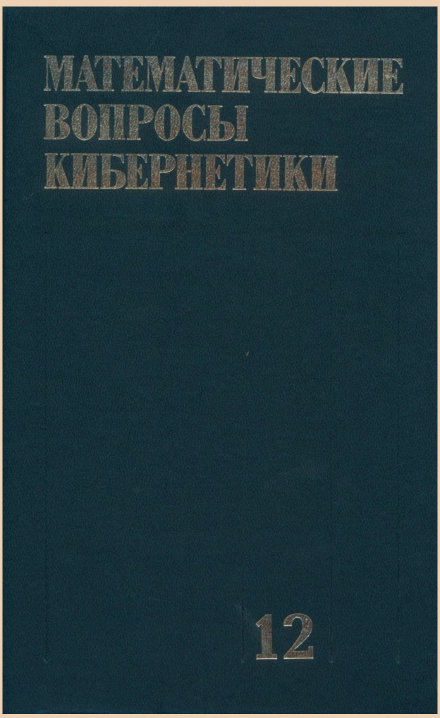

С. С. Марченков

Дискриминаторные классы трехзначной логики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марченков С. С. Дискриминаторные классы трехзначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: Физматлит, 2003. — С. 15–26. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2003-15

ДИСКРИМИНАТОРНЫЕ КЛАССЫ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ *)

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций, определенных на E_k (множество функций k-значной логики). Через $e_i^n(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим *селекторную функцию*, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. На множестве P_k рассматриваем операцию суперпозиции [5]. Подмножества множества P_k, замкнутые относительно операции суперпозиции, называем *замкнутыми классами*. Далее рассматриваем лишь замкнутые классы, которые содержат все селекторные функции. Совокупность всех замкнутых классов из P_k образует решетку, которую мы обозначим через $\mathscr{L}_k$.

При исследовании решетки $\mathscr{L}_k$ особую ценность представляют результаты, которые позволяют описывать достаточно крупные фрагменты $\mathscr{L}_k$, состоящие из конечно порождаемых замкнутых классов. Имеется не так много результатов, относящихся к этому направлению. Один из них принадлежит К. Бейкеру и А. Пиксли [6] (см. работу [2], где результат Бейкера и Пиксли впервые применен для доказательства конечной порождаемости замкнутых классов булевых функций). В частности, в соответствии с результатом Бейкера и Пиксли конечно порождаемым будет любой замкнутый класс из P_k, который содержит *дуальный дискриминатор* $d(x, y, z)$, где

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В работе [3] дано предикатное описание всех замкнутых классов, содержащих дискриминатор d. Из [6] и [3] можно извлечь некоторую верхнюю оценку числа замкнутых классов, содержащих дискриминатор d. Она имеет вид двойной экспоненты от k. Предварительные выкладки показывают, что даже в случае $k=3$ число этих классов достигает нескольких сотен.

Наряду с дуальным дискриминатором d в универсальной алгебре хорошо известен тернарный дискриминатор $p(x, y, z)$ (см., например, [7]), где

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку

$$d(x, y, z) = p(x, p(x, y, z), z),$$

всякий замкнутый класс, содержащий дискриминатор p, содержит также дискриминатор d. Замкнутые классы, содержащие дискриминатор p, мы

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03–01–00783).

называем *дискриминаторными классами.* В работе [3] приведено предикатное описание всех дискриминаторных классов. Из него следует, что, хотя число дискриминаторных классов значительно меньше числа замкнутых классов, содержащих дискриминатор d, тем не менее, оно также выражается формулой, имеющей вид двойной экспоненты от k.

В данной работе мы определяем все 144 дискриминаторных класса трехзначной логики. Отправной точкой наших построений служит работа [3]. Из нее, в частности, мы заимствуем основные обозначения и терминологию. Введем необходимые понятия, относящиеся к предикатам.

Предикатом на множестве E_k будем называть всякую функцию $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ вида $\rho\colon E_k^m \to \{\text{И}, \text{Л}\}$, где И, Л — истинностные значения «истина» и «ложь». Множество всех предикатов на E_k обозначим через Π_k. На множестве Π_k определим несколько операций (см. также [1]).

Конъюнкцией предикатов $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ и $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ называется $(m+n)$-местный предикат

$$\rho(x_1, \ldots, x_m) \,\&\, \sigma(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Проекцией предиката $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ назовем $(m-1)$-местный предикат

$$(\exists x_i)\rho(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m),$$

где областью действия квантора $\exists x_i$ является множество E_k. Операции *перестановки* и *отождествления* переменных предполагаем известными.

