\rho(x, y), \rho(y, z))$. Соответствующее метрическое пространство называется *ультраметрическим*.

Предложение 2.3. *Отношение Штейнера ультраметрического пространства равно* 1.

Далее, напомним определение филогенетического пространства. Пусть A — некоторое конечное множество, элементы которого мы будем называть *буквами*, и A^* — семейство всевозможных конечных последовательностей, составленных из букв. Элементы из A^* называются *словами*. К каждому слову можно применить одну из трех редакторских операций: вставка буквы, удаление буквы и замена одной буквы на другую. Легко видеть, что с помощью таких редакторских операций можно из данного слова получить любое другое. Естественно, переход от одного слова к другому можно осуществить разными последовательностями редакторских операций. Определим *расстояние* между двумя словами из A^* как наименьшее число редакторских операций, переводящих одно из этих слов в другое. Легко показывается, что определенное расстояние на элементах из A^* удовлетворяет аксиомам метрики и, значит, превращает A^* в метрическое пространство. Это метрическое пространство называется *филогенетическим*, а определенная на нем функция расстояния — *расстоянием Левенштейна*.

Предложение 2.4. *Отношение Штейнера филогенетического пространства равно* $1/2$.

Приведем ряд несложных фактов, описывающих свойства отношения Штейнера произвольных метрических пространств. Доказательства некоторых из этих утверждений можно найти в [3].

Предложение 2.5. *Отношение Штейнера изометричных метрических пространств одинаково.*

Предложение 2.6. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство, и* $Y \subset X$ *— его подпространство. Тогда*

$$m(Y, \rho) \geqslant m(X, \rho).$$

Предложение 2.7. *Пусть X — некоторое множество, а ρ_1 и ρ_2 — две метрики на множестве X. Предположим, что для некоторых чисел $c_2 \geqslant c_1 > 0$ и любых двух точек x и y из X выполняется $c_1\rho_2(x, y) \leqslant \rho_1(x, y) \leqslant c_2\rho_2(x, y)$. Тогда*

$$\frac{c_1}{c_2} m(X, \rho_2) \leqslant m(X, \rho_1) \leqslant \frac{c_2}{c_1} m(X, \rho_2).$$

Предложение 2.8. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y), не увеличивающее расстояний. Предположим, что для каждого конечного подмножества $N' \subset Y$ существует такое конечное подмножество N, что $f(N) = N'$ и*

$$\rho_X(\mathrm{SMT}_N) \leqslant \rho_Y(\mathrm{SMT}_{N'}).$$

Тогда

$$m(X, \rho_X) \leqslant m(Y, \rho_Y).$$

Предложение 2.9. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y), не увеличивающее расстояний. Предположим, что для каждого конечного подмножества $N' \subset Y$ выполняется*

$$\inf_{\{N:\ f(N) = N'\}} \rho_X(\mathrm{SMT}_N) \leqslant \rho_Y(\mathrm{SMT}_{N'}).$$

Тогда

$$m(X, \rho_X) \leqslant m(Y, \rho_Y).$$

§ 3. Отношение Штейнера римановых многообразий

Важным частным случаем метрических пространств являются связные римановы многообразия, на которых расстояние между точками определяется как точная нижняя грань всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки.

Приведем несколько общих свойств.

Теорема 3.1 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик [3]). *Отношение Штейнера произвольного связного n-мерного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера пространства $\mathbb{R}^n$.*

Заметим, что отношение Штейнера одномерного связного риманова многообразия равно 1. Далее, в силу предложения 2.6, отношение Штейнера стандартного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ убывает с ростом размерности n, поэтому отношение Штейнера произвольного риманова многообразия размерности не меньше 2 не превосходит отношения Штейнера для стандартной евклидовой плоскости. С другой стороны, для граничного множества $N \subset \mathbb{R}^2$, состоящего из вершин правильного треугольника, отношение длины минимального дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева равно $\sqrt{3}/2$. Поэтому отношение Штейнера для евклидовой плоскости не превосходит $\sqrt{3}/2$. Таким образом, имеет место следующий результат.

Следствие 3.1. *Отношение Штейнера n-мерного связного риманова многообразия, $n \geqslant 2$, не превосходит $\sqrt{3}/2$.*

Далее, напомним, что отображение $f\colon W \to M$ связного многообразия W в связное многообразие M называется *накрытием*, если образ отображения f совпадает с M, и у любой точки из M существует окрестность U, прообраз которой состоит из непересекающихся открытых множеств V_α, таких что ограничение отображения f на каждое V_α задает гомеоморфизм с U. Если f — накрытие, то M называется *базой*, а W — *тотальным пространством* этого накрытия. Накрытие называется *локально изометричным*, если у каждой точки из W существует окрестность V, такая что ограничение отображения f на V является изометрией.

Теорема 3.2 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик [3]). *Пусть W и M — связные римановы многообразия, и $\pi\colon W \to M$ — локально изометричное накрытие. Тогда отношение Штейнера базы M не меньше отношения Штейнера тотального пространства W.*

Следствие 3.2 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик [3]). *Если связное риманово многообразие можно локально изометрично накрыть евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, то отношение Штейнера этого многообразия равно отношению Штейнера пространства $\mathbb{R}^n$. В частности, отношение Штейнера двумерного цилиндра, плоского двумерного тора и плоской бутылки Клейна равны отношению Штейнера евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.*

Приведем основные известные нам результаты, описывающие отношение Штейнера евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$.

Более 30 лет назад Е. Н. Гилберт и Г. О. Поллак [14] сформулировали гипотезу о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\sqrt{3}/2$. До начала 90-х годов были получены многочисленные оценки снизу на отношение Штейнера для $\mathbb{R}^2$, всё более и более приближающиеся к $\sqrt{3}/2$. Наконец, Д. З. Ду и Ф. К. Хванг [10] опубликовали доказательство справедливости гипотезы Гилберта–Поллака. Однако их доказательство содержит не формализованное понятие характеристической области погруженного плоского многоугольника и существенно использует некоторые «очевидные» свойства этой области, которые, по мнению авторов, нуждаются в аккуратном доказательстве, отсутствующем в известных авторам публикациях Д. З. Ду и Ф. К. Хванга. Кроме того, попытка аккуратно определить характеристическую область через кусочно аффинное отображение многоугольника в плоскость привела авторов к пониманию, что это далеко не тривиально, так как такое естественное определение, во-первых, приводит к неоднозначности: для данного погруженного многоугольника можно, вообще говоря, определить несколько характеристических областей, и не совсем понятно, как из них выделить одну так, чтобы «очевидные» свойства из доказательства Д. З. Ду и Ф. К. Хванга имели место, а во-вторых, при таком подходе оказывается возможным построить контрпримеры к ряду утверждений из доказательства Д. З. Ду и Ф. К. Хванга. Отметим, что консультации с известными нам специалистами по отношению Штейнера не привели к прояснению ситуации.

Тем не менее, если гипотеза Гилберта–Поллака все-таки верна, то следствие 3.2 дает точные значения отношения Штейнера для двумерных цилиндров, плоских двумерных торов и плоских бутылок Клейна.

