

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

В. Н. Сорокин

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ π^4

Москва, 2002 г.

Сорокин В. Н. *Об одном алгоритме быстрого вычисления π^4 .*

Аннотация

Используя аппроксимации Эрмита-Паде для системы марковских функций, образующих циклический граф, получены рациональные приближения числа π^4 , удовлетворяющие трехчленному рекуррентному соотношению.¹

Sorokin V. N. *On algorithm of fast calculation of the number π^4*

Abstract

By using Hermite-Pade approximants for the system of Markov functions are consisted a cyclic graph there are found rational approximations of the number π^4 are satisfying three-term recurrence relations.

¹Работа частично поддержана грантами

1) РФФИ 99-01-01251,
2) РФФИ 00-15-96132,
3) INTAS 2000-272.

1. Введение

1.1.

В 1978 г. произошел прорыв в поставленной Эйлером проблеме об арифметической природе значений дзета-функции в нечетных точках. Французский математик Роджер Апери получил первый и до сих пор единственный в этом направлении результат – он доказал [1], что число $\zeta(3)$ иррациональное.

Апери предъявил рекуррентное соотношение, с помощью которого вычисляются диофантовы приближения этого числа:

$$n^3 u_n - (2n - 1)(17n^2 - 17n + 5)u_{n-1} + (n - 1)^3 u_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ два линейно независимых решения, которые задаются следующими начальными условиями:

$$\begin{cases} a_0 = 1 & b_0 = 0 \\ a_1 = 5 & b_1 = 6 \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1.° числа a_n целые;

2.° числа b_n рациональные, знаменатели которых делят число ω_n^3 , где

$$\omega_n = \text{LCM}\{1, 2, \dots, n\};$$

3.° аппроксимации

$$r_n = a_n \zeta(3) - b_n$$

сходятся к нулю со скоростью

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n|^{1/n} = (\sqrt{2} - 1)^4;$$

4.° числа a_n растут со скоростью

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = (\sqrt{2} + 1)^4.$$

Согласно закону распределения простых чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{1/n} = e.$$

Поскольку

$$e^3 (\sqrt{2} - 1)^4 < 1,$$

то из первых трех утверждений следует, что приближения

$$r_n^* = q_n \zeta(3) - p_n,$$

(где $q_n = \omega_n^3 a_n$, $p_n = \omega_n^3 b_n$ — натуральные числа) стремятся к нулю, но не равны нулю. Другими словами, r_n^* суть диофантовы приближения числа $\zeta(3)$, и это число иррациональное. Применяя четвертое утверждение легко получить оценку меры иррациональности, а именно:

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^{14}}.$$

1.2.

Вскоре Ф.Бекерс [2] заметил, что приближения Апери могут быть получены из аппроксимаций Эрмита-Паде для одной системы функций марковского типа. Функции в конструкции Бекерса образуют систему Никишина, которая изображается следующим линейным графом:

$$(2h - \varepsilon d) \rightarrow (d - \varepsilon e) \rightarrow \varepsilon \rightarrow 1,$$

где

$$e(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n} = -\ln(1 - 1/z)$$

логарифмическая функция,

$$d(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n^2} \quad \text{и} \quad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n^3}$$

соответственно второй и третий дилогарифмы, и наконец,

$$\varepsilon(z) = \ln \frac{1}{z}.$$

Об аппроксимациях Эрмита-Паде и графах-деревьях см. [3].

Впоследствии мною были найдены другие системы Никишина, также приводящие к приближениям Апери. В работе [4] изучался граф

$$C \rightarrow (d - d(1)) \rightarrow e \rightarrow 1,$$

где

$$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

В работе [5] были предложены две двойственные задачи:

$$c \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow 1$$

и

$$(c - \varepsilon f - \delta e) \rightarrow \delta \rightarrow \varepsilon \rightarrow 1,$$

где

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}, \quad c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}$$

и

$$\delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n^2}.$$

1.3.

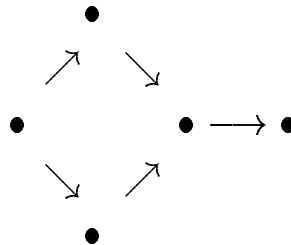
Результат Апери вызвал большой интерес к проблеме Эйлера – было предпринято много попыток атаковать другие значения дзета-функции, но все они оказались безуспешными.

Мною был проведен тщательный анализ различных систем Никишина, из которого можно сделать вывод, что по-видимому, кроме как для чисел $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ таких линейных графов (и даже графов-деревьев) не существует. Это вовсе не означает, что с помощью таких конструкций нельзя получать другие арифметические результаты. Так например, недавно именно на этом пути был получен любопытный результат. Было доказано [6], что среди чисел

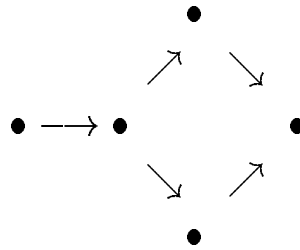
$$\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$$

есть бесконечно много иррациональных.

Значительно более гибкий инструмент нам дают пока еще мало изученные циклические графы. И это неудивительно – по-существу, мы имеем дело с произведениями полилогарифмов. В работах [7], [8] я рассмотрел две двойственные задачи с циклическими графами вида



и соответственно

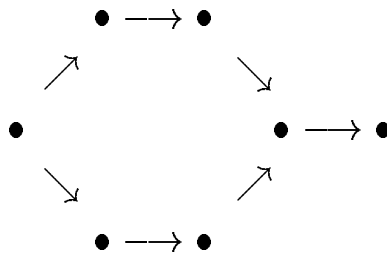


Эти задачи также приводят к приближениям Апери. (Работа [7] содержит обзор всех известных в этом направлении результатов и исчерпывающую библиографию.)

Циклические графы позволяют строить хорошие рациональные приближения и для других значений дзета-функции. В январе 1998 г. мы объединили свои усилия с М.Прево (автором одного оригинального доказательства теоремы Апери [9]) для атаки на число $\zeta(4)$. Безусловно, хорошо известно, что это число иррациональное, поскольку

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

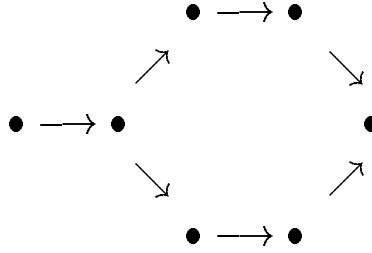
но при этом нет ни одной удовлетворительной оценки меры иррациональности данного числа. Мы рассмотрели граф следующего вида:



Нам не удалось получить в явном виде решения соответствующей задачи Эрмита-Паде, поэтому мы провели численный эксперимент. По поведению первых пятнадцати аппроксимаций можно было бы сделать вывод, что мы имеем дело с диофантовыми приближениями, но затем эти приближения начали расходиться.

1.4.

Недавно я рассмотрел двойственную задачу для графа



Для этого случая я получил интегральное представление аппроксимаций Эрмита-Паде, исследовал их асимптотику. Действительно, эти приближения оказались не диофантовыми. Тем не менее, построены рациональные приближения для числа π^4 , удовлетворяющие простому трехчленному рекуррентному соотношению и имеющие высокую скорость сходимости.

Изучению этой конструкции и посвящена настоящая работа. Сформулируем ее основной результат.

Теорема 1 Если $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательности рациональных чисел, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$3n^3(3n-1)(3n+1)u_n - 6(2n-1)(3n^2-3n+1)(15n^2-15n+4)u_{n-1} - 4(n-1)^5u_{n-2} = 0 \quad (*)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 13 \end{cases}$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\pi^4}{30} - \frac{b_n}{a_n} \right|^{1/n} = (26 - 15\sqrt{3})^2 < \frac{1}{2500}.$$

Подчеркнем, что в теореме 1 приближение числа π^4 осуществляется рациональными числами, а не алгебраическими с растущими степенями, которые безусловно могут обеспечить сверхвысокую скорость приближения.

Полученный результат может быть представлен в форме разложения числа π^4 в некоторую непрерывную дробь. Сделаем перенормировку

$$U_n = (3n-1)!!!(3n)!!!(3n+1)!!!n!n!u_n.$$

Получим следующее рекуррентное соотношение:

$$U_n - q(n)U_{n-1} - p(n)U_{n-2} = 0,$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$,

$$\begin{aligned} q(n) &= 6(2n - 1)(3n^2 - 3n + 1)(15n^2 - 15n + 4), \\ p(n) &= 4(n - 1)^7(3n - 4)(3n - 3)(3n - 2). \end{aligned}$$

Это рекуррентное соотношение (с учетом начальных условий) равносильно разложению числа $\pi^4/30$ в следующую непрерывную дробь:

$$\frac{\pi^4}{30} = \frac{78}{q(1) + \frac{p(2)}{q(2) + \frac{p(3)}{q(3) + \dots}}}$$

В заключение отметим, что недавно В.Зудилин получил то же рекуррентное соотношение (*), но используя совершенно иную технику [10].

2. Что приближаем?

2.1.

Рассмотрим следующий граф

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi & \longrightarrow & \varepsilon \\ & \nearrow & & & \searrow \\ A & \longrightarrow & B & & 1 \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & & \varphi^* & \longrightarrow & \varepsilon^* \end{array}$$

Он служит определением некоторых специальных функций. А именно, функция $\varepsilon(x)$ по определению является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon'(x) = -\frac{1}{x} \\ \varepsilon(1) = 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$\varepsilon(x) = \ln \frac{1}{x},$$

при этом берется главная ветвь логарифма в окрестности точки $x = 1$. В качестве области определения этой функции возьмем плоскость с разрезом

$$\mathbb{G}_- = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta_-, \quad \Delta_- = [-\infty, 0].$$

Функция $\varepsilon(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_- . В круге $|1 - x| < 1$ она раскладывается в ряд Тейлора:

$$\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - x)^n.$$

Коэффициенты этого ряда суть рациональные числа. В точке $x = 0$ функция $\varepsilon(x)$ имеет логарифмическую особенность.