Диагоналями называем предикаты, которые можно получить из элементарных диагоналей вида $x_i = x_j$ с помощью операций конъюнкции и отождествления переменных.

Пусть $R \subseteq \Pi_k$. *Замыканием* R (обозначение $[R]$) назовем наименьшее множество предикатов из Π_k, которое содержит все предикаты из R, все диагонали и замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Через $\mathscr{N}_k$ обозначим решетку всех замкнутых множеств предикатов из Π_k.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, $\rho(x_1, \ldots, x_m) \in \Pi_k$. Говорят, что функция f *сохраняет предикат* ρ, если для любых n наборов

$$(a_{11}, \ldots, a_{m1}), \quad \ldots, \quad (a_{1n}, \ldots, a_{mn}),$$

удовлетворяющих предикату ρ, набор

$$(f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{m1}, \ldots, a_{mn}))$$

также удовлетворяет предикату ρ. Множество всех функций из P_k, сохраняющих предикат ρ, обозначим через $\mathrm{Pol}(\rho)$. Если $R \subseteq \Pi_k$, то пусть

$$\mathrm{Pol}(R) = \bigcap_{\rho \in R} \mathrm{Pol}(\rho).$$

Нетрудно убедиться в том, что для любого множества предикатов $R \subseteq \Pi_k$ множество $\mathrm{Pol}(R)$ является замкнутым классом функций из P_k, содержащим все селекторные функции. Кроме того, для любого множества диагоналей $D \subset \Pi_k$ имеем

$$\mathrm{Pol}(D) = P_k.$$

Известно [1], что функтор Pol осуществляет антиизоморфное отображение решетки $\mathscr{N}_k$ на решетку $\mathscr{L}_k$.

Следуя [3], назовем множество R не более чем двуместных предикатов 2-*замкнутым*, если R совпадает с множеством одно- и двуместных предикатов из $[R]$. В работе [3] доказано следующее утверждение.

При любом $k \geqslant 2$ функтор Pol *устанавливает взаимно однозначное соответствие между 2-замкнутыми множествами предикатов из Π_k, все двуместные предикаты которых имеют вид*

$$(x \in E)\,\&\,(\pi(x) = y), \tag{1}$$

где $E \subseteq E_k$ и π — перестановка на E_k, либо представимы в виде конъюнкции одноместных предикатов, и дискриминаторными классами функций из P_k.

Используя этот результат, мы найдем все дискриминаторные классы трехзначной логики. Предварительно сделаем ряд замечаний технического характера, которые позволят сократить перебор 2-замкнутых множеств предикатов.

Во-первых, если в формуле (1) множество E состоит из одного элемента a, то предикат, определяемый формулой (1), эквивалентен предикату

$$(x = a)\,\&\,(y = \pi(a)),$$

т. е. представим в виде конъюнкции двух одноместных предикатов.

Далее, если

$$\rho_0(x, y) \equiv \rho_1(x)\,\&\,\rho_2(y)$$

и предикаты ρ_1, ρ_2 не являются тождественно ложными, то 2-замыкания множеств $\{\rho_0\}$ и $\{\rho_1, \rho_2\}$ совпадают. В самом деле, согласно определению предикат ρ_0 получается конъюнкцией предикатов ρ_1, ρ_2. С другой стороны, каждый из предикатов ρ_1, ρ_2 можно получить из предиката ρ_0 с помощью операции проектирования:

$$\rho_1(x) \equiv (\exists y)\rho_0(x, y), \qquad \rho_2(y) \equiv (\exists x)\rho_0(x, y).$$

Наконец, диагональ $x = y$ по определению входит в замыкание любого множества предикатов. Так как предикат $x \in E$ получается из предиката

$$(x \in E)\,\&\,(x = y) \tag{2}$$

проектированием по переменной y, то 2-замыкания предикатов $x \in E$ и (2) совпадают.

Учитывая сделанные замечания, перечислим теперь в Π_3 все (с точностью до перестановки переменных) одноместные предикаты и двуместные предикаты вида (1), отличные от тождественно истинного, тождественно ложного предикатов и от диагонали $x = y$.

Итак, пусть

$$\begin{array}{ll}
e_a(x) \equiv (x = a), & e_{ab}(x) \equiv (x \in \{a, b\}), \\
\sigma\,(x, y) \equiv (x + 1 = y), & \sigma_{ab}(x, y) \equiv (x \in \{a, b\})\,\&\,\sigma(x, y), \\
\sigma^0(x, y) \equiv (2x = y), & \sigma^0_{ab} \equiv (x \in \{a, b\})\,\&\,\sigma^0(x, y), \\
\sigma^1(x, y) \equiv (2x + 2 = y), & \sigma^1_{ab} \equiv (x \in \{a, b\})\,\&\,\sigma^1(x, y), \\
\sigma^2(x, y) \equiv (2x + 1 = y), & \sigma^2_{ab} \equiv (x \in \{a, b\})\,\&\,\sigma^2(x, y),
\end{array} \tag{3}$$

где $a \in \{0, 1, 2\}$, $ab \in \{01, 02, 12\}$, а сложение и умножение выполняются по модулю 3.