В случае $n \geqslant 3$ известны лишь оценки на отношение Штейнера пространства $\mathbb{R}^n$. Приведем некоторые результаты. Как уже отмечалось выше, отношение Штейнера для $\mathbb{R}^n$ не возрастает с ростом n.

Теорема 3.3 (Р. Л. Грехам, Ф. К. Хванг [15]). *Отношение Штейнера $m(\mathbb{R}^n)$ любого пространства $\mathbb{R}^n$ не меньше $1/\sqrt{3}$.*

Грубую верхнюю оценку на $m(\mathbb{R}^n)$ можно получить, рассматривая вершины правильного симплекса в $\mathbb{R}^n$ в качестве граничного множества и выбирая вместо минимального дерева Штейнера дерево типа звезда, ребра которого соединяют центр тетраэдра с его вершинами (см. [6]). Тогда получается следующая оценка сверху.

Предложение 3.1. *Отношение Штейнера $m(\mathbb{R}^n)$ можно оценить сверху так*:

$$m(\mathbb{R}^n) \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}.$$

Ф. Р. К. Чанг, Е. Н. Гильберт [5] и В. Д. Смит [30] нашли более точные верхние оценки на отношение Штейнера пространств $\mathbb{R}^n$, численные значения которых приведены, например, в [6].

Отметим, что как показали Д. З. Ду и В. Д. Смит [11], для $n \geqslant 3$ отношение Штейнера не может быть достигнуто на вершинах правильного симплекса (см. ниже). Возникает естественный вопрос: какие конфигурации точек могли бы служить претендентами на граничные множества, для которых достигается отношение Штейнера в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$? Более того, может ли отношение Штейнера достигаться на конечном подмножестве $\mathbb{R}^n$?

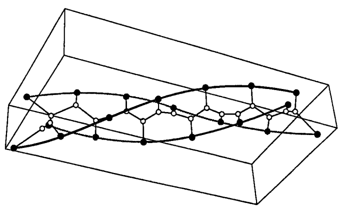

Рис. 1. Гипотеза В. Д. Смита и Дж. М. Смита: отношение Штейнера в $\mathbb{R}^3$ равно пределу отношений Штейнера граничных множеств такого типа

Уже в случае трехмерного евклидова пространства ситуация достаточно нетривиальная. Проделав большую вычислительную работу, В. Д. Смит и Дж. М. Смит пришли к выводу, что для $\mathbb{R}^3$ отношение Штейнера является пределом отношений Штейнера граничных множеств специального типа, лежащих на тройной спирали (см. рис. 1).

Гипотеза 3.1 (В. Д. Смит, Дж. М. Смит [31]). *Отношение Штейнера трехмерного евклидова пространства может быть вычислено по следующей формуле*:

$$m(\mathbb{R}^3) = \sqrt{\frac{283}{700} - \frac{3\sqrt{21}}{700} + \frac{9\sqrt{11-\sqrt{21}}\sqrt{2}}{140}} = 0.78419\ldots$$

Приведем еще один результат, касающийся вычисления отношения Штейнера римановых многообразий. Этот результат принадлежит Й. Х. Рубинштейну и Дж. Ф. Венгу [28], которые вычислили отношение Штейнера двумерной сферы постоянной (положительной) кривизны: оно оказалось таким же, как и у $\mathbb{R}^2$, т. е. равным $\sqrt{3}/2$. Отметим, что в доказательстве авторы использовали идеи Д. З. Ду и Ф. К. Хванга относительно характеристической области, что опять же, в силу отмеченных выше проблем с ее определением, приводит к необходимости более детальной проработки доказательства. Тем не менее, если эти результаты Й. Х. Рубинштейна и Дж. Ф. Венга верны, то из них и теоремы 3.2 мгновенно заключаем, что отношение Штейнера проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ постоянной (положительной) кривизны равно $\sqrt{3}/2$.

Таким образом, по модулю теорем Ду–Хванга и Рубинштейна–Венга, вычислены отношения Штейнера всех замкнутых (компактных без края) двумерных римановых многообразий постоянной неотрицательной кривизны: все они оказались равными отношению Штейнера для евклидовой плоскости. Если же кривизна отрицательна, то точные значения отношения Штейнера еще не получены. Однако можно привести некоторые оценки.

Теорема 3.4 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик [3]). *Отношение Штейнера пространства Лобачевского кривизны* -1 *не превосходит* $3/4$.

Теорема 3.5 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик [3]). *Отношение Штейнера произвольного двумерного риманова многообразия постоянной кривизны* -1 *строго меньше* $\sqrt{3}/2$.

В заключение этого параграфа приведем еще некоторые полезные факты, описывающие дифференциальные свойства отношения Штейнера граничных множеств в полном римановом многообразии W. Эффективность подобных методов изучения минимальных деревьев Штейнера уже была продемонстрирована в работах Й. Х. Рубинштейна и др. (см. [27], [26], [32], где, в случае, когда объемлющее пространство является плоскостью, было получено полное описание минимальных деревьев Штейнера для широкого класса граничных множеств, исходя из дифференциальных свойств отношения Штейнера.

Как было замечено выше, полнота многообразия W гарантирует, что для любого конечного подмножества $N \subset W$ существует минимальное дерево Штейнера. Соединяя смежные вершины этого дерева кратчайшими геодезическими, мы получим *геодезическую сеть* (аналог плоского графа), которую будем называть *геометрической реализацией для* SMT_N. Более общо, если G — произвольный граф, множество вершин которого является подмножеством в W, то, соединяя смежные вершины кратчайшими геодезическими, получим *геометрическую реализацию графа* G. В частности, имеет смысл говорить о геометрической реализации для MST_N.

Легко видеть, что, вообще говоря, геометрические реализации не единственны. Геометрические реализации минимальных деревьев Штейнера обладают рядом полезных свойств. Приведем один результат, описывающий локальную структуру произвольной геометрической реализации минимального дерева Штейнера.

Предложение 3.2. *Пусть* Γ — *некоторая геометрическая реализация произвольного невырожденного* SMT_N *в связном полном римановом многообразии* W. *Тогда* Γ — *дерево, у которого все вершины степени* 1 *являются граничными, угол между любыми двумя смежными ребрами-геодезическими больше или равен* 120°, *причем, если общая вершина этих ребер — подвижная вершина степени* 2, *то угол между ними равен* 180°. *В частности, степени вершин дерева* Γ *не превосходят* 3.

Пусть $N = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset W$, $n > 1$, и $N_t = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, $x_i(0) = x_i$, — некоторая гладкая деформация множества N, т. е. набор гладких кривых $x_i(t)$. Напомним, что через $m(N)$ мы обозначили отношение Штейнера множества N, т. е. $m(N) = \rho(\mathrm{SMT}_N)/\rho(\mathrm{MST}_N)$. Положим $\rho_s(t) = \rho(\mathrm{SMT}_{N_t})$ и $\rho_m(t) = \rho(\mathrm{MST}_{N_t})$.