Функция $\varepsilon^*(x)$ по определению есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \varepsilon^{*'}(x) = \frac{1}{1-x} \\ \varepsilon^*(0) = 0. \end{cases}$$

Эта функция голоморфна в области

$$\mathbb{G}_+ = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta_+, \quad \Delta_+ = [1, +\infty].$$

Относительно преобразования

$$x \mapsto 1 - x$$

функции $\varepsilon(x)$ и $\varepsilon^*(x)$ связаны четным образом, т.е.

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^*(1 - x).$$

Функция $\varphi(x)$ по определению есть решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -\frac{1}{x(1-x)}\varepsilon(x) \\ \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_- . В круге $|1 - x| < 1$ она раскладывается в ряд Тейлора:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}.$$

Коэффициенты этого ряда суть рациональные числа. В точке $x = 0$ функция $\varphi(x)$ имеет логарифмическую особенность.

Функция $\varphi^*(x)$ по определению есть решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi^{*'}(x) = \frac{1}{x(1-x)}\varepsilon^*(x) \\ \varphi^*(0) = 0. \end{cases}$$

Функция $\varphi^*(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_+ . Функции $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ связаны четным образом, т.е.

$$\varphi(x) = \varphi^*(1 - x).$$

Функция $B(x)$ по определению есть решение задачи Коши:

$$\begin{cases} B'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x} - \frac{\varphi^*(x)}{x} \\ B(0) = B(1) = 0. \end{cases}$$

В силу симметрии начальные условия, поставленные в двух точках, непротиворечивы. Легко проверить, что

$$B(x) = \varepsilon(x)\varphi^*(x) + \varepsilon^*(x)\varphi(x).$$

Функция $B(x)$ голоморфна в области

$$\mathbb{G}_* = \bar{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_- \cup \Delta_+).$$

Функция $B(x)$ четная, т.е.

$$B(x) = B(1 - x).$$

Функция $A(x)$ по определению есть решение задачи Коши:

$$\begin{cases} A'(x) = \frac{1}{x(1-x)}B(x) \\ A(1/2) = 0. \end{cases}$$

Функция $A(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_* . Эта функция нечетная, т.е.

$$A(x) = -A(1 - x).$$

Функцию $A(x)$ можно записать следующим интегралом

$$A(x) = \int_{1/2}^x \frac{B(t)}{t(1-t)} dt.$$

2.2.

Вычислим значение $A(1)$. Используя четность функции B получим

$$A(1) = \int_{1/2}^1 \frac{B(t)}{t(1-t)} dt = \int_0^1 \frac{B(t)}{t} dt.$$

Таким образом

$$A(1) = A_0 + A_1,$$

где

$$A_0 = \int_0^1 \frac{\varepsilon(t)\varphi^*(t)}{t} dt, \quad A_1 = \int_0^1 \frac{\varepsilon^*(t)\varphi(t)}{t} dt.$$

Вначале вычислим значения этих интегралов в терминах кратных числовых рядов. Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 t^{n-1} \varepsilon(t) dt = \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно,

$$A_0 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \frac{\varepsilon(t) dt}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Следовательно,

$$A_1 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{1}{n} \frac{\varphi(t) dt}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Рассмотрим числовые ряды

$$\sigma_{1,3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^3}, \quad \sigma_{2,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Выразим значения этих сумм через значения дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Запишем

$$\sigma_{1,3} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{(p+q)^3}.$$

Раскладывая рациональную функцию в сумму простейших дробей, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{1,3} &= \sum_{p,q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^3} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} \right) - \frac{1}{q^2} \frac{1}{(p+q)^2} - \frac{1}{q} \frac{1}{(p+q)^3} \right) = \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^3} \sum_{p=1}^q \frac{1}{p} - \sigma_{2,2} - \sigma_{1,3} = \zeta(4) - \sigma_{2,2}. \end{aligned}$$

Откуда находим

$$\sigma_{1,3} + \sigma_{2,2} = \zeta(4).$$

Окончательно,

$$A(1) = \left(\sigma_{1,3} + \zeta(4) \right) + \left(\sigma_{2,2} + \zeta(4) \right) = 3\zeta(4).$$

Известно, что

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Следовательно,

$$A(1) = \frac{\pi^4}{30}.$$

2.3.

Все функции

$$A, B, \varphi, \varphi^*, \varepsilon, \varepsilon^*$$

голоморфны в области \mathbb{G}_* и, в частности, раскладываются в ряды Тейлора по степеням $x - 1/2$, сходящиеся в круге $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. Удобно сделать замену переменной

$$y = 2x - 1, \quad x = \frac{1 + y}{2}.$$

Тогда получим ряды по степеням y , сходящиеся в единичном круге. Найдем эти ряды. Очевидно, что коэффициенты рядов будут числами иррациональными. Поэтому при вычислении коэффициентов будем выделять различные иррациональности.

Имеем

$$\begin{cases} \varepsilon^*(x) = \ln 2 + \varepsilon^*(y) \\ \varepsilon(x) = \ln 2 + \varepsilon^*(-y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Справедлива формула

$$\frac{d}{dy} \varphi^*(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \varphi^*(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x(1-x)} \varepsilon^*(x) = \frac{2}{1-y^2} \left(\ln 2 + \varepsilon^*(y) \right).$$

Следовательно,

$$\varphi^*(x) = \varphi^*\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^y \left(\ln 2 + \varepsilon^*(s) \right) \frac{2}{1-s^2} ds.$$

Обозначим $\zeta = \varphi^*(1/2)$. (Легко видеть, что $\zeta = \pi^2/12$.) Тогда

$$\varphi^*(x) = \zeta + \ln 2 \cdot \lambda(y) + \chi(y). \quad (2.2)$$

При этом

$$\lambda(y) = \int_0^y \frac{2}{1-s^2} ds = \varepsilon^*(y) - \varepsilon^*(-y) = \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Функция $\lambda(y)$ голоморфна в плоскости с разрезами

$$\mathbb{D}_* = \bar{\mathbb{C}} \setminus ([-\infty, -1] \cup [+1, +\infty]).$$

Эта функция нечетная, т.е.

$$\lambda(-y) = -\lambda(y).$$

В круге $|y| < 1$ функция $\lambda(y)$ раскладывается в следующий ряд Тейлора с рациональными коэффициентами

$$\lambda(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} y^{2n-1}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \chi(y) &= \int_0^y \frac{2}{1-s^2} \varepsilon^*(s) ds = 2 \int_0^y \sum_{p=1}^{\infty} s^{2p-2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{s^q}{q} ds = \\ &= 2 \int_0^y \sum_{n=2}^{\infty} s^{n-1} \sum_{q+2p=n+1} \frac{1}{q} ds. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\chi(y) = \sum_{n=2}^{\infty} y^n \frac{2}{n} \sum_{1 \leq p \leq n/2} \frac{1}{n-2p+1}.$$

Этот ряд с рациональными коэффициентами сходится в единичном круге. Функция $\chi(y)$ голоморфна в области \mathbb{D}_* . Как следствие получим, что

$$\varphi(x) = \zeta - \ln 2 \cdot \lambda(y) + \chi(-y). \quad (2.3)$$

Перемножая разложения (2.1), (2.2), (2.3) получим

$$B = 2\zeta \cdot \ln 2 + \zeta \cdot \beta_{\zeta}(y) + \ln 2 \cdot \beta_l(y) + \beta_*(y),$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{\zeta}(y) &= \varepsilon^*(y) + \varepsilon^*(-y), \\ \beta_l(y) &= \left(\chi(y) + \chi(-y) \right) + \left(\lambda(y)\varepsilon^*(-y) - \lambda(y)\varepsilon^*(y) \right), \\ \beta_*(y) &= \varepsilon^*(y)\chi(y) + \varepsilon^*(-y)\chi(y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функции (2.4) голоморфны в области \mathbb{D}_* . В круге $|y| < 1$ они раскладываются в ряды Тейлора с рациональными коэффициентами. Ниже мы обо-

значаем $\hat{F}(n)$ – коэффициент при y^n ряда $F(y)$. Имеем

$$\hat{\beta}_\zeta(2n) = \frac{1}{n}$$

$$\hat{\beta}_l(2n) = -\frac{2}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1}$$

$$\hat{\beta}_*(2n) = 2 \sum_{q=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2n-2q} \frac{1}{q} \sum_{m=1}^q \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2n-2q-1} \frac{1}{2q+1} \sum_{m=1}^q \frac{1}{q+1-m} \right)$$

Коэффициенты с нечетными номерами равны нулю. Функции (2.4) четные. Далее

$$A(x) = 2\zeta \ln 2 \cdot \lambda(y) + \zeta \cdot \alpha_\zeta(y) + \ln 2 \cdot \alpha_l(y) + \alpha_*(y),$$

где функция $\lambda(y)$ была определена выше, а функции α_ζ , α_l и α_* являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \alpha_\zeta(y) = \frac{2}{1-y^2} \beta_\zeta(y) \\ \alpha_\zeta(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dy} \alpha_l(y) = \frac{2}{1-y^2} \beta_l(y) \\ \alpha_l(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dy} \alpha_*(y) = \frac{2}{1-y^2} \beta_*(y) \\ \alpha_*(0) = 0 \end{cases}$$

Все эти функции, включая $\lambda(y)$, голоморфны в области \mathbb{D}_* и являются нечетными. В круге $|y| < 1$ они раскладываются в ряды Тейлора со следующими рациональными коэффициентами:

$$\alpha_j(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{2n-1} \frac{2}{2n-1} \sum_{q=1}^{n-1} \hat{\beta}_j(2q), \quad j = \zeta, l, *.$$

2.4.

Для функций, определенных в п.2.1, определим весовые функции. Если функция $F(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_* и принимает вещественные значения на интервале $(0, 1)$, то ее весом будем называть следующую функцию, определенную формулами Сохоцкого:

$$(\mathcal{W}^\pm F)(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x \pm i \cdot 0), \quad x \in \operatorname{Int} \Delta_\pm.$$

Все интересующие нас весовые функции выражаются через некоторые специальные функции, к определению которых мы переходим.