Мы не включили в список (3) предикат $x{+}2=y$, поскольку 2-замыкания предикатов $x+1=y$ и $x+2=y$ совпадают:

$$(x+2=y)\equiv(\exists z)((x+1=z)\,\&\,(z+1=y)),$$
$$(x+1=y)\equiv(\exists z)((x+2=z)\,\&\,(z+2=y)).$$

Кроме того, предикаты

$$(x\in\{0,1\})\,\&\,(x{+}2=y),\quad (x\in\{0,2\})\,\&\,(x{+}2=y),\quad (x\in\{1,2\})\,\&\,(x{+}2=y)$$

получаются из соответствующих предикатов σ_{02}, σ_{12}, σ_{01} перестановкой переменных. По аналогичным причинам в списке (3) отсутствуют предикаты σ^0_{02}, σ^1_{12}, σ^2_{12}.

В дальнейших построениях предикаты σ_{ab}, σ^i_{ab} удобно представлять в виде двудольных графов, доли которых соответствуют переменным x и y. На рис. 1 переменной x отвечает верхняя доля графа.

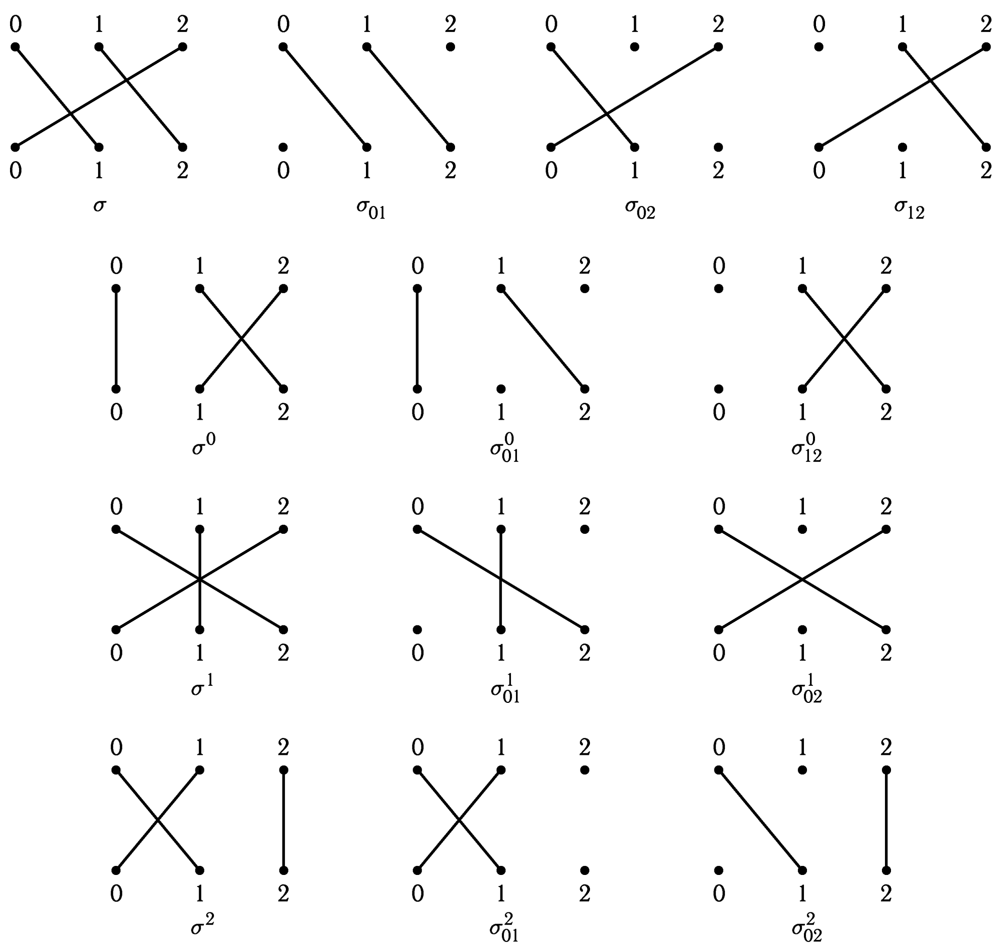

Рис. 1

Ниже при отыскании всех 2-замкнутых множеств предикатов мы неоднократно пользуемся следующими простыми соображениями.