Теорема 3.6 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин [2]). *Функции* $\rho_s(t)$, $\rho_m(t)$ *и* $m(N_t)$ *дифференцируемы при* $t = 0+$, *и*

$$\left.\frac{dm(N_t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{1}{\rho_m(0)}\Big(\rho_s'(0) - m(N)\rho_m'(0)\Big).$$

Производные $\rho_s'(0)$ *и* $\rho_m'(0)$ *можно вычислить так*:

$$\rho_s'(0) = \inf_{\Gamma - \mathrm{SMT}_N} \sum_{x \in N} \langle \nu_x, E_x \rangle,$$

$$\rho_m'(0) = \inf_{\Delta - \mathrm{MST}_N} \sum_{x \in N} \langle \mu_x, E_x \rangle,$$

где E_x — *это вектор скорости движения вершины* $x \in N$ *при деформации* N_t *в момент* $t = 0$, ν_x — *это сумма единичных векторов направлений ребер дерева* Γ, *входящих в вершину* x, μ_x — *сумма единичных векторов направлений ребер дерева* Δ, *входящих в вершину* x, *а точная нижняя грань берется по всевозможным геометрическим реализациям* Γ *всех* SMT_N *и по всевозможным геометрическим реализациям* Δ *всех* MST_N.

Более того, эти точные нижние грани достигаются на некотором Γ, *являющемся* SMT_N, *и некотором* Δ, *являющемся* MST_N, *поэтому для таких* Γ *и* Δ *имеем*:

$$\left.\frac{dm(N_t)}{dt}\right|_{t=0+} = \frac{1}{\rho_m(0)} \sum_{x\in N} \langle \nu_x - m(N)\mu_x, E_x\rangle.$$

Конечное подмножество $N \subset W$ назовем *критической точкой для отношения Штейнера* $m(N)$, если для любой гладкой деформации N_t, $t\in[0,1]$, $N_0 = N$, граничного множества N производная функции $m(N_t)$ при $t=0+$ имеет один и тот же знак (т. е. или всегда неотрицательна, или всегда неположительна).

Пусть $N=\{x_1,\dots,x_n\}$. Обозначим через $\{\Gamma_\alpha\}$ множество всех геометрических реализаций всевозможных SMT_N, и через $\{\Delta_\beta\}$ — множество всех геометрических реализаций всевозможных MST_N. Далее, для каждого Γ_α обозначим через ν_α^j сумму единичных векторов направлений ребер дерева Γ_α, приходящих в вершину x_j, и положим $\nu_\alpha = (\nu_\alpha^1,\dots,\nu_\alpha^n)$. Аналогично, для каждого Δ_β обозначим через μ_β^j сумму единичных векторов направлений ребер дерева Δ_β, приходящих в его граничную вершину x_j, и положим $\mu_\beta = (\mu_\beta^1,\dots,\mu_\beta^n)$.

Отметим, что ν_α и μ_β — некоторые точки в пространстве $T = T_{x_1}W\times\dots\times T_{x_n}W$, на котором риманова метрика индуцирует скалярное произведение. Положим

$$A_N = \{\nu_\alpha\}, \qquad B_N = \{\mu_\beta\}.$$

Теорема 3.7 (А. О. Иванов, А. А. Тужилин [2]). *Конечное множество* $N\subset W$ *является критической точкой отношения Штейнера тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух включений*:

$$\operatorname{conv} A_N \subset \operatorname{conv}\bigl(m(N)B_N\bigr), \qquad \operatorname{conv} A_N \supset \operatorname{conv}\bigl(m(N)B_N\bigr),$$

где $m(N)B_N = \bigl\{m(N)\mu_\beta\bigr\}$. *При этом первое включение соответствует случаю неотрицательности производных по направлению функции* $m(N)$, *а второе — неположительности этих производных.*

§ 4. Отношение Штейнера нормированных пространств

Пусть теперь $X=\mathbb{R}^n$, а метрика ρ задается некоторой нормой. Обозначим через B замкнутый единичный шар в смысле метрики ρ, центр которого совпадает с началом координат. Тогда B является замыканием некоторого центрально симметричного ограниченного открытого множества. Обратно, если задано такое подмножество B пространства $\mathbb{R}^n$, то по нему однозначно восстанавливается соответствующая норма. Это является мотивацией следующих обозначений: во-первых, $\mathbb{R}^n$ с нормой, порожденной B, будем обозначать через $(\mathbb{R}^n, B)$, а, во-вторых, вместо $m(\mathbb{R}^n,\rho)$ будем писать $m(B)$. Часто описанные только что метрические пространства называют *пространствами Банаха–Минковского*. В данном параграфе мы приведем основные известные факты, описывающие отношение Штейнера пространств Банаха–Минковского. В дальнейшем, для краткости, замыкание произвольного центрально симметричного ограниченного открытого множества будем называть *БМ-шаром*.

4.1. Следствия общей теории. Приведем сначала общие факты, являющиеся следствиями из результатов § 2.

Напомним, что если шар $B' \subset \mathbb{R}^n$ является образом шара $B \subset \mathbb{R}^n$ при произвольном (невырожденном) линейном преобразовании пространства $\mathbb{R}^n$, то соответствующие пространства Банаха–Минковского изометричны. Из предложения 2.5 вытекает следующий результат.

Следствие 4.1. *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — произвольное (невырожденное) линейное преобразование, B — произвольный БМ-шар, и $B' = A(B)$. Тогда B' — также БМ-шар, и $m(B) = m(B')$.*

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство, и $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый БМ-шар. Тогда $B' = B \cap L$ является БМ-шаром в L, причем порожденная им норма индуцируется нормой в $\mathbb{R}^n$, порожденной B. Будем говорить, что пространство L с так определенной нормой является *подпространством* в нормированном $\mathbb{R}^n$ и писать $(L, B') \subset (\mathbb{R}^n, B)$. Если ρ и ρ' — соответствующие метрики на $\mathbb{R}^n$ и L, то метрическое пространство (L, ρ') является, очевидно, подпространством в $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Предложение 2.6 приводит к следующему результату.

Следствие 4.2. *Пусть $(\mathbb{R}^n, B)$ — нормированное пространство, и (L, B') — его подпространство. Тогда $m(B') \geqslant m(B)$.*

Далее, легко видеть, что если для некоторого положительного числа k и БМ-шаров B и B' имеет место включение $k\, B \subset B'$, то для произвольного вектора x соответствующие нормы связаны так: $\|x\|/k \geqslant \|x\|'$. Из этого наблюдения и предложения 2.7 получаем следующий результат.

Следствие 4.3. *Пусть c и c' — два положительных числа, B и B' — два БМ-шара, таких что $\frac{1}{c} \cdot B \subseteq B' \subseteq \frac{1}{c'} \cdot B$. Тогда*

$$\frac{c}{c'} \cdot m(B) \geqslant m(B') \geqslant \frac{c'}{c} \cdot m(B).$$

4.2. Исследование отношения Штейнера с помощью расстояния Банаха–Мазура. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный БМ-шар, и $[B] = \{T(B) \mid T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\}$ — множество БМ-шаров, являющихся образами шара B при всевозможных невырожденных линейных преобразованиях пространства $\mathbb{R}^n$. Напомним, что неотрицательная функция $d(x, y)$, определенная на парах точек произвольного множества X, называется *мультипликативным расстоянием*, если $\ln d(x, y)$ является метрикой. Напомним также, что на множестве $\mathbb{B}_n = \{[B]\}$, состоящем из классов $[B]$ по всем БМ-шарам $B \subset \mathbb{R}^n$, определено мультипликативное расстояние Банаха–Мазура следующим образом:

$$\begin{aligned} d([B], [B']) &= \inf\{h \geqslant 1 \mid \exists B_1 \in [B]\ \exists B_2 \in [B']\colon\ B_1 \subseteq B_2 \subseteq h\, B_1\} \\ &= \inf\{h \geqslant 1 \mid \exists T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\colon\ B \subseteq T(B') \subseteq h\, B\}. \end{aligned}$$

Метрическое пространство $(\mathbb{B}_n, \ln d)$ называется *компактом Банаха–Мазура*, а $\ln d$ — *расстоянием Банаха–Мазура*.