Положим

$$e(x) = \ln \frac{1}{1 - 1/x}.$$

Эта функция голоморфна в области

$$\mathbb{G}_0 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta_0, \quad \Delta_0 = [0, 1].$$

(Берется главная ветвь логарифма.) Заметим, что это марковская функция:

$$e(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x-t}.$$

В области $|x| > 1$ функция $e(x)$ раскладывается в ряд Лорана:

$$e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{x^n}.$$

Эта функция нечетная:

$$e(x) = -e(1-x).$$

Ее производная вычисляется по формуле:

$$e'(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Рассмотрим теперь марковскую функцию

$$d(x) = \int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{x-t} dt.$$

Эта функция голоморфна в области \mathbb{G}_0 . В области $|x| > 1$ она раскладывается в ряд Лорана:

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \frac{1}{n^2}.$$

Функция $d(x)$ — это второй дилогарифм. Производная этой функции вычисляется по формуле:

$$d'(x) = -\frac{1}{x} e(x).$$

Заметим, что

$$d(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Будем использовать обозначение:

$$d^\dagger(x) = d(x) - d(1).$$

Дифференцированием легко доказывается следующая формула:

$$d^\dagger(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)e(x). \quad (2.5)$$

Рассмотрим марковскую функцию

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\varepsilon^*(t)}{x-t} dt.$$

Эта функция голоморфна в области \mathbb{G}_0 . В области $|x| > 1$ она раскладывается в ряд Лорана:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}.$$

Производная этой функции вычисляется по формуле:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} e(x).$$

Функции $d(x)$ и $f(x)$ связаны нечетным образом:

$$f(x) = -d(1-x).$$

В частности, $f(0) = -\zeta(2)$. Будем использовать обозначение:

$$f^\dagger(x) = f(x) - f(0).$$

Легко проверяется следующая формула:

$$f^\dagger(x) = -\varphi^*(x) + \varepsilon^*(x)e(x). \quad (2.6)$$

Рассмотрим марковскую функцию

$$C(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{x-t} dt.$$

Эта функция голоморфна в области \mathbb{G}_0 . В области $|x| > 1$ она раскладывается в ряд Лорана:

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Производная этой функции вычисляется по формуле:

$$C'(x) = -\frac{d^\dagger(x)}{x(1-x)}.$$

Заметим, что

$$C(1) = 2\zeta(3).$$

Действительно, интегрируя по частям и используя симметрию, получим

$$C(1) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{1-t} dt = \varepsilon^*(t)\varphi(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\varepsilon^*(t)\varepsilon(t)}{t(1-t)} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 \frac{\varepsilon^*(t)\varepsilon(t)}{t} dt = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n \frac{\varepsilon(t) dt}{t} = \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = 2\zeta(3).
\end{aligned}$$

Будем использовать обозначение:

$$C^\dagger(x) = C(x) - C(1).$$

Рассмотрим марковскую функцию:

$$H(x) = \int_0^1 \frac{\varphi^*(t)}{x-t} dt.$$

Эта функция голоморфна в области \mathbb{G}_0 . В области $|x| > 1$ она раскладывается в ряд Лорана:

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \frac{1}{n} \left\{ \zeta(2) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right\}.$$

Производная этой функции вычисляется по формуле:

$$H'(x) = \frac{f^\dagger(x)}{x(1-x)}.$$

Функции $C(x)$ и $H(x)$ связаны между собой нечетным образом:

$$H(x) = -C(1-x).$$

В частности, $H(0) = -2\zeta(3)$. Будем использовать обозначение:

$$H^\dagger(x) = H(x) - H(0).$$

Дифференцированием легко проверить тождество:

$$C^\dagger(x) = 2\psi(x) + \varphi(x)e(x), \quad (2.7)$$

где функция $\psi(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \psi'(x) = -\frac{\varphi(x)}{x(1-x)} \\ \psi(1) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $\psi(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_- . В круге $|1-x| < 1$ она раскладывается в следующий степенной ряд:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \frac{1}{l}.$$

Для функции $H^\dagger(x)$ справедливо аналогичное тождество:

$$H^\dagger(x) = -2\psi^*(x) + \varphi^*(x)e(x), \quad (2.8)$$

где $\psi^*(x) = \psi(1-x)$. Функция $\psi^*(x)$ голоморфна в области \mathbb{G}_+ .

Теперь мы можем перейти к вычислению весовых функций. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{cases} \mathcal{W}^+\varepsilon^*(x) = 1 \\ \mathcal{W}^-\varepsilon^*(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{W}^-\varepsilon(x) = 1 \\ \mathcal{W}^+\varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

Далее, из формул (2.5) и (2.6) следует, что

$$\begin{cases} \mathcal{W}^+\varphi^*(x) = e(x) \\ \mathcal{W}^-\varphi^*(x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{W}^-\varphi(x) = -e(x) \\ \mathcal{W}^+\varphi(x) = 0 \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} \mathcal{W}^+B(x) = d^\dagger(x) \\ \mathcal{W}^-B(x) = -f^\dagger(x). \end{cases}$$

И наконец,

$$\begin{cases} \mathcal{W}^+A(x) = -C^\dagger(x) \\ \mathcal{W}^-A(x) = -H^\dagger(x). \end{cases}$$

Изобразим граф весовых функций:

$$\begin{array}{ccc} & & -e \longrightarrow -1 \\ & \nearrow & \\ \begin{cases} -H^\dagger \\ -C^\dagger \end{cases} & \longrightarrow & \begin{cases} -f^\dagger \\ d^\dagger \end{cases} \\ & \searrow & \\ & & e \longrightarrow 1 \end{array}$$

3. Как приближаем?

3.1.

Зафиксируем целое неотрицательное число n . Рассмотрим функцию

$$R_n(x) = A_n(x)A(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ B_n(x)B(x) + \begin{matrix} \left\{ \Phi_n(x)\varphi(x) + E_n(x)\varepsilon(x) \\ \Phi_n^*(x)\varphi^*(x) + E_n^*(x)\varepsilon^*(x) \right\} \\ + J_n(x) \end{matrix} \right\},$$

где A_n — многочлен степени не выше $2n$, а

$$B_n, \Phi_n, \Phi_n^*, E_n, E_n^*, J_n$$

многочлены степени не выше $4n$. Мы будем искать нетривиальную линейную форму такого вида, удовлетворяющую некоторым интерполяционным условиям.

Основное интерполяционное условие ставится в точке $x = 1/2$, а именно:

$$R_n(x) = O\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^{4n+1}\right), \quad x \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

Мы хотим получить в качестве решения многочлены с рациональными коэффициентами. Поэтому заменим одно интерполяционное условие (3.1) системой таких условий, выделяя в коэффициентах степенных рядов различные иррациональности. По-прежнему используем обозначение

$$y = 2x - 1.$$

Выделяя иррациональность $2\zeta \ln 2$, получим

$$A_n(x)\lambda(y) + \left(\frac{4}{1-y^2}\right)^n B_n(x) = O(y^{4n+1}), \quad y \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Выделяя иррациональность ζ , получим

$$A_n(x)\alpha_\zeta(y) + \left(\frac{4}{1-y^2}\right)^n \left\{ B_n(x)\beta_\zeta(y) + \begin{matrix} \left\{ \Phi_n(x) \\ \Phi_n^*(x) \right\} \end{matrix} \right\} = O(y^{4n+1}), \quad y \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Выделяя иррациональность $\ln 2$, будем иметь

$$A_n(x)\alpha_l(y) + \left(\frac{4}{1-y^2}\right)^n \left\{ B_n(x)\beta_l(y) + \right. \\ \left. + \begin{Bmatrix} -\Phi_n(x)\lambda(y) + E_n(x) \\ \Phi_n^*(x)\lambda(y) + E_n^*(x) \end{Bmatrix} \right\} = O(y^{4n+1}), \quad y \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

И наконец, выделяем рациональную часть:

$$A_n(x)\alpha_*(y) + \left(\frac{4}{1-y^2}\right)^n \left\{ B_n(x)\beta_*(y) + \right. \\ \left. + \begin{Bmatrix} \Phi_n(x)\chi(-y) + E_n(x)\varepsilon^*(-y) \\ \Phi_n^*(x)\chi(y) + E_n^*(x)\varepsilon^*(y) \end{Bmatrix} + J_n(x) \right\} = O(y^{4n+1}), \quad y \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

3.2.

Для функции $R_n(x)$ определим весовую функцию по формулам Сохоцкого:

$$\begin{cases} C_n^\dagger := \mathcal{W}^+ R_n(x) \\ H_n^\dagger := \mathcal{W}^- R_n(x) \end{cases}$$

Тогда

$$C_n^\dagger(x) = -A_n(x)C_n^\dagger(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ B_n(x)d^\dagger(x) + \Phi_n^*(x)e(x) + E_n^*(x) \right\}$$

и

$$H_n^\dagger(x) = -A_n(x)H_n^\dagger(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ -B_n(x)f^\dagger(x) - \Phi_n(x)e(x) + E_n(x) \right\}.$$

Для того, чтобы обеспечить быстрое стремление к нулю величин $R_n(1)$ потребуем, чтобы

$$\begin{cases} C_n^\dagger(x) = O((1-x)^{n+1}), & x \rightarrow 1, & (3.6) \\ H_n^\dagger(x) = O(x^{n+1}), & x \rightarrow 0. & (3.7) \end{cases}$$

Заметим, что функция $C_n^\dagger(x)$ имеет в точке $x = 1$ логарифмическую особенность. (Аналогично, функция $H_n^\dagger(x)$ имеет логарифмическую особенность в точке $x = 0$. Поэтому здесь и в дальнейшем символ $O(\cdot)$ мы понимаем с точностью до логарифмических особенностей. Расшифруем условие (3.6). Выделяя логарифмическую особенность $e(x)$, получим

$$\begin{aligned} -A_n(x)\varphi(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ B_n(x)\varepsilon(x) + \Phi_n^*(x) \right\} = \\ = O((1-x)^{n+1}), \quad x \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выделяя голоморфную часть, будем иметь

$$\begin{aligned} -A_n(x) \cdot 2\psi(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ B_n(x)\varphi(x) + E_n^*(x) \right\} = \\ = O((1-x)^{n+1}), \quad x \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Расшифруем условие (3.7). Выделяя логарифмическую особенность $e(x)$, получим

$$\begin{aligned} A_n(x)\varphi^*(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ B_n(x)\varepsilon^*(x) + \Phi_n(x) \right\} = \\ = O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Выделяя голоморфную часть, будем иметь

$$\begin{aligned} A_n(x) \cdot 2\psi^*(x) + \frac{1}{x^n(1-x)^n} \left\{ B_n(x)\varphi^*(x) + E_n(x) \right\} = \\ = O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.3.