Если $\{a, b, c\}=E_3$, то 2-замыкание множества $\{e_{ab}, e_{ac}\}$ содержит предикат e_a. В самом деле, имеем

$$e_a(x)\equiv e_{ab}(x)\,\&\,e_{ac}(x).$$

В 2-замыкании предиката (1) содержится предикат $x \in E$. Действительно, предикат $x \in E$ получается из предиката (1) проектированием по переменной y. Аналогично показываем, что в 2-замыкании предиката (1) содержится предикат $x \in \pi(E)$.

Если $F = \pi(E)$, то 2-замыкание множества, состоящего из предикатов (1) и

$$(x \in F)\,\&\,(\tau(x) = y),$$

где τ — перестановка на E_3, содержит предикат

$$(x \in E)\,\&\,(\tau(\pi(x)) = y).$$

В самом деле, последний предикат можно задать формулой

$$(\exists z)((x \in E)\,\&\,(\pi(x) = z)\,\&\,(z \in F)\,\&\,(\tau(z) = y)).$$

Наша дальнейшая цель — определить все 2-замкнутые множества предикатов, состоящие из предикатов (3). Мы будем решать эту задачу по этапам, находя последовательно 2-замкнутые множества, содержащие предикаты σ, σ^0, σ_{01}, σ^0_{01}, σ^0_{12}. Начнем с 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ.

В работе [4] при исследовании замкнутых классов, которые состоят из функций, самодвойственных относительно перестановки $x+1$, найдены, в частности, все замкнутые классы, содержащие дискриминатор p. Перевод этого результата на язык предикатов дает следующий список 2-замкнутых множеств предикатов, включающих предикат σ:

$$\begin{aligned}
&[\sigma] &&= \{\sigma\},\\
&[e_0, \sigma] &&= \{e_0, e_1, e_2, \sigma\},\\
&[\sigma, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, \sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2\},\\
&[e_{01}, \sigma] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma\},\\
&[\sigma, \sigma^0_{01}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\},\\
&[e_{01}, \sigma, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12},\\
&&&\qquad \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что максимальное по включению множество из списка (4), обозначенное как $[e_{01}, \sigma, \sigma^0]$, определяет в P_3 замкнутый класс, имеющий базисом функцию p. (Напомним еще раз, что здесь и в дальнейшем при перечислении 2-замкнутых множеств мы используем предикаты только из списка (3). В частности, мы не приводим предикаты, представимые в виде конъюнкции двух одноместных предикатов либо в виде конъюнкции одноместного предиката и диагонали $x = y$. Из двух предикатов, отличающихся перестановкой переменных, выбираем только один.)

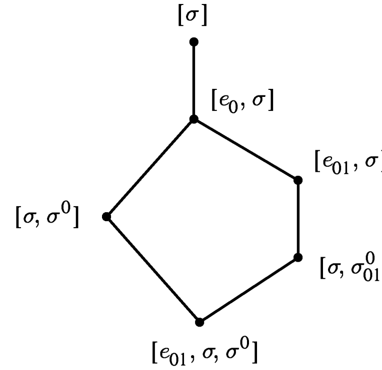

Рис. 2

На рис. 2 представлена диаграмма включений 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ. Увеличение множеств в этой диаграмме происходит сверху вниз.

Следующий этап построения состоит в перечислении всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ^0 и не содержащих предикат σ:

$$\begin{aligned}
&[\sigma^0] &&= \{e_0, \sigma^0\},\\
&[e_1, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, \sigma^0\},\\
&[e_{12}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_{12}, \sigma^0, \sigma^0_{12}\},\\
&[e_{01}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_{01}, e_{02}, \sigma^0, \sigma^0_{01}\},\\
&[e_1, e_{12}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{12}, \sigma^0, \sigma^0_{12}\},\\
&[e_1, e_{01}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma^0, \sigma^0_{01}\},\\
&[e_{01}, e_{12}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma^0, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}\},\\
&[\sigma_{02}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma_{02}, \sigma^0, \sigma^0_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}\},\\
&[e_{12}, \sigma_{02}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}, \sigma^0, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma^0] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^0, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

На рис. 3 изображена диаграмма включений всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ^0.