Из следствия 4.3 легко вытекает следующая теорема, дающая возможность сравнивать отношения Штейнера нормированных пространств одной размерности через расстояние Банаха–Мазура.

Теорема 4.1 (Д. Цислик [6]). *Пусть B и B' — два БМ-шара в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$d([B], [B'])\, m(B) \geqslant m(B') \geqslant \frac{1}{d([B], [B'])}\, m(B).$$

Теорема 4.1 позволяет получить много интересных оценок на отношение Штейнера. Приведем некоторые примеры.

1. Пусть D^n обозначает стандартный единичный евклидов шар. Ф. Джон в работе [20] показал, что для любого БМ-шара B выполняется $d\big([B],[D^n]\big) \leqslant \sqrt{n}$. Отсюда по теореме 4.1 мгновенно получаем [6]

Следствие 4.4. *Для любого БМ-шара B выполнено неравенство*

$$m(B) \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot m(D^n).$$

Таким образом, если верны результаты Ду–Хванга, то для $B \subset \mathbb{R}^2$ имеем: $m(B) \geqslant \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.61237\ldots$

2. Хорошо известно (см. [6]), что для любого БМ-шара B и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой строго выпуклый БМ-шар B' с гладкой границей, что $\ln d([B],[B']) < \varepsilon$. Этот факт (вместе со следствием 4.3) позволяет заключить, что при получении общих оценок на отношение Штейнера пространств Банаха–Минковского достаточно ограничиться рассмотрением норм, порожденных строго выпуклыми шарами с гладкими границами. Важность этого наблюдения объясняется тем, что локальная структура абсолютно минимальных деревьев в пространствах с такими нормами существенно проще (см., например, [6] или [19]). Эти соображения в случае размерности 2 позволили Д. З. Ду и др. (см. [12] и [9]) получить*) следующую оценку.

Теорема 4.2. *Для любой плоскости Банаха–Минковского с единичным шаром B имеет место следующая оценка*

$$\frac{2}{3} \leqslant m(B) \leqslant \frac{\sqrt{13}-1}{3} = 0.8685\ldots$$

Как мы увидим в следующем пункте, нижняя оценка из Теоремы 4.2 достигается (см. там же комментарии по поводу верхней оценки).

4.3. Пространства с ℓ_p-нормой. Напомним, что нормированное пространство, порожденное БМ-шаром

$$B_p^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid |x_1|^p + \ldots + |x_n|^p \leqslant 1\}, \qquad p \geqslant 1,$$

обозначается через ℓ_p^n. В. Е. Гурарий, М. И. Кадек и В. Е. Макаев [1] показали, что для $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$ или $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ выполняется

$$d([B_p^n],[B_q^n]) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

поэтому из теоремы 4.1 получаем [6]

Следствие 4.5. *При $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$ и при $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ выполняется*

$$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\, m(B_p^n) \geqslant m(B_q^n) \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\, m(B_p^n).$$

Поэтому, выбирая в качестве p или 1, или 2, а в качестве q — или 2, или ∞, приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{n}{n^{\frac{1}{q}}}\, m(B_1^n) \geqslant m(B_q^n) \geqslant \frac{n^{\frac{1}{q}}}{n}\, m(B_1^n) \quad \text{при } q \leqslant 2,$$

$$\frac{n^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{n}}\, m(D^n) \geqslant m(B_p^n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{p}}}\, m(D^n) \quad \text{при } p \leqslant 2,$$

$$n^{\frac{1}{p}}\, m(B_\infty^n) \geqslant m(B_p^n) \geqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\, m(B_\infty^n) \quad \text{при } p \geqslant 2,$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{q}}}\, m(D^n) \geqslant m(B_q^n) \geqslant \frac{n^{\frac{1}{q}}}{\sqrt{n}}\, m(D^n) \quad \text{при } q \geqslant 2,$$

*) К сожалению, в нашем распоряжении не было этих работ и мы были вынуждены ограничиться информацией из книги [6]. Возможно однако, что цитируемые работы также опираются на «естественное понятие» характеристической области.

откуда

$$\min\left[\frac{n}{n^{\frac{1}{q}}}\, m(B_1^n),\ \frac{n^{\frac{1}{q}}}{\sqrt{n}}\, m(D^n)\right] \geqslant m(B_q^n) \geqslant \max\left[\frac{n^{\frac{1}{q}}}{n}\, m(B_1^n),\ \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{q}}}\, m(D^n)\right] \quad \text{при } q \leqslant 2,$$

$$\min\left[n^{\frac{1}{q}}\, m(B_\infty^n),\ \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{1}{q}}}\, m(D^n)\right] \geqslant m(B_q^n) \geqslant \max\left[\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\, m(B_\infty^n),\ \frac{n^{\frac{1}{q}}}{\sqrt{n}}\, m(D^n)\right] \quad \text{при } q \geqslant 2.$$

Из следствия 4.5 можно получить нетривиальные оценки на отношение Штейнера в двумерном случае. Для этого понадобится следующая теорема, доказанная Ф. К. Хвангом.

Теорема 4.3 (Ф. К. Хванг [16]). *Имеет место следующее равенство*:

$$m(B_1^2) = m(B_\infty^2) = \frac{2}{3}.$$

Замечание. Теорема 4.3, в частности, показывает, что нижняя оценка из теоремы 4.2 достигается, например, на изометричных плоскостях ℓ_1^2 и ℓ_∞^2.

Из теоремы 4.3, в предположении справедливости гипотезы Гилберта–Поллака, получаем следующие оценки.

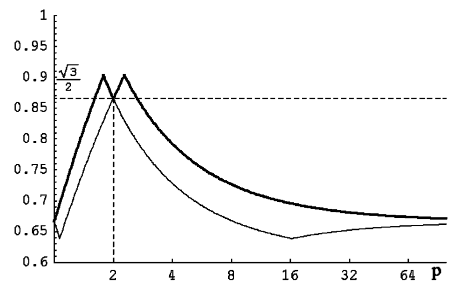

Рис. 2. Графики верхней и нижней оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^2 из следствия 4.6

Следствие 4.6. *Для $m(B_q^2)$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$ имеет место следующая оценка*

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\,\frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } 1 \leqslant q \leqslant \frac{4}{7-3\log_2 3} = 1.78165\ldots \\ \sqrt{\frac{3}{8}}\,2^{1/q} & \text{при } \frac{4}{7-3\log_2 3} = 1.78165\ldots \leqslant q \leqslant 2 \end{cases} \geqslant m(B_q^2) \geqslant \begin{cases} \frac{1}{3}\,2^{1/q} & \text{при } 1 \leqslant q \leqslant \frac{4}{3\log_2 3 - 1} = 1.06528\ldots \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } \frac{4}{3\log_2 3-1} = 1.06528\ldots \leqslant q \leqslant 2 \end{cases}$$