В дальнейшем нас будут интересовать значения функции $R_n(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому включим в условия задачи требование конечности этих значений:

$$R_n(0) \neq \infty, \quad R_n(1) \neq \infty, \quad (3.12)$$

Расшифруем второе условие в (3.12). Учитывая (2.5) и (2.7), получим следующее соотношение:

$$\Phi_n(x)\varphi(x) + E_n(x)\varepsilon(x) + J_n(x) = O((1-x)^n), \quad x \rightarrow 1. \quad (3.13)$$

Расшифруем первое условие в (3.12). Учитывая (2.6) и (2.8), получим соотношение:

$$\Phi_n^*(x)\varphi^*(x) + E_n^*(x)\varepsilon^*(x) + J_n(x) = O(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

3.4.

Итак, мы пришли к следующей задаче.

Задача 1 *Требуется найти нетривиальный набор многочленов*

$$A_n \text{ и } B_n, \Phi_n, \Phi_n^*, E_n, E_n^*, J_n \quad (3.15)$$

степени не выше $2n$ и $4n$ соответственно, такой чтобы выполнялись интерполяционные условия (3.2)-(3.5), (3.8)-(3.11), (3.13), (3.14).

Эта задача сводится к системе линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов многочленов (3.15). Подсчитаем число неизвестных:

$$(2n + 1) + 6(4n + 1) = 26n + 7.$$

Подсчитаем число уравнений:

$$(4n + 1) + 4(2n + 1) + 2n = 26n + 8.$$

Учитывая симметрию системы можно сделать вывод, что задача имеет нетривиальное решение (причем симметричное). А именно, функция $R_n(x)$ нечетная, т.е.

$$R_n(x) = -R_n(1 - x).$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} A_n(x) &= A_n(1 - x) \\ B_n(x) &= -B_n(1 - x) \\ \Phi_n(x) &= -\Phi_n^*(1 - x) \\ E_n(x) &= -E_n^*(1 - x) \\ J_n(x) &= -J_n(1 - x). \end{aligned}$$

Поскольку многочлены B_n и J_n нечетные, то их степени фактически не превосходят $4n - 1$. Поскольку система имеет рациональные коэффициенты, то можно считать, что многочлены (3.15) также имеют рациональные коэффициенты.

В следующем параграфе мы найдем явный вид решения задачи 1. Из рассуждений этого параграфа будет также вытекать единственность решения (с точностью до нормировки). Точнее, мы аргументируем, что решение $R_n(x)$ нечетная функция, и получим единственность такого решения. Однако, если повторить все рассуждения для четной функции, то легко можно придти к выводу, что такое решение может быть только тривиальным.

4. Формулы Родрига и интегральное представление

4.1.

Одним из основных результатов работы является следующая

Теорема 2

1) Решение задачи 1 существует и единственно (с точностью до нормировки).

2) При некоторой нормировке справедливо интегральное представление:

$$\begin{aligned} \frac{(-4)^{n+1} R_n(x)}{p^{2n+1/2}} &= \int_1^\infty \frac{d\mu}{\mu^{n+1/2}(\mu-p)^{n+1}} \int_\mu^1 \frac{(\lambda-\mu)^n d\lambda}{\lambda^{1/2}(1-\lambda)^{n+1}} \\ &\cdot \int_\lambda^1 \frac{(u-\lambda)^n du}{u^{n+1/2}(1-u)^{n+1}} \int_u^1 \frac{(r-u)^n dr}{r^{1/2}(1-r)^{n+1}} \\ &\cdot \int_r^1 (s-r)^n (1-s)^n ds \int_s^\infty \frac{(t-s)^n dt}{t^{2n+3/2}(1-t)^{n+1}}, \quad (4.1) \end{aligned}$$

где $p = (2x-1)^2$, и ветви многозначных функций в обеих частях равенства согласованы между собой.

3) Многочлен A_n определяется следующей последовательностью формул Родрига:

$$\frac{A_n}{p^{2n+1/2}} = \frac{4^n}{n!} \left(\frac{d}{dp} \right)^n \frac{\tilde{A}_n}{p^{n+1/2}}, \quad (4.1a)$$

$$\tilde{A}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\frac{d}{dq} \right)^n \left\{ \frac{(p-q)^n \bar{B}_n}{\sqrt{q}} \right\} \Big|_{q=1}, \quad (4.1b)$$

$$\bar{B}_n = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dv} \right)^n \left\{ \frac{(p-v^2)^n (1-v)^n \Phi_n^{*\#}}{v^{2n}} \right\} \Big|_{v=-1}, \quad (4.1c)$$

$$(1-y)^{2n+1} \Phi_n^{*\#} = \frac{1}{4^n} \int_1^y (y^2-t^2)^n (1-t^2)^n \Phi_n^b dt, \quad (4.1d)$$

$$(1-p)^{2n+1} \Phi_n^b = \int_1^p (p-q)^n (1-q)^n Q_n dq, \quad (4.1e)$$

$$p^{n+1/2} Q_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dp} \right)^n \left\{ (1-p)^n p^{2n+1/2} \right\}. \quad (4.1f)$$

Доказательству теоремы 2 посвящены все последующие пункты 4.2 – 4.10 настоящего параграфа.

4.2.

Из условий задачи 1 следует, что во-первых, имеет место следующее интегральное представление:

$$\frac{R_n(x)}{(2x-1)^{4n+1}} = \int_{-\infty}^0 \frac{H_n^\dagger(t)}{x-t} \frac{dt}{(2t-1)^{4n+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{C_n^\dagger(t)}{t-x} \frac{dt}{(2t-1)^{4n+1}}, \quad (4.2)$$

и во-вторых, справедливы соотношения ортогональности:

$$\int_{-\infty}^0 H_n^\dagger(t) t^m \frac{dt}{(2t-1)^{4n+1}} - \int_1^{+\infty} C_n^\dagger(t) t^m \frac{dt}{(2t-1)^{4n+1}} = 0, \\ m = 0, \dots, 2n-1. \quad (4.3)$$

Учитывая симметрию функции $R_n(x)$ можем переписать интегральное представление (4.2) следующим образом:

$$\frac{R_n(x)}{(2x-1)^{4n+1}} = \int_1^{+\infty} \frac{C_n^\dagger(t)}{(x(1-x) - t(1-t))} \frac{(2t-1)dt}{(2t-1)^{4n+1}}, \quad (4.4)$$

а соотношения ортогональности (4.3) в виде:

$$\int_1^{+\infty} C_n^\dagger(t) (2t-1)^{2m+1} \frac{dt}{(2t-1)^{4n+1}} = 0, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (4.5)$$

(Конечно, с равным успехом все формулы можно было бы свести к интегралам по промежутку Δ_{-} .)

Мы можем получить соотношения ортогональности (4.5) с помощью следующей формулы Родрига:

$$\frac{C_n^\dagger(t)}{(2t-1)^{4n+1}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\tilde{C}_n^\dagger(t)}{(2t-1)^{2n+1}}, \quad (4.5a)$$

где функция $\tilde{C}_n^\dagger(t)$ имеет вид:

$$\tilde{C}_n^\dagger(t) = -\tilde{A}_n(t) C_n^\dagger(t) + \tilde{B}_n(t) d^\dagger(t) + \tilde{\Phi}_n^*(t) e(t) + \tilde{E}_n^*(t), \quad (4.6)$$

при этом \tilde{A}_n и \tilde{B}_n – некоторые многочлены, степени которых не превосходят $2n$, а $\tilde{\Phi}_n^*$ и \tilde{E}_n^* – многочлены степени не выше $4n$, но имеющие специальный вид, а именно:

$$\tilde{\Phi}_n^* \in \langle 1, y, y^2, \dots, y^{2n} \rangle \oplus \langle y^{2n+1}, y^{2n+3}, \dots, y^{4n-1} \rangle, \\ \tilde{E}_n^* \in \langle 1, y, y^2, \dots, y^{2n} \rangle \oplus \langle y^{2n+2}, y^{2n+4}, \dots, y^{4n} \rangle, \quad (4.6a)$$

где $y = 2x - 1$. Аналогичную формулу мы должны написать и для функции $H_n^\dagger(t)$, а именно:

$$\frac{H_n^\dagger(t)}{(2t-1)^{4n+1}} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2t-1} \frac{d}{dt} \right)^n \frac{\tilde{H}_n^\dagger(t)}{(2t-1)^{2n+1}},$$

где

$$\tilde{H}_n^\dagger(t) = -\tilde{A}_n(t)H^\dagger(t) - \tilde{B}_n(t)f^\dagger(t) - \tilde{\Phi}_n(t)e(t) + \tilde{E}_n(t),$$

при этом \tilde{A}_n и \tilde{B}_n — те же многочлены, что и в формуле (4.6), а $\tilde{\Phi}_n$ и \tilde{E}_n — некоторые многочлены степени не выше, чем $4n$, также удовлетворяющие включениям (4.6а).