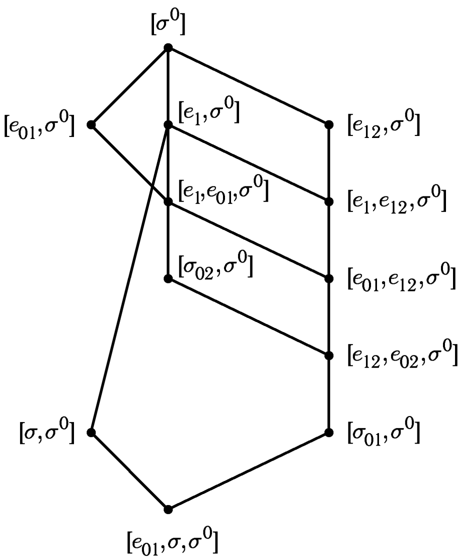

Рис. 3

Чтобы перечислить 2-замкнутые множества предикатов, содержащие один из предикатов σ^1 или σ^2, необходимо заметить, что

$$\sigma^1(x, y) \equiv \sigma^0(x+2, y+2),$$
$$\sigma^2(x, y) \equiv \sigma^0(x+1, y+1).$$

Иными словами, перестановка $2x+2$ сопряжена с перестановкой $2x$ посредством перестановки $x+2$, а перестановка $2x+1$ с перестановкой $2x$ — посредством перестановки $x+1$. Поэтому, например, 2-замкнутые множества, содержащие предикат σ^1, получаются из 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ^0, если в последних всякий одноместный предикат $\rho(x)$ заменить предикатом $\rho(x+2)$, а всякий двуместный предикат $\rho(x, y)$ — предикатом $\rho(x+2, y+2)$. Учитывая эти соображения, получаем список всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ^1 и не содержащих предикат σ:

$$\begin{aligned}
&\{e_1, \sigma^1\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, \sigma^1\},\\
&\{e_1, e_{02}, \sigma^1, \sigma^1_{02}\},\\
&\{e_1, e_{01}, e_{12}, \sigma^1, \sigma^1_{01}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{02}, \sigma^1, \sigma^1_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma^1, \sigma^1_{01}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma^1, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^1, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^2_{01}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^1, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^1, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналогичным образом получаем список всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ^2 и не содержащих предикат σ:

$$\begin{aligned}
&\{e_2, \sigma^2\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, \sigma^2\},\\
&\{e_2, e_{01}, \sigma^2, \sigma^2_{01}\},\\
&\{e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma^2, \sigma^2_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, \sigma^2, \sigma^2_{01}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma^2, \sigma^2_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma^2, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma^2, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma^2, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\},\\
&\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^2, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Перейдем теперь к 2-замкнутым множествам, содержащим предикаты $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}$. Имеем следующий список всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ_{01} и не содержащих предикаты $\sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2$:

$$\begin{aligned}
&[\sigma_{01}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma_{01}\},\\
&[e_{02}, \sigma_{01}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma^1_{02}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^1_{02}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma_{02}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma^0_{01}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^0_{01}, \sigma^2_{02}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma^0_{12}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^2_{01}\},\\
&[e_{02}, \sigma_{01}, \sigma^0_{12}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^2_{01}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{02}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}\},\\
&[\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma^0_{01}] &&= \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}\}.
\end{aligned}\tag{8}$$

На рис. 4 представлена диаграмма включений 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ_{01}. Диаграмма обрывается на множествах, содержащих хотя бы один из предикатов $\sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2$.

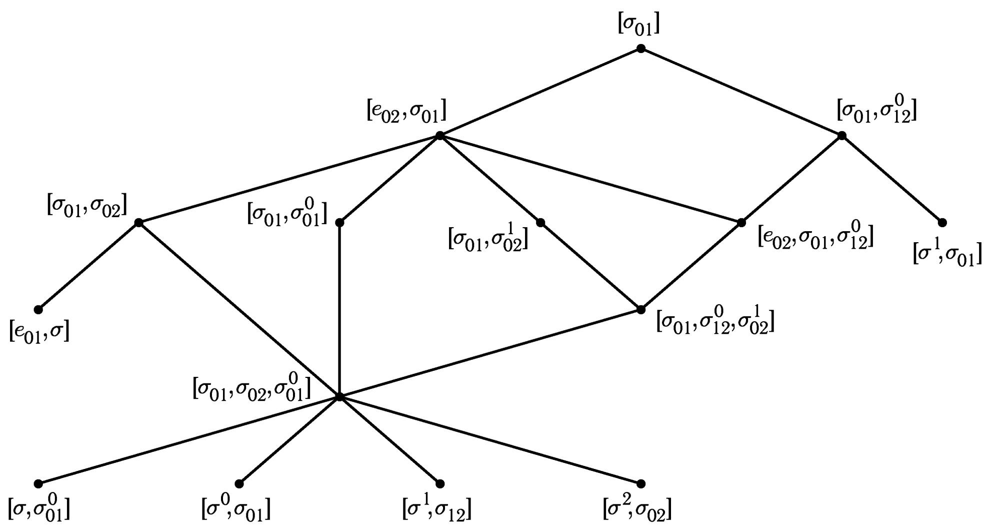

Рис. 4

Так же, как в случае с предикатами σ^1 и σ^2, имеют место эквивалентности

$$\sigma_{02}(x, y) \equiv \sigma_{01}(x+1, y+1), \qquad \sigma_{12}(x, y) \equiv \sigma_{01}(x+2, y+2).$$