а для $q \geqslant 2$ выполняется

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } 2 \leqslant q \leqslant \frac{4}{3\log_2 3 - 3} = 2.27935\ldots \\ \frac{2}{3}\,2^{1/q} & \text{при } \frac{4}{3\log_2 3-3} = 2.27935\ldots \leqslant q \leqslant \infty \end{cases} \geqslant m(B_q^2) \geqslant \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{8}}\,2^{1/q} & \text{при } 2 \leqslant q \leqslant \frac{4}{5-3\log_2 3} = 16.319\ldots \\ \frac{2}{3}\,\frac{1}{2^{1/q}} & \text{при } \frac{4}{5-3\log_2 3} \leqslant q \leqslant \infty \end{cases}$$

В действительности, оценки приведенные в следствии 4.6 не являются точными. Один из способов улучшения верхних оценок состоит в вычислении отношения Штейнера для конкретных границ. Так, рассматривая трегольники со стороной, параллельной оси абсцисс, Д. З. Ду и З. Ц. Лиу [23] получили следующую оценку на отношения Штейнера пространств ℓ_p^2.

Теорема 4.4. *Пусть* $p\geqslant 1$ *и* $1/p+1/q=1$. *Тогда*

$$m(B_q^2)\leqslant \frac{(2^p-1)^{\frac1p}+(2^q-1)^{\frac1q}}{4}.$$

Поскольку функция, стоящая в правой части неравенства из теоремы 4.4, достигает в точке $p=2$ строгого максимума $\frac{\sqrt3}{2}$, получаем следующий результат.

Следствие 4.7. *Отношение Штейнера пространства* ℓ_p^2 *не превосходит* $\frac{\sqrt3}{2}$, *причем равенство может достигаться только при* $p=2$.

Замечание. Следствие 4.7 породило предположение, высказанное Д. Цисликом [6], о том, что общая верхняя оценка из теоремы 4.2 может быть уменьшена до $\frac{\sqrt3}{2}$.

Отметим, что оценка из теоремы 4.4, в свою очередь, может быть улучшена, если вместо треугольников со стороной, параллельной оси абсцисс, рассмотреть треугольники со стороной, параллельной биссектрисе первого квадранта. Соответствующий результат был получен Д. Цисликом (см. [6]). Графики оценок З. Ц. Лиу и Д. З. Ду и Д. Цислика вместе с графиками оценок из Следствия 4.6 приведены на рис. 3. Как видно из рисунка, оценки З. Ц. Лиу, Д. З. Ду и Д. Цислика улучшают результат из Следствия 4.6 лишь в окрестности $p=2$. Если рассмотреть граничные множества, состоящие из четырех и более точек, то иногда удается получить еще лучшие оценки. Так, например, Дж. Альбрехт [4], изучая отношения Штейнера для граничных множеств из четырех точек, получил более точную оценку в окрестности $p=1$, которую мы не приводим из-за недостатка места (см. также [6]).

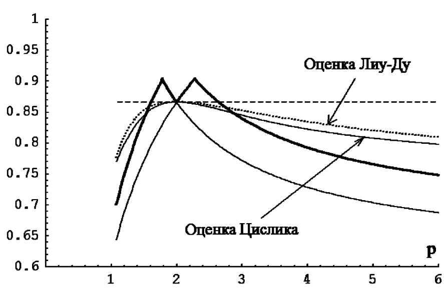

Рис. 3. Графики верхних и нижней оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^2

Приведем теперь оценки для ℓ_p-пространств размерности три и выше (случай $p=2$ обсуждался выше в § 3). Первая группа оценок также получена с помощью изучения граничных множеств специального вида, а именно, тетраэдров, кубов и октаэдров (см. [6]).

Теорема 4.5. *Пусть* $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$, *и* x_0 — *единственный в интервале* $(1,2)$ *нуль функции* $f(x)=x^p+2(x-1)^p-2$. *Тогда при* $1<p\leqslant \frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}=2.709511\ldots$ *выполняется*

$$m(B_p^3)\leqslant \min\Big[\frac13(2^{-\frac1p}+(2^q-1)^{\frac1q}),\ \frac65\Big(\frac12\Big)^{\frac1p},\ \frac15\Big((2^q-1)^{\frac1q}+\Big(\frac12\Big)^{\frac1p}+\Big(\frac32\Big)^{\frac1p}x_0\Big)\Big],$$

а при $p\geqslant \frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}$ *выполняется*

$$m(B_p^3)\leqslant \min\Big[\Big(\frac23\Big)^{\frac1q},\ \frac65\Big(\frac12\Big)^{\frac1p},\ \frac15\Big(\frac32\Big)^{\frac1p}(x_0+2)\Big].$$

Графики оценок из теоремы 4.5 приведены на рис. 4.

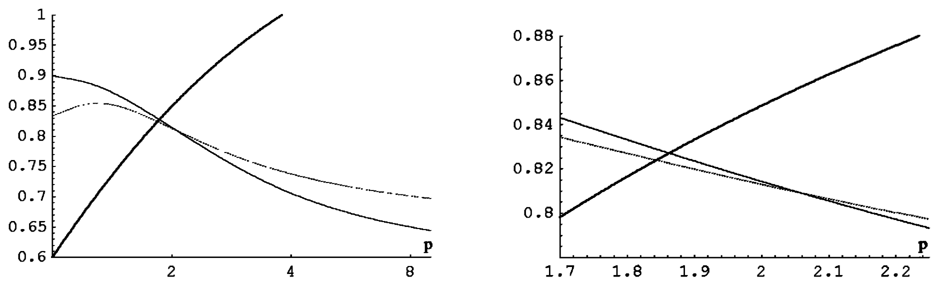

Рис. 4. Графики верхних оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^3

Ниже собраны известные оценки для старших размерностей.

— Для пространств ℓ_1^n

$$m(B_1^n) \leqslant \frac{n}{2n-1},$$

где равенство достигается на множестве вершин шара B_1^n.

— Дж. Альбрехт [4] показал, что

$$m(B_p^n) \leqslant \frac{2n}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где равенство достигается на множестве вершин многомерного октаэдра. Отметим, что при $p\to\infty$ данная оценка монотонно возрастает, стремясь к числу $\frac{2n}{2n-1}$, большему единицы. Это означает, что она не работает при больших p.

— Дж. Альбрехт [4] показал, что

$$m(B_p^n) \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^n-1}n^{\frac{1}{p}},$$

где равенство достигается на множестве вершин стандартного гиперкуба с вершинами в точках $(\pm1,\ldots,\pm1)$. Отметим, что при больших p эта оценка лучше, чем предыдущая. На рис. 5 приведены графики оценок Дж. Альбрехта для $n=7$.

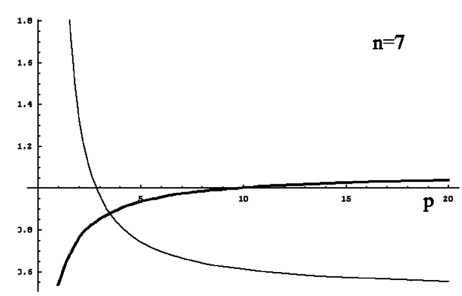

Рис. 5. Графики верхних оценок на отношение Штейнера пространств ℓ_p^7

— В частности, $m(B_\infty^n)\leqslant \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$.