Потребуем, чтобы

$$\tilde{C}_n^\dagger(t) = O((1-t)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1. \quad (4.7)$$

Тогда после дифференцирования получим условие (3.6). Кроме того, соотношение (4.7) позволяет интегрировать по частям при доказательстве соотношений ортогональности (4.5). Расшифруем условие (4.7). Выделяя логарифмическую особенность $e(t)$, получим

$$-\tilde{A}_n(t)\varphi(t) + \tilde{B}_n(t)\varepsilon(t) + \tilde{\Phi}_n^*(t) = O((1-t)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1. \quad (4.8)$$

Выделяя голоморфную часть, будем иметь

$$-\tilde{A}_n(t) \cdot 2\psi(t) + \tilde{B}_n(t)\varphi(t) + \tilde{E}_n^*(t) = O((1-t)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1. \quad (4.9)$$

Аналогично, необходимо потребовать, чтобы

$$\tilde{H}_n^\dagger(t) = O(t^{2n+1}), \quad t \rightarrow 0.$$

Это условие, в свою очередь, также распадается на два условия

$$-\tilde{A}_n(t)\varphi^*(t) - \tilde{B}_n(t)\varepsilon^*(t) - \tilde{\Phi}_n(t) = O(t^{2n+1}), \quad t \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

и

$$\tilde{A}_n(t) \cdot 2\psi^*(t) + \tilde{B}_n(t)\varphi^*(t) + \tilde{E}_n(t) = O(t^{2n+1}), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Кроме того, мы должны соблюсти должный порядок роста весовой функции на бесконечности. Поэтому потребуем, чтобы

$$\begin{cases} \tilde{C}_n^\dagger(t) = O(t^{2n}), & t \rightarrow \infty, \\ \tilde{H}_n^\dagger(t) = O(t^{2n}), & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Последние условия можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_n^*(t)e(t) + \tilde{E}_n^*(t) = O(t^{2n}), & t \rightarrow \infty, & (4.12) \\ -\tilde{\Phi}_n(t)e(t) + \tilde{E}_n(t) = O(t^{2n}), & t \rightarrow \infty. & (4.13) \end{cases}$$

Для того, чтобы выполнялись соотношения (3.2), (3.3), (3.4), потребуем:

$$\tilde{A}_n(t) \cdot \lambda(2t-1) + \tilde{B}_n(t) = O((2t-1)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1/2, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(t) \cdot \alpha_\zeta(2t-1) + \tilde{B}_n(t) \cdot \beta_\zeta(2t-1) + \begin{cases} \tilde{\Phi}_n(t) \\ \tilde{\Phi}_n^*(t) \end{cases} &= \\ &= O((2t-1)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1/2, \quad (4.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n(t) \cdot \alpha_l(2t-1) + \tilde{B}_n(t) \cdot \beta_l(2t-1) + \begin{cases} -\tilde{\Phi}_n(t) \cdot \lambda(2t-1) + \tilde{E}_n(t) \\ \tilde{\Phi}_n^*(t) \cdot \lambda(2t-1) + \tilde{E}_n^*(t) \end{cases} &= \\ &= O((2t-1)^{2n+1}), \quad t \rightarrow 1/2. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Итак, мы осуществили редукцию основной задачи 1 к некоторой вспомогательной задаче 2.

Задача 2 Требуется найти нетривиальный набор многочленов \tilde{A}_n , \tilde{B}_n степени не выше $2n$, и $\tilde{\Phi}_n$, $\tilde{\Phi}_n^*$, \tilde{E}_n , \tilde{E}_n^* , удовлетворяющие включениям (4.6a), так чтобы выполнялись интерполяционные условия (4.8)–(4.11), (4.12)–(4.16).

Эта задача также сводится к системе линейных однородных уравнений (причем с рациональными коэффициентами). Подсчитаем число неизвестных:

$$2(2n+1) + 4(3n+1) = 16n + 6.$$

Подсчитаем число уравнений:

$$3(2n+1) + 4(2n+1) + 2n = 16n + 7.$$

Всилу симметрии задачи нетривиальное решение существует (причем симметричное решение). Поскольку многочлен \tilde{B}_n нечетный, то его степень фактически не превосходит $2n-1$. Всилу условий (4.12), (4.13) степени многочленов \tilde{E}_n и \tilde{E}_n^* не превосходят $4n-2$.

Интегрируя в (4.4) по частям, получим

$$\frac{R_n(x)}{(2x-1)^{4n+1}} = \int_1^\infty \frac{\tilde{C}_n^\dagger(t)}{(2t-1)^{2n+1}} \frac{(2t-1)dt}{(x(1-x)-t(1-t))^{n+1}}. \quad (4.17)$$

4.3.

Перейдем к решению задачи 2. Применим к функции \tilde{C}_n^\dagger следующий дифференциальный оператор:

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{n!} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x-1} \frac{d}{dx} \right)^n.$$

Получим

$$\mathcal{D}_n \tilde{C}_n^\dagger(x) = \frac{\bar{d}_n^\dagger(x)}{x^{n+1}(1-x)^{n+1}}. \quad (4.18)$$

Аналогично,

$$\mathcal{D}_n \tilde{H}_n^\dagger(x) = \frac{\bar{f}_n^\dagger(x)}{x^{n+1}(1-x)^{n+1}}. \quad (4.19)$$

При этом

$$\begin{cases} \bar{d}_n^\dagger(x) = \bar{B}_n(x)d^\dagger(x) + \bar{\Phi}_n^*(x)e(x) + \bar{E}_n^*(x) \\ \bar{f}_n^\dagger(x) = -\bar{B}_n(x)f^\dagger(x) - \bar{\Phi}_n(x)e(x) + \bar{E}_n(x), \end{cases}$$

где \bar{B}_n — многочлен степени не выше $2n$, а $\bar{\Phi}_n^*$, $\bar{\Phi}_n$, \bar{E}_n^* , \bar{E}_n — многочлены степени не выше $4n$. (Заметим, что скобка $(2x-1)$ в знаменателях выражений (4.18) и (4.19) не появляется в силу условий (4.14)-(4.16).)

При этом выполняются следующие условия. Во-первых, из (4.8), (4.9) следует, что

$$\bar{d}_n^\dagger(x) = O((1-x)^{2n+1}), \quad x \rightarrow 1.$$

Это условие распадается на два:

$$\begin{cases} \bar{B}_n(x)\varepsilon(x) + \bar{\Phi}_n^*(x) = O((1-x)^{2n+1}), & x \rightarrow 1, & (4.20) \\ \bar{B}_n(x)\varphi(x) + \bar{E}_n^*(x) = O((1-x)^{2n+1}), & x \rightarrow 1. & (4.21) \end{cases}$$

Далее, из (4.10), (4.11) следует, что

$$\bar{f}_n^\dagger(x) = O(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Это условие распадается на два:

$$\begin{cases} -\bar{B}_n\varepsilon^* - \bar{\Phi}_n = O(x^{2n+1}), & x \rightarrow 0, & (4.22) \\ \bar{B}_n\varphi^* + \bar{E}_n = O(x^{2n+1}), & x \rightarrow 0. & (4.23) \end{cases}$$

Из (4.12), (4.13) следует, что

$$\begin{cases} \bar{d}_n^\dagger(x) = O(x^{2n}), & x \rightarrow \infty, \\ \bar{f}_n^\dagger(x) = O(x^{2n}), & x \rightarrow \infty, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_n^*e + \bar{E}_n^* = O(x^{2n}), & x \rightarrow \infty, & (4.24) \\ -\bar{\Phi}_n e + \bar{E}_n = O(x^{2n}), & x \rightarrow \infty. & (4.25) \end{cases}$$

Кроме того, из симметрии задачи вытекают соотношения:

$$\bar{e}_n := -\bar{B}_n e + \begin{cases} +\bar{\Phi}_n^* \\ -\bar{\Phi}_n \end{cases} = O(1/x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.26)$$

и

$$\{\bar{d}f\}_n := \bar{d}_n^\dagger - \bar{f}_n^\dagger = O(1/x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

Мы получили еще одну вспомогательную задачу.

Задача 3 *Требуется найти нетривиальный набор многочленов*

$$\bar{B}_n \text{ и } \bar{\Phi}_n, \bar{\Phi}_n^*, \bar{E}_n, \bar{E}_n^*$$

степени не выше $2n$ и $4n$ соответственно, такой что выполняются интерполяционные условия (4.20)–(4.27).

Число неизвестных в этой задаче равно

$$(2n + 1) + 4(4n + 1) = 18n + 5,$$

и число уравнений равно

$$(2n + 1) + 2 \cdot 2n + (4n + 1) + 2n = 18n + 5.$$

4.4.

Применим к функциям \bar{d}_n^\dagger и \bar{f}_n^\dagger дифференциальный оператор \mathcal{D}_n . Получим:

$$d_n^{\dagger\#} := \mathcal{D}_n \bar{d}_n^\dagger = \frac{(1-x)^n (\Phi_n^{\#\#} e + E_n^{\#\#})}{(2x-1)^{2n} x^{n+1}}, \quad (4.28)$$

и

$$f_n^{\dagger\#} := \mathcal{D}_n \bar{f}_n^\dagger = \frac{x^n (-\Phi_n^{\#} e + E_n^{\#})}{(2x-1)^{2n} (1-x)^{n+1}},$$

где

$$\Phi_n^{\#\#}, E_n^{\#\#}, \Phi_n^{\#}, E_n^{\#} \quad (4.29)$$

некоторые многочлены степени не выше $4n$. При дифференцировании мы воспользовались условиями (4.20) – (4.23).

Из (4.24) следует, что

$$d_n^{\dagger\#}(x) = O(1/x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Аналогично, из (4.25) получаем

$$f_n^{\dagger\#}(x) = O(1/x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.31)$$

Далее, из (4.26) вытекает, что

$$\begin{aligned} e_n^\# &:= \mathcal{D}_n \bar{e}_n = \frac{(1-x)^n \Phi_n^{*\#}(x)}{(2x-1)^{2n} x^{n+1}} - \frac{x^n \Phi_n^\#(x)}{(2x-1)^{2n} (1-x)^{n+1}} = \\ &= O(1/x^{2n+2}), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.32)$$

а из (4.27) вытекает соотношение

$$\{df\}_n^\# := \mathcal{D}_n \{\bar{d}f\}_n = d_n^{\dagger\#} - f_n^{\dagger\#} = O(1/x^{2n+2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

И наконец, из симметрии задачи вытекают соотношения

$$(1-x)^{2n+1} \Phi_n^{*\#}(x) + x^{2n+1} \Phi_n^\#(x) = O(y^{2n+1}), \quad y \rightarrow 0, \quad (4.34)$$

и

$$\begin{aligned} &\left((1-x)^{2n+1} \Phi_n^{*\#}(x) - x^{2n+1} \Phi_n^\#(x) \right) \lambda(y) + \\ &+ \left((1-x)^{2n+1} E_n^{*\#}(x) + x^{2n+1} E_n^\#(x) \right) = O(y^{2n+1}), \quad y \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче.