Они позволяют получить из списка (8) еще два списка, отвечающие предикатам σ_{02} и σ_{12} (в списках (9) и (10) отсутствуют два множества, каждое из которых содержит все три предиката $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}$). Для предиката σ_{02} имеем список

$$\begin{array}{l}\{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma_{02}\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}, \sigma_{12}^0\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}, \sigma_{01}^1, \sigma_{02}^2\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma_{02}, \sigma_{01}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}, \sigma_{01}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}, \sigma_{01}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2\},\end{array} \tag{9}$$

а для предиката σ_{12} — список

$$\begin{array}{l}\{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{01}^2\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{01}^0, \sigma_{01}^1\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{02}^2\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2\},\\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2, \sigma_{02}^2\}.\end{array} \tag{10}$$

Рассмотрим теперь 2-замкнутые множества, содержащие предикаты $\sigma_{01}^0, \sigma_{01}^1, \sigma_{02}^2$. Список всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ_{01}^0 и не содержащих предикаты $\sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}$, состоит из следующих четырех множеств:

$$\begin{array}{ll}[\sigma_{01}^0] & = \{e_0, e_{01}, e_{02}, \sigma_{01}^0\},\\ [e_1, \sigma_{01}^0] & = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma_{01}^0\},\\ [e_{12}, \sigma_{01}^0] & = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}^0\},\\ [\sigma_{01}^0, \sigma_{12}^0] & = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}^0, \sigma_{12}^0\}.\end{array} \tag{11}$$

На рис. 5 представлена диаграмма включений 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ_{01}^0. Диаграмма оканчивается множествами, содержащими хотя бы один из предикатов $\sigma^0, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}$.

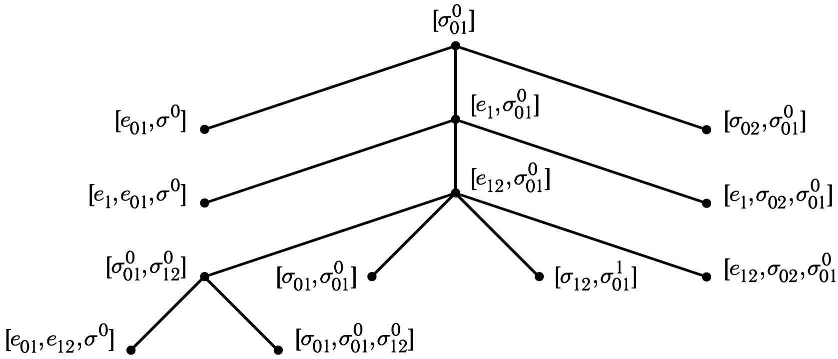

Рис. 5

На основании эквивалентностей

$$\sigma_{01}^1(y, x) \equiv \sigma_{01}^0(x+2, y+2), \qquad \sigma_{02}^2(x, y) \equiv \sigma_{01}^0(x+1, y+1)$$

из списка (11) получаем два аналогичных списка для предикатов σ_{01}^1 и σ_{02}^2:

$$\begin{array}{l} \{e_1, e_{01}, e_{12}, \sigma_{01}^1\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma_{01}^1\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}^1\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}^1, \sigma_{02}^1\} \end{array} \tag{12}$$

и

$$\begin{array}{l} \{e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}^2\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}^2\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{02}^2\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{01}^2, \sigma_{02}^2\}. \end{array} \tag{13}$$