Следующие оценки получены как следствия общего предложения 2.6 и известных вложений пространств с нормами типа ℓ_p друг в друга. О таких вложениях известно, например, следующее.

— Существуют изометричные вложения из ℓ_∞^2 в ℓ_1^m при любых $m\geqslant 2$ (Ю. И. Любих, Л. Н. Фазерштейн [24]).

— Существуют изометричные вложения из ℓ_1^n в ℓ_∞^m для любых $n\geqslant 2$ и $m\geqslant 2^{n-1}$ (Ю. И. Любих, Л. Н. Фазерштейн [25]).

Как следствие, немедленно получаем следующий результат.

С л е д с т в и е 4.8. *Для любых $n\geqslant 2$ и $m\geqslant 2^{n-1}$ выполняется*

$$m(B_\infty^m) \leqslant m(B_1^n) \leqslant \frac{n}{2n-1},$$

поэтому

$$m(B_\infty^m) \leqslant \frac{1+\log_2 m}{1+2\cdot\log_2 m}.$$

4.4. λ-Геометрии. Еще один интересный пример плоских норм дают так называемые λ-нормы, т. е. нормы, чей единичный круг представляет собой правильный 2λ-угольник, одна из осей симметрии которого лежит на оси абсцисс. Этот круг обычно обозначают через $B^{(\lambda)}$. В частности, $B^{(2)}=B_1^2$ и, по определению, $B^{(\infty)}=B_2^2$.

М. Зарафцадех и Ц. К. Вонг [29] (см. также [6]) получили следующую оценку.

Теорема 4.6. *Для отношения Штейнера на плоскости с λ-нормой, $\lambda\geqslant 2$, имеет место оценка*

$$m(\mathbb{R}^2)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}\geqslant m(B^{(\lambda)})\geqslant m(\mathbb{R}^2)\cos\frac{\pi}{2\lambda}.$$

Замечание. В частности, в предположении справедливости гипотезы Гилберта–Поллака, если $\lambda=2$, то полученная оценка не точна (см. теорему 4.3).

Д. Т. Ли и Ц. Ф. Шен [21] предприняли более детальное исследование отношения Штейнера в λ-геометрии. Им удалось получить*) точные значения для λ специального вида.

Теорема 4.7. *Если $\lambda\equiv 3 \bmod 6$, то*

$$m(B^{(\lambda)})=m(\mathbb{R}^2)\cos\frac{\pi}{2\lambda}.$$

Если $\lambda\equiv 0 \bmod 6$, $\lambda\geqslant 6$, то

$$m(B^{(\lambda)})=m(\mathbb{R}^2).$$

В частности, имеется бесконечно много не изометричных плоскостей Банаха–Минковского с таким же отношением Штейнера как у евклидовой плоскости. Кроме того, отношение Штейнера для λ-норм не есть монотонная функция λ.

§ 5. Отношение Штейнера и другие задачи дискретной геометрии

В данном параграфе мы обсудим связи отношения Штейнера и ряда других известных задач дискретной геометрии.

5.1. Число Юнга. Пусть B — произвольный n-мерный БМ-шар, и $\|\,.\,\|_B$ — соответствующая норма в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что для произвольного ограниченного множества $X\subset\mathbb{R}^n$ естественно определяются *диаметр* $D_B(X)$ и *радиус* $R_B(X)$:

$$D_B(X)=\sup\{\|v-v'\|_B \mid v,v'\in X\},$$
$$R_B(X)=\inf\{r\geqslant 0 \mid X\subset v+rB \text{ для некоторой точки } v\in\mathbb{R}^n\}.$$

Число

$$J_n(B)=\sup\left\{\frac{R_B(X)}{D_B(X)} \mid X\subset\mathbb{R}^n \text{ — ограниченное множество}\right\}$$

называется *числом Юнга* нормированного пространства.

*) К сожалению, в нашем распоряжении не было этой работы и мы были вынуждены ограничиться информацией из книги [6]. Возможно однако, что цитируемая работа также опирается на «естественное понятие» характеристической области.

Хорошо известно (см., например, [22]), что

$$\frac{1}{2} \leqslant J_n(B) \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

Нетрудно видеть, что с помощью числа Юнга можно получить верхнюю оценку для отношения Штейнера. Действительно, предположим что в рассматриваемом нормированном пространстве существует правильный симплекс (т. е. множество точек $\Delta = \{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$, расстояния между любыми двумя из которых равны единице). Тогда, очевидно, длина $\mathrm{MST}(\Delta) = n$, а длина $\mathrm{SMT}(\Delta)$ не превосходит $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \sum\limits_i \|x - A_i\|_B$. По определению радиуса, последнее выражение не превосходит $(n+1)R_B(\widehat{\Delta})$, где через $\widehat{\Delta}$ обозначена выпуклая оболочка множества Δ. Итак,

$$\rho(\mathrm{SMT}(\Delta)) \leqslant (n+1)R_B(\widehat{\Delta}) \leqslant (n+1)J_n(B)D_B(\widehat{\Delta}) = (n+1)J_n(B),$$

откуда

$$m(B) \leqslant \frac{\rho(\mathrm{SMT}(\Delta))}{\rho(\mathrm{MST}(\Delta))} \leqslant \frac{n+1}{n} J_n(B).$$

Учитывая, что в двумерном и трехмерном случаях правильные симплексы существуют всегда, получаем следующий результат (см. [7]).

Теорема 5.1. *Для пространств Банаха–Минковского размерности n имеется следующая связь между числом Юнга и отношением Штейнера*:

при $n = 2$ для любого БМ-шара B имеем $m(B) \leqslant \frac{3}{2} J_2(B)$;

при $n = 3$ для любого БМ-шара B имеем $m(B) \leqslant \frac{4}{3} J_3(B)$;

если существует правильный симплекс со стороной 1,

то $m(B) \leqslant \frac{n+1}{n} J_n(B)$.

Теорема 5.1 показывает важность наличия правильных симплексов или, более общо, конечных множеств точек попарно равноудаленных друг от друга, в нормированных пространствах для оценок на отношение Штейнера. К сожалению, в общем случае правильных симплексов может и не быть. Впрочем, как показал Б. В. Декстер [8], если расстояние Банаха–Мазура между B и D^n достаточно мало, то правильный симплекс существует.

5.2. Упаковки и покрытия. В данном пункте мы покажем, как отношение Штейнера может быть использовано при изучении упаковок и покрытий евклидова пространства.

Напомним, что *выпуклым телом в* $\mathbb{R}^n$ называется выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее внутренние точки. Семейство выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$, внутренности которых не пересекаются, называется *упаковкой*. Семейство подмножеств в $\mathbb{R}^n$, объединение которых совпадает с $\mathbb{R}^n$, называется *покрытием* $\mathbb{R}^n$.

Пусть K — компактное выпуклое тело, а $V = \{v_i\}$ — некоторый набор точек в $\mathbb{R}^n$, такой что семейство $\mathcal{M}(V, K) = \{v_i + K\}$ является упаковкой. Для каждого неотрицательного числа r обозначим через $\mathcal{M}_r(V, K)$ семейство $\{v_i + (1+r)K\}$.