Задача 4 *Требуется найти нетривиальный набор многочленов (4.29) степени не выше $4n$, такой чтобы выполнялись интерполяционные условия (4.30) – (4.35).*

4.5.

Имеем

$$\begin{aligned} d_n^{\dagger b} &:= \mathcal{D}_n \left\{ (2x-1)^{2n} x^{n+1} (1-x)^{n+1} d_n^{\dagger\#}(x) \right\} = \\ &= \mathcal{D}_n \left\{ (1-x)^{2n+1} (\Phi_n^{*\#} e + E_n^{*\#}) \right\} = \\ &= (1-x)^n x^n \Phi_n^b(x) e(x) + \frac{(1-x)^n E_n^{*b}(x)}{x^{n+1}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где Φ_n^b и E_n^{*b} – многочлены степени не выше $2n$ и $4n$ соответственно. Аналогично,

$$\begin{aligned} f_n^{\dagger b} &:= \mathcal{D}_n \left\{ (2x-1)^{2n} (1-x)^{n+1} x^{n+1} f_n^{\dagger\#}(x) \right\} = \\ &= \mathcal{D}_n \left\{ x^{2n+1} (-\Phi_n^\# e + E_n^\#) \right\} = \end{aligned}$$

$$= -x^n(1-x)^n \Phi_n^b(x) e(x) + \frac{x^n E_n^b(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

где Φ_n^b – тот же многочлен, что и в формуле (4.36), а E_n^b некоторый многочлен степени не выше $4n$.

Действительно, условие (4.32) можно переписать в виде

$$(1-x)^{2n+1} \Phi_n^{*\#}(x) - x^{2n+1} \Phi_n^\#(x) = O(x^{2n}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n \left\{ (1-x)^{2n+1} \Phi_n^{*\#}(x) - x^{2n+1} \Phi_n^\#(x) \right\} = \\ = (1-x)^n \Psi_n^*(x) - x^n \Psi_n(x) = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где Ψ_n^* и Ψ_n – некоторые многочлены степени не выше $3n$, связанные соотношением симметрии

$$\Psi_n^*(1-x) = \Psi_n(x).$$

Из (4.37) следует, что многочлен Ψ_n^* делится на x^n , а многочлен Ψ_n делится на $(1-x)^n$. Другими словами,

$$\begin{aligned} \Psi_n^*(x) &= x^n \Phi_n^b(x), \\ \Psi_n(x) &= (1-x)^n \Phi_n^b(x), \end{aligned}$$

где Φ_n^b – многочлен степени не выше $2n$ (причем четный).

Из (4.30) и (4.31) следует, что

$$d_n^{\dagger b}(x) = O(1/x^2), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.38)$$

и

$$f_n^{\dagger b}(x) = O(1/x^2), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.39)$$

соответственно, а из (4.33) вытекает условие

$$\{df\}_n^b := \mathcal{D}_n \{df\}_n^\# = d_n^{\dagger b} - f_n^{\dagger b} = O(1/x^{2n+3}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.40)$$

Мы получили следующую задачу.

Задача 5 *Требуется найти нетривиальный набор многочленов*

$$\Phi_n^b \text{ и } E_n^{*b}, E_n^b$$

степени не выше $2n$ и $4n$ соответственно, такой что выполняются интерполяционные условия (4.38) – (4.40).

4.6.

Имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2x-1} \mathcal{D}_n \left\{ x^{n+1} (1-x)^{n+1} d_n^{\dagger b}(x) \right\} = \\
& = \frac{1}{2x-1} \mathcal{D}_n \left\{ x^{2n+1} (1-x)^{2n+1} \Phi_n^b(x) e(x) + (1-x)^{2n+1} E_n^{*b}(x) \right\} = \\
& = x^n (1-x)^n Q_n(x) e(x) + \frac{x^n (1-x)^n P_n(x)}{(2x-1)^{2n+1}}, \quad (4.41)
\end{aligned}$$

где Q_n и P_n – некоторые многочлены степени не выше, чем $2n$ и $4n$ соответственно. Аналогично,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2x-1} \mathcal{D}_n \left\{ (1-x)^{n+1} x^{n+1} f_n^{\dagger b}(x) \right\} = \\
& = \frac{1}{2x-1} \mathcal{D}_n \left\{ -(1-x)^{2n+1} x^{2n+1} \Phi_n^b(x) e(x) + x^{2n+1} E_n^b(x) \right\} = \\
& = -(1-x)^n x^n Q_n(x) e(x) - \frac{(1-x)^n x^n P_n(x)}{(2x-1)^{2n+1}},
\end{aligned}$$

где Q_n и P_n – те же многочлены, что и в формуле (4.41). Для многочлена Q_n это очевидно. Для многочлена P_n доказательство такое же, как в п. 4.5 для многочлена Φ_n^b , при этом используется условие (4.40).

Далее, из условий (4.38) и (4.39) следует, что функция (4.41) есть $O(1/x^{2n+3})$ при $x \rightarrow \infty$. Тем самым, мы приходим к следующей задаче.

Задача 6 *Требуется найти ненулевой многочлен Q_n степени не выше $2n$, и многочлен P_n степени не выше $4n$, так чтобы выполнялось следующее условие:*

$$S_n(x) = Q_n(x) e(x) + \frac{P_n(x)}{(2x-1)^{2n+1}} = O(1/x^{4n+3}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.42)$$

4.7.

Перейдем к решению задачи 6. Покажем, что она представляет собой обобщение классических многочленов Лежандра на случай соотношений ортогональности с переменным весом. Действительно, интерполяционное условие (4.42) можно переписать в виде

$$(2x-1)^{2n+1} Q_n(x) e(x) + P_n(x) = O(1/x^{2n+2}), \quad x \rightarrow \infty,$$

что в свою очередь равносильно следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_0^1 Q_n(x)x^m(2x-1)^{2n+1}dx = 0, \quad m = 0, \dots, 2n. \quad (4.43)$$

Учитывая симметрию задачи

$$Q_n(1-x) = Q_n(x),$$

можем переписать соотношения ортогональности (4.43) в виде

$$\int_0^1 Q_n(x)(2x-1)^{2m+1}(2x-1)^{2n+1}dx = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (4.44)$$

Из соотношений ортогональности (4.44) вытекает существование и единственность (с точностью до нормировки) многочлена Q_n , свойства нулей этого многочлена, а также формула Родрига.

Предложение 1 *Справедлива следующая формула Родрига*

$$(2x-1)^{2n+1}Q_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2x-1} \frac{d}{dx} \right)^n \left\{ x^n(1-x)^n(2x-1)^{4n+1} \right\}. \quad (4.45)$$

Формула (4.45) будет полезна при изучении арифметических свойств коэффициентов многочленов $Q_n(x)$ и $P_n(x)$. Однако для вывода интегрального представления функций второго рода $S_n(x)$ удобнее использовать другой метод (тот, который мы применяли в предыдущих пунктах). В следующем пункте мы получим соответствующее интегральное представление.

4.8.

Имеем

$$\mathcal{D}_n S_n(x) = \frac{c_n}{(2x-1)^{4n+2}x^{n+1}(1-x)^{n+1}}, \quad (4.46)$$

где c_n — некоторый многочлен. Но из условий (4.42) вытекает, что

$$\mathcal{D}_n S_n(x) = O(1/x^{6n+4}), \quad x \rightarrow \infty,$$

следовательно, c_n — многочлен нулевой степени, т.е. константа. Теперь мы можем зафиксировать нормировку решения, положив

$$c_n = 1.$$

Легко проверить, что эта нормировка согласуется с формулой Родрига (4.45).

В дальнейшем будем использовать обозначения:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1, \\ p &= y^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Предложение 2 *Справедливо следующее интегральное представление:*

$$S_n(x) = (-1)^{n+1} \int_p^\infty (q-p)^n \frac{dq}{q^{2n+3/2}(1-q)^{n+1}}. \quad (4.48)$$

Доказательство. Сделаем в (4.46) замену переменных (4.47). Получим

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dp} \right)^{n+1} S_n(x) = \frac{1}{p^{2n+3/2}(1-p)^{n+1}}.$$

Откуда и вытекает формула (4.48). Δ

4.9.

Получим интегральное представление для решения задачи 5.

Предложение 3 *Имеет место интегральное представление*

$$4^n(1-p)^{n+1} d_n^{\dagger b}(x) = (-1)^{n+1} \int_p^1 (q-p)^n (1-q)^n S_n dq. \quad (4.49)$$

Доказательство. Сделаем замену (4.47) в формуле (4.41). Получим

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dp} \right)^{n+1} \left\{ (1-p)^{n+1} d_n^{\dagger b}(x) \right\} = \left(\frac{1-p}{4} \right)^n S_n.$$

Откуда и следует формула (4.49). Δ

Перейдем к решению задачи 4.

Предложение 4 *Справедливо интегральное представление*

$$p^n(1-p)^{n+1} d_n^{\dagger \#}(x) = (-1)^{n+1} \int_p^1 (q-p)^n d_n^{\dagger b} \frac{dq}{\sqrt{q}}. \quad (4.50)$$

Доказательство. Произведя замену (4.47) в формуле (4.36), получим

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dp} \right)^{n+1} \left\{ p^n(1-p)^{n+1} d_n^{\dagger \#}(x) \right\} = \frac{d_n^{\dagger b}}{\sqrt{p}}.$$

Откуда следует формула (4.50). Δ

Аналогичным образом доказываются следующие два предложения.

Предложение 5 *Справедливо интегральное представление*

$$4^{n+1} \bar{d}_n^{\dagger}(x) = (-1)^{n+1} \int_p^1 (q-p)^n d_n^{\dagger \#} \frac{dq}{\sqrt{q}}. \quad (4.51)$$

Предложение 6 *Справедливо интегральное представление*

$$\tilde{C}_n^{\dagger}(x) = (-1)^{n+1} \int_p^1 (q-p)^n \frac{\bar{d}_n^{\dagger}}{(1-q)^{n+1}} \frac{dq}{\sqrt{q}}. \quad (4.52)$$

4.10.