Перейдем, наконец, к 2-замкнутым множествам, содержащим предикаты $\sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2$. Список всех 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ_{12}^0 и не содержащих ни один из предикатов $\sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma_{01}^0, \sigma_{01}^1, \sigma_{02}^2$, состоит из следующих двенадцати множеств:

$$\begin{array}{ll} [\sigma_{12}^0] = \{e_{12}, \sigma_{12}^0\}, & [\sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1] = \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1\}, \\ [e_0, \sigma_{12}^0] = \{e_0, e_{12}, \sigma_{12}^0\}, & [\sigma_{12}^0, \sigma_{01}^2] = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{01}^2\}, \\ [e_1, \sigma_{12}^0] = \{e_1, e_2, e_{12}, \sigma_{12}^0\}, & [e_{01}, e_{02}, \sigma_{12}^0] = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}^0\}, \\ [e_0, e_1, \sigma_{12}^0] = \{e_0, e_1, e_2, e_{12}, \sigma_{12}^0\}, & [e_{01}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1] = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1\}, \\ [e_0, e_{01}, \sigma_{12}^0] = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma_{12}^0\}, & [e_{02}, \sigma_{12}^0, \sigma_{01}^2] = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{01}^2\}, \\ [e_0, e_{02}, \sigma_{12}^0] = \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}^0\}, & [\sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2] = \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma_{12}^0, \sigma_{02}^1, \sigma_{01}^2\}. \end{array} \tag{14}$$

На рис. 6 изображена диаграмма включений 2-замкнутых множеств, содержащих предикат σ_{12}^0. Диаграмма оканчивается множествами, содержащими хотя бы один из предикатов $\sigma^0, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma_{01}^0$.

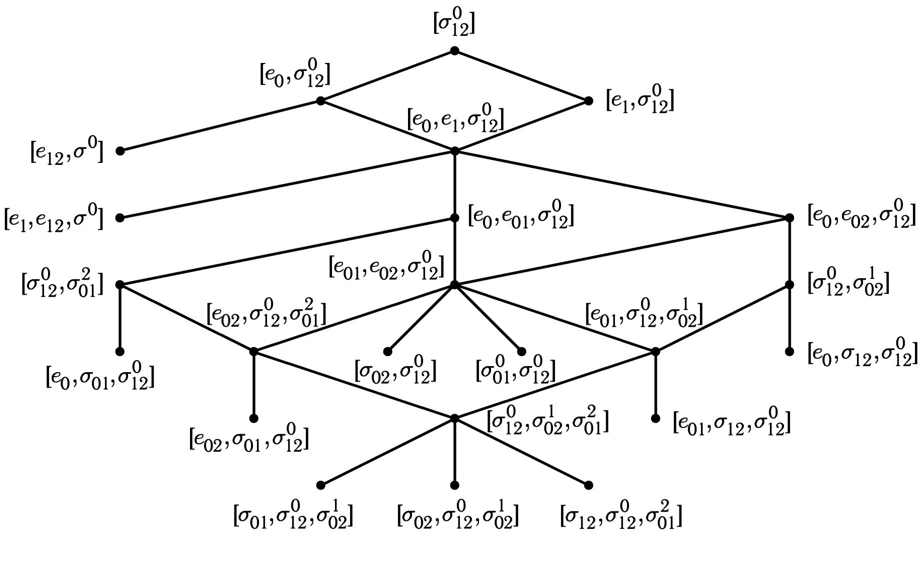

Рис. 6

На основании эквивалентностей

$$\sigma^1_{02}(x, y) \equiv \sigma^0_{12}(x+2, y+2), \qquad \sigma^2_{01}(x, y) \equiv \sigma^0_{12}(x+1, y+1)$$

из списка (14) получаем аналогичные списки для предикатов σ^1_{02} и σ^2_{01}:

$$\begin{array}{l} \{e_{02}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_1, e_{02}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_0, e_2, e_{02}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma^1_{02}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}\} \end{array} \tag{15}$$

(в список (15) не включены 2-замкнутые множества, вошедшие в список (14))

$$\begin{array}{l} \{e_{01}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_2, e_{01}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_0, e_1, e_{01}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}, \sigma^2_{01}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma^2_{01}\} \end{array} \tag{16}$$

(в список (16) не включены 2-замкнутые множества, вошедшие в списки (14) и (15)).

Остается перечислить все 2-замкнутые множества, которые не содержат предикатов σ, σ^0, σ^1, σ^2, σ_{ab}, σ^0_{ab}, σ^1_{ab}, σ^2_{ab}:

$$\begin{array}{c} \{x=y\},\ \{e_0\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_0, e_1\}, \{e_0, e_2\}, \{e_1, e_2\}, \{e_0, e_1, e_2\}, \\ \{e_{01}\},\ \{e_{02}\},\ \{e_{12}\}, \\ \{e_0,e_{01}\}, \{e_1,e_{01}\}, \{e_2,e_{01}\}, \{e_0,e_1,e_{01}\}, \{e_0,e_2,e_{01}\}, \{e_1,e_2,e_{01}\}, \{e_0,e_1,e_2,e_{01}\}, \\ \{e_0,e_{02}\}, \{e_1,e_{02}\}, \{e_2,e_{02}\}, \{e_0,e_1,e_{02}\}, \{e_0,e_2,e_{02}\}, \{e_1,e_2,e_{02}\}, \{e_0,e_1,e_2,e_{02}\}, \\ \{e_0,e_{12}\}, \{e_1,e_{12}\}, \{e_2,e_{12}\}, \{e_0,e_1,e_{12}\}, \{e_0,e_2,e_{12}\}, \{e_1,e_2,e_{12}\}, \{e_0,e_1,e_2,e_{12}\}, \\ \{e_0, e_{01}, e_{02}\},\ \{e_0, e_1, e_{01}, e_{02}\},\ \{e_0, e_2, e_{01}, e_{02}\},\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}\}, \\ \{e_1, e_{01}, e_{12}\},\ \{e_0, e_1, e_{01}, e_{12}\},\ \{e_1, e_2, e_{01}, e_{12}\},\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}\}, \\ \{e_2, e_{02}, e_{12}\},\ \{e_0, e_2, e_{02}, e_{12}\},\ \{e_1, e_2, e_{02}, e_{12}\},\ \{e_0, e_1, e_2, e_{02}, e_{12}\}, \\ \{e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}\}. \end{array} \tag{17}$$

Диаграмма включений 2-замкнутых множеств из списка (17) с принципиальной точки зрения устроена просто. Однако она содержит довольно значительное число множеств и потому мы ее не воспроизводим.

Итогом проведенных построений служит следующая теорема.

Теорема. *Существует ровно* 144 *дискриминаторных класса трехзначной логики. Каждый из них представим в виде* $\mathrm{Pol}(R)$, *где* R — *один из конечных наборов не более чем двуместных предикатов, содержащихся в списках* (4)–(17).

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу строения дискриминаторных классов трехзначной логики. Каждый из этих классов, за исключением класса P_3, представим в виде пересечения замкнутых классов, определяемых (с помощью функтора Pol) одним из предикатов

$$e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{02}, e_{12}, \sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma_{01}, \sigma_{02}, \sigma_{12}, \sigma^0_{01}, \sigma^0_{12}, \sigma^1_{01}, \sigma^1_{02}, \sigma^2_{01}, \sigma^2_{02}.$$

Классы

$$\mathrm{Pol}(e_0),\ \mathrm{Pol}(e_1),\ \mathrm{Pol}(e_2),\ \mathrm{Pol}(e_{01}),\ \mathrm{Pol}(e_{02}),\ \mathrm{Pol}(e_{12})$$

являются предполными в P_3. Класс вида $\mathrm{Pol}(e_a)$ состоит из всех функций, сохраняющих константу a, т. е. из всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют равенству $f(a, \ldots, a) = a$. Аналогично для классов вида $\mathrm{Pol}(e_{ab})$: функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $\mathrm{Pol}(e_{ab})$ тогда и только тогда, когда для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ из $\{a, b\}^n$ выполняется соотношение

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in \{a, b\}.$$

Если $\rho \in \{\sigma, \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2\}$, то предикат ρ представим в виде (1), где $E = E_3$ и

$$\pi \in \{x+1,\ 2x,\ 2x+1,\ 2x+2\}.$$

В этом случае класс $\mathrm{Pol}(\rho)$ состоит из всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, *самодвойственных* относительно перестановки π, т. е. удовлетворяющих тождеству

$$\pi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)).$$

Во всех остальных случаях описание класса $\mathrm{Pol}(\rho)$ становится чуть более сложным. Рассмотрим, к примеру, класс $\mathrm{Pol}(\sigma_{01})$. Нетрудно понять, что произвольная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $\mathrm{Pol}(\sigma_{01})$ сохраняет предикаты $e_0, e_1, e_2, e_{01}, e_{12}$. В частности, ограничение функции f на множество $\{0, 1\}$ является булевой функцией f_{01}, сохраняющей константы 0 и 1. Кроме того, если обозначить через f_{12} ограничение функции f на множество $\{1, 2\}$, то между функциями f_{01} и f_{12} будет существовать следующая связь: если $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$, то

$$f_{12}(a_1+1, \ldots, a_n+1) = f_{01}(a_1, \ldots, a_n) + 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; № 5. — С. 1–9.
2. Марченков С. С. К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 1. — С. 88–99.
3. Марченков С. С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Математич. заметки. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 359–366.

4. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Вып. 34. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1980. — С. 38–73.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
6. Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeitschr. — 1975. — Bd. 143. — S. 165–174.
7. Pixley A. F. The ternary discriminator function in universal algebra // Math. Ann. — 1971. — Bd. 191. — S. 167–180.

Поступило в редакцию 3 XII 2003