Определим величину $c(V, K)$, называемую *близостью упаковки* $\mathcal{M}(V, K)$, так:

$$\frac{1}{c(V, K)} = \inf\{r \mid \mathcal{M}_r(V, K) \text{ — покрытие}\}.$$

Далее, обозначим через $\mathcal{V}(K)$ множество всех таких $V = \{v_i\}$, что $\mathcal{M}(V, K)$ — упаковка, и положим

$$c(K) = \sup_{V \in \mathcal{V}(K)} \{c(V, K)\}.$$

Для двумерного случая в [6] приводится следующая зависимость*) между отношением Штейнера пространства Банаха–Минковского, порожденного БМ-шаром B, и величиной $c(B)$.

Теорема 5.2. *Пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ — некоторый БМ-шар. Тогда*

$$m(B) \leqslant \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{c(K)}\right).$$

Приведем результат о свойствах отношения Штейнера, полученный Д. З. Ду и В. Д. Смитом [11] из теории упаковок. Предварительно отметим, что, в предположении справедливости гипотезы Гилберта–Поллака, отношение Штейнера евклидовой плоскости достигается на некотором конечном множестве точек (например, на правильном треугольнике). Для евклидовых пространств размерности большей чем два существование конечного множества, на котором достигается отношение Штейнера, остается до сих пор открытым вопросом. Тем не менее, если такие множества N существуют, то, оказывается, можно оценить снизу количество точек в N. Поясним, как получается эта оценка.

Начнем с простой конструкции, предложенной Д. З. Ду и В. Д. Смитом [11], демонстрирующей, что отношение Штейнера не может достигаться на множестве вершин правильного n-мерного симплекса, $n \geqslant 3$. Для этого рассмотрим граничное множество P, состоящее из следующих $1 + n(n+1)$ точек пространства $\mathbb{R}^{n+1}$: одной точки $(0, \ldots, 0)$ и $n(n+1)$ точек, у которых все координаты кроме двух равны нулю, одна равна -1, и одна равна $+1$. Ясно, что множество P лежит в n-мерной плоскости и его можно представить в виде объединения $(n+1)$ множеств P^i, каждое из которых — это множество вершин n-мерного симплекса, так: $P^i = \{(0, \ldots, 0)\} \cup \{x \in P \mid x^i = 1\}$ (см. рис. 6). Легко видеть, что если $n \geqslant 3$, то $\cup\, \mathrm{MST}(P^i) = \mathrm{MST}(P)$ и $\rho(\mathrm{SMT}(P)) < \sum_i \rho(\mathrm{SMT}(P_i))$, где последнее неравенство вытекает из того, что степень вершины минимального дерева не может быть больше 3. Отсюда немедленно вытекает, что $m(P) < m(P^i)$, что и требовалось.

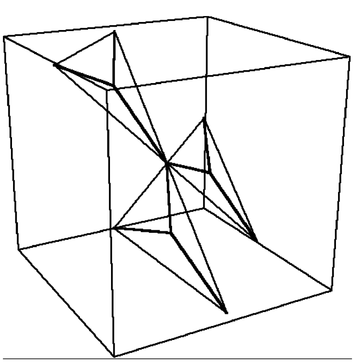

Рис. 6. Множество P, представленное в виде объединения правильных симплексов P^i

Аналогично можно получить следующий важный результат. Пусть P — множество точек в n-мерном пространстве. Выберем произвольную точку $p \in P$, и для каждой точки $q \neq p$ из P построим конус с осью pq и раствором в $\pi/3$. Объединение построенных конусов обозначим через U_p.

*) Отметим, что приведенный в [6] эскиз доказательства этого результата ошибочен. Поэтому, авторы не знают, справедлива ли приводимая ниже теорема.

Утверждение 5.1. *Если в множестве P можно выбрать такую точку p, что в пространстве можно разместить 4 изометричных экземпляра множеств U_p, попарно внутренним образом не пересекающихся, то $m(\mathbb{R}^n) < m(P)$.*

Далее, конечное подмножество P сферы S^{n-1} назовем *k-неразмещаемым*, если на сфере нельзя разместить k изометричных копий множества P так, чтобы угловое расстояние между этими копиями было не меньше чем $\pi/3$. В противном случае назовем P *k-размещаемым.* На этом языке утверждение 5.1 можно переформулировать так.

Утверждение 5.2. *Пусть P — конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, такое что $m(\mathbb{R}^n) = m(P)$. Тогда радиальная проекция множества P на сферу с центром в произвольной точке $p \in P$ является 4-неразмещаемой.*

Таким образом, наша задача сводится к оценке снизу количества точек в 4-неразмещаемом множестве точек. Отметим следующее:

— если система шаров радиуса $\pi/3$ с центрами в точках множества $P \subset S^{n-1}$ покрывает сферу, то множество P является 2-неразмещаемым;

— если множество P является 4-неразмещаемым и существует ортогональное преобразование O, такое что угловое расстояние между множествами P и $O(P)$ больше чем $\pi/3$, то множество $P \cup O(P)$ должно быть 2-неразмещаемым;

— если не существует ортогонального преобразования O, такого что угловое расстояние между множествами P и $O(P)$ больше чем $\pi/3$, то множество P является 2-неразмещаемым.

Оценим теперь количество точек в произвольном 2-неразмещаемом множестве. Для этого введем следующие обозначения:

$$I_m(x) = \int_0^x \sin^m(u)\,du, \qquad f(\theta, n) = \frac{2\,I_{n-2}(\pi/2)}{I_{n-2}(\theta)}.$$

Функция $f(\theta, n)$ — отношение объема сферы S^{n-1} к объему «сферической шапочки» углового радиуса θ.

Пусть P — произвольное конечное подмножество сферы S^{n-1}, и $p \in P$. Если P является 2-размещаемым, то должно существовать ортогональное преобразование O, такое что угловое расстояние между P и $O(P)$ больше или равно $\pi/3$. Если p и q — точки из P, не обязательно различные, то такое ортогональное преобразование O не может переводить точку p внутрь шара радиуса $\pi/3$ с центром в q. Мера Хаара множества таких ортогональных преобразований равна $1/f\left(\frac{\pi}{3}, n\right)$. Пусть $|P|$ — обозначает количество элементов в множестве P. Так как всего имеется $|P|^2$ пар точек, то всего имеется $|P|^2/f\left(\frac{\pi}{3}, n\right)$ «запрещенных» преобразований. Поэтому, если наше множество 2-размещаемо, то $|P|^2/f\left(\frac{\pi}{3}, n\right) < 1$. Итак, имеет место следующая оценка.

Лемма 5.1. *Пусть P — произвольное 2-неразмещаемое подмножество сферы S^{n-1}. Тогда*

$$|P|^2 \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}, d\right).$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 5.3 (Д. З. Ду, В. Д. Смит [11]). *Пусть $D^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — стандартный евклидов шар. Предположим, что существует* *такое конечное подмножество* $N \subset \mathbb{R}^n$, *на котором достигается отношение Штейнера. Тогда*

$$|N| \geqslant \left\lceil \frac{1}{2}\sqrt{f\left(\frac{\pi}{3}, n\right)}\right\rceil + 1,$$

где через $\lceil a \rceil$ *обозначается наименьшее целое число, больше или равное* a.