Завершим доказательство теоремы 2. Объединяя формулы (4.48) – (4.52), получим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n^\dagger(v) &= \frac{(-1)^{n+1}}{4^{2n+1}} \int_\mu^1 \frac{(\lambda - \mu)^n d\lambda}{(1 - \lambda)^{n+1} \sqrt{\lambda}} \int_\lambda^1 \frac{(u - \lambda)^n du}{(1 - u)^{n+1} u^{n+1/2}} \\ &\cdot \int_u^1 \frac{(r - u)^n dr}{(1 - r)^{n+1} \sqrt{r}} \int_r^1 (s - r)^n (1 - s)^n ds \int_s^\infty \frac{(t - s)^n dt}{(1 - t)^{n+1} t^{2n+3/2}}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где $\mu = (2v - 1)^2$. Производя соответствующую замену в интегральном представлении (4.17), будем иметь

$$\frac{R_n(x)}{p^{2n+1/2}} = \int_1^\infty \frac{4^n \tilde{C}_n^\dagger(v) d\mu}{(\mu - p)^{n+1} \mu^{n+1/2}}. \quad (4.54)$$

Подставляя (4.53) в (4.54), приходим к формуле (4.1).

Докажем формулы Родрига (4.1a) – (4.1f).

Формула (4.1a) следует из (4.5a).

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\lambda}_n = \tilde{A}_n \lambda + \tilde{B}_n.$$

Из (4.18) следует, что

$$\mathcal{D}_n \tilde{\lambda}_n = \frac{\bar{B}_n}{x^{n+1} (1 - x)^{n+1}}$$

или

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dp} \right)^{n+1} \tilde{\lambda}_n = \frac{\bar{B}_n}{(1 - p)^{n+1} \sqrt{p}}.$$

Откуда, учитывая начальные условия

$$\tilde{\lambda}_n = O(y^{2n+1}), \quad y \rightarrow 0,$$

получаем

$$\tilde{\lambda}_n = \int_0^p \frac{(p - q)^n \bar{B}_n dq}{(1 - q)^{n+1} \sqrt{q}}.$$

Тогда по формулам Сохоцкого имеем

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(1)} \frac{(p - q)^n \bar{B}_n dq}{(1 - q)^{n+1} \sqrt{q}}.$$

Далее, по теореме о вычетах

$$\tilde{A}_n = \operatorname{res}_{q=1} \left\{ \frac{(p - q)^n \bar{B}_n}{(1 - q)^{n+1} \sqrt{q}} \right\},$$

откуда и следует формула (4.1b).

Из (4.51) по формулам Сохоцкого получаем

$$\bar{B}_n = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(-1)} \frac{(y^2 - v^2)^n (1 - v)^n \Phi_n^{*\#}}{v^{2n} (1 + v)^{n+1}} dv.$$

Вычисляя интеграл с помощью вычетов, приходим к формуле (4.1c).

И наконец, формула (4.1d) вытекает из (4.50), (4.1f) – из (4.45), а (4.1e) – из (4.49).

Теорема 2 доказана. \triangle

5. Риманова поверхность и асимптотика

5.1.

Будем изучать асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ величин

$$Y_n(p) = \frac{(-4)^{n+1} R_n(x)}{p^{2n+1/2}} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{Y}_n(p) = \frac{(-4)^{n+1} A_n(x)}{p^{2n+1/2}},$$

где $p = (2x - 1)^2$. Для этого применим к интегралу (4.1) (или к формулам Родрига (4.1a) – (4.1f) соответственно) многомерный метод перевала.

Рассмотрим функцию

$$\phi = \frac{1}{\mu(p - \mu)} \cdot \frac{\mu - \lambda}{1 - \lambda} \cdot \frac{\lambda - u}{u(1 - u)} \cdot \frac{u - r}{1 - r} \cdot \frac{(r - s)(1 - s)}{1} \cdot \frac{s - t}{t^2(1 - t)}. \quad (5.1)$$

Эта функция зависит от шести переменных μ, λ, u, r, s, t и одного параметра p .

Критические точки функции ϕ находятся из системы уравнений $d\phi = 0$, или в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \phi &= -\frac{1}{\mu} + \frac{1}{p - \mu} + \frac{1}{\mu - \lambda} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \phi &= -\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{\lambda - u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \log \phi &= -\frac{1}{\lambda - u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{u - r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \log \phi &= -\frac{1}{u - r} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{r - s} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} \log \phi &= -\frac{1}{r - s} - \frac{1}{1 - s} + \frac{1}{s - t} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \log \phi &= -\frac{1}{s - t} - \frac{2}{t} + \frac{1}{1 - t} = 0 \end{aligned}$$

Последовательно решая эти уравнения (начиная с последнего), получим

$$s = \frac{t(1-2t)}{2-3t}, \quad (5.2a)$$

$$r = \frac{t^2}{(2-3t)(t-2)}, \quad (5.2b)$$

$$u = \frac{t(4-6t+3t^2)}{(3t-2)(2-t)^2}, \quad (5.2c)$$

$$\lambda = \frac{(3t^2-6t+4)^2}{t(3t-2)(3t-4)(t-2)}, \quad (5.2d)$$

$$\mu = \frac{(3t^2-6t+4)(9t^3-12t^2-4t+8)}{t^2(3t-2)(3t-4)^2}, \quad (5.2e)$$

$$p = \frac{(9t^3-12t^2-4t+8)(3t^3-8t^2+12t-8)}{t^3(3t-4)^3}. \quad (5.2f)$$

Таким образом, функция $t = t(p)$ – это алгебраическая функция 6-го порядка. Обозначим $\Phi = \Phi(p)$ – критические значения функции ϕ . Тогда Φ также будет алгебраической функцией 6-го порядка. Подставляя в (5.1) формулы (5.2a) – (5.2f), получим

$$\Phi = \frac{t^3(3t-4)^3(1-t)^2}{4(9t^3-12t^2-4t+8)^2}. \quad (5.3)$$

Исключая из уравнений (5.2f) и (5.3) переменную t , приходим к явному виду алгебраического уравнения, которому удовлетворяет функция Φ .

Предложение 7 *Алгебраическая функция Φ является решением следующего уравнения:*

$$2^{12} \cdot 3^9 \cdot (1-p)^2 p^6 \Phi^6 - 2^{11} \cdot 3^6 \cdot (1-p) p^4 \alpha(p) \Phi^5 + 2^8 \cdot 3^3 \cdot p^2 \beta(p) \Phi^4 + \\ + 2^8 \cdot \gamma(p) \Phi^3 - 2^4 \cdot \beta(p) \Phi^2 - 2^3 \cdot (1-p) \alpha(p) \Phi - (1-p)^2 = 0,$$

где

$$\alpha(p) = 204 - 259p + 39p^2, \\ \beta(p) = 1072 - 3120p - 4117p^2 + 4474p^3 + 1947p^4, \\ \gamma(p) = -432 + 1944p + 1060p^2 - 3027p^3 - 20166p^4 + 3341p^5.$$

5.2.

Обозначим \mathfrak{R} 6-листную риманову поверхность функции $\Phi(p)$. Выясним, какую структуру имеет эта риманова поверхность. Найдем точки ветвле-

ния функции $\Phi(p)$. Они совпадают с точками ветвления функции $t(p)$. Поэтому будем искать критические точки обратной функции $p(t)$ из уравнения

$p'(t) = 0$, или в явном виде

$$\frac{d}{dt} \log p(t) = \frac{27t^2 - 24t - 4}{9t^3 - 12t^2 - 4t + 8} + \frac{9t^2 - 16t + 12}{3t^3 - 8t^2 + 12t - 8} - \frac{3}{t} - \frac{9}{3t - 4} = 0,$$

откуда

$$\frac{162t^5 - 540t^4 + 768t^3 - 480t^2 - 32t + 128}{(9t^3 - 12t^2 - 4t + 8)(3t^3 - 8t^2 + 12t - 8)} = \frac{6(3t - 2)}{t(3t - 4)},$$

и далее

$$\begin{aligned} & 243t^7 - 1134t^6 + 2232t^5 - 2256t^4 + 912t^3 + 256t^2 - 256t = \\ & = 3(81t^7 - 378t^6 + 792t^5 - 864t^4 + 272t^3 + 416t^2 - 448t + 128) \end{aligned}$$

или

$$9t^5 - 21t^4 - 6t^3 + 62t^2 - 68t + 24 = 0. \quad (5.4)$$

(Точку $t = \infty$ рассмотрим отдельно.)

Полученное нами уравнение (5.4) приводимо, а именно, оно имеет вид

$$(t - 1)(3t^2 + 2t - 6)(3t^2 - 6t + 4) = 0.$$

Пусть

$$3t^2 + 2t - 6 = 0,$$

тогда

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3}. \quad (5.5)$$

При этих значениях t по формуле (5.2f) имеем

$$p = p_* := \frac{31}{27}.$$

При $p = p_*$ уравнение (5.2f) примет вид

$$27t^6 - 108t^5 - 180t^4 + 584t^3 + 108t^2 - 864t + 432 = 0.$$

Это уравнение приводится к виду

$$(3t^2 + 2t - 6)^2(3t^2 - 16t + 12) = 0.$$

Оно имеет корни (5.5) кратности 2 (которые действительно соответствуют точкам ветвления 2-го порядка) и простые корни

$$t = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{3},$$

которые соответствуют однозначным ветвям. Таким образом, мы выяснили, как устроена риманова поверхность \mathfrak{R} над окрестностью точки $p = p_*$. Поверхность распадается на два однолистных и на два двулистных круга. Другими словами, над этой точкой поверхность имеет две точки ветвления второго порядка и две правильные точки. Схематично будем изображать эту ситуацию следующей формулой

$$\mathfrak{R}(p_*) = (2 + 2 + 1 + 1).$$

Пусть теперь

$$3t^2 - 6t + 4 = 0,$$

тогда

$$t = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\{\pm \frac{\pi i}{6}\}. \quad (5.6)$$