Отметим, что правая часть неравенства из теоремы 5.3 растет очень быстро с ростом n: так, при $n = 50$ она равна 53, а при $n = 200$ равна 3481911. Таким образом, если на конечном подмножестве в $\mathbb{R}^n$ (при достаточно больших n) достигается отношение Штейнера, то число точек этого подмножества должно быть очень велико — существенно больше, чем размерность n.

5.3. Проблема Тамма Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый БМ-шар, порождающий функцию расстояния ρ, и $\Sigma = \partial B$ — граница этого шара. Рассмотрим произвольное конечное подмножество $N \subset \Sigma$, и обозначим через $s(N)$ наименьшее расстояние между точками из N. Наибольшее из чисел $s(N)$ по всем $N \subset \Sigma$, состоящим из k точек, обозначим через $r_n^k(B)$.

Имеет место следующая оценка [6].

Теорема 5.4. *Пусть* $B \subset \mathbb{R}^n$ *— некоторый БМ-шар, и* $k \geqslant 3$ *— целое число. Тогда*

$$m(B) \leqslant \frac{k}{(k-1)r_n^k(B)}.$$

Отметим, что задача определения числа r_3^k называется *проблемой Тамма*, и что точное решение этой проблемы известно лишь при $k \leqslant 12$ и $k = 24$. С точки зрения теоремы 5.4, лучшая оценка получается при $k = 4$, где оптимальная конфигурация представляет собой множество вершин правильного тетраэдра. Как следствие, получаем следующий результат.

Следствие 5.1. *Отношение Штейнера трехмерного евклидова пространства не превосходит* $\sqrt{2/3}$.

§ 6. Некоторые нерешенные задачи

Задача 1. Проверить, справедлива ли гипотеза Гилберта–Поллака. Можно ли устранить пробелы в конструкции Ду–Хванга?

Задача 2. Для каких пространств отношение Штейнера достигается на конечных граничных множествах?

Замечание. Известно лишь несколько примеров таких пространств размерности 2, скажем ℓ_1^2.

Пусть B — произвольный БМ-шар в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что множество

$$\widehat{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in B\}$$

является БМ-шаром и называется *полярой* или *двойственным БМ-шаром* для B. Например, двумерные шары B_p^2 и B_q^2 являются двойственными при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Задача 3. Как связаны отношения Штейнера двойственных БМ-шаров? Интересно рассмотреть двумерный случай, даже случай двумерных ℓ_p-норм.

З а м е ч а н и е. В книге [7] высказывается гипотеза, что в двумерном случае имеет место равенство, а в случае больших размерностей — равенства нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И., О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p // Матем. сб. — 1966. — Т. 70, № 4. — P. 481–489.
2. Иванов А. О., Тужилин А. А. Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 6. — Р. 31–50.
3. Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. Отношение Штейнера для многообразий // Матем. заметки. — 2003. — (в печати).
4. Albrecht J. Das Steinerverhältnis endlich dimensionaler L_p-Räumen. — Master's Thesis, Ernst–Moritz–Arndt Universität Greifswald, 1997.
5. Chung F. R. K., Gilbert E. N. Steiner trees for the regular simplex // Bull. of the Inst. of Math. Ac. Sinica. — 1976. — V. 4. — P. 313–325.
6. Cieslik D. The Steiner minimal trees. — Boston–London–Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
7. Cieslik D. The Steiner ratio. — Boston–London–Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
8. Dekster B. V. Simplexes with prescribed edge length in Minkowski and Banach spaces. — Preprint, 1996.
9. Du D. Z., Gao B., Graham R. L., Liu Z. C., Wan P. J. Minimum Steiner trees in normed planes // Discrete and Comput. Geom. — 1993. — V. 9. — P. 351–370.
10. Du D. Z., Hwang F. K. A proof of Gilbert–Pollak conjecture on the Steiner ratio // Algorithmica. — 1992. — V. 7. — P. 121–135.
11. Du D. Z., Smith W. D. Disproofs of generalized Gilbert–Pollak conjecture on the Steiner ratio in three or more dimensions // J. Combin. Theory. — 1996. — V. 74, A. — P. 115–130.
12. Gao B., Du D. Z., Graham R. L. A tight lower bound for the Steiner ratio in Minkowski planes // Discrete Mathematica. — 1995. — V. 142. — P. 49–63.
13. Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S. The complexity of computing Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1977. — V. 32. — P. 835–859.
14. Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — V. 16, No 1. — P. 1–29.
15. Graham R. L., Hwang F. K. A remark on Steiner minimal trees // Bull. of the Inst. of Math. Ac. Sinica. — 1976. — V. 4. — P. 177–182.
16. Hwang F. K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. — 1976. — V. 30. — P. 104–114.
17. Hwang F. K., Richards D., Winter P. The Steiners Tree Problem. — Elsevier Science Publishers, 1992.
18. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations. — N.W., Boca Raton, Florida, CRC Press, 1994.
19. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching solutions of one-dimensional variational problems. — World Scientific, 2001.
20. John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. — Courant Anniversary Volume, Interscience, 1948. — P. 187–204.
21. Lee D. T., Shen C. F. The Steiner minimal tree problem in the λ-geometry plane // Lecture Notes in Comp. Science. — 1996. — V. 1178. — P. 247–255.
22. Leichtweiss K. Konvexe Mengen. — Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
23. Liu Z. C., Du D. Z. On Steiner minimal trees with L_p-distance // Algorithmica. — 1992. — V. 7. — P. 179–192.
24. Lyubich Y. I., Vaserstein L. N. Isometric embeddings between classical Banach spaces, cubature formulas, and spherical designs. — Preprint 1/4/92, SUNY at Stony Brook and PSU at University Park, 1992.
25. Lyubich Y. I., Vaserstein L. N. Isometric embeddings between classical Banach spaces, cubature formulas, and spherical designs // Geometriae Dedicata. — 1993. — V. 47. — P. 327–362.
26. Rubinstein J. H., Thomas D. A. A variational approach to the Steiner network problem // Ann. Oper. Res. — 1991. — V. 33. — P. 481–499.
27. Rubinstein J. H., Weng J. F. Graham's problem on shortest networks for points on a circle // Algorithmica. — 1992. — V. 7. — P. 193–218.
28. Rubinstein J. H., Weng J. F. Compression theorems and Steiner ratios on spheres // — J. Combin. Optimization. — 1997. — V. 1. — P. 67–78.

29. Sarrafzadeh M., Wong C. K. Hierarchical Steiner tree construction in uniform orientations. — Preprint.
30. Smith W. D. How to find minimal trees in Eucliden d-space // Algorithmica. — 1992. — V. 7. — P. 137–178.
31. Smith W. D., Smith J. M. On the Steiner ratio in 3-space // J. of Combinatorial Theory. — 1995. — V. 65, Ser. A. — P. 301–332.
32. Thomas D. A., Rubinstein J. H., Cole T. The Steiner minimal network for convex configuration. — The Univ. of Melbourne, Depart. of Math., Research report, Preprint N 15, 1991.

Поступило в редакцию 15 IX 2001