По формуле (5.2f) находим соответствующие значения параметра p :

$$p = p_{\mp} := \exp\{\mp \frac{2\pi i}{3}\}.$$

Корни (5.6) имеют кратность 2 (и действительно соответствуют точкам ветвления 2-го порядка), а остальные корни простые. Таким образом, над каждой из точек p_+ и p_- риманова поверхность \mathfrak{R} устроена следующим образом:

$$\mathfrak{R}(p_{\pm}) = (2 + 1 + 1 + 1 + 1).$$

Пусть теперь $t = 1$, тогда $p = 1$, и уравнение (5.2f) принимает вид:

$$(9t^3 - 12t^2 - 4t + 8)(3t^3 - 8t^2 + 12t - 8) = t^3(3t - 4)^3$$

или

$$48t^4 - 96t^3 - 16t^2 + 128t - 64 = 0$$

и окончательно,

$$(1 - t)^2(3t^2 - 4) = 0.$$

Корень $t = 1$ имеет кратность 2 и соответствует точке ветвления 2-го порядка, а именно:

$$t - 1 \sim \frac{1}{4}\sqrt{p - 1}, \quad p \rightarrow 1.$$

При этом

$$\Phi \sim -\frac{1}{64}\sqrt{p - 1}, \quad p \rightarrow 1.$$

Корни

$$t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

простые. Им соответствуют значения

$$\Phi = \frac{1}{12\sqrt{3}}(\pm\sqrt{3} - 2)^3.$$

И наконец, нам осталось рассмотреть случай $t = \infty$. Из уравнения (5.2f) находим

$$t \sim \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{p-1}}, \quad p \rightarrow 1,$$

и следовательно,

$$\Phi \sim \frac{4}{27} \frac{1}{\sqrt{p-1}}, \quad p \rightarrow 1.$$

Это – точка ветвления 2-го порядка. Итак, над точкой $p = 1$ поверхность \mathfrak{R} имеет следующий вид:

$$\mathfrak{R}(1) = (2 + 2 + 1 + 1).$$

Мы исследовали все точки ветвления функции Φ , лежащие в конечной плоскости. Осталось рассмотреть точку $p = \infty$. При $p \rightarrow \infty$ корни уравнения (5.2f) стремятся к 0 или $4/3$. Если $t \rightarrow 0$, то

$$t \sim \frac{1}{\sqrt[3]{p}}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Это – точка ветвления 3-го порядка. При этом

$$\Phi \sim -\frac{1}{4p}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Если $t \rightarrow 4/3$, то

$$3t - 4 \sim \frac{1}{\sqrt[3]{p}}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Это – также точка ветвления 3-го порядка. При этом

$$\Phi \sim \frac{1}{108} \frac{1}{p}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в окрестности бесконечности

$$\mathfrak{R}(\infty) = (3 + 3).$$

Подытожим полученные нами результаты.

Предложение 8

- 1) Риманова поверхность \mathfrak{R} имеет 6 листов.
- 2) Ее точки ветвления суть

$$p = p_* = \frac{31}{27}, \quad p = p_{\pm} = \exp\left\{\pm \frac{2\pi i}{3}\right\}, \quad p = 1, \quad p = \infty.$$

3) Локальная структура поверхности \mathfrak{R} в окрестности каждой из точек ветвления следующая:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(p_*) &= (2 + 2 + 1 + 1) \\ \mathfrak{R}(p_{\pm}) &= (2 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ \mathfrak{R}(1) &= (2 + 2 + 1 + 1) \\ \mathfrak{R}(\infty) &= (3 + 3)\end{aligned}$$

4) Поверхность \mathfrak{R} имеет род ноль.

Докажем последнее утверждение. Вычислим полное разветвление поверхности \mathfrak{R} :

$$b = (2 + 2) + (1 + 1) + (1 + 1) + 1 + 1 = 10.$$

Число листов равно $\nu = 6$. По формуле Римана-Гурвица

$$g = \frac{b}{2} - \nu + 1$$

вычисляем род поверхности

$$g = \frac{10}{2} - 6 + 1 = 0.$$

Что требовалось доказать.

5.3.

Функция $\Phi(p)$ мероморфна на римановой поверхности \mathfrak{R} . Она однозначно (с точностью до нормировки) определяется своим дивизором. Найдем дивизор функции Φ .

Имеем $\Phi = 0$, если

$$t = 0, \quad t = \frac{4}{3}, \quad t = 1.$$

Если $t = 0$ или $t = 4/3$, то $p = \infty$. Эту точку мы уже исследовали в предыдущем пункте и выяснили, что функция Φ имеет в бесконечности два нуля 3-го порядка.

Если $t = 1$, то $p = 1$. Эту точку мы также исследовали. Функция Φ имеет в одной из точек ветвления, лежащих над точкой $p = 1$, ноль 2-го порядка.

Далее, $\Phi = \infty$, если $t = \infty$ или t — корень уравнения

$$9t^3 - 12t^2 - 4t + 8 = 0. \quad (5.7)$$

Если $t = \infty$, то $p = 1$. Мы знаем, что в одной из точек ветвления, лежащих над точкой $p = 1$, функция Φ имеет полюс 2-го порядка.

Если t – корень уравнения (5.7), то $p = 0$. Исследуем поведение функции $t = t(p)$ в точке $p = 0$. Над этой точкой риманова поверхность расслаивается на шесть листов. На каждом из них функция $t(p)$ принимает различные значения, а именно, корни уравнения (5.7) и

$$3t^3 - 8t^2 + 12t - 8 = 0. \quad (5.8)$$

Функция Φ принимает в точке $p = 0$ значения

$$\Phi = \Phi_j^*, \quad j = 1, 2, 3,$$

которые соответствуют уравнению (5.8), и

$$\Phi \sim \frac{\Phi_j}{p^2}, \quad p \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

соответствующие уравнению (5.7). (Константы Φ_j и Φ_j^* могут быть вычислены по формулам Кардано.) Таким образом, над точкой $p = 0$ функция Φ имеет 3 нуля 2-го порядка каждый.

Подытожим полученные нами результаты.

Предложение 9 *Функция Φ имеет следующий дивизор:*

$$\begin{aligned} \text{нули :} & \quad \begin{cases} p = \infty \Rightarrow 3 + 3 \\ p = 1 \Rightarrow 2 \end{cases} \\ \text{полюсы :} & \quad \begin{cases} p = 1 \Rightarrow 2 \\ p = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

5.4.

Из проведенного выше исследования вытекает

Теорема 3 *В некоторой окрестности точки $p = 1$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |Y_n(p)|^{1/n} &= |\Phi_R(p)|, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |Y_n^\circ(p)|^{1/n} &= |\Phi_A(p)|, \end{aligned}$$

где Φ_R и Φ_A – ветви функции Φ , выделяемые условиями:

$$\begin{aligned} \Phi_R(1) &= \frac{(\sqrt{3} - 2)^3}{12\sqrt{3}}, \\ \Phi_A(1) &= -\frac{(\sqrt{3} + 2)^3}{12\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

При изучении асимптотики мы ограничились лишь локальным вариантом теоремы, когда отбор нужных критических точек очевиден. Именно этот локальный вариант необходим для арифметических приложений. При изучении асимптотики во всей комплексной плоскости необходимо найти обладающие S -свойством разрез обобщенной минимальной емкости, на которые в пределе ложатся нули многочленов совместной ортогональности A_n и точки дополнительной интерполяции функций второго рода R_n . Изучение глобальной асимптотики – это тема отдельной работы, которая требует активного привлечения теории потенциала.

6. Рекуррентное соотношение

6.1.

Мы обнаружили, что решения задачи 1 (при $x = 1$) удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению.

Теорема 4 *Последовательности*

$$\alpha_n = A_n(1)$$

и

$$\rho_n = R_n(1) = \alpha_n \cdot \frac{\pi^4}{30} - \beta_n$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} &12n^2(3n-1)(3n+1)(4n-5)(4n-3)(4n-1)(4n+1)y_n - \\ &-6(2n-1)^2(4n-5)(4n-3)(3n^2-3n+1)(15n^2-15n+4)y_{n-1} - \\ &-(n-1)^6(2n-3)(2n-1)y_{n-2} = 0, \end{aligned}$$

где $n = 2, 3, 4, \dots$, и следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{4}, & \beta_0 = 0, \\ \alpha_1 = \frac{1}{240}, & \beta_1 = \frac{13}{960}. \end{cases}$$

Рекуррентное соотношение было получено нами в результате численных расчетов по формулам Родрига из раздела 4. Строгое доказательство проводится интегрированием по частям в интегральном представлении (4.1). При этом мы получаем лавинообразный процесс вычислений, так что и строгое доказательство разумно проводить на компьютере с помощью символьных вычислений.

Завершим доказательство теоремы 1. Сделаем перенормировку

$$y_n = \frac{(2n-1)!!n!}{4^{n+2}(4n+1)!!} u_n$$

и получим рекуррентное соотношение (*).

Литература

- [1] Apéry R. *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* . Journées Arithmétique de Luminy. Asterisque. 61(1979). P.11-13.
- [2] Beukers F. *Pade approximations in number theory*. Lectures Notes in Math. V.888. 1981. P.90-99.
- [3] Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н. *Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа*. Матем. сб. 1997. Т.188. N 5. С.33-58.
- [4] Сорокин В.Н. *Аппроксимации Эрмита-Паде для систем Никкишина и иррациональность $\zeta(3)$* . Успехи матем. наук. 1994. Т.49. N 2. С.167-168.
- [5] Сорокин В.Н. *О теореме Аперу*. Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Матем.-Механ. 1998. N 3. С.48-53.
- [6] Rivoal T. *La fonction zeta de Riemann prend une infinite de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*. C.R. Acad Sci. Paris. Ser.I. Math. 331(2000). N 4. P.267-270. E-print math. NT/0008051.
- [7] Сорокин В.Н. *Циклические графы и теорема Аперу*. Успехи матем. наук. (работа представлена в журнал).
- [8] Sorokin V. *Hermite-Pade approximants for cyclic graph*. Reprint ANO USTL. Lille. October, 2001.
- [9] Prevost M. *A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Pade approximants*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 67(1996). P.219-235.
- [10] Zudilin W. *From $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ to $\zeta(4)$ and further*. Privat communication, the paper will be published in journal "Actes des Recontres de Caen".